Entdeckungen zu „Marlene und die Zahlen: Permutationen durch Variationen“

Renate Motzer

Bezüglich der Fragestellungen, die Horst Hischer in den *GDM-Mitteilungen* 105 aufgetan hat, gibt es viel zu entdecken. Ein paar Entdeckungen will ich hier kurz als Erfahrungsbericht vorstellen. Seine Frage war, bei welchen Divisionsaufgaben die Ziffern nur permutiert werden. Als Beispiel gab Herr Hischer die Aufgabe $9876543210 : 5 = 1975308642$ an.

Ich habe die Aufgabe als Multiplikationsaufgabe betrachtet. Es ist de facto gleichwertig, ob man die Divisionsaufgaben oder die zugehörigen Umkehraufgaben untersucht.

Zunächst weiß man, wenn man sich das Einmaleins von $1, 3, 7$ oder 9 anschaut, dass jeweils alle Endziffern von 0 bis 9 vorkommen. Freilich bringen die „Überträge“ (die Zehnerstellen der Einmaleins-Aufgaben) alles „durcheinander“. Kann man das wieder ausgleichen?

Einfacher ist es, man untersucht zuerst die „mal 2“- und „mal 5“-Aufgaben.

Zunächst zu den „mal 5“-Aufgaben: Multipliziert man die Ziffern von 1 bis 9 mit 5, so erhält man an den Einerstellen fünfmal eine 5 und viermal eine 0. Als Überträge ergeben sich je zweimal die Zehnerziffern $1, 2, 3$ und 4. Wenn man jetzt die Endnullen jeweils mit den Überträgen $1, 2, 3$ und 4 kombiniert und die Fünfen genauso, dann erhält man alle Ziffern in der Ergebniszahl. Die letzte Ziffer im Ergebnis der Multiplikationsaufgabe ist die 5, die letzte Stelle des 1. Faktors (im Multiplikand) muss also eine ungerade Ziffer sein. Die erste Ziffer im 1. Faktor muss eine 1 sein, sonst würde das Ergebnis zu groß. Dazwischen müssen die Ziffern so aufgereiht werden, dass zu jedem der Überträge $1, 2, 3$ und 4 einmal eine gerade, einmal eine ungerade Ziffer im 1. Faktor stehen muss. Dafür gibt es etliche Möglichkeiten.

Man könnte jeweils noch eine Null an den ersten Faktor hängen, dann würde diese auch im Ergebnis auftauchen. Man könnte sie aber auch an anderer Stelle unterbringen (siehe unten). Ob man auch andere Ziffern weglassen kann, die dann im Ergebnis ebenfalls nicht auftauchen, darüber habe ich noch nicht nachgedacht.

Zu den „mal 2“-Aufgaben: Die Einer der Vielfachen sind die geraden Zahlen, die Zehner (die zum Übertrag werden) sind fünfmal die 1 und sonst 0. Man kombiniere die Ziffernfolge also so, dass von den beiden Ziffern, deren Doppelte sich um 10 unterscheiden, eine einen Übertrag erhält und die andere nicht (Beispiel siehe unten).

Ist das Ergebnis wieder von dieser Form, kann man es nochmal verdoppeln (also die Ausgangszahl mal 4 rechnen). Sollte das Muster immer noch passen, geht nochmaliges Verdoppeln (also der Faktor 8 für die Ausgangszahl). Wie viele Lösungen es dafür geben kann, hab ich noch nicht überlegt.

Nun zu „mal 6“: $1302675489 \cdot 6 = 7816052934$

Bei „mal 6“ habe ich die Endziffern aus dem Einmaleins (also die geraden Zahlen) und die Überträge aufgeschrieben und versucht zu kombinieren. Außerdem war zu bedenken, dass es noch Überträge der Form „$3 \cdot 6$ ist 18 plus Übertrag 3 gibt 21“ gibt, bei denen der Übertrag also noch um 1 größer wird als der Zehner der Malaufgabe. Wie oft solch ein erhöhter Übertrag vorkommen muss (bei „mal 2“ und „mal 5“ kommt er gar nicht vor), kann mit Hilfe von Quersummen errechnet werden. Die Quersumme des ersten Faktors und die des Ergebnisses sind ja gleich, nämlich 45. Die Summe der Einerstellen ist beim 6er-Einmaleins 40 und die Summe der Zehner ist 23. Die Gesamtsumme der Ziffern beträgt 63. Es muss also drei solche zusätzlichen Überträge geben (denn bei jedem solchen Übertrag wird die Summe der beteiligten Ziffern um 9 kleiner: zehn Einer werden zu einem Zehner oder zehn Zehner zu einem Hunderter usw.).

Ob man mit dieser Überlegung schneller zum Ziel kommt als einfach nur durch Probieren, weiß ich nicht. Meine Lösung für den Faktor 6 hab ich jedenfalls so gefunden.

Beim Faktor 3 habe ich auch solche Überlegungen angestellt: Die Einerziffernsumme ist schon 45. Die Zehnerziffernsumme ist 9, also ist ein besonderer Übertrag nötig. Meine Aufgabe, die ich schließlich gefunden habe: $2145973860 \cdot 3 = 6437921580$.

Eine Lösung zu 7 war leichter zu finden: $1234567890 \cdot 7 = 8641975230$. Ich habe aber auch noch eine andere gefunden: $1023584976 \cdot 7 = 7165094832$ (hier habe ich die drei zusätzlichen Überträge bewusst eingespielt).

Bevor ich die Lösung zum Faktor 3 hatte, habe ich auch in anderen Systemen einiges probiert, z. B. ob es für den Faktor 3 eine Aufgabe im 4er-System gibt (danach hab ich dann geglaubt, es könnte auch im 10er-System eine geben): $10234 \cdot 3 = 32014$.

Mit den größten Ziffern in anderen Systemen hab ich dann weitergesucht, um dem Faktor 9 im 10er-System näherzukommen:

Weil die Quersumme durch die höchste Ziffer teilbar sein muss (denn nach dem Äquivalent zur „Neunerprobe“ muss die Ergebniszahl ein Vielfaches der größten Ziffer sein, also auch eine entsprechende Quersumme besitzen), kann die Ziffer 2 im 5er-System nicht vorkommen. Eine passende Aufgabe im 5er-System heißt folglich: $10345 \cdot 4 = 53015$. Analogien zum 4er-System fallen auf.

Wie geht es weiter? $1034526 \cdot 5 = 5310246$ im 6er-System (ein bisschen Rumprobieren war nötig). Dann $1045627 \cdot 6 = 6410257$ im 7er-System (man muss die 3 weglassen).

Fürs 8er-System findet sich schließlich: $104563728 \cdot 7 = 741053268$. Die Übertragung ins 9er-System wollte nicht gelingen …

Dann habe ich erstmal doch beim 10er-System weitergemacht. Also vielleicht $1056\ldots92 \cdot 9$. Die 4 Ziffern dazwischen kann man durchprobieren (24 Aufgaben zu testen geht ja noch). Es fand sich:

$$1056384792 \cdot 9 = 9507463128.$$

Jetzt müsste sich die Lücke fürs 9er-System wohl auch noch schließen lassen. Es klappte irgendwie trotzdem nicht. Über die Divisionsaufgabe bin ich schließlich auf: $105674829 \cdot 8 = 851063279$ gekommen. Eigentlich dürfte die 4 wegen der Quersumme nicht vorkommen. Im Ergebnis kommt sie auch nicht vor. Im 1. Faktor habe ich sie aber gebraucht. Die 4 aus dem Multiplikand muss also im Ergebnis der Malaufgabe durch 3 ersetzt werden. Nur so lässt sich die Lücke im Muster schließen. Auch interessant.

Und wenn man nicht alle Ziffern von 0 bis zur größten Ziffer bzw. von 1 bis zur größten Ziffer nimmt?

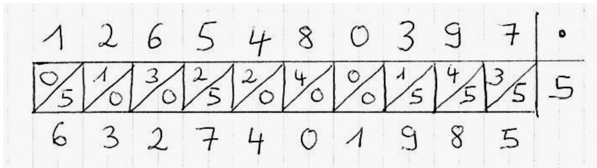
Bekannt ist mir nur die Periode von 1/7:

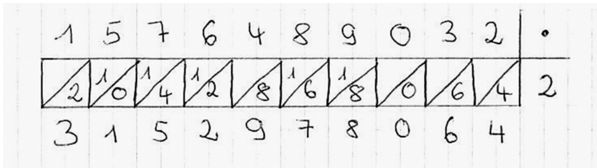
$$142857 \cdot 2 = 285714,$$
$$142857 \cdot 3 = 428571,$$
$$142857 \cdot 4 = 571428,$$
$$142857 \cdot 5 = 714285,$$
$$142857 \cdot 6 = 857142$$
$$(\text{und } 142857 \cdot 7 = 999999).$$

142857 heißt deswegen auch „zyklische Zahl“.

Auf dem Feld, auf das uns Marlene, die Enkelin von Horst Hischer, geführt hat, gibt es sicherlich noch viel mehr zu entdecken.

Was die Fälle „mal 2“ und „mal 5“ angeht, kann man das Zusammenspiel von Einerziffern und Zehnerziffern des 2er- bzw. 5er-Einmaleins gut erkennen, wenn man die Malaufgabe mit Hilfe der Malstreifen (nach der Idee von J. Neper) malt. Hierzu jeweils ein Beispiel:





Hat jemand noch weitere Aufgaben gefunden oder allgemeinere Erkenntnisse gewonnen?

Renate Motzer, Universität Augsburg
Email: renate.motzer@math.uni-augsburg.de