so mehr als die hier vorgestellte Definition. Ein kleiner Stolperstein liegt zudem darin, dass das Einsetzen nicht mit jedem Repräsentanten einer Äquivalenzklasse praktisch durchführbar ist: So ist $(1; 2; \sqrt{10}; 4; 5; \ldots)$ ein gültiger Repräsentant der hypernatürlichen Zahl Ω, taugt aber nicht dazu, a_Ω konkret zu bestimmen, da ein $\sqrt{10}$-tes Glied der Folge (a_n) nicht definiert ist.

Schluss

Abgesehen vom Entfall der Grenzwertsätze erbringt der Nichtstandard-Ansatz bei Konvergenz und Grenzwert, anders als bei Ableitung und Integral, vielleicht keine wesentlichen Vereinfachungen für den Unterricht, und an der Überflüssigkeit des Grenzwertbegriffs in diesem Zusammenhang kann er schon gar nichts ändern, im Gegenteil: in der Formulierung „Statt $\mathrm{st}(a_n)$ schreiben wir dann auch $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$“ tritt diese ja glasklar zutage. Mir ging es aber darum, zu zeigen, dass auch ein konsequent nichtstandardbasierter Unterricht den gegenwärtig gegebenen Erfordernissen von Lehrplänen und Zentralabitur uneingeschränkt gerecht werden kann.[3]

Literatur

Baumann, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der GDM*, (100), 6–16.

Baumann, P., Kirski, T. & Wunderling, H. (2013). Nichtstandard Analysis für die Schule. www.nichtstandard.de. Zuletzt aufgerufen am 16. 8. 2018.

Landers, D. & Rogge, L. (1994). *Nichtstandard Analysis*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.

Wilfried Lingenberg, Pirmasens
Email: w.lingenberg@mx.uni-saarland.de

Rechnen durch Handeln – 16 fachdidaktische Videos

Klaus Rödler

Rechenprobleme einzelner Kinder scheinen zum Mathematikunterricht zu gehören, wie der graue Winterhimmel zu Deutschland. Beobachtbare Symptome dafür, sind unter anderem Schwierigkeiten bei der Ablösung vom zählenden Rechnen, bei der Subtraktion und bei Sachaufgaben. Verfestigungen des zählenden Rechnens werden diagnostiziert (Lorenz, 1998) sowie fehlende Kompetenz im ableitenden Denken (Gaidoschik, 2017) „Warum bleiben Kinder in der Sackgasse des zählenden Rechnens hängen?“, fragen Weisshaupt und Reuker (2009, S. 72) und diagnostizieren vor allem mangelhafte Zahlkonzepte: „Übereinstimmend mit Gerster/Schultz (2000), Fritz/Ricken (2008) und Gaidoschik (2003) werden vor allem Schwierigkeiten in der Entwicklung des Anzahlverständnisses und des Teile-Ganzes-Verständnisses als Gründe für das Verharren in ineffektiven, fehlerhaften Strategien betrachtet“ (ebd.).

So unstrittig die Symptome zu sein scheinen, so unklar bleibt, wie genau auf diese Realität reagiert werden sollte. Die neue Leitlinie der DGKJP beschreibt das Problem, indem sie von einer behandlungswürdigen Rechenstörung des Kindes ausgeht. Worum es mir geht, ist eher Meyerhöfers Frage, welcher Art Unterricht präventiv wirkt, indem er bei allen Beteiligten das Bewusstsein für die „*stofflichen Hürden*“ (Meyerhöfer, 2011) weckt, die es zu nehmen gilt, und indem er Handlungsalternativen an die Hand gibt, die diese stofflichen Hürden auch für unkonzentrierte Kinder, Kinder mit kognitiven Problemen, mit Problemen im Arbeitsverhalten und dergleichen bewältigbar macht. Wie Meyerhöfer bin ich der Meinung, dass ein Unterricht, der unterstellt, dass dies für ein bestimmtes Kind nicht zu leisten ist, diesem Kind eigentlich nicht zugemutet werden kann. Dabei stellen sich didaktisch Fragen wie die folgenden:

[3] Für hilfreiche Anmerkungen zum Manuskript dieses Beitrags danke ich herzlich Thomas Bedürftig und Peter Baumann.

Wenn die Ablösung vom zählenden Rechnen auf dem Teil-Ganzes-Prinzip beruht, also auf dem Verständnis von Zahlbausteinen und deren Beziehung, wie kommt ein Kind zu derartigen, solchermaßen strukturierten Zahlen? - Durch Fingerbilder? Durch Rechenhandlungen? Durch die Strukturierung des Zahlenstrahls?

Wie entstehen strukturierte Rechenvorgänge? – Automatisch, wenn die Zahlen strukturiert sind? Mit ‚schönen Päckchen'? Durch Schritte am Zahlenstrahl? Oder Rechenstrich? Oder durch Rechenhandlungen? Wenn ja, welcher Art?

Wie kommen Kinder zu einem Verständnis des Stellenwertsystems? – Durch die Analogie von Zehner und Einer? Durch das Verständnis vom ‚reversiblen Zehner'? Durch die Übersetzung der Zahlen an der Stellenwerttafel? Oder auch hier durch Rechenhandlungen?

Welche Rolle spielt die Art der Rechenhandlung? Und welche Rolle spielen Eigenproduktionen, halbschriftliche Notationen und schriftliche Rechenverfahren?

Die 16 Videos, auf die hier hingewiesen wird, geben in diesem Feld pointierte Antworten und zeigen an mehreren Stellen deutliche Alternativen zu den vertrauten Lehrgängen auf. Dabei richten sie sich an alle, die mit dem Problem vertraut sind: An Grundschul- und Förderschullehrkräfte, an Studierende mit dieser Berufsperspektive und Referendare mit Schwerpunkt Mathematik sowie auch an interessierte Eltern. Die Hochschulausbildung können sie aufgrund der unmittelbaren Verbindung von theoretischen Annahmen und praktischer Umsetzung bereichern. Daneben sind sie auch als Beitrag zur Fortentwicklung der Fachdidaktik im Grundschulbereich zu verstehen und können in Seminaren als Diskussionsanlass genutzt werden.

Die 16 Videos lassen sich in drei Gruppen einteilen: *Grundlagen des Konzepts*, *typische Probleme* sowie *präventiver Unterricht und fördernde Maßnahmen.*

1 Videos zu den Grundlagen des Konzepts

In Video 1 und 2 werden die Grundlagen des Konzepts *Rechnen-durch Handeln* dargestellt (Abbildung 1). Es wird erläutert, wo die Idee herkam, den fachdidaktischen Lehrgang an der Kulturgeschichte der Zahl neu auszurichten und damit geht es insbesondere darum, die Frage ‚Was ist eigentlich eine Zahl¿ unter diesem Blickwinkel neu zu beantworten. Indem die konkreten Zahlen der Steinzeit, aber auch die der Sumerer, unseren vertrauten Zahlworten und Zahlzeichen gleichwertig zur Seite gestellt werden, wird deutlich, dass ‚die Zahl' letztlich ein Gedankenkonstrukt ist, das auf der Oberfläche der Kommunikation unterschiedliche Formen annehmen kann.

Die *innere Zahl*, die sich auf der Oberfläche der Gegenstände, Worte und Zeichen mitteilt, gilt es in den Blick zu nehmen und zu entwickeln. Es ergibt keinen Sinn auf der Oberfläche abstrakt zu werden, wenn das dafür notwendige Abstraktionsniveau im Innern noch nicht erreicht ist. Die intuitiven, an den inneren Konzepten orientierten, Modelle dominieren dann weiterhin das Denken, so dass zwischen dem, was wir im Unterricht zu behandeln meinen und dem, was das Kind in seinem Inneren damit macht, eine Lücke klafft.

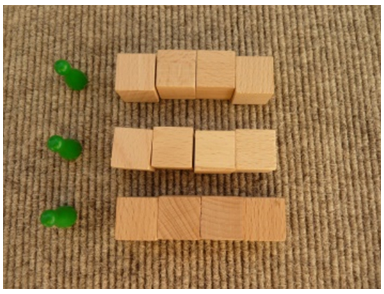
Indem bei *Rechnen-durch-Handeln* der Unterricht durch Handlungsprozesse mit *konkreten* (vergegenständlichten) *Zahlen* ergänzt wird, rechnen die Kinder so, wie es alle Kulturen bis ins späte Mittelalter und teilweise bis ins 20. Jahrhundert hinein, getan haben. Dies erlaubt es den Kindern, an den im Abstraktionsniveau wechselnden Handlungsprozessen ihr eigenes Zahlkonzept in Richtung abstrakte Vorstellung allmählich zu entwickeln (Rödler, 1998, 2006, 2016a).

2 Videos zu typischen Rechenproblemen

Zwei andere Videos versuchen, die Sichtweise von Rechenanfängern und rechenschwachen Kindern auf Zahlen nachvollziehbar zu machen. In Video 3 (Warum mein Kind mit den Fingern rechnet) und Video 10 (Was ist so schwer am Zehnerübergang?) wird dargestellt, warum ein Kind, das Zahlen vor allem in der Zahlwortreihe kennt, zählend rechnet und warum es im mehrstelligen Zahlenraum mit den Ziffern als Zahlen rechnet und Zehnerübergänge zu vermeiden versucht. Durch einen einfachen Trick, die Verwandlung der Zahlen und Ziffern in Buchstaben, werden die Probleme von Rechenanfängern und zählenden Rechnern hier sichtbar gemacht. Mit der Besonderheit der deutschen Zahlwörter bis 20 wird deutlich gemacht, warum die Thematisierung des Zehnerübergangs besser gelingt, wenn der zweistellige Zahlenraum – zumindest zählend – vollständig bekannt ist.

3 Videos zu präventivem Unterricht und fördernden Maßnahmen

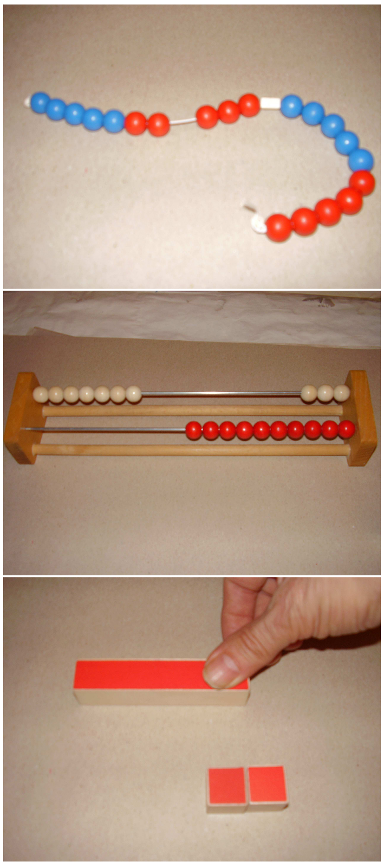
Alle anderen Videos behandeln Einzelaspekte, mit denen vom zählenden und am ziffernorientierten Rechnen fort- und zu einem an kardinalen Grundlagen interessierten und Strukturen nutzenden Rechnen hingeführt werden kann. Dabei werden an mehreren Stellen Vorschläge unterbreitet, die herkömmliche Grundkonzepte infrage stellen. Ein Punkt, der die wissenschaftliche Diskussion in diesem Bereich inhaltlich bereichert.



Das beginnt mit Video 5 (Durch Rechnen die Zahlen verstehen. – Wie wirken die vier Grundrechenarten?), in dem dargestellt wird, dass es sinnvoll ist, die vertraute Reihenfolge, mit der die vier Grundrechenarten in der Schule eingeführt werden, grundlegend zu verändern. Da es im Anfangsunterricht zunächst um die Entwicklung vom Denken in *kardinalen Zahlbausteinen* geht, welche die Grundlage für ein Denken im *Teile-Ganzes-Prinzip* (Gerster & Schulz, 2004) und damit die Ablösung vom zählenden Rechnen darstellen, wird die Subtraktion der Addition vorangestellt, und Multiplikation und Division werden als Einstieg ins handelnde Rechnen benutzt. Diese drei Operationen machen Zahlbausteine operative Zusammenhänge deutlich besser sichtbar als die Addition, die zu zählendem Rechnen verführt (siehe Abbildung 2). Der Einstieg über Multiplikation und Division wird auch mit dem inklusiven Anspruch des Lehrgangs begründet, denn: *Was keiner kann, ist inklusiv!* Aufgaben wie $3 \cdot 4 =$ oder $12 : 3 =$ zwingen alle Kinder zum handelnden Lösen und sorgen von Anfang an für „*Kooperation am gemeinsamen Gegenstand*“ (Feuser, 2013).

Die Subtraktion hat gegenüber der Addition den Vorteil, dass durch das Wegschieben des Subtrahenden der Minuend zerlegt wird, was nicht nur den Blick auf Zahlbausteine lenkt, sondern zugleich den Zerlegungsaspekt markant ins Spiel bringt und den operativen Zusammenhang von Addition und Subtraktion als Gegenoperationen zeigt. Das bereitet einer Einführung der Addition den Weg, die zu diesem späten Zeitpunkt weniger zum zählenden Rechnen verführt und auf der Grundlage eines sich allmählich aufbauenden Zerlegungswissens erkannt und gelöst werden kann.

Zu diesem Video gehört unmittelbar Video 4, in dem der Frage ‚Was ist eigentlich ein gutes Rechenmittel¿ für den Einstieg ins Rechnen nachgegangen wird. Es bedarf nämlich eines homogenen, frei hantierbaren Materials (Naturholzwürfel), um die beschriebenen Effekte zu erzielen und mit der Multiplikation einsteigen zu können. Video 8 zeigt, wie das notwendige Zerlegungswissen mit dem Rechnen in Verbindung gebracht und in diesem Zusammenhang gefestigt wird.



Ein zweiter wesentlicher Unterschied des hier vorgeschlagenen Lehrganges ist das Hinausschieben des Zehnerübergangs in das Ende der ersten Klasse und vor allem ins zweite Schuljahr. Dies geschieht hauptsächlich dadurch, dass der Zahlenraum bis 20 zunächst nicht auf Zehnerbasis, sondern auf der Basis von *konkreten Fünfern* geöffnet und bearbeitet wird (Video 11). Das macht möglich, dass die Zehner-Einer-Gliederung der Zahlen im zweiten Zehner, durch für alle Kinder verständliche Rechenhandlungen kennengelernt wird. Gleichzeitig sorgen die Fünferstangen, anders als Rechenmittel wie Perlenkette, Rechenrahmen oder Rechenschiffchen dafür, dass bei der Subtraktion im ganz kleinen Zahlenraum bis 5 ein Entbündelungsproblem entsteht, also das Denken und Rechnen in Schritten vorbereitet wird (siehe Abbildung 3).

Die in Video 13 gezeigte Einführung in den Zehnerübergang greift das auf. Wieder wird mit der Subtraktion begonnen, weil bei dieser – anders als bei der Addition – die Zehnergrenze materiell gegeben, also unausweichlich ist. Zumindest dann, wenn man mit *konkreten Bündelungen* rechnet, also mit Zehnerstangen und nicht mit abzählbaren Rechenmitteln. Bei der Subtraktion erfahren die Kinder die Zehnergrenze und durch das virtuelle Entbündeln, das an der Fünferstange kennengelernt wurde, das Rechnen in Schritten.

An dieser Stelle zeigt sich die fachdidaktische Bedeutung, die das Konzept der *Zahlen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau* (siehe auch: Rödler, 2011) für den Lehr-/Lernprozess hat. Es erlaubt Rechenmittel in neuer Weise zu beurteilen und einzuordnen. Zumindest dann, wenn man der These folgt, dass das Abstraktionsniveau des Rechenmittels einen Einfluss auf die Rechenhandlungen und die Denkbewegungen des handelnd Rechnenden hat.

Die Videos 12 und 14 zeigen, wie diese Konzeption der *gestuften Rechenmittel* beim Aufbau des Zahlenraumes bis 100 und beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen genutzt werden kann und wie es hierdurch möglich wird, diesen Prozess ohne (!) äußere Differenzierung für alle Kinder einer inklusiven Klasse profitabel zu realisieren. Insbesondere wird gezeigt, wie die Logik des Zehnerübergangs nun im Hunderterraum aufgebaut werden kann und zu greifen beginnt.

Dieses handelnde Begreifen wird in Video 15 als Ausgangspunkt für die Entwicklung von unterschiedlichen Notationen genommen. Notationen, nicht im Sinne von ‚Verfahren', sondern als verschriftlichte Rechenhandlungen, sodass das möglich wird, was als „gestütztes Kopfrechnen" (Schipper et al., 1999) beschrieben werden kann.

Zu diesen Videos, die sich um den Kern des Aufbaus von strukturiertem Rechnen unter Beachtung von Teile-Ganzes-Prinzip, Zehner-Einer-Gliederung und Zehnerübergang drehen, gibt es weitere, welche einerseits der Festigung von Grundlagen und andererseits der Vertiefung des Denkens in Wertebenen dienen:

Video 7 zeigt, wie Zahlen als Zahlbausteine an Gebäuden aus Würfeln kennengelernt und an diesen Termen als mit speziellen Zeichen verschriftliche Sprache entstehen, so dass Terme ebenso als Beschreibung eines Gebäudes dienen können wie auch als Bauanleitung (Abbildung 4). Ein Thema, das sich Anfang des 1. Schuljahres unmittelbar mit der frühen Behandlung der Multiplikation verbindet und als Anwendung der neu gelernten Operation verstanden werden kann.

Video 9 erläutert, warum es Sinn macht – anders als in Schulbüchern und Lehrgängen üblich – schon ab der ersten Klasse mit *gemischten Größen* zu rechnen, also die Einheiten bei Rechnungen oder Fragestellungen nicht getrennt zu verwenden. Die Notwendigkeit, den Zusammenhang von größerer und kleinerer Einheit zu beachten, zwingt zum Denken in Werten und Wertebenen. Werden dabei Größen mit dezimalem Aufbau verwendet, können diese als Modelle für Zehner, Hunderter und Tausender wirken: Eine Aufgabe wie 5,2 cm – 4 mm= __ lässt sich beispielsweise durch die Zerlegung in die beiden Einheiten im Zahlenraum bis 10 lösen, bereitet aber zugleich den zweistelligen vor, weil sie zu der Aufgabe $52 - 4 =$ strukturgleich ist.

Auch Video 16 (*Gemischte Päckchen nach Zehnerübergängen filtern, Abbildung 5*) bietet eine Alternative zu vertrauten Wegen. Zunächst wird erläutert, warum der übliche Einstieg in den zweistelligen Zahlenraum über Analogieaufgaben im 1. wie im 2. Schuljahr für rechenschwache Schüler deshalb kontraproduktiv ist, weil diese es erlauben, ohne Beachtung des Zehner-Einer-Zusammenhangs alleine mit Konzepten wie ‚vorne und hinten' zu richtigen Lösungen zu kommen, also falsche Vorstellungen durch richtige Lösungen festigen. Dann wird gezeigt, wie Rechenpäckchen, bei denen Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang gemischt sind, helfen, den Blick der Rechnenden auf die Zehnergrenze zu lenken und nach der Ursache für diesen am Ergebnis sichtbaren Unterschied zu forschen. Ist das klar, besteht fortan die erste Aufgabe bei diesen Päckchen im *Filtern*, das heißt im Aussondern der Aufgaben mit Zehnerübergang. Die Analogieaufgaben erscheinen unter diesem Blick ganz automatisch als die ‚leichten' Aufgaben, was nun aber unproblematisch ist, weil die Bedeutung des Zehners beim vorangegangenen Filtern ja im Spiel geblieben ist.

Die insgesamt 16 Videos richten sich vorrangig an interessierte Lehrkräfte, die, weil sie in ihrem Unterricht vor Problemen stehen, nach Rat und Alternativen suchen. Sie suchen nach Alternativen, weil ihr Unterricht sie – warum auch immer – in eine Sackgasse geführt hat. Ihnen können die Videos neue Wege aufzeigen.

Gleichzeitig ermöglichen hier vertretene Grundsätze wie *Subtraktion vor Addition, keine Einführung neuer Zahlenräume über Analogieaufgaben* oder *Verwendung von Bündelungselementen bei der Thematisierung von Zehnerübergängen*, es der fachdidaktischen Community bestehende Theorien und Konzepte unter diesem Blickwinkel neu zu diskutieren.

4 Literatur:

Feuser, G. (2013). Kooperation am gemeinsamen Gegenstand. In G. Feuser & J. Kutscher (Hrsg.), Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik, (Bd.7) (S. 282–293) Stuttgart: Kohlhammer.

Gaidoschik, M., Felmann, A., Guggenbichler, S., & Thomas, A. (2017). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(1), 93–124.

Gerster, H-D., & Schulz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Verfügbar unter: http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf (Abruf am 2. 12. 2018).

Lorenz, J-H. (1998). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen: Hogrefe.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau*, 65(4), 401–426.

Rödler, K. (1998). Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen – Eine sozialkundliche Einführung in mathematisches Denken. *Grundschule*, *30*(5), 45–48.

Rödler, K. (2006). Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln. Seelze: Kallmeyer.

Rödler, K. (2010). Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten. *Sache-Wort-Zahl*, *36*(114), 44–48.

Rödler, K. (2011). Zahlen und Rechenvorgänge auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus. In M. Helmerich & K. Lengnink et al. (Hrsg.) ‚Mathematik verstehen' (S. 131–145). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Rödler, K. (2012). Frühe Alternativen zum Zählen. *Sache-Wort-Zahl*, *40*(129), 9–16.

Rödler, K. (2016a). Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./2. Klasse, Hamburg: aol Verlag.

Rödler, K.(2016b). Ein Mathematikunterricht für alle! – 10 Bausteine für einen inklusiven MU. *Behinderte Menschen*, *38*.

Radatz, H., & Schipper, W. et al. (1999). Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schuljahr, Hannover: Schroedel.

Von Aster, M., & Lorenz J.-H. (Hrsg.) (2005). Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Weißhaupt, S., & Peuckert, S. Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.) Handbuch Rechenschwäche (S. 52-76). Weinheim: Beltz Verlag.

Klaus Rödler
E-Mail: klaus.roedler@onlinehome.de

Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells

Hans-Dieter Sill

Eine Möglichkeit zum Modellieren des Lernens von Mathematik ist das konstruktivistische Lernmodell. Es lässt sich skizzenhaft durch folgende Merkmale beschreiben (s. z. B. : Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin. Cornelsen Scriptor).

- Lernen ist eine aktive, autonome Konstruktion von Wissen. Jeder konstruiert sich sein eigenes Bild von der Welt. Ein Vergleich dieses Bildes mit der wahren Beschaffenheit der Welt ist weder sinnvoll noch möglich.
- Wichtigste Vorbedingung für den Konstruktionsprozess ist die individuell erworbene kognitive Struktur des Lernens. Die vorhandene geistige Struktur des Lernenden ist die einzige relevante Größe für Verlauf und Ergebnisse des Lernens.
- Wichtigstes Kriterium für die Wirklichkeitskonstruktion ist die Viabilität. Der Lernende beobachtet seine Umwelt und beurteilt den Erfolg seiner Handlungen und Theorien. Erfolgreiche Strategien werden als viable Wege erfahren, um an sein Ziel zu kommen.