fraglich, ob man diese begriffliche Erweiterung einführt. Zumindest sollte die Lerngruppe über eine gewisse Souveränität in Sachen „Mengenlehre“ verfügen, und die Schreibfigur sollte mit einer gewissen Häufigkeit auftreten.

19. Als Arnold Kirsch und Heinz Griesel sich vor etwa fünfzig Jahren an die Formalisierung des Begriffs „Größenbereich“ machten, hatten sie den Mathematikunterricht in der Primar- und in der Unterstufe der Sekundarstufe I, mit dem Sachrechnen, den proportionalen Beziehungen usw. vor Augen. Da ging es dezidiert nicht um negative Werte oder um Vektoren, sondern um für die Schülerinnen und Schüler reale Längen, Flächeninhalte, Volumina, Gewichte, Zeitspannen, Geldwerte, auch $\mathbf{N}$, und alle möglichen basalen Tätigkeiten damit wie Zählen, Messen, Schätzen, Kennen von Maßsystemen, Größenvorstellungen, Darstellen (Modellieren, Zeichnen, Schematisieren, Symbolisieren), Sortieren, Rechnen. Alle diese Größen kann man zwar auch mit negativen Vorzeichen versehen oder um eine Größe 0 ergänzen, aber das war nicht das Thema, und von den Schülerinnen und Schülern bekannten Größenarten musste eigentlich nur die Temperatur ausgenommen werden.

Im Stil der damaligen Zeit wurde der Begriff des Größenbereichs axiomatisch gefasst, wie der Begriff der Gruppe, des Vektorraums, der Wahrscheinlichkeit u. Ä. Kirschs Axiomensystem besticht durch seine Einfachheit und spiegelt mit seinen Axiomen das Wesentliche der für die genannten Schulformen und -stufen relevanten Größen sehr gut wieder.

Viele der damals aktiven Grund-, Haupt- und Realschullehrerinnen und -lehrer waren durch die Mathematisierung des Rechen- und Raumlehreunterrichts überfordert, und vermutlich hat ihnen trotz seiner Einfachheit Kirschs Axiomensystem wenig eingeleuchtet. Aber für die Lehrerinnen- und Lehrerausbildung seitdem war es sehr hilfreich.

Natürlich hat R.O. mit seiner Kritik an der Enge dieses Größenbegriffs recht, und seine pragmatische Definition von Größen als Vektoren in einem Vektorraum mit den Einheiten als Basen und mit einer Interpretation in einer Anwendung erscheint sehr sinnvoll, „und mehr benötigt man ... nicht“. Aber man braucht das „Weniger“, einen Begriff für die Größen in der Primar- und der Unterstufe der Sekundarstufe I. Es ist etwas unglücklich, dass das Wort „Größe“ für diese vereinnahmt ist und es für den weiteren Begriff keine kurze, treffende Bezeichnung gibt. Vielleicht könnte man von Größen im engeren und solchen im weiteren Sinn sprechen? Damit wäre das von R.O. aufgeworfene Problem (angemessen) zu einem der Wortwahl zusammengeschrumpft und Kirschs angeblich „schweres Erbe“ müsste nicht „entsorgt“ werden.

Peter Bender, Universität Paderborn
E-Mail: bender@math.upb.de

Gehört der Begriff Größenbereich nach Kirsch zu den Altlasten des Mathematikunterrichts?

Heinz Griesel

Erweiterte Fassung eines Briefes vom 10. 9. 2018 an Herrn Kollegen Oldenburg.[1]

Lieber Herr Kollege Oldenburg!
Sie werden verstehen, dass ich Ihren Aufsatz in den *Mitteilungen der GDM* (Nr. 105, 31–34, 2018) mit dem provozierenden Titel *Altlasten des Mathematikunterrichts* nicht unkommentiert lassen kann. Sie werden sicher auch verstehen, dass ich insbesondere Ihre Anmerkungen zu *Größen* kommentieren möchte, weil ich mich seit mehr als 50 Jahren mit mathematischen und didaktischen Problemen zum Thema *Größen* beschäftigt und dazu viel publiziert habe.

[1] *Vorbemerkung von Werner Blum:* Heinz Griesel ist am 26. November 2018 nach kurzer schwerer Krankheit verstorben. Dieser Brief war seine letzte schriftliche Äußerung. Wir haben uns über diesen Brief ausgetauscht, und Heinz Griesel hat mich gebeten, den Brief redaktionell zu bearbeiten, wenn er dazu nicht mehr in der Lage sein sollte. Die folgende Fassung ist eine minimal bearbeitete Version des ursprünglichen Briefs. Eine ausführliche Würdigung von Heinz Griesel und seines Werks wird in einer der nächsten *GDM-Mitteilungen* erscheinen.

Es dürfte Ihnen nicht entgangen sein, dass auch ich mich in dem Aufsatz *Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich* (GDM-Mitteilungen 98, 2015, S. 14–17) kritisch mit dem Begriff *Größenbereich nach Kirsch* auseinandergesetzt habe. Nach Kirsch sind Größen Elemente eines Größenbereichs. Sogar schon 1997 habe ich eine kritische Würdigung des Begriffs *Größenbereich* vorgenommen (Griesel, 1997, S. 259, S. 277 Abschnitt 11, S. 288 Abschnitt 14).

Sie weisen im Zusammenhang mit der Ablehnung des Begriffs *Größenbereich* darauf hin, dass fast keine „Größen" der Physik *Größen im Sinne von Kirsch* sind, weil negative Werte vorkommen. Das ist völlig zutreffend. Noch gravierender ist, dass selbst eine „Größe" der Physik wie die (*thermodynamische*) *Temperatur* (mit *Kelvin* als Einheit), die nur positive Werte hat, keinen Größenbereich im Sinne von Kirsch bildet, weil eine ontologisch gebundene Addition zwischen den Werten nicht definiert ist. Ähnliches gilt für die physiologische Größe *Lautheit*, die ich hier nur erwähnen und nicht weiter erklären möchte. Beide Größen werden in dem o. a. Aufsatz S. 15 erwähnt.

In dem o. a. Aufsatz gebe ich allerdings auch eine Würdigung des Begriffs *Größenbereich nach Kirsch*. Immerhin ist dieser Begriff mit dem Begriff *Größengebiet nach Frege* identisch. Frege hatte diesen Begriff in seinem epochalem, aber unvollendet gebliebenem Werk *Grundgesetze der Arithmetik* eingeführt, um einen *anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems* vornehmen zu können. In mehreren Arbeiten habe ich das dargestellt und beleuchtet. Immerhin sind wir als Didaktiker gefordert, anwendungsorientierte Aufbauten des Zahlensystems zu entwickeln und deren Grundlagen zu erforschen, u. z. möglichst dicht beim Unterricht, wie er sich im Laufe der Zeit als praktikabel herausgebildet hat. Da ist gegenwärtig durchaus immer noch Forschungsbedarf. Die Bruchrechnung, wie sie gegenwärtig in Deutschland unterrichtet wird, ist in ihren mathematischen Grundlagen immer noch nicht völlig erforscht. Das Buch *Elementare Zahlen- und Größenbereiche* von Arnold Kirsch aus dem Jahre 1970, in welchem der Begriff *Größenbereich* eingeführt wurde, sollte damals einen Beitrag zu diesen Forschungen leisten.

Größenbereiche nach Kirsch bilden außerdem die Wertebereiche der wichtigsten Größen des täglichen Lebens, nämlich der Größen *Anzahl, Länge, Flächeninhalt, Volumen, Masse, Dauer, Geld*. Sie werden im Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 6 behandelt. Die Addition zwischen den Werten dieser Größen wird mit Hilfe der zwischen den Trägern der Größen partiell definierten Verknüpfung (international *concatenate* genannt) eingeführt: $w(\tau) + w(\tau') =_{\text{Def}} w(\tau\tau')$. Inhaltlich bedeutet diese Verknüpfung ein Zusammenfügen oder Aneinanderfügen dieser Träger. Ich habe diese partielle Verknüpfung in Deutsch daher *Zusammenfügung* genannt und vorgeschlagen, dementsprechend statt von *Größenbereich* von *Zusammenfügungsbereich* zu sprechen (Griesel, 2016, S. 12/13; 2013a, S. 307–309, 2013b, S. 24/25). Die Wertebereiche von 5 der insgesamt 7 Basisgrößen des internationalen SI-Systems sind in diesem Sinne Zusammenfügungsbereiche. Das drückt die Bedeutung aus, die diesen Größen in der Physik zukommt. Auch die *Grundvorstellungen* zu Größen und deren Verknüpfungen, wie sie in den Schuljahren 1 bis 6 unterrichtet werden sollten, gelten für Zusammenfügungsbereiche. Speziell das Verteilen und das Aufteilen – die beiden Grundvorstellungen zur Division – beziehen sich auf Zusammenfügungsbereiche.

Ist das Messen mit Hilfe der partiellen Verknüpfung definiert, so spricht man von *Fundamentalem Messen* (Griesel, 2016, S. 11; 2013a, S. 11; 2013b, S. 25).

Aus all diesen Gründen ist der Begriff Größenbereich nach Kirsch nach wie vor wichtig und gehört daher in keiner Weise zu den „Altlasten" des Mathematikunterrichts.

Herr Kirsch hat meinen kritischen Überlegungen, wie sie oben skizziert sind, nicht widersprochen, sondern sie ausdrücklich unterstützt. Er war – ebenso wie ich – ohnehin der Meinung, der Begriff *Größenbereich* gehöre nicht in den Unterricht, sondern als Begriff didaktisch orientierter Sachanalysen in die Lehrerausbildung.

Sie machen dankenswerterweise auch einen Vorschlag zur Größenbegrifflichkeit im Unterricht. Mein Vorschlag für die Grundvorstellungen und den Sprachgebrauch bezüglich Größen im Unterricht ist seit Jahren der folgende:

(1) Man sollte zwischen *Größen* und *Größenwerten* unterscheiden. Die Größe *Länge* hat unendlich viele Größenwerte (Ausprägungen). Beispiele für Größenwerte sind: 5 m, 17 km, 4,5 µm. Die Größe *Masse* hat z. B. 5 kg; 3,5 g; 8 mg als Größenwerte.

(2) Es gibt u. a. *skalare* Größen und *vektorielle* Größen. Die Größe *Länge* ist eine skalare Größe, *Geschwindigkeit* ist eine vektorielle Größe.

(3) Eine skalare Größe ist dadurch charakterisiert, dass ihre Werte *multiplikativ verglichen* werden können. 5m bedeutet 5-mal so lang wie 1 m und 8 kg ist 4-mal so groß wie 2 kg. Mit den Werten einer skalaren Größe kann man formal wie mit Zahlen rechnen. Dabei wird mit den Einheiten (wie kg, m, s) so umgegangen, als wenn es Variable für Zahlen wären. Diese Verfahrenspraxis wird *Größenkalkül* genannt. Beim Größenkalkül werden bei den Rechnungen die Einheiten mitgeführt.

(4) *Eine vektorielle Größe* ist eine positive *skalare Größe*, für deren Werte *zusätzlich* eine *Richtung* definiert ist. Die positive skalare Größe heißt die *Betragsgröße der vektoriellen Größe*. *Positiv* heißt eine skalare Größe, wenn beim multiplikativen Vergleich ihrer Werte nur positive Zahlen als Vergleichsergebnisse vorkommen.

Der Inhalt dieser 4 Thesen sollte situativ in den Unterricht der Sekundarstufen einfließen.

Hier einige zusätzliche Anmerkungen zu den 4 Punkten:

Zu (1): Die Unterscheidung zwischen *Größe* und *Größenwerten* ist sehr wichtig. Man *kann* im Unterricht auch noch von *Trägern* der Größenwerte sprechen. *Bei den didaktisch orientierten Sachanalysen ist das unerlässlich*. Jeder Träger τ „trägt" einen Wert $w(\tau)$. Die Träger einer Größe kann man zu einer Menge T, der Trägermenge zusammenfassen. Die Abbildung $\tau w(\tau)$ heißt *Skala der Größe*. Z. B. ist die Trägermenge der Größe *Länge* die Menge aller rektifizierbaren Kurven. Jede rektifizierbare Kurve τ hat einen Längenwert $w(\tau)$.

Zu (3): Dass man die Werte multiplikativ vergleichen kann, ist das Definiens einer skalaren Größe. Das wird inhaltlich auch so in der DIN-Norm 1313 aus dem Jahre 1998 festgelegt. (Es ist auch die *Grundvorstellung* zum Begriff *skalare Größe*.) Eine Präzisierung des Begriffs *multiplikativer Vergleich* habe ich z. B. in Griesel (2015b, S. 15) geliefert.

Oft wird statt *skalare Größe* abgekürzt nur *Größe* gesagt. Auch ich habe das in diesem Brief oben sowie in Publikationen (z. B. Griesel 1997, 2016) getan. Das kann zu Missverständnissen führen und ist daher nur dann sinnvoll, wenn aus dem Kontext klar erkennbar ist, dass es sich um eine *skalare* Größe handelt.

Zum *Größenkalkül* möchte ich auf meine Arbeit Griesel (2015a) hinweisen. Dort findet sich eine Grundlegung des Größenkalküls. Dort ist auch der Begriff der *Dimension* definiert und insbesondere gezeigt, dass die Dimensionen einen (multiplikativ geschriebenen) reellen Vektorraum bilden, der zu dem (multiplikativ geschriebenen) reellen Vektorraum der zugehörigen kohärenten Einheiten isomorph ist. Diese Vektorräume werden z. B. benötigt, um das berühmte Pi-Theorem der Dimensionsanalyse zu beweisen.

Zu (2): Eine Präzision der *allgemeinen Begriffs Größe* steht noch aus. Die internationale *scientific community* sich verantwortlich fühlender Wissenschaftler hat sich bisher nicht einigen können. Der *allgemeine Begriff Größe* befindet sich seit Jahren im Status der *Aushandlung*. Doch kann man damit durchaus leben. Für das Verständnis der Mathematik und ihrer Anwendungen z. B. in der Physik ist eine Präzisierung des allgemeinen Begriffs der Größe bisher nicht erforderlich gewesen. Strittig ist z. B., ob auch *Intervallmerkmale* wie der *Wasserstand eines Gewässers* als Größe bezeichnet werden sollen. Ich habe den Vorschlag gemacht, in diesen Fällen von *Niveau-Größen* zu sprechen. Soll man alle *Ordinalmerkmale* als Größen bezeichnen? Soll man bei der *Richterskala für die Erdbebenstärke*, bei der *Öchsleskala*, bei der *Oktanzahl* oder beim *PH-Wert* von Größen sprechen? Soll man *Größe* gar mit *Merkmal* identifizieren? Dann wäre auch das Merkmal *Regenbogenfarbe* eine Größe. *Merkmale sind mehrwertige Eigenschaften*. Das Merkmal *Regenbogenfarbe* hat die Werte (Farbwerte): rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett.

Ich persönlich neige zu der Auffassung, ein Merkmal immer dann eine Größe zu nennen, wenn zur Kennzeichnung der Werte des Merkmals Zahlen verwendet werden. Ein Wert des Merkmals *Wasserstand* z. B. wird in der Form 3 m ü. PNP angeben. *Wasserstand* wäre dann eine Größe (Niveau-Größe) (PNP = Pegelnullpunkt), ebenso wie das Merkmal *Säure-Base-Gehalt einer wässrigen Lösung mit der PH-Wert-Skala*, das Merkmal *Erdbebenstärke mit der Richterskala*, das Merkmal *Dichte (Zuckergehalt) von Fruchtsäften mit der Öchsleskala* oder das Merkmal *Klopffestigkeit eines Kraftstoffes mit der Oktanskala*. Keine dieser Größen (vielleicht mit Ausnahme der zuletzt genannten) ist bezüglich der angegebenen Skala eine *skalare* Größe. Das Merkmal *Regenbogenfarbe* wäre *keine* Größe.

Physiker und Techniker legen großen Wert darauf, dass für die Werte der einzelnen Größen bestimmte Buchstaben als Variable vereinbart und in Normen festgelegt werden. Für die Werte der Größe *Masse* hat man den Buchstaben m festgelegt, für die Werte der Größe *Kraft* den Buchstaben F, für die Werte der Größe *Beschleunigung* den Buchstaben a. In der *mathematischen Logik* hat man dieses Wunschphänomen untersucht und Variablen*sorten* unterschieden und der Festlegung von Zeichen für Variable eine wissenschaftliche Grundlegung gegeben. Es ist keineswegs „bedenklich, wenn immer feste Bezeichnungen verwendet werden", wie Sie schreiben, sondern offensichtlich sehr hilfreich, allerdings nicht zwingend erforderlich. Letzteres sollte auch der Schüler wissen.

Ich möchte meinen Kommentar zu Ihrer Arbeit hier abbrechen. Ich hoffe, dass es zu einem Gedankenaustausch zwischen uns kommt, der zu einer Weiterentwicklung der angesprochenen Probleme und letztlich einer Verbesserung von Unterricht führt. Jedenfalls haben Sie eine für unsere Wissenschaft sehr wichtige Diskussion angestoßen. Das ist sehr verdienstvoll. Damit Sie nicht die von mir angesprochenen Arbeiten aufspüren müssen, schicke ich Ihnen Sonderdrucke zu.

Oben angesprochene Literatur

Griesel, H. (1997). Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 18(4), 259–284.

Griesel, H. (2013a). Elementarmathematik als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit. M. Rathgeb u. a. (Hrsg.), *Mathematik im Prozess* (S. 305–318). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Griesel, H. (2013b). Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen. M. Meyer u. a. (Hrsg.), *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik, Festschrift für Horst Struve* (S. 19–33). Hildesheim: Franzbecker.

Griesel, H. (2015a). Der Größenkalkül als ein Rechnen mit Größenwerten. G. Kaiser u. a. (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Unterricht, Festschrift für Werner Blum* (S. 187–201). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Griesel, H. (2015b). Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich. *GDM-Mitteilungen*, 98, 14–17.

Griesel, H. (2016). Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. *Journal für Mathematikdidaktik* 37(1), 5–30.

Mit freundlichem Gruß
Ihr Heinz Griesel

Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht

Wilfried Lingenberg

Abstract. For educational purposes a new non-standard definition of convergence and limit is proposed and shown to be equivalent to the standard definition: If all subsequences of a real sequence (a_n) have the same standard part then (a_n) is called *convergent* and $\mathrm{st}(a_n)$ the *limit* of (a_n).

Die Nichtstandard-Analysis erfreut sich in jüngerer Zeit zu Recht steigender Beliebtheit. Eine wachsende Zahl von Kollegen macht die Erfahrung, damit den Schülern einen intuitiveren und in vieler Hinsicht einfacheren Zugang zur Differential- und Integralrechnung eröffnen zu können.[1]

Einer der wesentlichsten Vorzüge der Nichtstandard-Analysis besteht darin, dass sie ganz auf den notorisch schwierigen Begriff des Grenzwerts verzichten kann. Bis auf weiteres machen jedoch Lehrpläne und Zentralabitur die Beschäftigung mit dem Konvergenzbegriff unumgänglich. Zwar ist ohne weiteres möglich, dies ganz ans Ende eines Analysiskurses zu verschieben, aber auch dann stellt sich die grundsätzliche Frage: Wie definiert man Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht?

Ein Weg wäre ja, eine der herkömmlichen, auf ε-Umgebungen fußenden Definitionen vorzustellen. Einem überzeugten Nichtstandard-Verfechter mag das gegen den Strich gehen (und die klassische Epsilontik wird von Lehrplänen und Fachdidaktik ohnehin mehr und mehr aufgegeben); doch ließen sich auf dieser Grundlage interessante Vergleiche des Standard- und des Nichtstandard-Zugangs anstellen, vielleicht verbunden mit Ausflügen in die Geschichte der Analysis von Leibniz bis Cauchy.

Stimmiger bleibt die Darstellung aber in jedem Fall, wenn auch Konvergenz und Grenzwert konsequent auf Nichtstandardgrundlage eingeführt werden – was Vergleiche der eben beschriebenen Art vielleicht sogar noch eindrücklicher machen kann.

Wer sich jedoch danach in der Literatur umschaut, findet nur eine Definition, die mir für die Schule ungeeignet erscheinen will: *Die reelle Zahl a ist Grenzwert der Folge (a_n), wenn a_ν für alle infiniten hypernatürlichen ν infinitesimal benachbart zu a*

[1] Vgl. zuletzt das Plädoyer von Baumann und Kirski (2016) in dieser Zeitschrift. Weitere Literaturangaben und reichhaltiges Material bei Baumann, Kirski und Wunderling (2013).

[2] So sinngemäß beispielsweise bei Landers und Rogge (1994, 106 f.). Die praktische Anwendung dieses Kriteriums wird unten anhand des letzten Beispiels einmal durchgespielt.