

ne Sackgasse geführt hat. Ihnen können die Videos neue Wege aufzeigen.

Gleichzeitig ermöglichen hier vertretene Grundsätze wie *Subtraktion vor Addition, keine Einführung neuer Zahlenräume über Analogieaufgaben oder Verwendung von Bündelungselementen bei der Thematisierung von Zehnerübergängen*, es der fachdidaktischen Community bestehende Theorien und Konzepte unter diesem Blickwinkel neu zu diskutieren.

4 Literatur:

- Feuser, G. (2013). Kooperation am gemeinsamen Gegenstand. In G. Feuser & J. Kutscher (Hrsg.), *Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik*, (Bd.7) (S. 282–293) Stuttgart: Kohlhammer.
- Gaidoschik, M., Felmann, A., Guggenbichler, S., & Thomas, A. (2017). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(1), 93–124.
- Gerster, H-D., & Schulz, R. (2004). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Verfügbar unter: <http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf> (Abruf am 2. 12. 2018).
- Lorenz, J-H. (1998). Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Göttingen: Hogrefe.
- Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau*, 65(4), 401–426.
- Rödler, K. (1998). Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen – Eine sozialkundliche Einführung in mathematisches Denken. *Grundschule*, 30(5), 45–48.
- Rödler, K. (2006). Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln. Seelze: Kallmeyer.
- Rödler, K. (2010). Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten. *Sache-Wort-Zahl*, 36(114), 44–48.
- Rödler, K. (2011). Zahlen und Rechengänge auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus. In M. Helmerich & K. Lengnink et al. (Hrsg.) ‚Mathematik verstehen‘ (S. 131–145). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Rödler, K. (2012). Frühe Alternativen zum Zählen. *Sache-Wort-Zahl*, 40(129), 9–16.
- Rödler, K. (2016a). *Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./2. Klasse*, Hamburg: aol Verlag.
- Rödler, K. (2016b). Ein Mathematikunterricht für alle! – 10 Bausteine für einen inklusiven MU. *Behinderte Menschen*, 38.
- Radatz, H., & Schipper, W. et al. (1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schuljahr*, Hannover: Schroedel.
- Von Aster, M., & Lorenz J.-H. (Hrsg.) (2005). *Rechenstörungen bei Kindern*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.
- Weißhaupt, S., & Peuckert, S. Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.) *Handbuch Rechenschwäche* (S. 52-76). Weinheim: Beltz Verlag.

Klaus Rödler
E-Mail: klaus.roedler@onlinehome.de

Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells

Hans-Dieter Sill

Eine Möglichkeit zum Modellieren des Lernens von Mathematik ist das konstruktivistische Lernmodell. Es lässt sich skizzenhaft durch folgende Merkmale beschreiben (s. z. B. : Leuders, T. (2001): *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II*. Berlin. Cornelsen Scriptor).

- Lernen ist eine aktive, autonome Konstruktion von Wissen. Jeder konstruiert sich sein eigenes Bild von der Welt. Ein Vergleich dieses Bildes mit der wahren Beschaffenheit der Welt ist weder sinnvoll noch möglich.
- Wichtigste Vorbedingung für den Konstruktionsprozess ist die individuell erworbene kognitive Struktur des Lernens. Die vorhandene geistige Struktur des Lernenden ist die einzige relevante Größe für Verlauf und Ergebnisse des Lernens.
- Wichtigstes Kriterium für die Wirklichkeitskonstruktion ist die Viabilität. Der Lernende beobachtet seine Umwelt und beurteilt den Erfolg seiner Handlungen und Theorien. Erfolgreiche Strategien werden als viable Wege erfahren, um an sein Ziel zu kommen.

Aus diesem Lernmodell ergeben sich aus meiner Sicht unter anderem folgende Konsequenzen für den Mathematikunterricht, die wiederum nur stichpunktartig angegeben werden:

1. Es sind in Lehrplänen keine konkreten Zielangaben und Zeitrichtwerte möglich und sinnvoll. In Umsetzung dieser Doktrin wurden zum Beispiel in Nordrhein-Westfalen zu Beginn der 2000er Jahre alle bisherigen, in jahrzehntelanger Arbeit entstandenen Mathematiklehrpläne aller Schularten durch sehr kurzfristig entwickelte Kernlehrpläne ohne konkrete Inhalts- und Zeitangaben ersetzt.
2. Ein systematisches, fachorientiertes Lernen wird infrage gestellt. Der Unterricht wird projiziert als eine Aneinanderreihung von komplexen „Lerngelegenheiten“, in denen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen selbst konstruieren sollen.
3. Damit einher gehen sowohl eine stärkere Berücksichtigung schüleraktiver Arbeitsformen als auch eine stärkere Selbstverantwortung für den Lernprozess.
4. Die Lerngelegenheiten orientieren sich an Schülerinteressen und ihrer Erlebniswelt.
5. Es wird ein kumulatives Lernen projiziert, da das neue Wissen mit dem vorhandenen verknüpft werden soll.
6. Fehler von Schülern und Schülerinnen werden als Indikator von Schülervorstellungen verstanden und es wird ein konstruktiver Umgang mit Fehlern konzipiert.

Ein Beispiel für ein Unterrichtswerk das diesen Prinzipien folgt, ist z. B. die Reihe „Mathewerkstatt“ im Cornelsen-Verlag, mit der sich Thomas Jahnke in den *GDM-Mitteilungen* Nr. 98 kritisch auseinandergesetzt hat. Ich möchte ergänzend anmerken: Das Bild von Mathematikdidaktik wird in der Schule vor allem durch Unterrichtsreihen geprägt. Wenn sich vier renommierte Mathematikdidaktikerinnen bzw. Mathematikdidaktiker zu einem solchen Projekt zusammenschließen und damit den Anspruch erheben, eine neue Form von Mathematikunterricht und seinen zentralen Planungsmitteln zu kreieren, übernehmen sie eine große Verantwortung. Es ist sehr anerkennenswert, dass sie die unendliche Mühe auf sich genommen haben, ein so komplexes in sich geschlossenes Unterrichtswerk zu entwickeln, das auf einer einheitlichen theoretischen Grundlage basiert. Sie sollten aber die Konsequenz aufbringen, ihr eigenes Unterrichtswerk auch aus konstruktivistischer Sicht zu beurteilen. Wenn es sich für den Mathematikunterricht nicht als viabel erweist, müsste dies auch mit allen Konsequenzen von ihnen eingestanden werden, um Schaden von der Mathematikdidaktik abzuwenden.

Ich halte ein anderes Modell des Lernens von Mathematik, das ich in meinem Lehrbuch „Grundkurs Mathematikdidaktik“ ausführlich dargelegt habe, für viabler zur Gestaltung erfolgreichen Unterrichts (Sill 2018). Die Konsequenzen (3) bis (6), die ich für sinnvoll halte, folgen auch aus meinem Modell.

Mögliche Fehlorientierungen, die sich aus dem konstruktivistischen Lernmodell ergeben, sind mir bei unseren Arbeiten zu einem Lehrbuch zur Didaktik der Stochastik in der Primarstufe aufgefallen, das demnächst erscheinen wird. Es betrifft das Lösen von kombinatorischen Aufgaben. Mit dem erklärten Ziel, die individuelle kognitive Struktur von Lernenden als entscheidende Voraussetzung für Verlauf und Ergebnisse des Lernens zu erforschen, wurden zwei umfangreiche empirische Untersuchungen in der Primarstufe durchgeführt (Hoffmann 2003; Höveler 2014). Beide Doktorandinnen haben das ihnen gestellte Ziel in wissenschaftlich akkurater Weise bearbeitet. Fragen nach dem eigentlichen Sinn ihrer Arbeit bezogen auf den Mathematikunterricht haben sie sich aber, zumindest in ihren Publikationen, nicht gestellt. Dazu gehören:

1. Was macht es für einen Sinn, Schülerinnen und Schüler anspruchsvolle Aufgaben lösen zu lassen, die noch nicht Gegenstand des Unterrichts waren?

In beiden Untersuchungen wurden Schülerinnen und Schüler der Primarstufe interviewt, bei denen im Unterricht das Lösen kombinatorischer Aufgaben noch nicht behandelt wurde. Nun kann man einwenden, dass die Kinder ja die mathematischen Voraussetzungen in Form des Könnens im Lösen der entsprechenden Rechenaufgaben hatten und ihnen auch die Sachverhalte vertraut waren. Schließlich müssen sie auch bei jeder Sachaufgabe ihr Wissen und Können in einem neuen Sachzusammenhang anwenden. Im Unterschied zum Lösen von „normalen“ Sachaufgaben stellt das Lösen kombinatorischer Aufgaben in bekannter Weise sehr hohe Anforderungen, denen selbst Lehramtsstudierende nach erfolgter mathematischer Ausbildung selten gewachsen sind. Das Konfrontieren von Kindern mit Anforderungen, denen sie überhaupt nicht gewachsen sind, ist eine Situation, die im Unterricht nicht auftreten sollte.

2. Was macht es für einen Sinn, die zahlreichen Lösungsversuche und auch sinnvollen Lösungsideen der Schülerinnen und Schüler akribisch zu untersuchen und zu klassifizieren?

Die beeindruckende Zahl von Möglichkeiten der Bearbeitung der Aufgaben und der dabei entwickelten Ideen und Lösungsstrategien sind für den

Unterricht von marginaler Bedeutung. Die Untersuchungen beweisen ja gerade, dass es ausgeschlossen ist, dass Schülerinnen und Schüler von alleine auf die entsprechenden Möglichkeiten zum Lösen der Aufgaben kommen. Nach den ersten Instruktionen und Übungen im Unterricht haben sich die individuellen Voraussetzungen zum Lösen der nächsten Aufgaben grundlegend geändert und die Untersuchungsergebnisse sind kaum noch relevant.

3. Was macht es für einen Sinn, Kinder mit Aufgaben zu konfrontieren, die aus didaktischer Sicht kein Inhalt des Unterrichts in der Primarstufe sein sollten?

Bei den Aufgaben, mit denen die Schülerinnen und Schüler konfrontiert wurden, waren alle Haupttypen kombinatorischer Aufgaben vertreten. Es zeigte sich, dass bei den Aufgaben, die nicht alleine durch Multiplikation lösbar waren, die meisten Fehler auftraten. Genauso wenig wie alle Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen bereits in der Primarstufe uneingeschränkt ausgeführt werden sollten, ist es auch nicht erforderlich, dass bereits alle kombinatorischen Aufgaben gelöst werden müssen. Eine Beschränkung auf Aufgaben, die nur durch Multiplikation, also durch Anwendung des Kreuzproduktes oder der Produktregel lösbar sind, ist eine didaktisch sinnvolle Entscheidung, die dann auch das Untersuchungsfeld der beiden Forschungsarbeiten wesentlich eingeschränkt hätte.

4. Was macht es für einen Sinn, immer wieder etwas zu untersuchen, was längst bekannt ist?

Spätestens seit den empirischen Untersuchungen der Didaktikerin Lyn D. English seit Beginn der Neunzigerjahre ist bekannt, was erfahrene Praktiker schon längst wussten, nämlich welche erheblichen Probleme Lernende beim Lösen kombinatorischer Aufgaben haben und welche unterschiedlichen Strategien dabei auch von Unerfahrenen zur Anwendung kommen.

Angesichts der zahlreichen, noch nicht wissenschaftlich untersuchten Fragen, die von entscheidender Bedeutung für den Erfolg eines Unterrichts zur Kombinatorik sind, stellen für mich die genannten Untersuchungen eine Verschwendung von Forschungsgeldern dar. Zu den offenen Fragen gehören unter anderem:

- Wie lösen Lehrpersonen in der Primarstufe kombinatorische Aufgaben und wie können sie in effektiver Weise befähigt werden, dies zu tun?
- Wie können Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe befähigt werden
 - systematisch beim Finden von Möglichkeiten vorzugehen,

- mit kombinatorischen Baumdiagrammen zu arbeiten oder
- die Produktregel anzuwenden?

Zur wissenschaftlichen Beantwortung all dieser Fragen sind Materialentwicklungen und empirische Untersuchungen zur Durchführung und Nachhaltigkeit des entsprechenden Unterrichts erforderlich. Es müssen Varianten des Vorgehens erprobt und miteinander verglichen werden. Es müssen Typen von Lehrpersonen hinsichtlich ihrer fachlichen und didaktischen Befähigung unterschieden werden.

Am Rande sei noch bemerkt, dass es für mich völlig unverständlich ist, wenn immer noch an den sogenannten kombinatorischen Figuren Permutationen, Variationen, Kombinationen mit und ohne Wiederholung zum Beschreiben und Lösen von Aufgaben festgehalten wird. Davon abgesehen, dass mit ihnen ein wesentlicher Typ von Aufgaben nicht erfasst wird, haben sie sich in der schulischen Praxis und in der Praxis der Lehrerbildung im Lernprozess als ungeeignet erwiesen. Darauf haben bereits Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) in einem Grundsatzartikel hingewiesen.

Literatur

- Hefendehl-Hebeker, L.; Törner, G. (1984): Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik* 12 (4), S. 245–262.
- Hoffmann, A. (2003): *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim: Franzbecker.
- Höveler, K. (2014): *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Dissertation. TU Dortmund.
- Sill, H.-D. (2018): *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Paderborn: Ferdinand Schöningh (StandardWissen Lehramt, 5008).

Hans-Dieter Sill, Universität Rostock
E-Mail: hans-dieter.sill@uni-rostock.de