

didee, wie Materialien das Lernen anregen, stützen und vorantreiben können. Dabei greifen die Beiträge immer wieder auch das Stichwort „Spiele“ auf und beinhalten spielerische Aktivitäten, die Lust auf mathematisches Tun vermitteln. Darüber hinaus hat Jürgen Floer versucht, weitere Beziehungen zum Mathematikunterricht zu beleuchten; z. B. zum Sachunterricht, zur Umwelterschließung, zum Sport- und zum Kunstunterricht. Sein Hauptthema aber blieb „Lernmaterialien als Stützen der Anschauung im arithmetischen Anfangsunterricht“, wie ein Titel aus dem Jahr 1992 lautet. Für sein gesamtes didaktisches Wirken, insbesondere in der Zeit danach, muss man diesen Titel auch auf den geometrischen Anfangsunterricht erweitern.

Wir kennen Jürgen Floer auch als sehr sozial engagierten Menschen. Hier seien nur zwei Projekte angeführt, für die er sich besonders einsetzte. Seit mehr als 30 Jahren gehörte er dem wissenschaftlichen Beirat der „abc-Gesellschaft“ an, einer Organisation, die in Afrika, Asien und Südamerika bisher 23 Schulen gebaut und eingerichtet hat. In den letzten Jahren unterstützte er außerdem die Initiative „Angels' Care“, die sich um vernachlässigte Kinder in Südafrika kümmert. Außerdem soll nicht

unerwähnt bleiben, dass Jürgen Floer, der sich für alle Arten Sport interessierte, bis ins hohe Alter ein leistungsstarker Tennisspieler war.

Jürgen Floer hinterlässt ein umfangreiches didaktisches Werk. Er entwickelte (natürlich in Zusammenarbeit mit weiteren Autoren) eine Fülle von Materialien, die hier leider nur sehr oberflächlich beschrieben werden konnten, aber für viele Lehrkräfte eine effektive Hilfe bei ihrer täglichen Arbeit im Unterricht darstellen. Die Leidenschaft, mit der er seine Ideen vorantrieb und weitere Pläne für die nähere Zukunft entwickelte, wurde jäh durch seine Erkrankung und raschen Tod beendet.

Wir trauern um Jürgen Floer als Kollegen und Freund und werden ihn in dankbarer Erinnerung halten.

Manfred Möller, TU Dortmund  
E-Mail: [uummoeller@arcor.de](mailto:uummoeller@arcor.de)

Berthold Schuppar, TU Dortmund  
E-Mail: [berthold.schuppar@tu-dortmund.de](mailto:berthold.schuppar@tu-dortmund.de)

Daniela Götze, Stephan Hußmann, Marcus Nührenböcker, Susanne Prediger und Christoph Selter, TU Dortmund

## Peter Yff und die Dreiecksgeometrie — zu seinem 95. Geburtstag

Horst Hischer

... es ist in der That bewundernswürdig, daß eine so einfache Figur, wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist.  
August Leopold Crelle, 1821

### Zur Person



Peter Yff wurde am 8. März 1924 in Chicago geboren. Sein Vater war aus Amsterdam eingewandert, und aus dem Namen „Ijff“ („Eiff“ ausgesprochen) wurde der ebenso ausgesprochene Name „Yff“.

Von 1951 bis 1986 war Peter Yff überwiegend Fakultätsmitglied der Ame-

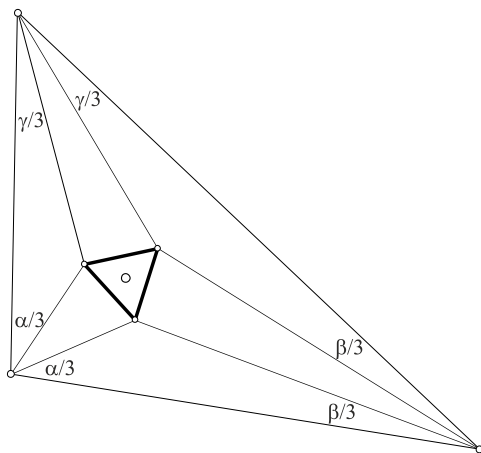
rikanischen Universität in Beirut, wobei er 1957 an der University of Illinois mit der Arbeit „On Line Complexes in a Projective Four-Space“ promoviert wurde. 1986 kehrte er in die USA zurück, wo er bis 1997 vor allem an der Ball State University in Indiana lehrte. Seit 2000 lebt er mit seiner aus Haifa, Palästina, stammenden Frau Julie wieder in Chicago. Zur Kurzvita von Yff:

- *American University of Beirut*: 1951–1955 und 1958–1988 zunächst *Associate Professor* und *Assistant Professor*, seit 1964 *Professor of Mathematics*, ferner dort *Department Chairman* von 1952–1955, von 1961–1964 und von 1984–1986.

- *University of Toronto*: 1964–1965 *Research Fellow* durch Stipendium am National Research Council of Canada während eines von der American University of Beirut gewährten Sabbat-Jahrs.
- *Fresno State College*: 1957–1958 *Assistant Professor of Mathematics*.
- *Birzeit University (Bir Zait, West Bank)*: Sommer 1975 *Visiting Professor of Mathematics*.
- *University of Jordan*: Sommer 1985 *Visiting Professor of Mathematics*.
- *University of Illinois*: Februar bis August 1987 *Visiting Scholar*.
- *University of Louisville*: 1987–1988 *Visiting Lecturer*.
- *Ball State University*: 1988–1997 *Visiting Professor of Mathematics*.
- 1992–93: *Collaborative Grant for Research* in der Theorie endlicher Gruppen als Auszeichnung gemeinsam mit Jozsef Denes (Budapest).

### Peter Yff und das Morley-Dreieck

Im Sommer 2005 stieß ich erstmals auf den Namen „Peter Yff“, und zwar bei der grundlegenden Überarbeitung meiner für das Lehramtsstudium konzipierten Vorlesung „Grundbegriffe der Elementargeometrie in historisch-genetischer Sicht“. An den Anfang dieser Vorlesung stellte ich in motivierender Absicht den schönen und bekannten *Satz von Morley*, der besagt, dass jedem Dreieck über die Schnittpunkte der Winkeldrittelnden der Innenwinkel ein inneres *gleichseitiges Dreieck* zugeordnet ist, genannt *Morley-Dreieck*.



Das Morley-Dreieck jedes Dreiecks ist gleichseitig

Mit den heute verfügbaren Programmen für eine „Bewegliche Geometrie“ ist dieses überraschende und zugleich ästhetische Phänomen im Rahmen einer solchen computerbasierten „praktischen Geometrie“ leicht „konstruktiv“ präsentierbar, was jedoch spontan die Frage nach einem Beweis innerhalb der „theoretischen“ Euklidischen Geometrie aufwirft.

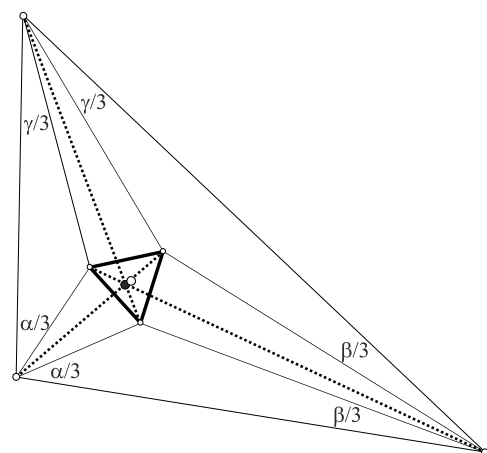
Frank Morley (1860–1937), gemäß Oakley & Baker (1978, 737) ein „großer algebraischer Geometer“, wurde durch diesen später nach ihm benannten Satz berühmt, jedoch taucht dieser Satz bei ihm nur nebenbei und implizit als Spezialfall einer 1900 in seiner Abhandlung „On the metric geometry of the plane  $n$ -line“ veröffentlichten Theorie auf.



Frank Morley

Bei der Recherche nach den seitdem publizierten vielfältigen und recht unterschiedlichen Beweisen dieses Satzes stieß ich u. a. auf eine Webseite von Rudolf Fritsch (München, † 2018, vgl. MGDM Nr. 105, 2019, S. 59f.), auf der dieser ein weiteres schönes, damit zusammenhängendes Phänomen erwähnt, das zugleich als Beispiel für „Perspektive“ dienen kann:<sup>1</sup>

Der Mittelpunkt des Morley-Dreiecks eines Dreiecks wird gelegentlich als *Erster Morley-Punkt* des Ausgangsdreiecks bezeichnet. Im Jahr 1967 bewies Peter Yff mit Hilfe von trilinearen Koordinaten, dass ein Dreieck und sein Morley-Dreieck – wie in der ersten Abbildung gezeigt – perspektive Lage zueinander haben. Er bezeichnete das Zentrum der Perspektivität als *Zweiten Morley-Punkt* des Ausgangsdreiecks.



Erster Morleypunkt (voll) und zweiter Morleypunkt (hohl)

<sup>1</sup> [www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/morley.pdf](http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/morley.pdf) (noch gültig am 8. 3. 2018, nunmehr leider geschlossen).

In meinem Vorlesungsskript zitierte ich diese Aussage über den o. g. „zweiten Morleypunkt“ als „Satz von Yff“. Zugleich war dies für mich der Anlass zu klären, wer Peter Yff ist, ob er noch lebt und wie man ihn erreichen kann. Nachdem ich endlich seine E-Mail-Adresse entdeckt hatte, schrieb ich ihn am 7. 3. 2011 an mit der Bitte um Mitteilung, wann und wo er den Beweis veröffentlicht habe. Wenige Tage später antwortete er mir:

It is true that I proved these results in 1967, but I never published them. I believe that they became known after I gave them to Clark Kimberling about 20 years ago. Although I was born in Chicago, I was a faculty member at the American University of Beirut during 1951–1986. For a long time I did not know many others who were studying triangle geometry, and I merely wrote my results in a notebook.

In my entry for 19 February 1967 I wrote the trilinear coordinates for the first Morley center, for which the first coordinate is

$$\cos(A/3) + 2 \cos(B/3) \cos(C/3).$$

In Kimberling's encyclopedia this is now listed as X(356), or Morley center. I also located the second Morley center, with first coordinate  $\sec(A/3)$ , which is now listed as X(357), or first Morley–Taylor–Marr center. Finally I found the Morley–Yff center, with first coordinate  $\cos(A/3)$ , which is now listed as X(358), or second Morley–Taylor–Marr center.

Kimberling changed the names of X(357) and X(358) after he learned that they were found by Taylor and Marr in a paper published in Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1913–1914.<sup>2</sup> This preceded my discovery by over 50 years.

My proof was entirely algebraic, using the trilinear coordinate system.

Yff hat also damals seine Entdeckung und seinen Beweis (mittels trilinearer Koordinaten) nicht publiziert, weil er dem Eindruck erlegen war, dass sich niemand für Dreiecksgeometrie interessieren würde. Das hat sich mittlerweile geändert, wie man z. B. an Peter Bapists Buch *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie* (1992) sieht, insbesondere an der von Clark Kimberling (s. o.) gepflegten *Encyclopedia of Triangle Centers*, in der viele tausend „Dreiecks-Mittelpunkte“ mit Quellenangaben erfasst sind.<sup>3</sup> Yff wird in dieser Enzyklopädie an vielen Stellen erwähnt.<sup>4</sup>

Hieraus entwickelte sich eine zunehmend intensivere Korrespondenz zwischen uns und mittlerweile eine Freundschaft, die sowohl gemeinsame fachliche Interessen als auch Privates umfasst.

### Publikationen von Peter Yff

Die *Dreiecksgeometrie* ist ein Schwerpunkt in Yffs Forschungen, aber er hat auch Endliche Gruppen und Endliche Projektive Ebenen untersucht:

- A representation of the commutator subgroup. In: *Mathematics Magazine* (1956), 161.
- On the Brocard points of a triangle. In: *American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 520–525.
- An analogue of the Brocard points. In: *American Mathematical Monthly*, **70** (1963), 495–501.
- On  $k$ -conjugacy in a group. In: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **14** (Series II) (1964), 1–4.
- Groups with identical subgroup structures. In: *Mathematische Zeitschrift*, **99** (1967), 178–181.
- Subplane decomposition of the projective plane of order 49. In: *Iranian Journal of Mathematics* (1974).
- On subplane partitions of a finite projective plane. In: *Journal of Combinatorial Theory*, **22** (1977), 118–122.
- A subplane partition of the cyclic plane of order 81. In: *Arab Journal of Mathematics*, **1** (1980), 32–37.
- A triangle property in trilinear coordinates. In: *Proceedings of the Conference on Algebra and Geometry*, Kuwait University (1981). (Als Beitrag für die Proceedings, begutachtet durch G. Pickert.)
- On the beta-lines and beta-circles of a triangle, From Deferent to Equant. In: *Annals of the New York Academy of Sciences*, **500** (1987), 561–569. (Ein erbetener Beitrag für eine Festschrift zu Ehren von Professor E. S. Kennedy.)
- On the Denes–Hermann theorem; a different approach. In: *European Journal of Combinatorics*, **12** (1991), 267–270.
- Some research problems on finite groups (mit J. Denes). In: *Pure Mathematics and Applications*, Series A, **3** (1992), No. 1–2, 109–115.
- The application of finite simple groups to the generation of strong pseudorandom sequences and permutations (mit J. Denes). In: *Pure Mathematics and Applications*, **4** (1993), 429–438.
- Two families of cubics associated with a triangle. In: *Eves' Circles*, a book published by the Mathe-

<sup>2</sup> Vgl. [Taylor & Marr 1913].

<sup>3</sup> <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> (am 7. 6. 2019 waren es 32 623 Einträge)

<sup>4</sup> An 64 Stellen am 7. 6. 2019.

mathematical Association of America, Notes No. 34, (1994), 127–137.

- Curve stitching, epicycloids, and hypocycloids (mit Alice Robold). In: *School Science and Mathematics*, November 1996.
- The circumcircle and the line at infinity (mit C. Kimberling). In: *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 9, No. 1, Winter 1997, 3–22.
- A generalization of the Tucker circles. In: *Forum Geometricorum*, 2 (2002), 71–87.
- The isoperimetric point and the point(s) of equal detour in a triangle (mit M. Hajja). In: *Journal of Geometry*, Vol. 87, Issue 1–2 (November 2007), 76–82.
- A family of quartics associated with a triangle. In: *Forum Geometricorum*, 9 (2009), 165–171. (Das *Forum Geometricorum* liegt nur im WWW vor: <http://forumgeom.fau.edu>)

In <http://mathworld.wolfram.com>, der bekannten, von Eric Weisstein konzipierten Website, genannt *WolframMathWorld*, findet man bei der Suche nach „Yff“ 58 Seiten, die auf ihn mit Beispielen zur Dreiecksgeometrie Bezug nehmen, so u. a. zum *First Yff Triangle* und zum *First Yff Point*.

Abschließend sei hier noch die Bezeichnung „Isoscelizer“ erwähnt, die man etwa mit „Gleich-

schenkligmacher“ übersetzen könnte und die Yff – nach eigener Mitteilung mir gegenüber – in die Literatur eingeführt und auch Eric Weisstein (s. o.) mitgeteilt hat.

Manche der in der o. g. *WolframMathWorld* in Verbindung mit Yff beschriebenen Beispiele können auch im Geometrieunterricht Interesse weckend vorgestellt und dann mit Programmen zur Beweisgeometrie zumindest erkundet werden.

#### Literatur

- Baptist, Peter: *Die Entwicklung der neuen Dreiecksgeometrie*. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI Wissenschaftsverlag, 1992.
- Oakley, Cletus O. & Baker, Justine C.: The Morley trisector theorem. In: *American Mathematical Monthly*, 85(1978), 737–745.
- Taylor, F. Glanville & Marr, W. L.: The Six Trisectors of each of the Angles of a Triangle. In: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 32(1913), 119–131.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes  
E-Mail: [hischer@math.uni-sb.de](mailto:hischer@math.uni-sb.de)

## Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

- **Vorstand. 1. Vorsitzender:** Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel, Institut für Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel. Tel. 0561.804-4310 [eichler@mathematik.uni-kassel.de](mailto:eichler@mathematik.uni-kassel.de)
- **2. Vorsitzende:** Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641.99-32221, [katja.lengnink@math.uni-giessen.de](mailto:katja.lengnink@math.uni-giessen.de)
- **Kassenführer:** Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31,

06110 Halle (Saale). Tel. 0345.5523-880, [torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de](mailto:torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de)

■ **Schriftführerin:** Prof. Dr. Daniela Götze, Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, IEEM – Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund. Tel. 0231.755-6107, Fax. 0231.755-2948, [daniela.goetze@math.tu-dortmund.de](mailto:daniela.goetze@math.tu-dortmund.de)

■ **Bankverbindung:** Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.

■ **Homepage der GDM:** [www.didaktik-der-mathematik.de](http://www.didaktik-der-mathematik.de)

## Impressum

- Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Grafische Gestaltung: Christoph Eyrich, Berlin ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin
- Der Bezugspreis der *GDM-Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.