Das Epsilon-Delta Spiel und Schach

Zoltán Kovács und Peter Mayerhofer

Einleitung

Die Definition des Grenzwertes von Folgen und Funktionen zu *verstehen* ist und bleibt eine Herausforderung über Generationen hinweg. Auch für die Lehrkraft stellt es eine intellektuelle Herausforderung dar, den Inhalt und die Bedeutung der Definition zu vermitteln, einschließlich der Auswahl von Beispielen für ihr Publikum, die das Verständnis fördern. Die Studierenden sind natürlich sehr unterschiedlich, und der immer breitere Zugang zu Bildung macht effiziente Unterrichtsmethoden für die Vermittlung mathematischer Inhalte an ein möglichst heterogenes Publikum erforderlich.

In diesem Paper wird eine Idee für die Einführung der Definition des Grenzwertes einer Folge mit ε vorgeschlagen. Diese Idee ist nicht wirklich neu, und es könnte sogar zu einer gängigen Methode werden, diese Definition mithilfe eines Zweipersonen-Spiels zu beschreiben. In diesem Artikel wird dieses Spiel genauer beschrieben. Diese Methode kann auch erweitert werden auf die Definition des Grenzwertes einer Funktion mit ε und δ.

Interaktive Materialien für das Epsilon-Delta-Spiel sind auch im Internet verfügbar. Eines der ersten veröffentlichten Materialien ist von Townsend [5], ein Mathematica-Applet, das vor 15 Jahren veröffentlicht wurde. Ein weiteres Beispiel ist das GeoGebra-Material von Mulholland [3], das direkt in einem Webbrowser gestartet werden kann.

Der Grenzwert einer Folge

Eine typische Definition für den Begriff des Grenzwertes ist die folgende: Gegeben sei die reelle Zahlenfolge a_n. Wir bezeichnen die reelle Zahl a als Grenzwert der Folge a_n, wenn für jede positive Zahl ε eine natürliche Zahl N existiert, so dass für alle $n > N$ gilt: $|a - a_n| < \varepsilon$. Oder, symbolisch:

$$\exists a \in \mathbf{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n > N (n \in \mathbf{N}) \quad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Der erste Existenzquantor wird nicht immer angeführt, aber im Folgenden wird er eine wichtige Rolle spielen.

Bei der ersten Annäherung an diese Definition im Unterricht wird das Epsilon konkrete Werte bekommen, für die konkrete Zahlen für N gesucht werden. Dies verkürzt die Definition zu:

$$\exists N \in \mathbf{N} \qquad \forall n > N (n \in \mathbf{N}) \qquad |a - a_n| < \varepsilon.$$

Während die allgemeine Definition mit folgendem Schema beschrieben werden kann:

$$\exists \qquad \forall \qquad \exists \qquad \forall$$

findet man hier das verkürzte Schema

$$\exists \qquad \forall$$

Diese Schemata sind identisch mit der Struktur der letzten ein oder zwei Züge eines Zweipersonen-Spiels:

1. Alice hat einen Zug, sodass
2. auf alle Züge von Bob
3. Alice wiederum einen Zug hat, sodass
4. Bob mit jedem beliebigen weiteren Zug verliert.

Beziehungsweise für das verkürzte Schema:

1. Alice hat einen Zug, sodass
2. Bob mit jedem beliebigen weiteren Zug verliert.

Aus Sicht der mathematischen Logik könnte jede Art von Zweipersonen-Spiel verwendet werden, um diese Struktur als alltägliches Beispiel zu illustrieren. Nichtsdestotrotz gibt es einige Punkte, die dafürsprechen, hier das Schachspiel zu verwenden:

- Schach ist ein bedeutendes Element der menschlichen Kultur, bedenkt man, dass ein Schachbrett für fast jeden erkennbar ist (auch wenn die Schachregeln nicht immer vollständig bekannt sind).
- Die Regeln des Schachspiels werden von den Studierenden größtenteils verstanden. Wo dies nicht der Fall ist, können die grundlegenden Spielregeln in einer kurzen Lektion eingeführt werden, die ausreicht, um die Definition des Grenzwertes in der Mathematik zu verstehen (siehe unten).
- Das Spiel ist anschaulich, zweidimensional, daher wird sich der Fokus auf eine andere Interpretation konzentrieren: Dies ist die *grafische* Darstellung von Wissen als Erweiterung/Ergänzung der *numerischen* und *verbalen* Argumentation [2].
- In vielen Ländern gibt es eine lange Tradition des Schachunterrichts an den Schulen.
- Durch die Analyse von einfacheren oder auch schwierigeren Schachaufgaben kann die Struktur der Definition des Grenzwertes vereinfacht werden, um nur eine begrenzte Anzahl von Fällen zu untersuchen.

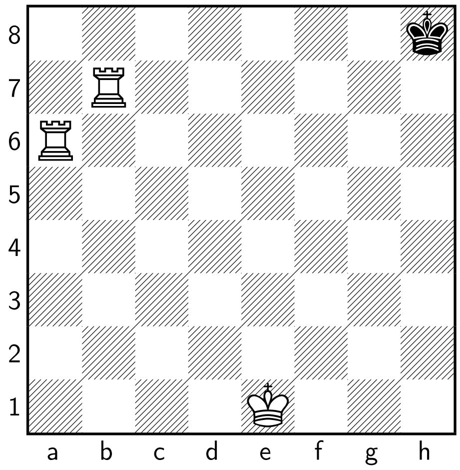

Abbildung 1. Matt in einem Zug

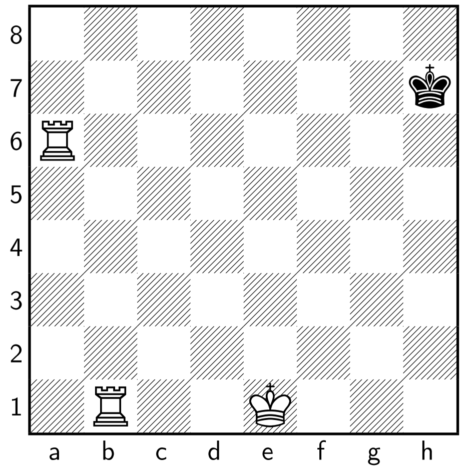

Abbildung 3. Matt in zwei Zügen

Abb. 1 illustriert die oben beschriebene Idee.

Es kann ein Zusammenhang zwischen dem Auffinden von N für ein bestimmtes Epsilon und dem Lösen einer Schachaufgabe der Form „Matt in einem Zug" hergestellt werden. Für diejenigen Schüler, die die Regeln des Schachspiels nicht kennen, kann eine einfache Aufgabe gezeigt werden. In diesem Beispiel (siehe Abbildung oben) gibt es auf dem Schachbrett nur zwei Arten von Figuren, nämlich Könige und Türme, deren Zugmöglichkeiten leicht erklärt sind. In unserem Fall entspricht dem N für ein konkretes ε der Turmzug nach a8 (Ta8), so dass der schwarze König keinen regelkonformen Zug mehr hat: nach allen 3 „möglichen" Zügen bleibt der schwarze König im Schach, er ist also schachmatt. Das bedeutet, dass der Zug Ta8 dem N der Definition entspricht, für das ja jedes weitere Folgenglied in der Epsilonumgebung von a liegt, in dem Sinne, dass jeder weitere Zug von Schwarz dazu führen würde, dass der schwarze König geschlagen werden könnte, was eben schachmatt bedeutet (siehe Abb. 2).

Für diejenigen, die die Schachregeln bereits kennen, ist es auch möglich, schwierigere Aufgaben zu lösen. Es gibt im Internet viele solcher Aufgaben, eine mögliche Seite ist www.schach-tipps.de/schachtraining/taktik/matt-in-1-zug.

Möglicherweise brauchen unsere Studierenden einige Zeit, vom „Matt in einem" zum „Matt in zwei Zügen" weiterzugehen. Es kann eine große intellektuelle Herausforderung für viele Schüler bedeuten, das konkrete ε zu einem allgemeinen zu ändern (siehe zum Beispiel [4]). Eine kleine Modifikation der Aufstellung der Figuren auf unserem Schachbrett wie in der nächsten Abbildung ändert das Problem grundlegend, da Weiß kein Schachmatt in einem Zug mehr hat, sondern nunmehr mindestens zwei Züge benötigt (siehe Abb. 3).

Tatsächlich muss hier zuerst der Turm von b1 auf b7 schach geben, wonach auf jede Antwort des schwarzen Königs der auf der a6 befindliche Turm auf a8 mattsetzt. Das Problem kann durch Vorgabe der Züge Tb7–Kh8 auf das bereits zuvor gelöste Problem zurückgeführt werden.

Schließlich ist die Zugfolge Tb7–K?–Ta8–K? in unserem Kontext von der gleichen Struktur wie „$\exists\forall\exists\forall$", was die Schüler auf die genaue Definition des Grenzwerts vorbereiten wird (Abb. 4).

Es ist klar, dass es auf die Züge von Weiß jeweils mehrere „Pfeile", i.e. Züge gibt, das Spiel fortzusetzen (da *für alle* Züge von Schwarz eine Antwort von Weiß existiert), während die Züge von Schwarz nur durch einen Pfeil fortgesetzt werden (da es für Weiß ausreichend ist, *einen* geeigneten Zug zu finden).

Schwierigere Rätsel können z. B. unter www.chesspuzzles.com/mate-in-two gefunden werden.

$\exists$		$\forall$		
	→	Kg8	→	
Ta8#	→	Kg7	→	Tx
	→	Kh7	→	

Abbildung 2. Matt in einem Zug, Diagramm des weiteren Spiellaufs

$\exists$		$\forall$		$\exists$		$\forall$		
					→	Kf8	→	
					→	Kf7	→	
				Ta8#	→	Kg7	→	Tx
			↗		→	Kh7	→	
		Kg8			→	Kh8	→	
	↗							
Tb7+								
	↘							
		Kh8			→	Kg8	→	
			↘	Ta8#	→	Kg7	→	Tx
					→	Kh7	→	

Abbildung 4. Matt in zwei Zügen, Diagramm des weiteren Spiellaufs

Grenzwert einer Funktion

Offensichtlich hat die Definition des Grenzwertes einer Funktion die gleiche Struktur wie das „Matt in zwei"-Problem: Wir sagen, eine reelle Funktion $f(x)$ hat einen Grenzwert bei x_0, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $0 < |x - x_0| < \delta$ stets $|f(x) - a| < \varepsilon$ folgt. Oder, in symbolischer Notation:

$$\exists a \in \mathbf{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Versuchen wir, ein konkretes Beispiel ähnlich dem Diagramm für „Matt in zwei" zu konstruieren: Wir wollen beweisen, dass die Funktion $f(x) = x^2$ einen Grenzwert bei $x = 3$ hat.

Der Grenzwert ist eindeutig $a = 9$, das wird also der erste „Zug" für „Weiß" sein. Nehmen wir an, „Schwarz" antwortet mit dem „Zug" $\varepsilon = 1$. In diesem Fall impliziert die Ungleichung $|x^2 - 9| < 1$ die entsprechenden Ungleichungen $8 < x^2 < 10$, die klarerweise erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{8}$. Das heißt, für dieses konkrete Epsilon bietet sich die Wahl $\delta = 3 - \sqrt{8}$ an. Wenn beispielsweise $x = 2.9$, dann ist die Differenz dieses Werts zu 3 kleiner als $3 - \sqrt{8} \approx 1.7$, und in der Tat ist $2.9^2 = 8.41$, dessen Differenz zu 9 kleiner ist als 1. Oder, um einen Schritt weiter zu gehen, für $x = 2.95$ ist der Unterschied zu 3 noch geringer: in diesem Fall ist $2.95^2 = 8.7025$ noch näher bei 9. Es ist offensichtlich, dass eine (unbegrenzte) Anzahl weiterer Beispiele angeführt werden könnte.

Sei nun $\varepsilon = 1/10$. In diesem Fall führt die Ungleichung $|x^2 - 9| < 1/10$ auf die äquivalenten Ungleichungen $8.9 < x^2 < 9.1$, welche jedenfalls erfüllt sind, falls $|x - 3| < 3 - \sqrt{8.9}$. Somit eignet sich für dieses konkrete ε die Wahl $\delta = 3 - \sqrt{8.9}$. Wiederum können wir hier verschiedene Versuche unternehmen. Wenn z. B. $x = 2.99$, dann ist sein Abstand von 3 kleiner als $3 - \sqrt{8.9} \approx 0.016$, und tatsächlich erhalten wir $2.99^2 = 8.9401$, was sich von 9 um weniger als $1/10$ unterscheidet.

Es ist offensichtlich, dass diese Strategie für beliebig kleine, aber positive Werte von ε durchgespielt werden kann. Für jeden beliebigen „Zug" ε von „Schwarz" ergeben sich aus der Ungleichung $|x^2 - 9| < \varepsilon$ die äquivalenten Ungleichungen $9 - \varepsilon < x^2 < 9 + \varepsilon$, welche notwendigerweise erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$. Somit wird für jeden Versuch von „Schwarz" die Antwort $\delta = 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$ von „Weiß" die in der Definition beschriebene Ungleichung, mithin also das „schachmatt" sicherstellen (vgl. Abb. 5).

$$\begin{array}{cccccccccc}
\exists a & & \forall \varepsilon & & \exists \delta & & \forall x & & \\
\hline
 & & & & & \rightarrow & 2.9 & \searrow & \\
 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 3-\sqrt{8} & \rightarrow & 2.95 & \rightarrow & \\
 & & & & & \vdots & & & \\
9 & \rightarrow & \frac{1}{10} & \rightarrow & 3-\sqrt{8.9} & \rightarrow & 2.99 & \rightarrow & |x^2-9| < \varepsilon \\
 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & \rightarrow & \text{bel.} & \rightarrow & 3-\sqrt{9-\varepsilon} & \rightarrow & |x-3| < \delta & \nearrow &
\end{array}$$

Abbildung 5. Grenzwert einer Funktion, Diagramm eines „Spiellaufs"

Anmerkungen

1. Eine weitere Idee wäre es, die Struktur $\exists\forall$ mit einem „Matt in zwei" und die Struktur $\exists\forall\exists\forall$ mit „Matt in drei" zu illustrieren. In diesem Fall können wir die Situation mit der logischen Formulierung „es gibt einen Zug für Weiß, so dass auf alle schwarzen Züge Weiß mattsetzen *kann*" bzw. mit „es gibt einen Zug für Weiß, so dass es für alle Züge von Schwarz einen Zug für Weiß gibt, so dass für alle weiteren schwarzen Züge Weiß mattsetzen *kann*" erklären. Bei diesem Zugang ist es sinnvoll, die Züge, die in einer tatsächlichen Schachpartie nicht mehr gespielt werden (also die imaginären Züge des schwarzen Königs nach dem Mattzug und das daraufolgende Schlagen des Königs durch den weißen Turm), nicht hinzuschreiben. Denen, die mit dem Schachspiel vertrauter sind, mag dieser Zugang sympathischer sein, doch aus didaktischer Sicht erscheint die Beschreibung mit weniger Zügen einfacher.
2. Eine weit verbreitete Methode, die klassische Definition des Grenzwertes zu erklären, ist sie zu *verneinen*. Darüber hinaus haben die nichtkonvergenten Folgen eine eigene Bezeichnung, sie heißen *divergente* Folgen. Ein weiterer Vorteil der Analogie mit dem Schachspiel ist, dass die Verhinderung der Möglichkeit eines Schachmatts ein natürliches Bestreben in einer Schachpartie ist. Somit kann eine Erklärung der Unmöglichkeit eines „Matt in zwei" formuliert werden in der Form „für alle Züge von Weiß gibt es einen Zug für Schwarz, so dass für alle Züge von Weiß gilt, dass Schwarz nicht schachmatt ist." Diese Struktur ist offensichtlich analog zur klassischen Definition von divergenten Folgen.
3. Man könnte versucht sein, die Konvergenz unter Verwendung einer strengeren Syntax zu definieren. [6, S. 48] verwendet beispielsweise die Notation

$$\underset{a \in \mathbf{R}}{\exists} \; \underset{\substack{\varepsilon \in \mathbf{R} \\ \varepsilon > 0}}{\forall} \; \underset{M \in \mathbf{R}}{\exists} \; \underset{x \in \mathbf{R}}{\forall} \left((x \geq M) \Rightarrow (|f(x) - a| < \varepsilon) \right)$$

zur Definition des Grenzwertes einer Funktion im Unendlichen, um damit die Verwendung von Mathematica und des Theorema Systems für das

Beweisen bestimmter Eigenschaften zu ermöglichen. Offensichtlich ist auch diese Notation brauchbar, um die Negation der Definition herzuleiten. Da gilt:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B,$$

lautet die Negation davon

$$\neg\,(A \Rightarrow B) \equiv \neg\,(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B,$$

also ergibt sich die Negation der Definition von Konvergenz zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{\varepsilon\in\mathbf{R}\\ \varepsilon>0}}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{x\in\mathbf{R}}{\exists}\ \big((x \geq M) \wedge (|f(x)-a| \geq \varepsilon)\big)$$

was weiter vereinfacht werden kann zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{\varepsilon\in\mathbf{R}\\ \varepsilon>0}}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{x\in\mathbf{R}\\ x\geq M}}{\exists}\ (|f(x)-a| \geq \varepsilon)$$

bzw. – unter Auslassung einiger selbsterklärender Details – zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{x\geq M}{\exists}\ |f(x)-a| \geq \varepsilon.$$

Auf der einen Seite erscheint diese Formel einfach zu merken und zu verstehen. Andererseits scheint es aber schwierig, einfache Methoden zu finden, solche logischen Ausdrücke routinemäßig umzuwandeln, somit bleibt die Umformung derartiger Verknüpfungen von Quantoren eine Herausforderung für die meisten Studierenden.

4. Wenn sich das Schachspiel für manche Studierende als zu kompliziert herausstellt, kann alternativ dazu das Spiel von Bachet [1] mit 10 Spielsteinen auf dem Tisch eingesetzt werden. Hier werden die Spielzüge gemacht, indem eine beliebige Anzahl an Spielsteinen zwischen 1 und 3 vom Tisch genommen wird. Wer den letzten Spielstein vom Tisch nimmt, hat gewonnen. In Abb. 6 nimmt Alice in ihrem ersten Zug 2 Spielsteine vom Tisch und hat damit eine Gewinnstrategie, die ihr erlaubt, am Ende den letzten Stein vom Tisch zu nehmen.

	$\exists$		$\forall$		$\exists$		$\forall$		
		$\rightarrow$	7	$\rightarrow$		$\rightarrow$	3	$\rightarrow$	
10 $\rightarrow$	8	$\rightarrow$	6	$\rightarrow$	4	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$	0
		$\rightarrow$	5	$\rightarrow$		$\rightarrow$	1	$\rightarrow$	

Abbildung 6. Gewinnstrategie im Spiel von Bachet

Danksagung. Die Autoren danken Róbert Vajda und Andreas Lindner für ihre Anmerkungen, die das Manuskript wesentlich verbessert haben.

Literatur

[1] M. Applebaum and V. Freiman. It all starts with Bachet's game. *Mathematics Teaching*, 241:22–26, 2014.
[2] A. Deanin. The rule of four, 2003. tinyurl.com/rvgbjxe.
[3] J. Mulholland. Epsilon-delta game (formal definition of a limit), 2013. http://www.geogebra.org/m/47174.
[4] C. Swinyard and S. Larsen. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4:465–493, 2012.
[5] M. A. Townsend. The epsilon delta game, Wolfram Library Archive, 2000. http://library.wolfram.com/infocenter/Demos/4734/.
[6] R. Vajda. *Supporting Exploration in Elementary Analysis by Computational, Graphical and Reasoning Tools*. PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz, 2009.

Zoltán Kovács, Johannes Kepler Universität Linz
E-Mail: zoltan@geogebra.org

Peter Mayerhofer, Johannes Kepler Universität Linz
E-Mail: peter1.mayerhofer@ph-linz.at

Ein prägnantes Einführungsbeispiel zur Vektorrechnung

Wilfried Lingenberg

Das Beispiel, das einen neuen mathematischen Begriff einführt, bleibt den Lernenden nachhaltig im Gedächtnis und kann den Erfolg einer ganzen Unterrichtsreihe beeinflussen. Es sollte daher einige Bedingungen erfüllen:

- Inhalt und Zweck des neuen Begriffs sollen möglichst deutlich werden;
- der Begriff soll sich möglichst zwanglos als Instrument zur Lösung des Beispielproblems anbieten;
- möglichst viele Eigenschaften des Begriffs sollen im Beispiel schon angelegt sein, sodass
- die Darstellung im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe immer wieder auf die durch das Beispiel entwickelte Grundvorstellung zurückgreifen kann.