

## Drei Jahrzehnte wissenschaftliche und praktische Aufarbeitung des didaktischen Konstrukts „Grundvorstellungen (und Grundverständnisse) mathematischer Inhalte“ (GVV) Eine Ergänzung

Peter Bender

In den 1980er Jahren hatte ich das Privileg, fast zehn Jahre lang Mitglied einer der führenden deutschsprachigen mathematikdidaktischen Fachgruppen zu sein, der sog. „Kasseler Schule“, bestehend aus Arnold Kirsch, Heinz Griesel, Helmut Postel, Siegfried Seyffferth, Werner Blum und mir. Von den zahlreichen Gesprächen über das Lehren und Lernen von Mathematik vom Primar- bis zum Universitätsbereich habe ich viel profitiert. In diesen Gesprächen ging es immer wieder auch um Grundvorstellungen und Grundverständnisse (GVV) mathematischer Inhalte.

In Veröffentlichungen wurden diese Konstrukte seit den 1970er Jahren ebenfalls von den Kollegen verwendet. Z. B. stellte Griesel (1971) für jede der drei Grundrechenarten „Addition“, „Subtraktion“ und „Multiplikation“ die „Grundvorstellung“ (Singular!) dar (S. 142, 150, 189), interessanterweise jedoch nicht für die Division mit ihren beiden GVV des Auf- und des Verteilens. Oder in dem MU-Heft von Blum & Kirsch (1979) war an vielen Stellen von Grundvorstellungen und von Grundverständnissen die Rede, und zwar in deutlicher Unterscheidung voneinander (z. B. S. 25).

Für die Kollegen handelte es sich um zentrale mathematikdidaktische Konstrukte, die als solche Aspekte des Fachs und der Psychologie verbanden. Allerdings waren sie weder in den Diskussionen noch in den Publikationen scharf umrissen oder gar definiert, wie man an den beiden genannten Beispielen schön sehen kann. Dennoch wussten alle Teilnehmer am Diskurs und wohl auch die Leser, was jeweils gemeint war.

Gegen Ende meiner Kasseler Zeit begann ich, die beiden Konstrukte wissenschaftlich aufzuarbeiten und zog dafür fachliche, psychologische, didaktische und vor allem epistemologische Analyse-Elemente heran. (Grund-)Vorstellungen und (Grund-)Verständnisse sind zunächst einmal deutlich verschiedene Formen der internen Repräsentation mathematischer Inhalte, und mir ging es darum, ihr dialektisches Verhältnis zu klären, d.h. sie einerseits voneinander zu unterscheiden und andererseits miteinander zu verbinden, und zugleich an konkreten Beispielen die Fruchtbarkeit dieser Konstrukte und dieser Dialektik für die didaktische und unterrichtliche Praxis zu demonstrieren.

In einem Vortrag auf der GDM-Bundestagung im März 1990 in Salzburg trat ich damit an die Öffentlichkeit (Bender, 1990), und das Hauptwerk publizierte ich im März 1991 anlässlich Heinz Griesels 60. Geburtstag in einer Festschrift für ihn, die u.a. von Werner Blum herausgegeben wurde (Bender, 1991a).

Neben zwei grundlegenden Aufsätzen zu Fehlvorstellungen und Fehlverständnissen bei Folgen und Grenzwerten (Bender, 1991b) und zu Grundvorstellungen und Grundverständnissen in der Stochastik (Bender, 1997) äußerte ich mich in den 1990er Jahren noch in einigen Vorträgen auch mit Beispielen aus der Primarstufe und der Sekundarstufe I. Während in der Analysisdidaktik diese inhaltlichen Überlegungen durchaus aufgegriffen wurden, traten in der Stochastikdidaktik bei deren betonten Hinwendung zur Beschreibenden und zur Schließenden Statistik seit etwa zwanzig Jahren die w'keitstheoretischen Grundlagen mehr in den Hintergrund. – Das kann sich aber auch wieder ändern. Auf Empfehlung von Werner Blum, dem damaligen 1. Vorsitzenden der GDM, hielt ich als ein Repräsentant der deutschsprachigen Mathematikdidaktik 1996 auf der ICME 8 in Sevilla einen der Hauptvorträge, und zwar zum Thema „GVV“ mit der Überschrift „Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts“ (Bender, 1998).

Ich schätze, dass die schriftliche Fassung dieses Vortrags international nicht die Resonanz im gewünschten Maß erfuhr. Dafür wirkte schon der Titel abschreckend und hatte der englische Text einen allzu „deutschen“ Charakter in den Ausdrücken, im Satzbau, in der Grammatik (und zwar trotz Glättung durch einen mathematikdidaktisch ausgewiesenen native Speaker), in der ganzen Art und Weise, wie die Problematik angegangen wurde, ja, in der Problematik selbst. Im Englischen heißt es da einfach und vereinfachend „concept image“ (Tall & Vinner, 1981). – Vermutlich geht es der Mehrzahl der Publikationen, die die deutschsprachige Kommunität auf Englisch verfasst, ähnlich, zumindest wenn in ihnen pädagogische Fragestellungen mit einem gewissen Tiefgang behandelt werden. Das fängt ja schon mit dem nicht wörtlich übersetzbaren Begriff „Mathematikdidaktik“ an (s. dazu z. B. Fahse, 2018).

Nach meiner Übersiedlung Ende 1988 nach Paderborn hatte auch Rudolf vom Hofe mit seiner Dissertation bei Werner Blum fast zum selben Thema begonnen, ohne dass wir zunächst voneinander wussten. Ich sage deswegen „fast“, weil bei ihm die „Verständnisse“ ausgespart blieben; sein Thema lautet bis heute „Grundvorstellungen“. Es ist klar, dass „Vorstellungen“ und „Verständnisse“ irgendwie miteinander verwoben sind, insbesondere ist auf der psychologischen Ebene Verstehen kaum ohne Vorstellungen möglich. Selbstverständlich ist es legitim, sich bei der wissenschaftlichen Bearbeitung eines Gebiets auf einen Teilbereich zu beschränken, und in der theoretischen sowie praxisbezogenen Ausarbeitung des Konstrukts „Grundvorstellungen“ hat Rudolf vom Hofe über viele Jahre hinweg viel geleistet.

Zumindest bezieht er sog. *Grundeinsichten* ein. Dieses Konstrukt hat allerdings nur sehr eingeschränkt mit *Grundverständnissen* (als Komplementärbegriff zu *Grundvorstellungen*) zu tun, da es sich dezidiert auf die *Anwendung* von Mathematik bezieht, indem es „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur“ bedeutet (vom Hofe, 1995, S. 97f).

Die deutschsprachige mathematikdidaktische Kommunität ist mit dem Konzept der *Grundvorstellungen* insgesamt zufrieden, und so wurde die Begrifflichkeit der *Grundverständnisse* über meine Arbeiten hinaus kaum weiterentwickelt. Hin und wieder scheinen sie doch auf. Z. B. hat Anna-Katharina Roos bei ihrer Auffächerung des Grundvorstellungen-Konzepts einmal unvermittelt doch vom „Verständnis mathematischer Begriffe“ gesprochen (2017, S. 805). Womöglich würde man in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik noch an weiteren Stellen fündig. Ich habe das aber nicht systematisch verfolgt.

Rudolf vom Hofe hat m. W. seine auch historisierende Aufarbeitung des Konstrukts „Grundvorstellungen“ erstmals im Frühjahr 1993 einem breiteren Publikum präsentiert (vom Hofe, 1992). Dabei stellte er u. a. fest:

Einen wesentlichen Beitrag zu einer begriffstheoretischen didaktisch-psychologischen Einordnung dieser Termini leistete Bender [1991] in Anknüpfung an Griesel, Blum und Kirsch. Anhand von Beispielen aus dem Sekundarstufenbereich erläutert er die Tragfähigkeit des Konzepts der Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen für die Praxis, wobei er ein besonderes Gewicht auf die Rolle anschaulicher Metaphern für die Sinnkonstituie-

rung grundlegender mathematischer Begriffe legt. (S. 346)

[FN 2:] Der Begriff ‚Kern‘ eines mathematischen Inhalts wird hier i. S. von Bender (1991) benutzt. [...] Vgl. hierzu Bender [1991] S. 49f. (S. 362)

In der Dissertation (vom Hofe, 1995) führte er aus:

Einen wohl ersten wesentlichen Beitrag zu einer theoretischen Einordnung der (sic!) Begriffs „Grundvorstellung“ aus psychologisch-phenomenologischer Perspektive hat Bender [1991a] geleistet. In der vorliegenden Arbeit sollen nun weitere Schritte zur theoretischen Klärung unternommen werden. (S. 13)

In einem späteren englischsprachigen Bericht (vom Hofe, 1998) schrieb er:

Oehl ... his approach had much influence on later concepts; it was continued and enlarged to include mathematical content at the secondary school level by Griesel (1971), Blum & Kirsch (1979), Bender (1991), and vom Hofe (1992), among others. (S. 319)

Als die Dissertation 1995 als Buch erschien, wurde sie aus dem Lager der damals modernen „Interpretierer“ als „stoffdidaktik-lastig“ geschmäht und wurde ihrem Autor ein Ende seiner mathematikdidaktischen Karriere vor ihrem Beginn vorausgesagt. Ich konnte meinen Freund Rudi mit der Prognose beruhigen, dass unser Konzept sich einmal zum Standard in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik entwickeln würde.

Zum weiteren Fortgang der Geschichte siehe vom Hofe & Blum (2016).

#### Literatur

- Bender, P. (1990). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen, insbesondere der SII. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1990* (S. 73–76). Hildesheim: Franzbecker.
- Bender, P. (1991a). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Hannover: Schroedel.
- Bender, P. (1991b). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 44, 238–243.
- Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule*, 17(1), 8–33.

- Bender, P. (1998). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. Hauptvortrag auf dem ICME 8 1996 in Sevilla. In C. Alsina u. a. (Hrsg.), *8th International Congress on Mathematics Education. Sevilla 14–21 July 1996. Selected Lectures*. (S. 57–74). Sevilla: S.A.E.M. ‚Thales‘.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis IV. *Der Mathematikunterricht* 25(3).
- Fahse, C. (2018). On the Problem or Chance of Publishing in a Foreign Language. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 517–520). Münster: WTM.
- Griesel, H. (1971). *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 1*. Hannover: Schroedel.
- Roos, A.-K. (2017). Analyse von Fehlerursachen auf drei Ebenen – Grundvorstellungen – concept image – Vorwissen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 805–808). Münster: WTM.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.
- vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 345–364.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg u. a.: Spektrum.
- vom Hofe, R. (1998). On the Generation of Basic Ideas and Individual Images: Normative, Descriptive and Constructive Aspects. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Hrsg.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Dordrecht: Kluwer, 317–331.
- vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a Category of Subject Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37 (Supplement 1), 225–254.

Peter Bender, Universität Paderborn  
E-Mail: [bender@math.upb.de](mailto:bender@math.upb.de)