Schlechte Diagramme

Martin Brunner

Die typische Verwendungsweise mathematischer Inskriptionen ist durch den Begriff „Diagramm“ nach Ch. S. Peirce gut beschreibbar (vgl. etwa Hoffmann, 2005; Dörfler, 2006; Brunner, 2009). Im Normalfall sind mathematikübliche Inskriptionen auch gut als Diagramme verwendbar. Dies gilt aber nicht für viele in jüngster Zeit entwickelte mathematische Aufgabenformate. Solche Aufgabenformate werden im Folgenden als „schlechte Diagramme“ bezeichnet. Als Demonstrationsbeispiel für ein solches „schlechtes Diagramm“ wird im vorliegenden Aufsatz eine konkrete Aufgabe aus der österreichischen standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung 2016 (die Reifeprüfung wird in Österreich auch Matura, in Deutschland Abitur genannt) verwendet. Der angeführte Aufgabentyp ist in den Maturen und Modellschularbeiten des Österreichischen Kompetenzmodells (ÖKM) prominent vertreten. Er wurde etwa in der Modellschularbeit 2014 (Aufgabe 6), in der Probeklausur 2014 (Aufgabe 7), in der Matura 2016 (Aufgabe 15) oder in der Matura zum Nebentermin 2017 (Aufgabe 16) jeweils im Schultyp „Allgemein bildende höhere Schule“ (Gymnasium) verwendet. Aufgabentypen wie der der in Abb. 1 angeführte dienen im ÖKM der Festigung und Testung von Grundkompetenzen.

Funktionen und Ableitungsfunktionen

Links sind die Graphen von vier Polynomfunktionen (f_1, f_2, f_3, f_4) abgebildet, rechts die Graphen sechs weiterer Funktionen (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Polynomfunktionen f_1 bis f_4 ihre jeweilige Ableitungsfunktion aus den Funktionen g_1 bis g_6 (aus A bis F) zu!

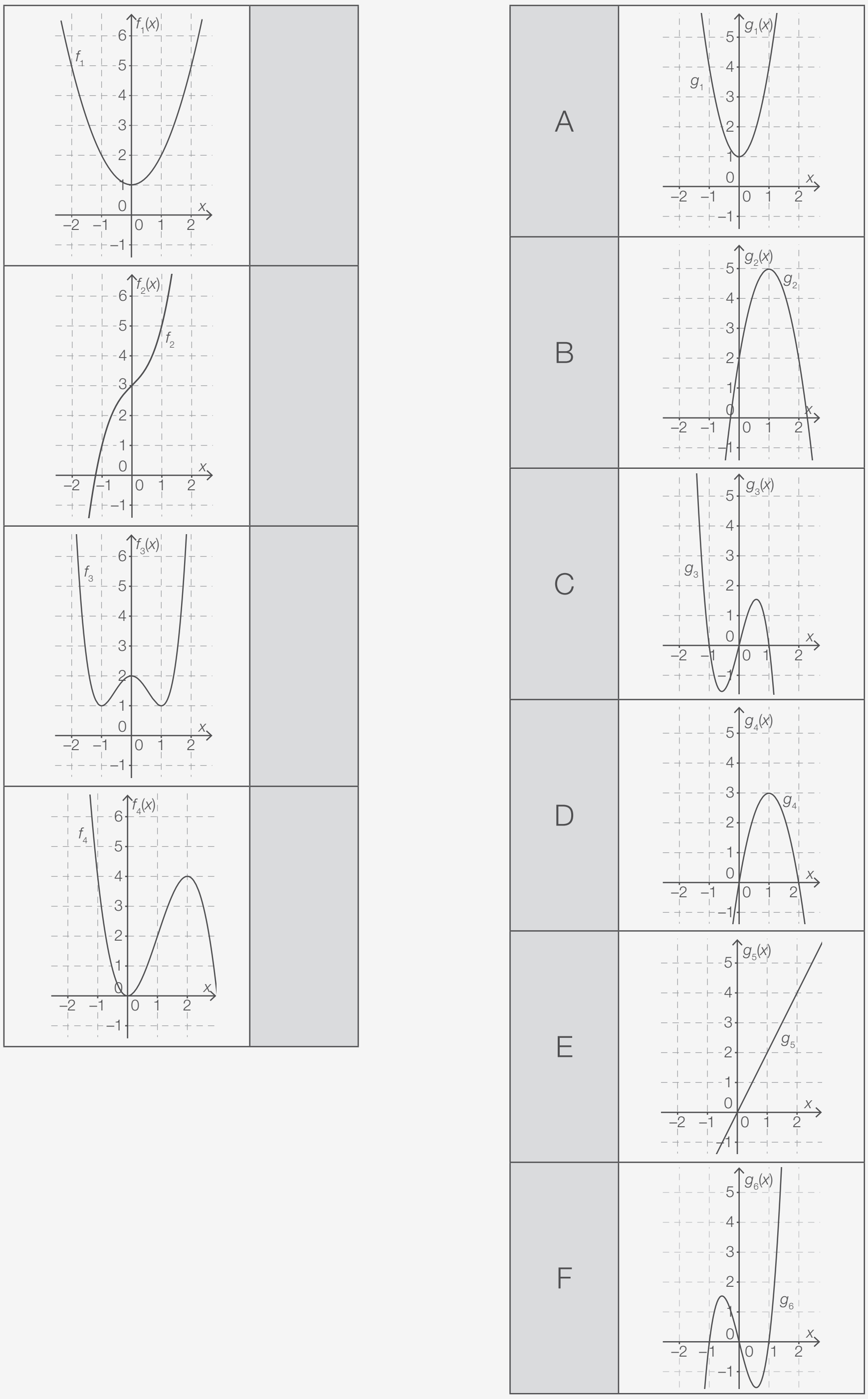

Abbildung 1. Das angeführte Beispiel wurde in der Reifeprüfung 2016 (Aufgabe 15) verwendet (Quelle: https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Matura_2015-16/12_MAT/KL16_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf)

N E W
N E W
N E W

Abbildung 2. Aus einem Extremum der Funktion wird in der ersten Ableitung eine Nullstelle, aus einem Wendepunkt entsprechend in der ersten Ableitung ein Extremum und in der zweiten Ableitung eine Nullstelle.

Im Folgenden wird der angeführte Aufgabentyp mithilfe des Diagrammbegriffs untersucht. Mathematische Inskriptionen tragen ihre Bedeutung nicht automatisch mit sich. Eine Wellenlinie kann etwa als Zeichen für „Trennung“, „Auf und ab“, „Vagheit“, „Wellen“ oder „Wasser“ gebraucht werden. Man kann sie aber nach den entsprechenden Regeln auch als „Sinusfunktion“ verwenden. Inskriptionen werden also nur durch deren Verwendung nach festgelegten Regeln zu mathematischen Zeichen. Wie eingangs erwähnt ist die typische Verwendungsweise mathematischer Inskriptionen durch den Begriff „Diagramm“ gut beschreibbar. Ein Diagramm ist eine Inskription mit einer wohldefinierten Struktur. Es gelten Schreibregeln und festgelegte Beziehungen zwischen den verschiedenen Teilen. Diagramme sind eng miteinander vernetzt und in so genannten Diagrammsystemen organisiert. In den Diagrammen und Diagrammsystemen gelten Regeln für erlaubte Operationen, Transformationen, Zerlegungen, Kompositionen und Kombinationen. Lernt man Inskriptionen als mathematische Zeichen zu verwenden, so lernt man sie in diesem Sinne als mathematische Diagramme zu gebrauchen. Neben dem Diagrammbegriff bilden Aspekte der beobachtbaren Sichtweise des ÖKM auf Sinn und Bedeutung der so genannten mathematischen Darstellungen die Basis der folgenden Untersuchung. Im ÖKM geht es neben der Kompetenzorientierung um einen weitreichenden Paradigmenwechsel, der auch in der „Erstellung oder Veränderung von Aufgaben“ besteht (vgl. Broschüre des zuständigen österreichischen Bundesinstituts „Bifie“ 2011, S. 109). Im Zentrum des ÖKM steht ein Katalog von Grundkompetenzen. Zentrales Anliegen des ÖKM ist nach eigener Diktion der „Aufbau mathematische Kompetenz“. Darunter sei „die Fähigkeit zu verstehen, mathematisches Denken zu entwickeln und anzuwenden, um Probleme in alltäglichen Situationen zu bewältigen“ (Liebscher u. a., 2014, S. 3). Es wird nun ausgehend von dieser Grundposition auch der Frage nachgegangen, inwieweit man mit Aufgabenformaten wie dem angeführten von Lernenden erworbenes „mathematisches Denken“ zu entwickeln und zu überprüfen imstande ist.

Ein wesentliches Anliegen des ÖKM ist es nach eigenen Grundsätzen, das rein algorithmische Rechnen und Operieren in den Hintergrund zu drängen und mathematisches Problemlösen vor allem in deskriptiven Zusammenhängen in den Vordergrund zu stellen. Im Praxishandbuch, Teil 2 (Breyer u. a., 2013, S. 37) heißt es etwa: „Als Problemlösen wird die Fähigkeit bezeichnet, auch mit jenen Aufgaben erfolgreich umgehen zu können, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist. Mathematische Probleme sind dadurch charakterisiert, dass ihr Lösungsweg nicht offensichtlich ist: es steht kein unmittelbar zum Ziel führendes Rezept – etwa in einer Formel oder eines Algorithmus – zur Verfügung.“ Wenn die angeführte Aufgabe als so genannte Typ1-Aufgabe in erster Linie auch nur als Diagnoseinstrument der Überprüfung von Grundkompetenzen dienen mag, sie wird den angeführten Ansprüchen nicht gerecht. Gerade bei derartigen Aufgabenformaten ist es leicht, einen Algorithmus bzw. einfache Regeln zu deren Lösung anzugeben. Solche Regeln können etwa lauten: „Hat die Funktion f n Nullstellen, so hat die zugehörige Ableitung f' $(n-1)$ Nullstellen“, „Hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, so hat f' an dieser Stelle eine Nullstelle“, „Hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, so hat f' an dieser Stelle ein Extremum“, „Ist f im Intervall $I[a,b]$ linksgekrümmt, so ist f' in I streng monoton steigend“, usw. Unter den Lernenden und im Internet kursieren im Hinblick auf die Lösung derartiger Aufgaben übrigens Regeln wie die in Abb. 2 abgebildete.

Hinzu kommt, dass bei den Reifeprüfungen elektronische Werkzeuge wie etwa GeoGebra verwendet werden dürfen. Es ist nicht schwer, die angegebenen Funktionsgrafen mithilfe von GeoGebra einzugeben. Die entsprechenden Ableitungen können in der Folge mittels eines einfachen Befehls leicht ermittelt werden

Für die Lösung von Aufgaben wie der angeführten muss man kein adäquates Begriffsverständnis entwickelt haben. Streng genommen kann man obige Aufgabe rein *figürlich* lösen. Es reicht, Hoch- oder Tiefpunkte als Kurvenberge oder -täler, Wendepunkte als „Lenkradumsetzpunkte“, Kreuzungspunkte von entsprechenden Linien als Nullstellen usw. zu betrachten. Wie eingangs erwähnt sind Inskriptionen ja nicht automatisch mathematische Zeichen. Sie sind es nur, wenn man in der Lage ist, Inskriptionen als mathematische Diagramme zu verwenden. Hierfür muss man durch intensives Training Vertrautheit mit den entsprechenden mathematiküblichen Inskriptionsverwendungen und Regeln aufgebaut haben. Essentiell ist dabei die relationale Verwendung der Inskriptionen. Verwendet man Inskriptionen rein figürlich, so wird im Sinne von Dawydow (1977) der Übergang von der empirischen zur theoretischen Begriffsbildung erschwert. Verwendet man beispielsweise einen Kreis rein als Figur, so ist er etwa bei Verwendung der

Maximumsmetrik von einem Quadrat nicht unterscheidbar. Ein Kreis ist aber mathematisch durch eine Relationalität bestimmt. Er ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die einen konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt dieser Ebene (dem Mittelpunkt) haben. Ohne theoretische Begriffsbildung ist es nach Dawydow (1977) nicht möglich, mathematische Begriffe adäquat zu bilden. Durch eine auf Figürlichkeit gründende Begriffsbildung wird der Übergang von einer empirischen zur theoretischen Begriffsbildung erschwert (vgl. auch Dörfler, 1988; Peschek 1989). Hinzu kommt, dass mathematische Begriffe letztlich durch die Erfindung und Beschreibung von Diagrammen entstehen (Dörfler, 2006, S. 202). Begriffe wie „Steigung“ beziehen sich auf mehrere Diagramme wie „Funktionsgleichung“, „Funktionsgraf“, „rechtwinkliges Dreieck“, „Tangens“ usw. Man kann Begriffe wie „Steigung“ nur auf der Basis von großer Vertrautheit mit den entsprechenden Diagrammen und ihrem Zusammenwirken korrekt bilden. Die involvierten Diagramme „Funktionsgleichung“ und „Funktionsgraf“ wirken etwa im Zusammenhang mit dem Differentialquotienten gegenseitig stabilisierend. Ohne Vertrautheit mit dem algebraischen Diagramm „Differentialquotient“ ist es etwa nicht möglich, regelkonform Bedeutung im Zusammenhang mit den Diagrammen „Funktionsgraf“ und „Tangente“ zu konstruieren (vgl. Brunner, 2015, 2017) und in der Folge die erste Ableitung f' als Funktion der Steigungen der Funktion f zu begreifen. Mithilfe von Aufgabenformaten wie dem angeführten kann nicht getestet werden, ob Lernende zu korrekter Bedeutungsbildung im Zusammenhang mit den entsprechenden Begriffen in der Lage sind.

Das angeführte Aufgabenformat ist vollkommen statisch. Es verlangt generell keinerlei Kompetenz im Zusammenhang mit der aktiven operativen Verwendung der jeweiligen Diagramme. Da es zudem mithilfe einfacher Regeln lösbar ist, kann damit auch nicht die Fähigkeit zur mathematiküblichen Interpretation der Diagramme geprüft werden. Es wird aber an Aufgaben wie der obigen eine bestimmte Sicht des ÖKM auf Sinn und Bedeutung der mathematischen Diagramme und des mathematischen Wissens erkennbar: Im ÖKM werden Diagramme als Darstellungen von implizit existierenden abstrakten Objekten betrachtet. Dies kommt auch in einer Aussage im Zusammenhang mit den elektronischen Werkzeugen zum Ausdruck (Liebscher u. a., 2014, S. 75): „Die Möglichkeit der grafischen Darstellung abstrakter Objekte ist für die Kompetenzentwicklung im Allgemeinen und für alle Phasen des Problemlöseprozesses im Besonderen von Bedeutung [...]“. Man betrachtet mathematische Inskriptionen also als Repräsentationen nicht wahrnehmbarer abstrakter Objekte. Im Sinne des hier erkennbaren Platonismus versucht man mit Aufgabenformaten wie dem angeführten vermutlich, das Wissen der Lernenden über die involvierten abstrakten Objekte zu überprüfen. „Wissen“ und „Kennen“ ist aber etwas anderes als mathematisches „Können“ im Sinne des operativen Herleitens von Kenntnissen und des nachvollziehbaren Begründens der Richtigkeit von Behauptetem. Aber auch wenn man diese platonistische Sichtweise auf mathematische Inskriptionen teilt – wie kann man ohne die Fähigkeit zur Verwendung der involvierten Inskriptionen als Diagramme (d. h. als mathematische Zeichen) und in der Folge durch entsprechende Operationen etwas über die nicht wahrnehmbaren abstrakten Objekte erfahren? Verständnis im Sinne des mathematischen Kenntniserwerbs und des mathematischen Begründens fußt auch im Falle einer platonistischen Sichtweise auf der Fähigkeit, mathematikübliche Inskriptionen nach den mathematiküblichen Regeln zu verwenden. Will man in diesem Sinne mathematisches Verständnis überprüfen, so muss man die mathematische Handlungsfähigkeit testen.

Wie eingangs erwähnt geht es im ÖKM vor allem auch um die Entwicklung von „mathematischem Denken“ und um Problemlösen. Während man im ÖKM bei der Definition dieser Begriffe vage bleibt, lässt sich diagrammatisch relativ präzise formulieren, was man darunter versteht. Es geht um eine bestimmte Art des Denkens, welche häufig als „diagrammatisches Denken, diagrammatisches Schließen oder diagrammatisches Begründen“ (z. B. Hoffmann, 2005; Dörfler, 2006) bezeichnet wird. Kenntniserwerb und Nachvollziehbarkeit erfordern in der Mathematik systematisches Experimentieren und die Untersuchung und Exploration der involvierten Diagramme. Mathematische Tätigkeit hat nach dieser Sicht eine konkrete handwerkliche Dimension, sie wird zu einem Arbeiten mit materiellen, wahrnehmbaren und veränderbaren Inskriptionen (vgl. etwa Dörfler, 2006, S. 211). Dies bedeutet, dass dem Aufbau von Vertrautheit mit den Diagrammen, Diagrammverwendungen (Operationen, Transformationen usw.) und Diagrammsystemen zentrale Bedeutung im Mathematikunterricht zukommt. Die angesprochene Vertrautheit muss durch intensive Zeichenpraxis selbst erworben werden. Auch Problemlösen ist in der Mathematik ein Prozess des Schreibens und Denkens und nicht des Denkens allein. Dies betont auch Rotman (2000) mit seiner Einheit von „scribbling/thinking“. Man wählt ein Diagramm – denkt – operiert bzw. transformiert – wählt unter Umständen andere Diagramme – denkt – operiert usw. Mit dem angeführten Aufgabenformat kann all dies nicht entwickelt oder getestet werden. Man muss keinerlei Rechtfertigung für die durch die jeweiligen Einsetzungen behaupteten Zusammenhänge erbringen. Es müssen Diagramme nicht geschickt gewählt werden, es muss nicht operiert und mathematisch argumentiert werden. Das „Multiple Choice Format" des Beispiels führt zusätzlich zu bekannten Problemen wie etwa jenem, dass die Beweggründe für bestimmte Entscheidungen nicht offengelgt werden müssen und so die Qualität des Arguments nicht zählt. Betrachtet man noch, dass diese neuen Aufgabenformate eigene unvertraute Regelsysteme darstellen, die im Unterricht auch entsprechend geübt werden müssen und dadurch Zeit für den Erwerb von Vertrautheit mit erprobten mathematiküblichen Diagramme genommen wird, so sind Vorteil und Sinn derartiger Aufgabenformate nur schwer erkennbar. Diese neuen Beispiele werden jedenfalls den eingangs angeführten theoretischen Ansprüchen nicht gerecht.

Literatur

Bifie (2011). *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis*. http://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf.

Breyer, G., Heugl H., Kraker, M., Liebscher, M., Liegl I., Preis, Siller H., Stepancik E., Svecnik, E. (2013). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe, Teil 2*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/Publikationen/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil2_2013-12-23.pdf.

Brunner, M. (2009). Lernen von Mathematik als Erwerb von Erfahrungen im Umgang mit Zeichen und Diagrammen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30 (3/4), 206-231.

Brunner, M. (2015b). Bedeutungsherstellung als Lehr- und Lerninhalt. *mathematica didactica* 38, 199-223.

Brunner, M. (2017). Die Rollen der Inskriptionen als nützliche Sichtweise im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, doi:10.1007/s13138-017-0114-z .

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

Dörfler, W. (1988). Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff. In: Brender, P. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*, 29–36. Berlin: Cornelsen.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 27 (3/4), 200–219.

Hoffmann, M. (2005). *Erkenntnisentwicklung, Philosophische Abhandlungen Bd. 90*. Frankfurt a. M.: Klostermann.

Liebscher, M., Breyer, G., Fürst, S., Heugl, H., Kraker, M., Preis, C., Svecnik, E., Liegl., I., Plattner, G. (2014). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe, Teil 1. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1*. Graz: Leykam.

Peschek, W. (1989). Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozess. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10 (3), 211–285.

Martin Brunner, Bundesrealgymnasium Lienz
und Universität Salzburg, Österreich
Email: martin.brunner2@sbg.ac.at