Diskussionsbeitrag zum Artikel „Altlasten des Mathematikunterrichts – eine Diskussion mit dem Ziel der Entschlackung“ von Reinhard Oldenburg in den *Mitteilungen der GDM* 105 (2018)

Peter Bender

Die Initiative von Reinhard Oldenburg (R.O.) ist sehr begrüßenswert, und ich gehe mit der Stoßrichtung und zahlreichen Einzelheiten konform. Allerdings geht es in seinem Artikel nicht um eine inhaltliche Veränderung des Mathematikunterrichts, sondern um die Hinterfragung von mathematischen Rede- und Schreibweisen. Manchmal prangert R.O. eine zu ausgeprägte Nachlässigkeit an; manchmal spricht er sich für eine großzügigere Handhabung aus; manchmal leuchtet die Argumentation direkt ein; manchmal ist sie etwas spitzfindig („übertrieben“, wie er selbst schreibt). Oft handelt es sich um eine Sache des Geschmacks bzw. des unterliegenden Bilds von der Mathematik bzw. der Lerngruppe bzw. der Unterrichtsziele, wie genau man den mathematischen Formalismus nimmt bzw. wo man die Grenze zur Unkorrektheit überschritten sieht. Ich selbst möchte es mit dem großen Mathematikdidaktiker und gewissenhaften Elementarmathematiker Arnold Kirsch (1922–2013) halten, dessen Arbeiten sich auf den Mathematikunterricht von der Grundschule bis zur Universität bezogen, mit seinem Plädoyer für eine gewisse Laxheit in der mathematischen Rede zum Zwecke der besseren Verständlichkeit, unter der Bedingung, dass keine begrifflichen Fehler auftreten und keine Missverständnisse entstehen.

Im Großen und Ganzen gehe ich gemäß der Reihenfolge vor, in der R.O. seine Items abgehandelt hat:

1. Während man z. B. dezidiert zwischen Winkel bzw. Radius als geometrisches Objekt und Winkelmaß bzw. Radius (-länge) als Maßzahl unterscheiden muss, erscheint mir die Verwendung desselben Buchstabens, z. B. α bzw. r, für beide mathematische Objekte als durchaus akzeptabel, wenn keine Verwirrung möglich ist. Oder: eine abkürzende Schreibweise wie „die ermittelten Werte sind alle ≤ 1“ ist völlig unschädlich, auch wenn der alleinstehende Ausdruck „≤ 1“ aus formalistischer Sicht sinnlos ist. Die Zeiten der sog. „Neuen Mathematik“ von vor fünfzig Jahren, gemäß der man nicht sagen durfte: „auf dem Tisch liegen fünf Stifte“, sondern sagen sollte: „… liegt eine Menge von fünf Stiften“; diese Zeiten sind jedenfalls vorbei.

2. Bis heute konnte mir niemand erklären, was es mit der Schreibweise $A(1 \mid 2)$ bzw. $B(1;2)$ auf sich hat. Um die Rede von einer Funktion aus der Menge der Paare reeller Zahlen in die Punkte-Ebene kann es sich jedenfalls nicht handeln. Da hätte ja jedes Argument seine eigene „Funktion“ mit eigenem Namen, – völlig sinnlos.

Warum schreiben wir nicht einfach $A = (1;2)$ bzw. $A := (1;2)$? Sobald wir der Ebene ein Koordinatensystem aufprägen, können wir doch die Punkte mit den Zahlenpaaren identifizieren (wie die Gerade mit $\mathbf{R}$). Die Trennung ist in der Schule irrelevant und dort nicht wirklich verstehbar (s. a. **14.**).

3. Eine Funktion wird nicht durch ihre Funktionsvorschrift allein konstituiert (oft in Form einer Funktionsgleichung), sondern es gehört die Angabe ihres Definitions- und ihres Wertebereichs wesentlich dazu. Dafür ist eine Schreibweise wie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{E} : (x;y) \to f((x;y))$ genau passend (die verbreitete Schreibweise des zweiten Pfeils (zwischen den Elementen) mit einem kleinen Querstrich am Anfang ist eigentlich überflüssig).

Nun ist das Definitions-und-Wertebereich-Problem bei Geraden nicht existent, und es wäre übertrieben, wenn man bei jeder Nennung einer Geraden die beiden Bereiche mit angäbe. Offensichtlich ist eine Schreibweise wie „$g : y = 2x + 1$“ nicht nur formal fragwürdig, sondern auch für das lokale und globale Verstehen von Variablen, Funktionen und Algebra ungeeignet. Aber wer schreibt das denn so? Würde man die Leertaste zwischen „g“ und dem Doppelpunkt entfernen und den Abstand zwischen dem Doppelpunkt und „y“ noch etwas vergrößern, also „$g: \quad y = 2x + 1$“, wäre die Lesart als Division noch abwegiger als m. E. so schon (s. a. meine Anmerkungen zu **7.**, **11.** und **13.**)

Die von R.O. vorgeschlagene Verwendung von Konstruktoren wie „Punkt^{-1}(Schnittpunkt(g_1;g_2))“ ist für das Programmieren von Computern wohl unumgänglich, würde aber die (Schul-)Mathematik ungenießbar machen.

4. Man beachte bei der o. a. Angabe der Funktion f (am Anfang von **3.**) die Doppelklammer beim Funktionswert; denn f wird ja nicht als Funktion in zwei Variablen x und y, sondern als Funktion in einer Variablen $(x;y)$ aufgefasst (noch klarer wird diese Erfordernis, wenn der Vektor als Spalte geschrieben ist). Auch wenn beide Auffassungen inhaltlich i. W. identisch sind, ist in der Schulmathematik wohl die Lesart mit einer Variablen angesagt (abgesehen davon, die o. a. Funktion f nicht gerade von Sinnhaftigkeit strotzt).

5. Das Setzen von Doppelpunkten bei der erstmaligen Verwendung eines Bezeichners befürworte ich unbedingt; denn dadurch wird deutlich, dass es nicht um eine naturgegebene oder irgendwie abgeleitete Gleichung geht, sondern um eine Festlegung.

6. In der Tat widerspricht es dem mathematischen Prinzip der freien Wählbarkeit von Namen für Variablen, wenn die Geradensteigung immer mit m, das Dreieck immer mit ABC, die Primzahl immer mit p usw. usf. und schließlich, weltweit am verbreitetsten, der Stichprobenumfang immer mit n bezeichnet wird; und es liegt auf der Hand, dass dieser Brauch einem falschen Variablenbegriff Vorschub leistet. Aber alle, auch die abgehobensten Universitätsmathematiker frönen ihm, ganz einfach weil er der Lesbarkeit mathematischer Texte sehr förderlich ist. Trotzdem kann man wenigstens in der Schule hin und wieder die eine oder andere maßvolle Variation anbringen.

7. Die Rechenregeln für gerade und ungerade Zahlen sind nichts anderes als die Verknüpfungstafel des Körpers K^2 mit den beiden Elementen $g(=0)$ und $u(=1)$, die man auch als Restklassen in $\mathbf{Z}$ modulo 2 auffassen kann. Natürlich sind Restklassen ihrerseits Mengen und können durch jedes ihrer Elemente repräsentiert werden. Mit Recht weist R.O. darauf hin, dass in der Schule der Abstraktionsgrad nicht erreicht wird, der für ein entsprechendes Verständnis erforderlich wäre. Aber zu verstehen ist jedenfalls, dass die Variablen „gerade“ und „ungerade“ bzw. „g“ und „u“ nicht für Zahlen selbst, sondern für Eigenschaften von Zahlen stehen und die Regeln entsprechend zu lesen sind, nämlich als sinnvolle Abkürzungen für einen Satz wie: „Wenn man eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl multipliziert, ist das Ergebnis eine gerade Zahl.“

Wenn jemand aus der Regel $u \cdot g = g$ folgert, dass $u = 1$ ist (noch sinnloser: dass aus $g \cdot g = g$ folgt: $g = 0 \vee g = 1$), so hat die Person sich die Gleichung allzu oberflächlich angeschaut und/oder sie verfügt über einen allzu engen Variablenbegriff, nämlich: Sobald sie einen Ausdruck mit mathematischen Zeichen und Buchstaben sieht, unterstellt sie einen Term, eine Aussage oder eine Aussagenform in der Grundmenge $\mathbf{R}$ (oder einer Teilmenge), verzichtet auf jegliche Bemühung um Sinnhaftigkeit und fängt an umzuformen. – Wenn eine Schülerin oder ein Schüler eine solche Haltung zur Mathematik entwickelt hat, hat die Lehrerin bzw. der Lehrer etwas falsch gemacht.

8. Jawohl, statt $3\left(\frac{1}{2}\right)$, $2x$ und sinx sollte $3 + \left(\frac{1}{2}\right)$, $2 \cdot x$ und $\sin(x)$ geschrieben werden!

9. Das Verständnis der in der Physik wichtigen Funktion $\sin^2$ als Hintereinanderausführung von Sinus und Quadrieren ist durchaus sinnvoll und naheliegender als Hintereinanderausführung von Sinus und noch einmal Sinus. Die Schwierigkeit liegt in der Schreibung der Polynomfunktionen (und allgemeiner: der gebrochen-rationalen Funktionen). Bei der Funktion $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$ gibt es für p keinen treffenden Namen, sondern man muss die Funktionsvorschrift hinschreiben.

10. R.O.s Analyse des Satzes „die Funktion $f(x) = ł = big(\frac{1}{x})$ ist bei $x = 0$ nicht definiert“ möchte ich um folgenden spitzfindigen semantischen Kritikpunkt ergänzen: Die Verwendung des Worts „Funktion“ beinhaltet, dass da bereits ein Definitionsbereich festgelegt ist, der ja die Stelle 0 nicht enthalten kann. *Insofern* stellt der Satz einen sinnleeren Pleonasmus dar („der *Schimmel* ist weiß“). Eine Aussage mit mehr Gehalt wäre: „Der Term $\left(\frac{1}{x}\right)$ ist für $x = 0$ nicht definiert“ („das *Pferd* ist weiß“), mit der Fortsetzung: „Soll er Term einer Funktion sein, kann deren Definitionsbereich die Stelle 0 nicht enthalten.“ – Zugegeben: Arg spitzfindig, insbesondere für Schülerinnen und Schüler.

11. Mit Recht charakterisiert R.O. seine Forderung, man müsse statt von „an der Stelle $x = 0$“ von „an der Stelle x mit $x = 0$“ sprechen, als „übermäßig korrekt“. In der Tat: Der „Gedanke“, dass „$x = 0$“ eine Gleichung und keine Stelle ist, kommt vielleicht einem Sprach-Automaten, aber keinem menschlichen Adressaten dieses Texts. – Noch einfacher wäre aber der Ausdruck „an der Stelle 0“.

12. Ein ähnliches Nicht-Problem ist der Satz „5 Geodreiecke kosten zusammen $5 \cdot 2$ Euro $= 10$ Euro“. Wenn man meint, ihn korrigieren zu müssen, schreibt man einfach: „5 Geodreiecke kosten zusammen $5 \cdot 2$ Euro ($= 10$ Euro)“. Die Klammersetzung macht die Gleichung zu einem eigenen Satz, nämlich: „und das sind 10 Euro“, und dann würden die Geodreiecke nicht den Wahrheitswert „wahr“ (der Gleichung „$5 \cdot 2$ Euro $= 10$ Euro“) kosten. R.O.s Spitzfindigkeit richtet sich übrigens letztlich auch gegen seinen eigenen „korrigierten“ Satz: „… kosten zusammen $5 \cdot 2$ Euro und $5 \cdot 2$ Euro $= 10$ Euro“. Dieser ist dann nämlich auch zu lesen als: „… kosten zusammen $5 \cdot 2$ Euro und ‚wahr‘ “, weil nicht klar wird, dass mit dem „und“ ein neuer Hauptsatz beginnt. Hier hätte man günstigerweise ein Komma vor dem „und“ gesetzt, auch wenn dieses nach der Rechtschreibreform seit 1996 nicht mehr erforderlich ist.

13. Dem Vorschlag zur Streichung des Worts „unbestimmtes Integral" und ausschließlichen Verwendung von „Stammfunktion" an seiner Stelle schließe ich mich an. Allerdings wird das Integralzeichen für die Operation $(\int f)$ des „Aufleitens" (wie f' für das Ableiten) nach wie vor gebraucht. Es fungiert als (Aufleitungs-)Operator, der der Funktion f ihre (Klasse von) Stammfunktion(en) $(\int f)$ zuordnet (wenn diese denn existiert) (entsprechend dem $'$ für das Ableiten). Deswegen ist hier die Schreibweise $(\int f)$ günstiger als $(\int f(x)\mathrm{d}x)$ (die jedoch bei Polynomen u. ä. nicht zu vermeiden ist; man könnte allerdings bei diesen noch das „dx" weglassen; s. u.).

Wenn man aber letztere (für die Integralfunktion oder das bestimmte Integral) verwendet, sollte zwischen $f(x)$ und dx kein Malpunkt gesetzt werden, weil hier keine Multiplikation vorliegt, sondern nur die Angabe der Integrationsvariablen (des Maßes), auch wenn die Physiker in ihrem Differenzial- und Integralkalkül doch multiplizieren.

Trivialerweise besteht beim Wort „Stammfunktion" das Problem der Mehrdeutigkeit nicht weniger als beim Wort „unbestimmtes Integral". Die Gleichung $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}$ (bzw. $\int x^2 = \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}$) ist wieder eine solche, die nicht oberflächlich als zwischen Funktionen (oder gar zwischen Funktionswerten) aufgefasst werden darf, sondern sie muss zwischen Funktionsklassen gesehen werden: Die Klasse (Menge) aller Stammfunktionen der Funktion x^2 (natürlich ist dieser laxe Funktionsname nicht nur akzeptabel, sondern sogar angebracht), d. h. aller Funktionen, deren Ableitung die Funktion x^2 ist, ist die Klasse (Menge) aller Funktionen $\left(\frac{x^3}{3}\right) + C$, wo für C jede reelle Zahl eingesetzt werden kann. – Wer seinen Schülerinnen und Schülern diese Sichtweise nicht zutraut, kann mit ihnen keine Integralrechnung treiben.

14. Womöglich liegt es an einem erfolgreichen universitären Studium der linearen Algebra, dass man mit der Begrifflichkeit der Schul-analytischen-Geometrie so seine Probleme hat. Jedenfalls war ich froh, als ich spät den Unterschied zwischen Punkten, Orts- und Richtungsvektoren verstanden hatte und sie trotzdem einheitlich als reelle n-Tupel auffassen durfte, ganz wie R.O. das sieht. Bei der Betrachtung von Nebenräumen (im Sinne der linearen Algebra; also von Geraden, Ebenen im Sinne der analytischen Geometrie) erscheint mir die Unterscheidung von Orts- und Richtungsvektoren durchaus als dem Verstehen dienlich. Ich sehe Ortsvektoren grundsätzlich an den Ursprung geheftet (außer vorübergehend zum Zwecke des Addierens) und somit direkt als Punkte interpretierbar, während für mich die Richtungsvektoren (Elemente des projizierten Unterraums) frei verschiebbar sind und somit eher den Charakter von Pfeilen haben (natürlich auch als Punkte verstanden werden können).

15. Ich schlage die dezidierte Verwendung folgender Begriffsnamen vor:

- Häufungswert (statt Häufungspunkt) passend zu „Grenzwert" (Analysis)
- Translation und Rotation (statt Verschiebung und Drehung), um den Zuordnungscharakter zu betonen und die Assoziation mit kontinuierlichen Bewegungen zu verringern (deswegen auch nicht von Bewegungen, sondern von Kongruenzabbildungen oder Isometrien reden) (Abbildungsgeometrie)
- Ausfall (statt Ergebnis) wegen der Verwechslungsgefahr von „Ergebnis" und „Ereignis" (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

16. Im Stochastikunterricht befürworte ich eine gediegene, formale Grundlage mittels Wahrscheinlichkeitstheorie, weil diese m.E. unerlässlich für stochastisches Denken ist und ohne sie die beurteilende Statistik, ob ohne oder mit Computer, nicht wirklich verständlich ist.

Ähnlich sieht es im Analysisunterricht aus: Ohne eine ordentliche Grundlegung des Grenzwertbegriffs (inklusive Stetigkeit zwecks Vorbereitung der Differenzierbarkeit!) ist infinitesimales Denken m.E. nicht möglich.

Ich weiß, dass für diese Grundlegung die Zeit bei Weitem nicht reicht, wenn man zu den sog. „interessanten" Inhalten kommen möchte. Mir ist unklar, wie man mit diesem Dilemma umgehen soll. Aber da ich auch die Grundlagen als „interessant" ansehe und ihnen einen ausgeprägten Bildungsgehalt zumesse, neige ich dazu, ihnen den notwendigen Raum zuzugestehen und die sog. „interessanten" Inhalte kürzer zu fassen.

17. Solange in diskreten Räumen gearbeitet wird, ist nicht einzusehen, warum man, ganz in R.O.s Sinn, nicht auch den Ausfällen, die dort ja mit den Elementarereignissen praktisch identisch sind, Wahrscheinlichkeiten zuordnet, also beim Ausfall a von der Wahrscheinlichkeit $p(a)$ spricht. Und wer bis zu kontinuierlichen Räumen vorstößt, benötigt eh eine erheblich tiefer gelegte Begriffsbildung und wird keine Probleme mit der veränderten Rolle von Ergebnissen (Ausfällen) und Elementarereignissen haben.

18. Die folgende Frage (von R.O. nicht behandelt) hängt äußerlich eng mit **17.** zusammen, ist aber von etwas anderer Natur: Kann man statt $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ auch $\mathbf{R} \setminus 0$ schreiben? – Jawohl, wenn man das Zeichen „$\setminus$" für die Mengensubtraktion etwas weiter auffasst und als Subtrahend zusätzlich zu Mengen auch Elemente zulässt. – Es ist jedoch didaktisch fraglich, ob man diese begriffliche Erweiterung einführt. Zumindest sollte die Lerngruppe über eine gewisse Souveränität in Sachen „Mengenlehre" verfügen, und die Schreibfigur sollte mit einer gewissen Häufigkeit auftreten.

19. Als Arnold Kirsch und Heinz Griesel sich vor etwa fünfzig Jahren an die Formalisierung des Begriffs „Größenbereich" machten, hatten sie den Mathematikunterricht in der Primar- und in der Unterstufe der Sekundarstufe I, mit dem Sachrechnen, den proportionalen Beziehungen usw. vor Augen. Da ging es dezidiert nicht um negative Werte oder um Vektoren, sondern um für die Schülerinnen und Schüler reale Längen, Flächeninhalte, Volumina, Gewichte, Zeitspannen, Geldwerte, auch $\mathbb{N}$, und alle möglichen basalen Tätigkeiten damit wie Zählen, Messen, Schätzen, Kennen von Maßsystemen, Größenvorstellungen, Darstellen (Modellieren, Zeichnen, Schematisieren, Symbolisieren), Sortieren, Rechnen. Alle diese Größen kann man zwar auch mit negativen Vorzeichen versehen oder um eine Größe 0 ergänzen, aber das war nicht das Thema, und von den Schülerinnen und Schülern bekannten Größenarten musste eigentlich nur die Temperatur ausgenommen werden.

Im Stil der damaligen Zeit wurde der Begriff des Größenbereichs axiomatisch gefasst, wie der Begriff der Gruppe, des Vektorraums, der Wahrscheinlichkeit u. Ä. Kirschs Axiomensystem besticht durch seine Einfachheit und spiegelt mit seinen Axiomen das Wesentliche der für die genannten Schulformen und -stufen relevanten Größen sehr gut wieder.

Viele der damals aktiven Grund-, Haupt- und Realschullehrerinnen und -lehrer waren durch die Mathematisierung des Rechen- und Raumlehreunterrichts überfordert, und vermutlich hat ihnen trotz seiner Einfachheit Kirschs Axiomensystem wenig eingeleuchtet. Aber für die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung seitdem war es sehr hilfreich.

Natürlich hat R.O. mit seiner Kritik an der Enge dieses Größenbegriffs recht, und seine pragmatische Definition von Größen als Vektoren in einem Vektorraum mit den Einheiten als Basen und mit einer Interpretation in einer Anwendung erscheint sehr sinnvoll, „und mehr benötigt man ... nicht". Aber man braucht das „Weniger", einen Begriff für die Größen in der Primar- und der Unterstufe der Sekundarstufe I. Es ist etwas unglücklich, dass das Wort „Größe" für diese vereinnahmt ist und es für den weiteren Begriff keine kurze, treffende Bezeichnung gibt. Vielleicht könnte man von Größen im engeren und solchen im weiteren Sinn sprechen? Damit wäre das von R.O. aufgeworfene Problem (angemessen) zu einem der Wortwahl zusammengeschrumpft und Kirschs angeblich „schweres Erbe" müsste nicht „entsorgt" werden.

Peter Bender, Universität Paderborn
E-Mail: bender@math.upb.de

Gehört der Begriff Größenbereich nach Kirsch zu den Altlasten des Mathematikunterrichts?

Heinz Griesel

Erweiterte Fassung eines Briefes vom 10. 9. 2018 an Herrn Kollegen Oldenburg.[1]

Lieber Herr Kollege Oldenburg!
Sie werden verstehen, dass ich Ihren Aufsatz in den *Mitteilungen der GDM* (Nr. 105, 31–34, 2018) mit dem provozierenden Titel *Altlasten des Mathematikunterrichts* nicht unkommentiert lassen kann. Sie werden sicher auch verstehen, dass ich insbesondere Ihre Anmerkungen zu *Größen* kommentieren möchte, weil ich mich seit mehr als 50 Jahren mit mathematischen und didaktischen Problemen zum Thema *Größen* beschäftigt und dazu viel publiziert habe.

[1] *Vorbemerkung von Werner Blum:* Heinz Griesel ist am 26. November 2018 nach kurzer schwerer Krankheit verstorben. Dieser Brief war seine letzte schriftliche Äußerung. Wir haben uns über diesen Brief ausgetauscht, und Heinz Griesel hat mich gebeten, den Brief redaktionell zu bearbeiten, wenn er dazu nicht mehr in der Lage sein sollte. Die folgende Fassung ist eine minimal bearbeitete Version des ursprünglichen Briefs. Eine ausführliche Würdigung von Heinz Griesel und seines Werks wird in einer der nächsten *GDM-Mitteilungen* erscheinen.