gesprochenen Arbeiten aufspüren müssen, schicke ich Ihnen Sonderdrucke zu.

Oben angesprochene Literatur

Griesel, H. (1997). Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 18(4), 259–284.

Griesel, H. (2013a). Elementarmathematik als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit. M. Rathgeb u. a. (Hrsg.), *Mathematik im Prozess* (S. 305–318). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Griesel, H. (2013b). Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen. M. Meyer u. a. (Hrsg.), *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik, Festschrift für Horst Struve* (S. 19–33). Hildesheim: Franzbecker.

Griesel, H. (2015a). Der Größenkalkül als ein Rechnen mit Größenwerten. G. Kaiser u. a. (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Unterricht, Festschrift für Werner Blum* (S. 187–201). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Griesel, H. (2015b). Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich. *GDM-Mitteilungen*, 98, 14–17.

Griesel, H. (2016). Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. *Journal für Mathematikdidaktik* 37(1), 5–30.

Mit freundlichem Gruß
Ihr Heinz Griesel

Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht

Wilfried Lingenberg

Abstract. For educational purposes a new non-standard definition of convergence and limit is proposed and shown to be equivalent to the standard definition: If all subsequences of a real sequence (a_n) have the same standard part then (a_n) is called *convergent* and $\mathrm{st}(a_n)$ the *limit* of (a_n).

Die Nichtstandard-Analysis erfreut sich in jüngerer Zeit zu Recht steigender Beliebtheit. Eine wachsende Zahl von Kollegen macht die Erfahrung, damit den Schülern einen intuitiveren und in vieler Hinsicht einfacheren Zugang zur Differential- und Integralrechnung eröffnen zu können.[1]

Einer der wesentlichsten Vorzüge der Nichtstandard-Analysis besteht darin, dass sie ganz auf den notorisch schwierigen Begriff des Grenzwerts verzichten kann. Bis auf weiteres machen jedoch Lehrpläne und Zentralabitur die Beschäftigung mit dem Konvergenzbegriff unumgänglich. Zwar ist ohne weiteres möglich, dies ganz ans Ende eines Analysiskurses zu verschieben, aber auch dann stellt sich die grundsätzliche Frage: Wie definiert man Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht?

Ein Weg wäre ja, eine der herkömmlichen, auf ε-Umgebungen fußenden Definitionen vorzustellen. Einem überzeugten Nichtstandard-Verfechter mag das gegen den Strich gehen (und die klassische Epsilontik wird von Lehrplänen und Fachdidaktik ohnehin mehr und mehr aufgegeben); doch ließen sich auf dieser Grundlage interessante Vergleiche des Standard- und des Nichtstandard-Zugangs anstellen, vielleicht verbunden mit Ausflügen in die Geschichte der Analysis von Leibniz bis Cauchy.

Stimmiger bleibt die Darstellung aber in jedem Fall, wenn auch Konvergenz und Grenzwert konsequent auf Nichtstandardgrundlage eingeführt werden – was Vergleiche der eben beschriebenen Art vielleicht sogar noch eindrücklicher machen kann.

Wer sich jedoch danach in der Literatur umschaut, findet nur eine Definition, die mir für die Schule ungeeignet erscheinen will: *Die reelle Zahl a ist Grenzwert der Folge (a_n), wenn a_ν für alle infiniten hypernatürlichen ν infinitesimal benachbart zu a*

[1] Vgl. zuletzt das Plädoyer von Baumann und Kirski (2016) in dieser Zeitschrift. Weitere Literaturangaben und reichhaltiges Material bei Baumann, Kirski und Wunderling (2013).

[2] So sinngemäß beispielsweise bei Landers und Rogge (1994, 106 f.). Die praktische Anwendung dieses Kriteriums wird unten anhand des letzten Beispiels einmal durchgespielt.

ist.[2] Oh je. Dass eine Folge $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ hier erst einmal zu einer Folge $^*a_\nu : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ fortgesetzt werden muss, könnte man in der Schule zwar vielleicht noch diskret unter den Tisch fallen lassen, aber die Definition dreht sich auch in gewisser Weise im Kreise: Man benutzt zunächst Folgen, um den Raum $^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen zu definieren (Genaueres dazu gleich), erklärt auf diesem *Raum dann *Funktionen sowie als Spezialfall davon neue *Folgen und verwendet diese schließlich, um Folgen des Typs zu betrachten, von dem man ausgegangen war. Der so naheliegende und wichtige Zusammenhang, dass bei konvergenten Folgen der Standardbegriff ‚Grenzwert' mit dem Nichtstandardbegriff ‚Standardteil' zusammenfällt, wird gar nicht fruchtbar gemacht.

Viel eingängiger ist es, mit der Definition direkt bei den ursprünglichen Folgen anzusetzen. Im folgenden formuliere ich deshalb eine allein auf schultaugliche Konzepte der hyperreellen Zahlen gestützte Definition und zeige dann ihre Gleichwertigkeit mit einer herkömmlichen standardbasierten. Dieser Nachweis arbeitet sozusagen den Kern der Beziehung zwischen Standard- und Nichtstandard-Analysis heraus, denn genau hier wird deutlich, dass es im Ergebnis dasselbe ist, ob beispielsweise die Ableitung über den Standardteil einer hyperreellen finiten Zahl oder über den Grenzwert einer reellen Folge definiert wird.

Zugrunde liegt die übliche Konstruktion der hyperreellen Zahlen: Das System aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, die ein nur endliches Komplement besitzen, bildet einen Filter auf $\mathbb{N}$, der zu einem Ultrafilter $\mathcal{F}$ erweitert wurde (dieser Ultrafilter enthält dann auch Teilmengen mit einem unendlichen Komplement und ist bekanntlich weder eindeutig noch konkret angebbar). Auf der Menge $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ der reellen Folgen ist dann eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch

$$(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Die hyperreellen Zahlen sind die von dieser Relation induzierten Äquivalenzklassen: $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^\mathbb{N}/_\sim$.

Die Verknüpfungen sind gliedweise erklärt, und die Anordnung wird wieder über den Ultrafilter definiert:

$$[(a_n)]_\sim \leq [(b_n)]_\sim :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Beide Definitionen sind unabhängig von der Wahl des Repräsentanten einer Klasse.

Die reellen Zahlen sind über die konstanten Folgen in $^*\mathbb{R}$ eingebettet: $r \in \mathbb{R}$ wird mit $[(r)]_\sim \in {}^*\mathbb{R}$ identifiziert. Eine hyperreelle Zahl, deren Betrag kleiner ist als jede positive reelle Zahl, heißt infinitesimal; ein von Null verschiedenes Beispiel ist $\omega = \left[\left(\frac{1}{n}\right)\right]_\sim$, denn für jedes reelle, positive ε gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$ auf dem Komplement einer endlichen Menge, also auf einer $\mathcal{F}$-Menge. Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind unendlich groß und heißen infinit. Jede finite (also nicht unendlich große) hyperreelle Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Summe einer reellen und einer infinitesimalen Zahl schreiben; die reelle Zahl in dieser Summe wird als der Standardteil der finiten Zahl, abgekürzt ‚st', bezeichnet.

Der in der folgenden Definition gebrauchte Begriff der Teilfolge stammt aus der Standardanalysis: Für eine reelle Folge (a_n) und eine nicht endliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ erhält man eine Teilfolge, indem man die Elemente von $\{a_n \mid n \in M\}$ in der ursprünglichen Reihenfolge belässt und mit den natürlichen Zahlen neu durchnumeriert (eine formalere Definition liefert jedes Analysis-Lehrbuch). Für $M = \mathbb{N}$ ergibt sich: Jede Folge ist auch Teilfolge ihrer selbst.

Nun also die neue

Definition. Wenn alle durch die Teilfolgen einer reellen Folge (a_n) definierten hyperreellen Zahlen finit sind und denselben Standardteil haben, so heißt die Folge (a_n) konvergent *und* $\operatorname{st}([(a_n)]_\sim)$ *der* Grenzwert *von (a_n). Man schreibt dann statt* $\operatorname{st}([(a_n)]_\sim)$ *auch* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$.

Für unterrichtliche Zwecke lässt sich noch wesentlich knapper formulieren: *Wenn alle Teilfolgen einer reellen Folge (a_n) denselben Standardteil haben, so heißt …* $\operatorname{st}(a_n)$ … Da jede Folge eindeutig einer Äquivalenzklasse zugeordnet ist, ist es ja legitim, vom ‚Standardteil einer Folge' zu sprechen; und die Existenz eines Standardteils impliziert bereits Finitheit.

Zu zeigen ist die Äquivalenz dieser Definition mit einer herkömmlichen standardbasierten. Von Bedeutung ist dabei, dass der Beweis nicht etwa von der Wahl des Ultrafilters abhängt, der zur Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ benutzt wurde.

‚$\Leftarrow$': Sei zunächst eine Folge (a_n) im gängigen Sinne konvergent; es gebe also eine reelle Zahl a, so dass für jedes reelle $\varepsilon > 0$ „fast alle" ($:=$ alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der ε-Umgebung um a liegen. Nun sei $(\bar{a}_n)$ eine beliebige Teilfolge von (a_n); aus der Standardanalysis weiß man, dass $(\bar{a}_n)$ ebenfalls gegen a konvergiert. Alle Glieder der Folge $(\bar{a}_n - a)$ sind dann auf dem Komplement einer endlichen Menge natürlicher Zahlen betragsmäßig kleiner als ein beliebig vorgegebenes ε. Da jedes solche Komplement schon in dem Filter liegt, aus dem $\mathcal{F}$ durch Erweiterung gewonnen wurde, gilt für jedes reelle ε und unabhängig vom zugrundegelegten Ultrafilter $\left|[(\bar{a}_n - a)]_\sim\right| < [(\varepsilon)]_\sim$; die hyperreelle Zahl $[(\bar{a}_n - a)]_\sim$ ist also infinitesimal. Wegen $[(\bar{a}_n)]_\sim = [(a)]_\sim + [(\bar{a}_n - a)]_\sim$ ist $[(\bar{a}_n)]_\sim$ finit und besitzt den Standardteil $[(a)]_\sim$.

‚$\Rightarrow$': Sei nun (a_n) konvergent im Sinne der obigen Definition und ein reelles $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Man setzt $a = \mathrm{st}\,([(a_n)]_\sim)$. Wenn es eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ gäbe, auf der alle Folgenglieder außerhalb der ε-Umgebung um a lägen, würde durch diese Teilmenge eine Teilfolge $(\bar{a}_n)$ von (a_n) definiert, die sich in jedem Folgenglied um mindestens ε von a unterschiede:

$$\left|(\bar{a}_n - a)\right| \geq \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Andererseits hätte $[(\bar{a}_n)]_\sim$ nach Voraussetzung den Standardteil a; die Differenz von $[(\bar{a}_n)]_\sim$ und $[(a)]_\sim$ wäre infinitesimal und damit kleiner als jede reelle Zahl, insbesondere ε:

$$\left|\,[(\bar{a}_n)]_\sim - [(a)]_\sim\,\right| = \left|\,[(\bar{a}_n - a)]_\sim\,\right| < [(\varepsilon)]_\sim \text{ , also}$$

$$\left|(\bar{a}_n - a)\right| < \varepsilon \text{ auf einer } \mathcal{F}\text{-Menge.} \qquad (**)$$

Da kein Filter oder Ultrafilter die leere Menge enthält, stehen $(*)$ und $(**)$ im Widerspruch zueinander. Es können also nur endlich viele Folgenglieder von (a_n) außerhalb der ε-Umgebung um a liegen. □

Beispiele

a) Für jede Teilfolge $(\bar{a}_n)$ von $\left(\frac{1}{n}\right)$ und alle n gilt $0 < \bar{a}_n \leq \frac{1}{n}$. Mit $\left[\left(\frac{1}{n}\right)\right]_\sim$ (siehe oben dazu) ist dann erst recht $\left[(\bar{a}_n)\right]_\sim$ eine infinitesimale Zahl. Infinitesimale Zahlen haben den Standardteil 0; $\left(\frac{1}{n}\right)$ ist also konvergent mit Grenzwert 0. Die gleiche Überlegung gilt für die höheren Potenzen $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ usw.

b) Die Folge $(0;1;0;2;0;3;\ldots)$ ist nicht konvergent: Auf den ungeraden Platznummern ergibt sich die Teilfolge $(0;0;0;\ldots)$, also die hyperreelle Null (finit, Standardteil 0), auf den geraden $(1;2;3;\ldots)$, also die hyperreelle Zahl Ω (infinit, kein Standardteil).

Welche hyperreelle Zahl im Übrigen durch die Folge selbst definiert wird, hängt vom zugrundegelegten Ultrafilter ab. Dieser enthält entweder die Menge der geraden oder die der ungeraden Zahlen; sind die geraden enthalten, so beschreibt die Folge die infinite Zahl $\frac{\Omega}{2}$ und hat keinen Standardteil, enthält der Ultrafilter die Menge der ungeraden Zahlen, so ist sie äquivalent zu (0) und hat den Standardteil 0. Die zweite Möglichkeit zeigt, dass nicht etwa jede eine finite Zahl definierende Folge schon konvergent ist.

c) Eine Folge wie $\left(1;2;1;\frac{3}{2};1;\frac{4}{3};1;\frac{5}{4};\ldots\right)$ zeigt, dass die Teilfolgen einer konvergenten Folge nur denselben Standardteil haben, nicht aber dieselbe finite Zahl beschreiben müssen. Offensichtlich wird schon in dieser Folge selbst jeder beliebig kleine Abstand zur Eins nur von endlich vielen Folgengliedern erreicht oder übertroffen, und das gilt erst recht für jede Teilfolge; jede Teilfolge hat also den Standardteil 1. Auf den ungeraden Platznummern entsteht jedoch die Folge $(1;1;1;\ldots)$, also die hyperreelle Eins, auf den geraden $\left(\frac{2}{1};\frac{3}{2};\frac{4}{3};\ldots\right)$, also die hyperreelle Zahl $\frac{\Omega+1}{\Omega} = 1 + \frac{1}{\Omega} = 1 + \omega$.

d) Eine Folge der Art $\left(\frac{3n^3+2n^2+1}{4n^3+n}\right)$ wird gemäß der in $^*\mathbb{R}$ gegebenen gliedweisen Verrechnung zu $\frac{(3n^3)+(2n^2)+(1)}{(4n^3)+(n)}$ umgeformt. ‚Übersetzt' man konstante Folgen in reelle Zahlen und bezeichnet (n) wieder mit Ω, so lässt sich der Bruch als $\frac{3\Omega^3+2\Omega^2+1}{4\Omega^3+\Omega}$ schreiben. Einem Quotienten aus infiniten Zahlen sieht man noch nicht unmittelbar an, ob er einen finiten Wert und damit einen Standardteil besitzt, aber Erweitern mit $\frac{1}{\Omega^3} = \omega^3$ ergibt $\frac{3+2\omega+\omega^3}{4+\omega^2}$, und dieser Bruch hat den Standardteil $\frac{3}{4}$ (die Bildung des Standardteils ist mit den Grundrechenarten vertauschbar). Die Betrachtung der Teilfolgen erübrigt sich aufgrund von Beispiel a): In einer Teilfolge wäre lediglich ω durch eine kleinere oder jedenfalls nicht größere positive infinitesimale Zahl ersetzt.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Grenzwertsätze im nichtstandardbasierten Unterricht nicht gebraucht werden, denn die erforderlichen Umformungsmöglichkeiten sind bereits durch die Konstruktion der hyperreellen Zahlen und die darin definierten Rechenarten gegeben – und zwar voraussetzungsfrei; die Grenzwertsätze sind ja bekanntlich erst anwendbar, wenn die Konvergenz aller Einzelfolgen sichergestellt ist.

e) Zum Schluss noch ein etwas struppigeres Beispiel. In der Folge (a_n) sei nach $a_1 = 3$ das n-te Glied durch die $(n-1)$-te Nachkommastelle von π gegeben: $(a_n) = (3;1;4;1;5;9;\ldots)$. Da π nicht periodisch ist, gibt es mindestens zwei unterschiedliche Ziffern i und j, die unendlich oft vorkommen. Durch $M_i = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = i\}$ und $M_j = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = j\}$ werden zwei Teilfolgen definiert, nämlich die konstanten Folgen (i) und (j) mit den (unterschiedlichen) Standardteilen i und j. Die Folge ist also nicht konvergent.

Wollte man den Nachweis hier zur Abwechselung auch noch einmal über das oben aus der Literatur zitierte Kriterium führen, wären noch weitere Gedankenschritte notwendig: M_i und M_j müssten durch aufsteigende Durchnumerierung ihrer Elemente ihrerseits als Folgen aufgefasst werden, die zwei hypernatürliche Zahlen μ_i und μ_j definieren. Dann wäre $a_{\mu_i} = (i)$ und $a_{\mu_j} = (j)$, also a_{μ_i} nicht infinitesimal benachbart zu a_{μ_j}.

In diesem Fall entspricht das Einsetzen einer infiniten hypernatürlichen Zahl in die Folge (genauer: in deren hyperreelle Fortsetzung) der Bildung einer Teilfolge. Allerdings können hypernatürliche Einsetzungen auch in Umordnungen oder mehrfachem Auftreten von Folgengliedern resultieren; das Literaturkriterium für Konvergenz verlangt also mehr als die hier vorgestellte Definition. Ein kleiner Stolperstein liegt zudem darin, dass das Einsetzen nicht mit jedem Repräsentanten einer Äquivalenzklasse praktisch durchführbar ist: So ist $(1; 2; \sqrt{10}; 4; 5; \ldots)$ ein gültiger Repräsentant der hypernatürlichen Zahl Ω, taugt aber nicht dazu, a_Ω konkret zu bestimmen, da ein $\sqrt{10}$-tes Glied der Folge (a_n) nicht definiert ist.

Schluss

Abgesehen vom Entfall der Grenzwertsätze erbringt der Nichtstandard-Ansatz bei Konvergenz und Grenzwert, anders als bei Ableitung und Integral, vielleicht keine wesentlichen Vereinfachungen für den Unterricht, und an der Überflüssigkeit des Grenzwertbegriffs in diesem Zusammenhang kann er schon gar nichts ändern, im Gegenteil: in der Formulierung „Statt $\mathrm{st}(a_n)$ schreiben wir dann auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$" tritt diese ja glasklar zutage. Mir ging es aber darum, zu zeigen, dass auch ein konsequent nichtstandardbasierter Unterricht den gegenwärtig gegebenen Erfordernissen von Lehrplänen und Zentralabitur uneingeschränkt gerecht werden kann.[3]

Literatur

Baumann, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der GDM*, (100), 6–16.

Baumann, P., Kirski, T. & Wunderling, H. (2013). Nichtstandard Analysis für die Schule. www.nichtstandard.de. Zuletzt aufgerufen am 16. 8. 2018.

Landers, D. & Rogge, L. (1994). *Nichtstandard Analysis*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.

Wilfried Lingenberg, Pirmasens
Email: w.lingenberg@mx.uni-saarland.de

Rechnen durch Handeln – 16 fachdidaktische Videos

Klaus Rödler

Rechenprobleme einzelner Kinder scheinen zum Mathematikunterricht zu gehören, wie der graue Winterhimmel zu Deutschland. Beobachtbare Symptome dafür, sind unter anderem Schwierigkeiten bei der Ablösung vom zählenden Rechnen, bei der Subtraktion und bei Sachaufgaben. Verfestigungen des zählenden Rechnens werden diagnostiziert (Lorenz, 1998) sowie fehlende Kompetenz im ableitenden Denken (Gaidoschik, 2017) „Warum bleiben Kinder in der Sackgasse des zählenden Rechnens hängen?", fragen Weisshaupt und Reuker (2009, S. 72) und diagnostizieren vor allem mangelhafte Zahlkonzepte: „Übereinstimmend mit Gerster/Schultz (2000), Fritz/Ricken (2008) und Gaidoschik (2003) werden vor allem Schwierigkeiten in der Entwicklung des Anzahlverständnisses und des Teile-Ganzes-Verständnisses als Gründe für das Verharren in ineffektiven, fehlerhaften Strategien betrachtet" (ebd.).

So unstrittig die Symptome zu sein scheinen, so unklar bleibt, wie genau auf diese Realität reagiert werden sollte. Die neue Leitlinie der DGKJP beschreibt das Problem, indem sie von einer behandlungswürdigen Rechenstörung des Kindes ausgeht. Worum es mir geht, ist eher Meyerhöfers Frage, welcher Art Unterricht präventiv wirkt, indem er bei allen Beteiligten das Bewusstsein für die *„stofflichen Hürden"* (Meyerhöfer, 2011) weckt, die es zu nehmen gilt, und indem er Handlungsalternativen an die Hand gibt, die diese stofflichen Hürden auch für unkonzentrierte Kinder, Kinder mit kognitiven Problemen, mit Problemen im Arbeitsverhalten und dergleichen bewältigbar macht. Wie Meyerhöfer bin ich der Meinung, dass ein Unterricht, der unterstellt, dass dies für ein bestimmtes Kind nicht zu leisten ist, diesem Kind eigentlich nicht zugemutet werden kann. Dabei stellen sich didaktisch Fragen wie die folgenden:

[3] Für hilfreiche Anmerkungen zum Manuskript dieses Beitrags danke ich herzlich Thomas Bedürftig und Peter Baumann.