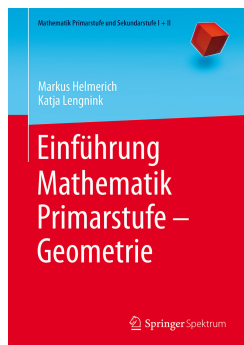


Markus Helmerich und Katja Lengnink: Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie

Rezensiert von Albrecht Beutelspacher



Es ist schwer, ein Geometriebuch zu schreiben. Das hat mindesten zwei Gründe. Zum einen besteht eine merkwürdig große Diskrepanz zwischen der unmittelbaren Erfahrung von realer Geometrie einerseits, etwa dem Anfertigen einer Zeichnung oder der Konstruktion eines Körpers, und der sym-

bolischen Beschreibung andererseits. Für kaum jemand erschließt sich eine geometrische Situation direkt aus ihrer formal-symbolischen Beschreibung.

Der zweite Grund ist die historische Bürde der Axiomatik. Die euklidische Geometrie war und ist das Musterbeispiel einer Theorie, die aus wenigen Axiomen aufgebaut werden kann und zu wunderbaren Sätzen führt. Bei einem solchen Vorgehen, muss man zunächst geraume Zeit an Aussagen arbeiten, deren Beweisbedürftigkeit Anfängern nicht erschließt, bis man endlich zu „interessanten“ Einsichten kommt.

Dieses Buch umgeht diese Schwierigkeiten mit einer großzügigen Geste. Das ist es aber nicht was dieses Buch auszeichnet. Es ist der grundsätzliche Ansatz, der dieses Buch von den allermeisten Mathematikbüchern unterscheidet und einen beherzten Schritt in eine neue Richtung geht.

Es geht um folgendes: Natürlich wissen die Autoren eines Lehrbuches mehr als der typische Leser; der Leser will ja aus dem Buch etwas lernen. Nun sieht ein Autor eines Mathematikbuches das klassisch so, dass er das Material so anordnet, dass weder Lücken entstehen noch Vorgriffe nötig sind und dass alles (logisch) Unnötige weg bleibt. So haben wir es in den Büchern von Euklid bis Hilbert, von van der Waerden und Bourbaki erfahren und schätzen gelernt. Vor uns steht das Bild eines Autors, der Bescheid weiß und uns Lesern zeigt, „wie es geht“. Der Autor kennt nicht nur den Stoff, sondern auch den (!) optimalen Weg zu jedem Satz. Andererseits kümmert sich ein solcher Autor nicht darum, ob wir Leser mitkommen. Er ist in erster Linie der Sache verpflichtet, nicht den Lesern. Leser, die es nicht schaffen, fangen eben nochmal von vorne an.

Nun ist in den letzten Jahren deutlich geworden, dass Lehren und Lernen Beziehungsarbeit ist. Es reicht nicht, den Stoff sauber aufzubereiten und nüchtern darzustellen. Sondern man sollte die Leserinnen und Leser an der Erarbeitung des Stoffs beteiligen. Das reicht von konstruktiven Einstiegen über offene Aufgaben bis zu einem Dialog mit der (heterogenen) Leserschaft. Viele werden einwenden: Das funktioniert bei einem Buch nicht, weil es nicht funktionieren kann. Denn ein Buch ist bekanntlich ein one-way-Medium. Aber dieses Buch beweist: es geht! Und es beweist es auf großartige Art und Weise.

Auf den ersten Blick zeichnet sich das Buch durch außerordentlich kluge Einleitungen in die einzelnen Kapitel, durch (für den naiven Leser unmerkliche) Verknüpfungen mit didaktischen Themen, und durch viele intelligent ausgewählte Bilder aus, die große Einsicht ermöglichen. Überall spürt man die Haltung der Autoren zu den Lesern. An vielen Stellen ist man als Leser aufgefordert, selbst tätig zu werden. Die Autoren kommentieren das wertschätzend und führen die Leser, wo nötig, zuverlässig zu den wichtigen Begriffen und Sätzen.

Ich glaube aber, dass der eigentliche Clou des Buches die Übungsaufgaben und deren Lösungen sind. Zunächst zu den Übungen: Das Buch enthält viele Aufgaben ganz unterschiedlicher Art. Etwas Besonderes sind die Vorstellungübungen, wie sie von Christof Weber eingeführt wurden. Bei diesen wird jede Leserin, jeder Leser sozusagen individuell angesprochen und stimuliert, Vorstellungen zu entwickeln. Das sind nun per definitionem offene Aufgaben, denn welche Vorstellungen irgendjemand entwickelt, ist kaum vorherzusehen.

Nirgendwo kommt das Wort „Lösung“ als Überschrift vor. Aber jede Aufgabe hat eine Fortsetzung, die ebenso frech wie genial ist: Man hat den Eindruck, die Autoren plaudern noch ein bisschen, sie geben einen entspannten Hinweis zu der Aufgabe, man „denkt nichts Böses“ – in Wirklichkeit werden aber mögliche Lösungsvorschläge und -ideen angesprochen, die mir als Leser die selbstverständliche Gewissheit geben, dass ich mit meinen Gedanken auf dem richtigen Weg bin. Kompliment! (Seite 15, 16, 21, 37, 39)

Inhaltlich umfasst das Buch den üblichen Stoff der Geometrie, die Organisation zeichnet sich jedoch durch mindestens zwei Besonderheiten aus:

Zum einen ist der Stoff nach Tätigkeiten organisiert: Vorstellen, Formen erfassen, Muster gestalten, Objekte messen, Realität abbilden und entwerfen. Zum anderen wird der oft vernachlässigte dreidimensionale Raum sehr konsequent behandelt: nicht in einem separaten Kapitel, sondern in jedes der sechs Kapitel integriert. Dabei bieten sich natürlich wieder konstruktive Elemente an: Konstruieren von Körpern, ...

Kurz: es handelt sich um ein Buch, das in hervorragender Weise für die Zielgruppe Primarstufenlehrerinnen und -lehrer geeignet ist, aber einen Einfluss haben wird, der weit darüber hinaus geht. Ich habe es jedenfalls von A bis Z mit Vorfreude auf die jeweils nächste Seite gelesen, Das Buch strahlt eine solche Begeisterung aus, dass man es in einem Zug lesen möchte.

Bei vielen Büchern kann man sich fragen, warum sie veröffentlicht werden bzw. was sie von all ihren Vorgängern unterscheidet. Markus Helmerich und Katja Lengnink ist ein Geometriebuch gelungen, bei dem sich diese Fragen nicht stellen. Es ist etwas wirklich Neues, was in seiner Bedeutung weit über seinen eigenen Stoff hinausgeht. Es wird ein Vorbild für viele zukünftige Bücher sein.

Nun ist dieses Buch ein erstes Buch in diese Richtung, und deswegen kann es nicht vollkommen sein. Die folgenden Punkte sollen daher nicht als Kritik verstanden werden, sondern als Vorschläge für eine Weiterentwicklung dieses Buches.

- Was ich mir als erstes wünsche ist die Fortsetzung des Konzepts der Vorstellungsübungen in den Kapiteln 5 und 6. Dort fallen die Autoren ein Stück weit zurück in einen üblichen Lehrbuchstil. Bestimmt gibt es auch für den dort behandelten Stoff Möglichkeiten für Vorstellungsübungen und den Einsatz von dynamischer Geometrie-Software.
- Zur Symbolsprache. Zum einen kommen an manchen Stellen unvermittelt Konzepte auf, die dann nicht mehr oder jedenfalls lange nicht mehr aufgegriffen werden. So taucht auf S. 28 wie aus dem Nichts \cos und \sin auf, und auf den Seiten 135 und 170 wird von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 in Sätzen gesprochen, die auch entfallen könnten.
- Zudem könnte ich mir – aber das ist vielleicht mein persönlicher Geschmack – eine Abrüstung bei den Bezeichnungen vorstellen; ich empfinde manche Codierung, insbesondere für die intendierte Zielgruppe, zu elaboriert. Zum Beispiel ist die Bezeichnung $D_{M;w(\alpha)}$ für die Drehung mit Mittelpunkt M um den Winkel α sehr formal kodiert. Sie wird an dieser Stelle dann auch nur dazu benutzt, um zu sagen, dass $D_{M;360-w(\alpha)}$ die zugehörige Umkehrabbildung ist (S. 56). Das

hätte man unkodiert unmittelbar verständlicher (und fast genauso kurz) sagen können.

Aus Sicht einer Studentin oder eines Studenten der ersten Semester werden hier kurz die Folterwerkzeuge gezeigt, um dann anschließend so weiterzumachen als ob nichts geschehen wäre.

- Als Mathematikers ist mir nicht an jeder Stelle klar, welche Sätze bewiesen werden, welche Aussagen man einfach akzeptiert und welche Sätze nicht bewiesen werden. Ich weiß allerdings auch, dass dies ein prinzipiell unlösbares Problem ist.
- Und noch etwas würde ich mir wünschen: Mehr explizite Begeisterung für die Mathematik. Ist es nicht großartig, was wir alles mit Zirkel und Lineal konstruieren können? Ist es nicht erstaunlich dass wir den Raum in einer Ebene darstellen können bzw. aus einer ebenen Darstellung ein räumliches Objekt rekonstruieren können. Ist es nicht sensationell, dass wir einer kleinen Figur ansehen können, dass man mit ihr die gesamte unendliche Ebene parkettieren kann? – Und ist es nicht am allerschönsten, dass wir als „normale“ Lehrer(innen) oder Schüler(innen) an diesen grandiosen Errungenschaften menschlicher Kultur teilhaben können?

Ich wiederhole: Das alles ist keine Kritik, sondern eher ein ultimatives Lob. Denn man möchte einfach, dass dieses Buch, das so mutig, so stimmig und so wertschätzend geschrieben ist, dass dieses Buch noch besser wird.

Markus Helmerich und Katja Lengnink: *Einführung Mathematik Primarstufe – Geometrie*. Heidelberg: Springer-Spektrum, 240 S. ISBN 978-3-662-47205-7 (Druck), 978-3-662-47206-4 (eBook). EUR 25,69 (Druck), 19,99 (eBook).

Albrecht Beutelspacher, Universität Gießen
Email: albrecht.beutelspacher@mathematikum.de