Die „eine“ und die „andere“ Mathematik: Assoziationen zu einem grundlegenden Aspekt der Mathematikdidaktik

Michael Neubrand

Kurzum, man kann eine Welle nicht isoliert betrachten, ohne dabei die vielfältigen Aspekte mit einzubeziehen, die zu ihrer Bildung zusammenwirken, desgleichen die ebenso vielfältigen, die sie von sich aus bewirkt.

Italo Calvino (2018, S. 10)

Welche Implikationen hat es für die mathematikdidaktische Arbeit, welche Eigenart der Mathematik man für das jeweilige Problem wählt? Diese Frage umkreise ich in 15 Assoziationen und orientiere mich dabei an zwei bekannten und einem aktuellen Beispiel.

Die Assoziationen in diesem Aufsatz beziehen sich alle auf eine Dialektik, die ich kürzlich in den *GDM-Mitteilungen* als das „Balance-Problem“ (Neubrand, 2018) angesprochen habe. Dort ging es zwar noch eher vordergründig um die Balance zwischen fertigkeits- und verständnisorientierten Ausrichtungen des Mathematikunterrichts. Diese Balance ist aber viel tiefer auszutarieren. Sie betrifft das Grundverständnis der Mathematik selbst.

Es gibt immer „die eine“ Seite der Mathematik (später kurz mit „E“ gekennzeichnet), nämlich nach funktionaler Verwendung und effektiven Verfahren zu suchen und diese auch zu beherrschen, bzw. im logischen Aufbau der Mathematik sich mittels formaler Mittel der Richtigkeit eines Satzes zu versichern. Es gibt aber auch „die andere“ Seite (folglich später kurz „A“ genannt), die auf Struktur, innere und kontextuelle Kohärenz, begriffliche Entwicklung fokussiert. Das sind zwei grundsätzliche und zueinander komplementäre Sichtweisen auf die Mathematik. Sie treten in der elaborierten mathematischen Forschung genauso auf wie in der Schulmathematik, und sie können folglich auch in der mathematikdidaktischen Reflexion nicht ausgeblendet werden. Die spezifisch mathematikdidaktische Herausforderung besteht dabei darin, diese Dialektik selbst dann noch zu erkennen und zu bearbeiten, wenn – wie es ja bei den nur allzu geläufigen Gegenständen des schulischen Curriculums der Fall ist – die verhandelten Inhalte weit unterhalb von sog. „großen“ mathematischen Problemen liegen.

Anstöße, sich mit dieser Thematik zu befassen, können von weit außen kommen, oder eben direkt aus dem inner-disziplinären Diskurs.

Von außen: Im Programm Bayern 2 des Bayerischen Rundfunks lief am 16. 4. 2019, 9:30 Uhr in der Reihe „radioWissen“ die Sendung „Italo Calvino – Schriftsteller einer Generation“ von Christina Hamel. Auch das als Motto vorangestellte Zitat kam dort vor – und fesselte mich unmittelbar. Denn tatsächlich meint auch „die andere“ Mathematik, dass man keinen mathematischen Gegenstand „isoliert betrachten“ (siehe Motto) kann. Der „Herr Palomar“ versucht zwar alles assoziativ zu umkreisen. Schließlich muss er aber konstatieren, dass man sich nicht auf einen Aspekt allein konzentrieren kann; es gehe dann „wie bei jenen Bildern, vor denen man nur die Augen zu schließen braucht, und wenn man sie wieder öffnet, hat sich die Perspektive verändert“ (Calvino, 2012, S. 13). Wohl nicht die unpassendste Metapher für die Fragilität in Lern- (und Lehr-) Prozessen.

Nun von innen: Heinz Griesel hat sich wie nur eine kleine Gruppe deutscher Kolleginnen und Kollegen zeitlebens um Grundsatzfragen der Mathematikdidaktik gekümmert. Sein soeben posthum erschienener letzter Aufsatz (Griesel et al., 2019) fordert explizit heraus: „Es ist für die Didaktik der Mathematik außerordentlich wichtig, dass über diese Grundsatzfragen diskutiert wird, um dadurch eine Fortentwicklung unserer Wissenschaft zu befördern.“ (S. 125) Im Beitrag von Griesel et al. (2019) geht es dabei um mentale Repräsentationen mathematischer Begriffe, insbesondere in der Gestalt von Grundvorstellungen. Das ist sicher eine der fundamentalen Fragen der Mathematikdidaktik: die Begriffe und das Individuum.

Ebenso wichtig ist die sozusagen darüber (oder darunter) liegende Seite, wie denn der ganze Gegenstandsbereich, also die Mathematik, sich formt und entwickelt, auch ohne den sofortigen Blick auf die individuellen Prozesse, aber durchaus unter der Perspektive, dass wir über Mathematik im Rahmen allgemeiner Bildung reden. In diese Problematik kann die „eine und die andere“ Mathematik etwas gedanklichen Halt bringen. Dies ist ein gewagtes

Unternehmen, denn „man kann eine Welle nicht isoliert betrachten“, wie Herr Palomar bemerkte. Und die Perspektive der Mathematikdidaktik ist eben nicht einfach nur die der analytischen „Philosophie der Mathematik“, so sehr man diese auch braucht.

Daher wähle ich einen assoziierenden Zugang, indem ich drei inhaltlich ganz unterschiedliche Beispiele, auf die ich kürzlich gestoßen bin, aufgreife und sie zwar unsystematisch, aber immerhin sich in ihrer Reichweite steigernd, unter diversen Aspekten der „einen und der anderen“ Mathematik diskutiere (vgl. dazu auch Neubrand, 2015a). Die Reihe der 15 Assoziationen zieht sich über die drei Beispiele hin.

Das erste Beispiel stammt aus einer Quelle, die wohl häufiger bei der Suche nach Übungsaufgaben zur Elementaren Zahlentheorie konsultiert wird, dem Buch von Adler & Coury (1995). Dort finden sich zahlreiche „Problems and Solutions“, und als 1 bis 29 auf S. 21 auch der folgende Satz samt dem Beweis. Ich übersetze so wörtlich wie möglich und markiere, das Label „E“ für die *eine* Mathematik nutzend, diesen Satz als „E-Arithmetik“:

Satz E-Arithmetik: Seien p und $p+2$ zwei Primzahlen mit $p > 3$. Zeige, dass deren Summe $2p+2$ durch 12 teilbar ist.

Beweis: Da $2p+2 = 2(p+1)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $p+1$ durch 6 teilbar ist. Weil p ungerade ist, ist $p+1$ gerade und deswegen durch 2 teilbar. Weiterhin ist p von der Form $3k+1$ oder $3k+2$; aber wenn $p = 3k+1$ wäre, dann wäre $p+2 = 3(k+1)$ durch 3 teilbar und deswegen keine Primzahl. Wir schließen, dass $p = 3k+2$ ist und daher $p+1$ durch 3 teilbar. Da 2 und 3 Teiler von $p+1$ sind und $(2,3) = 1$, folgt, dass $p+1$ durch 6 teilbar ist.

Der Satz ist damit schlüssig bewiesen, na sagen wir mal, man hätte der Vollständigkeit halber noch $k \in \mathbb{N}$ hinzufügen und (2,3) als den ggT kennzeichnen können. Als ich aber diesen Satz und Beweis (als einen unter den vielen auf diesen Seiten) einfach so ansah, gab es bei mir spontan diese Reaktion: Diente da einfach ein leicht formulierbares Problem, um das Beweisen, genauer wohl: die technischen Fertigkeiten zum Beweisen, einzuüben, oder handelt es sich hier tatsächlich um ein Stückchen Mathematik, das irgendwo dazu gehört, das irgendeine Bedeutung hat, das das eigene Wissen irgendwie vermehrt? Dazu kommen dann rasch ein paar Ideen: Die Voraussetzung „p und $p+2$ sind Primzahlen“ bewirkt den Gedanken: Aha: Primzahlzwillinge! Dahin gehört das also! Aber „die Summe“? Auch hier geht es relativ schnell: Darum geht es gar nicht, und der erste Schritt im Beweis zeigt schon den Kern: Es geht um „$p+1$“, und das ist die Zahl zwischen den beiden Zwillingen. Aha: Es ist doch etwas Inhaltliches bewiesen worden, nämlich – unserer Kennzeichnung „A“ folgend – ein Satz „A-Arithmetik“. Diesen kann man nachträglich ganz anders beweisen, und zwar so, dass die Aussage Einordnungen erfährt in ein Geflecht elementarer Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

Satz A-Arithmetik: Die Zahl, die zwischen zwei Primzahlzwillingen liegt, ist durch 6 teilbar, abgesehen vom Paar $(3,5)$.

Beweis: Aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wechseln immer ab: Ist die eine ungerade, wie es bei Primzahlen ab 3 gilt, ist die darauffolgende gerade. Die Zahl nach dem ersten Zwilling ist also durch 2 teilbar.

Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen, und so liegen die beiden Primzahlzwillinge und die Zahl dazwischen, ist immer eine, die durch 3 teilbar ist. Die beiden Primzahlen können es nicht sein, es sei denn man nähme das Paar $(3,5)$. Also ist die Zahl zwischen den beiden Primzahlen durch 3 teilbar.

Da 2 und 3 zueinander teilerfremd sind, sind durch 2 und 3 teilbare Zahlen auch durch 6 teilbar.

Der darstellerische Unterschied beider Sätze und beider Beweise ist evident, obwohl der sachliche Kern der gleiche ist. Wie geht man mit dieser Diskrepanz um? Ist solche Doppelgesichtigkeit vielleicht sogar typisch für den Umgang mit Mathematik? Steckt darin möglicherweise Potential zu weiteren Reflektionen?

Natürlich liegt der in den beiden Sätzen angesprochene mathematische Sachverhalt nicht sehr tief, wie man so sagt, aber das ist ja eben die mathematikdidaktische Herausforderung. Die folgenden Assoziationen zeigen, dass man mit der Gegenüberstellung beider Vorgehensweisen durchaus Relevantes ansprechen und illustrieren kann, insbesondere wie die Mathematik in didaktischen Kontexten auftritt.

(1) Es gibt kein „besser“ und „schlechter“ in einem irgendwie normativen Sinn. Es kommt immer auf den Kontext der jeweiligen Verwendung an. Um spezifische Schwierigkeiten von Studierenden bei der korrekten Formulierung von formalen Beweisen zu erkennen und zu diskutieren, kann man durchaus Satz/Beweis „E-Arithmetik“ nehmen. Aber die Entwicklung von inhaltlichem Wissen gelingt so wohl nicht. Lernen lebt nämlich von der Vernetzung von Wissenselementen. Satz/Beweis „E“ in einem Lehrbuchtext zu nehmen muss also sehr genau von den speziellen Absichten an einer bestimmten Stelle des Textes her entschieden werden. (Und die

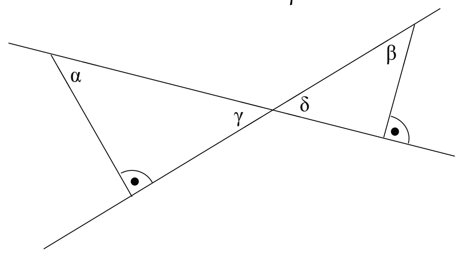
Leserinnen und Leser sollten das auch erkennen können.)

(2) Natürlich zählt am Ende eines Beweises die Schlüssigkeit. Aber viele Autoren – ich nenne stellvertretend Gila Hanna – haben überzeugend dargelegt, dass das Beweisen als spezifische Tätigkeit der Mathematik mehr ist als logische Rechtfertigung, dass es vielmehr auch um Erklärungen und Einbettungen geht. Diese beiden Seiten des Beweisens referieren auf die beiden Seiten der Mathematik selbst, eben die „eine" (also „E") und die „andere" (also „A") Mathematik.

(3) Wenn aber zur Entwicklung von inhaltlichem Wissen auf den Typus A schwerlich verzichtet werden kann, könnte man dann Lernen dennoch auch aus Satz/Beweis E initiieren? Im Sinne der Balance ja, wenn man bewusst den Kontrast zu Typ A sucht. Zu den formalen Ansätzen kann stets deren inhaltliche Bedeutung benannt werden, die formalen Darstellungen sind explizit zu machen als Mittel, bestimmte Inhalte umzusetzen, sozusagen als „Chiffren" zu begreifen. Wenigstens an zwei Stellen im Beweis E-Arithmetik wird das sichtbar: (a) Die Summe der beiden Primzahlen meint eigentlich das Doppelte der mittleren Zahl. (b) Mit $3k$, $3k+1$, $3k+2$ drückt man, um an die Teilbarkeit durch 3 formeltechnisch heranzukommen, ein Tripel dreier aufeinanderfolgenden Zahlen aus; es ist herauszufinden, welche der drei Darstellungen zu p, $p+1$ und $p+2$ passt. Und nach dieser Dechiffrierung im Kleinen könnte man auch übergreifend fragen: Was wird bezweckt, wenn in Beweisen begriffliche Zusammenhänge in formale Ausdrücke übersetzt oder gar versteckt werden? Was kommt zuerst, die Idee oder die formale Expression der Idee?

Das zweite Beispiel stammt aus der Elementargeometrie, die gerade in der Schule – nicht zu Unrecht (Neubrand, 2010) – als geeignetes Feld für die Erschließung des Beweisens gilt. Heinze und Ufer (2013, S. 146) haben herausgearbeitet, dass das Beweisen – als individueller Problemlöseprozess – keineswegs auf der Ebene des Detailwissens oder der technischen Umsetzung beginnt, sondern eher mit dem Erkennen einer „prototypischen figuralen Konfiguration". Auch empirisch scheint sich also abzuzeichnen, dass eine Komplementarität besteht zwischen dem eher komplexen Zugang zur Gesamtkonfiguration („Wie fügt sich das insgesamt zueinander, wo gehört das hin?" – der „A"-Zugang) und dem Aufstellen einer formalen Argumentationskette („Wie setze ich es technisch um, wie kann ich chiffrieren?" – die „E"-Darstellung). Beide Wissenskategorien sind notwendig für Beweisfähigkeit von Schülerinnen und Schülern. Heinze und Ufer (2013) nehmen als Beispiel einen Satz, den sie nur durch eine Skizze und die Aufforderung „Beweise!" formulieren. Sie geben selbst keinen konkreten Beweis an, aber implizit wird im Text deutlich, dass sie letztlich an eine lineare Argumentation über die Winkelsumme im Dreieck denken. Ich zeichne die Figur neu in etwa so wie bei Heinze & Ufer (2013, S. 146), rekonstruiere ihren Beweis und markiere den Satz nun als *„E-Geometrie"*:

Satz E-Geometrie: Beweise $\alpha = \beta$.



Beweis: In den beiden Dreiecken beträgt die Winkelsumme:

$$180° = \alpha + 90° + \gamma \quad \text{bzw.} \quad 180° = \beta + 90° + \delta$$

Da es sich um Scheitelwinkel handelt, gilt $\gamma = \delta$. Folglich ist

$$\alpha = 180° - 90° - \gamma = 180° - 90° - \delta = \beta$$

und somit $\alpha = \beta$.

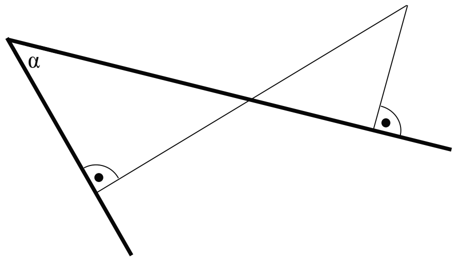
Satz bewiesen! Aber auch hier stellt sich wieder die „A"-Frage: „Wo gehört das hin?" Gibt es einen Rahmen, innerhalb dessen man solche Sätze („Sätzchen") ansiedeln kann? Und bedarf nicht das Erkennen einer „prototypischen figuralen Konfiguration" mehr „Über"-Sicht als nur das Sehen von zwei Dreiecken?

Tatsächlich – und das war wohl der Grund, warum mir die Figur bei Heinze und Ufer sofort auffiel – kenne ich die hinter der Konfiguration in Satz E-Geo stehende Aussage schon seit meiner Schulzeit. Diese hatte bei uns im Mathematikunterricht sogar einen eigenen Namen: „Doppellotsatz", und dies war – für mich jedenfalls – wohl eines der ersten Beispiele dafür, dass man in der Mathematik überhaupt argumentieren muss und es auch schon nach den ersten Anfangserkenntnissen kann, dass die Argumentationen auch auf immer komplexeren schon bewiesenen Einsichten („Sätze") aufbauen können, dass man solche Sätze zur besseren Identifikation mit Namen versehen kann, kurzum dass die Behandlung der Elementargeometrie auch den – von uns Schülerinnen und Schülern damals natürlich niemals explizit so benannten – Zweck hatte, „Vorbild für Mathematik" zu sein (nach Artmann, vgl. Neubrand, 2010), mithin dem Aufbau der „anderen" Mathematik zu dienen.

Dieses Meta-Ziel des Geometrieunterrichts ist heute mehr und mehr in den Hintergrund getreten, wenngleich man gelegentlich in den Lehrplan-

Präambeln und auch in den Bildungsstandards Anklänge dafür findet. Die „andere“ Mathematik sollte dann auch in Formulierung und Begründung von Satz „*A-Geometrie*“ zum Ausdruck kommen.

Satz A- Geometrie: Errichtet man auf den Schenkeln eines Winkels α Senkrechte, so schneiden sich diese ebenfalls im Winkel α (oder im Ergänzungswinkel $180° - \alpha$).

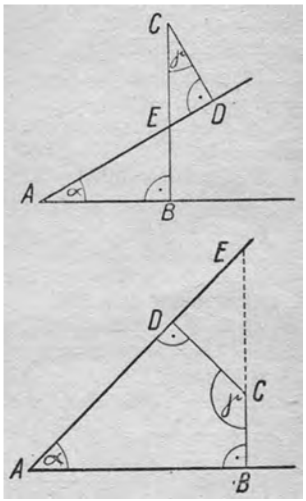


Beweis: Wir sehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die so zusammenstoßen, dass an der gemeinsamen Spitze ein Paar von Scheitelwinkeln auftritt. Scheitelwinkel sind gleich, daher auch die beiden anderen Winkel, denn in einem rechtwinkligen Dreieck legt der eine nicht-rechte Winkel den anderen fest.

(Schneiden sich die beiden Lote innerhalb des Winkelfelds von α, so liegt dem Winkel α der Winkel $180° - \alpha$ gegenüber, denn wieder sieht man zwei rechtwinklige Dreiecke, die sich zwar überlappen, aber dennoch einen Winkel, den an der Ecke E in der folgenden Figur unten, gemeinsam haben – hier ohne Skizze; siehe die zweite Figur unten.)

Man beachte, dass die Zeichnung fast identisch ist zu der im Satz E-Geo. Es sind lediglich ein paar Elemente hervorgehoben (die beiden Schenkel von α), andere Elemente verkürzt dargestellt (die Senkrechten), und nur das gegebene Datum (der Winkel α) ist eingetragen. Aber alle diese Elemente haben nun eine geometrische Bedeutung zugeschrieben bekommen, zeichnerisch und inhaltlich. Es liegt keine zufällige Konfiguration mehr vor, sondern man redet über einen Winkel (also über eine ganze geometrische „Gestalt“, um dieses Wort zu gebrauchen) und über das Errichten von Senkrechten (also über eine geometrische Relation). Beides, der Winkel und die Senkrechte, sind zentrale Begriffe der Elementargeometrie. Die zu beweisende Aussage „gehört“ also zum Erkunden des Geflechts der Eigenschaften elementarer geometrischer Figuren.

Sinnvollerweise gehört bei dieser Sicht der Satz dann in ein entsprechendes Schulbuchkapitel. Da Lehrpläne aber heute keine Einzelstoffe mehr ausweisen, muss man weit zurückgehen, um konkrete Schulbuch-Quellen zu finden mit dem „Doppellotsatz“ (der nirgends wirklich so heißt). Ein Beispiel ist die alte Planimetrie von Christian Renner (1948). Dort gehört der Satz in das Kapitel „Winkel-Sätze“.

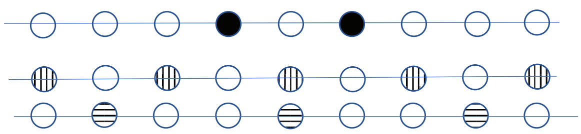


Die oben schon begonnene Reihe der Assoziationen zum Thema „die eine und die andere Mathematik“ kann ich nun fortsetzen mit dem zusätzlichen Beispielmaterial.

(4) Eine Konsequenz aus dem Kontrast der Sätze *E-Geometrie* vs. *A-Geometrie* ist, dass man nun das vage „Wo gehört das hin?“ durchaus konkreter fassen kann. Die „andere“ Mathematik organisiert sich nicht in unverbundenen Einzelproblemen und Einzelkonfigurationen, sondern verlangt systematische kohärente „Kapitel“, freilich nicht unbedingt streng deduktiv aufgebaut und nicht ohne die Eröffnung je persönlicher Um- und Auswege, aber eben doch kohärent durch Verweise, Bezüge, bewusst gemachte Variationen, logische Herleitung und kontextuellen Zusammenhalt.

(5) Das geometrische Beispiel verweist in natürlicher Weise auf visuelle Fähigkeiten. Man muss die Dreiecke, über die man urteilt (Typ A) oder in denen man Rechnungen anstellt (Typ E), erst sehen und figural diskriminieren. Auch das will im Mathematikunterricht bewusst gelernt werden; ich habe einmal den darstellenden („kontemplativen“) und den operativen („aktiven“) Zugang zu Visualisierungen herausgehoben (Neubrand, 1987). Bei E-Geometrie dominierte eher das darstellend-erkennende Vorgehen. Einen visuell-operierenden Beweis hingegen kann man sich sehr gut bei A-Arithmetik vorstellen: Markiert man auf einer Kette, die die aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellt, das Paar der Primzahlzwillinge in schwarz, dann darf auf dem Platz der beiden Primzahlen weder eine gerade (vertikal schraffiert), noch

eine durch 3 teilbare Zahl (horizontal schraffiert) liegen. Das Verschieben der geraden/ungeraden Reihe bringt immer einen schraffierten Punkt unter eine der Primzahlen. Beim Verschieben der 3-er-Reihe aus der gezeichneten (erlaubten) Lage kommt sowohl beim Verschieben um 1 wie beim Verschieben um 2 ein schraffierter Punkt unter eine der Primzahlen. Die gezeichnete Lage der Vielfachen relativ zu den Primzahlzwillingen ist also die einzig mögliche.



(6) Nun zeigt sich ein weiteres Kennzeichen der „anderen" Mathematik: Jetzt kann man variieren, weitergehen, verallgemeinern. Ein Beispiel: Wenn man in obiger Skizze auch noch „teilbar durch 5" betrachten will, dann sieht man: Wenn ein Vielfaches von 5 in der Mitte liegt, ist dort sogar ein Vielfaches von 30: Zwillinge mit Endziffern 9 und 1 treten demnach nur vor und hinter $30, 60, 90, \ldots$ auf (aber eben nicht immer!). Und so kann man das Spielchen fortsetzen. Ebenso ist es im Fall der geometrischen Sätze: Was geschieht, wenn statt der Lote Geraden in irgendeinem Winkel ϕ auf den Schenkeln des gegebenen Winkels errichtet werden? Das wären die sog. „non-perpendiculars" (Neubrand, 2016), und der Satz gilt selbst dann noch. In beiden Beispielen ist solches Weitermachen aber nur dann möglich, wenn man von der *einen* zur *anderen* Mathematik übergegangen ist; ja, es ist geradezu ein Kennzeichen der „anderen" Mathematik, dass man überhaupt weitergehen kann.

(7) Aber muss man bei diesen einfachen Beispielen überhaupt in der Richtung ‚gegebener Satz' → ‚zu suchender Beweis' denken (und ggf. lehren)? Es liegt ja geradezu auf der Hand, offen und problemorientiert vorzugehen: Welche Eigenschaften findest Du heraus über die Zahlen zwischen einem Primzahlzwillingspaar? Betrachte Beispiele! – Errichte Senkrechte auf den Schenkeln eines Winkels! Beobachte, welche Fälle auftreten! Untersuche die auftretenden Winkel! – Nun kommt die Überzeugung (und meist sogar der Beweis) zuerst, und dann erst der ausformulierte (auszuformulierende) Satz. Wieder regiert der Zweck die Form: Wenn Beweis „A" ideell zuerst war, dann wäre Beweis „E" eine nachgeschobene Übung im Formalisieren. Und umgekehrt, wenn man eine Berechnung zuerst hat, fragt man nach den Zusammenhängen. Die „andere" Mathematik beinhaltet also auch die Haltung, gegenüber den eigenen Denkprodukten bewertend und kritisch zu sein.

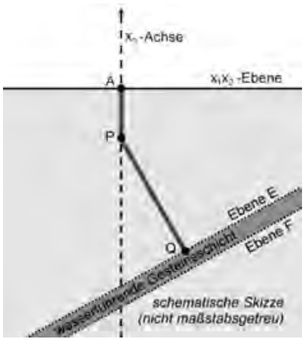
(8) Die ersten sieben Randnotizen fokussierten letztlich auf diesem Gedanken: Woher kam die Frage, die ich, wie oben geschildert, beim ersten Lesen der beiden Beispiel-Sätze in der E-Form hatte: „Wohin gehört das?" Diese Frage zu stellen ist gewissermaßen die Essenz moderner Auffassungen vom Lernen: Lernen ist Umstrukturieren und Erweitern des bisherigen Wissens, in allen Fächern. Elsbeth Stern hat es ganz aktuell illustriert in ihrer Antwort auf die Frage, ob man denn schon kleinen Kindern Fremdsprachen beibringen kann: Ja, man könne, aber nur wenn der Kontext dem des natürlichen Spracherwerbs nahekomme. Jedoch andernfalls: „Solange man noch keine Konzepte von Sprache und keine Vorstellung davon hat, dass Menschen in unterschiedlichen Teilen der Erde unterschiedliche Sprachen sprechen, bringt direkte Instruktion nichts" (Stern, 2018). Die Sätze/Beweise vom Typus „E" setzten eine solche Einbettung in einen „natürlichen", d. h. nach Gründen fragenden Lernkontext nicht um. Solche Sätze instruieren gewissermaßen, ohne eine Idee aufzuzeigen, worum es eigentlich geht. Der Zweck der E-Sätze liegt eher im Ausfächern der einzelnen Schritte (und der Möglichkeit diese beispielsweise in einer mathematikdidaktischen Analyse nachzuvollziehen) als im Bestreben, Vorstellungen zu erzeugen und inhaltliches Wissen aufzubauen.

(9) Elsbeth Stern hat andererseits auch auf die Bedeutung des Wissens für das Lernen hingewiesen: „Erst wer explizites Wissen über Grammatik und Satzbau in der Erstsprache hat, kann verstehen, was in der Fremdsprache anders oder ähnlich ist." (Stern, 2018) Das bringt für die beiden hier diskutierten Sätze einen weiteren Aspekt: Alles Vergleichen und Reflektieren bringt nichts, wenn nicht die notwendigen Begriffe als Wissenselemente vorhanden sind. Im ersten Beispiel ist das der Begriff der Primzahl. Wollte man also diese Beweis-Aufgabe – im entdeckenden Sinn – in der Schule realisieren, dann müssen „Primzahlen" Teil des Curriculums sein, offenbar derzeit nicht überall garantiert. Ebenso sind die „Winkelsätze" – welche davon man immer im Einzelnen in die konkrete Bearbeitung bringt – darauf angewiesen, dass im Curriculum Platz ist für eine hinreichende Entfaltung der Elementargeometrie, darunter des Begriffs des Winkels. Dies ist die von mir (Neubrand, 2018) als Curriculum-Problem adressierte aktuelle Herausforderung an den Mathematikunterricht. Man kann eben nicht beliebig inhaltliche Streichungen (gleich ob es nun um Primzahlen oder elementargeometrische Sätze oder andere zentrale Begriffe geht) vornehmen, wenn man nicht Kohärenz, und damit die Grundlage für die inneren Verknüpfungen beim Lernen verlieren will. Das Bild von der

„anderen“ Mathematik im Kopf zu haben, sollte genug Impuls sein, hier achtsam und ggf. auch konstruktiv zu sein.

Kohärenz und innere Verknüpfungen beim Lernen artikulieren sich nicht selten auch in dieser Frage: „Wie passt das zusammen?“ Ein drittes aktuelles Beispiel, das soeben durch die öffentlichen Medien ging, kann dies illustrieren. Im Mai 2019 protestierten Schülerinnen und Schüler in den sozialen Medien gegen vermeintlich zu schwere Mathe-Aufgaben im Abitur 2019. Genannt wurde auch diese Aufgabe:

Abitur-2019-Bayern – Teil B: Geometrie-Aufgabengruppe 1 (nur Ausschnitte)



Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die x_1x_2 -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. [...]

Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $P(0|0|-1)$ und $Q(1|1|-3,5)$ beschrieben werden (vgl. Abbildung).

(a) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.

(b) [...]

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene E und die untere Begrenzungsfläche in einer zu E parallelen Ebene F. Die Ebene E enthält den Punkt Q. Die Strecke $[PQ]$ steht senkrecht auf der Ebene E (vgl. Abbildung).

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(d) [...]

(e) [...]

(f) [...]

Quelle: tinyurl.com/y7dag7ya

Die Aufgabe gehört dem Teil B an, der laut Erläuterungen des Ministeriums „umfangreichere, zusammenhängende Aufgaben“ enthält. Zudem ist offenbar ein Realitätsbezug da, also ein Kontext; mithin ist das keine „E“-Aufgabe. Oder doch? Ich stelle die „A“-Frage in der Form „Wie passt das zusammen?“. Aus der Perspektive dessen, der da „erzählt“, sagen wir der Firma, die die Zugangsbohrungen vornimmt, ist eines klar: Lange bevor der Bohrkanal gezogen wurde, war die wasserführende Schicht schon da. Und dass man dann so bohrt, dass man senkrecht auf die Schicht aufsetzt, kann gute technische Gründe haben. Aber sozusagen umgekehrt aus der Richtung der Bohrung die Ebene, auf die man doch gezielt hat, nachträglich zu bestimmen, das ist nachgeschoben, um die Anwendung der Normalenform der Ebenengleichung abzuprüfen. Also doch Typ „E“! Man könnte dieses nur allzu oft zu beobachtende Phänomen mangelnde kontextuelle Kohärenz nennen. So ist es in den anderen Teilaufgaben auch: Abstand zwischen zwei Punkten, Winkel zwischen zwei Vektoren, Bestimmung von Punkten auf der Ebene, etc., sind alles Standardaufgaben; sie kommen hier nur dünn mit Realitätsbezügen bedeckt vor. Dies wäre ja dennoch legitim, in einer „high-stakes“-Prüfung vielleicht sogar nichts als fair.

Aber nun entstehen erst die eigentlichen Probleme, auf die der Gedanke von „der einen oder anderen“ Mathematik (und Mathematikdidaktik) vielleicht etwas Licht werfen könnte. Ich setze also die Assoziationen dazu weiter fort:

(10) Ob die vorliegende mangelnde kontextuelle Kohärenz tatsächlich die Schülerinnen und Schüler bei ihren Lösungen behindert, d. h. die Aufgabe „schwer“ gemacht hat, ist eine offene, letztlich nur empirisch zu beantwortende Frage. Man kann sich ihr von „der einen oder der anderen“ Seite der (nunmehr) Mathematikdidaktik nähern. Einerseits können Lösungsquoten, statistische Aufgaben-Parameter und -Charakteristiken, Vergleiche mit den Vorjahresnoten, usw. angestellt werden; das hat z. B. der bayerische Kultusminister den Schülerinnen und Schülern nach den Protesten versprochen (und dann nichts Auffälliges bemerkt). Die andere Art mathematikdidaktischer Untersuchungen – auch diese können in Teilen durchaus quantitativ ausgerichtet sein – könnte sich aber auf die Lösungswege, -irrwege, -umwege der Schülerinnen und Schüler beziehen, vielleicht sogar auf nachträgliche Gespräche mit Schülerinnen und Schülern. Daten sollten, selbst im sensiblen Bereich Abitur, nach gewissem zeitlichen Abstand greifbar sein. Die Auswertungskriterien erfordern aber differenzierte Bewusstheit über das eine und das andere Bild von der Mathematik. Gerade Daten aus Ab-

schlussprüfungen wären dann besonders wertvoll (vgl. Neubrand & Neubrand, 2010 über die „ZP-10“ in NRW).

(11) Die „A“-Fragen „Wo gehört das hin?“ und „Wie passt das zusammen?“ erinnern durchaus auch an ein in der modernen kognitiven Psychologie derzeit z. B. aus linguistischer Sicht diskutiertes Problemfeld: Welche Sprache benutzt man, um komplexe abstrakte Begrifflichkeiten aufzubauen, und dominiert nicht schon die Art der Sprache den Aufbau der Sache? Woźny (2018) nimmt sich einen mehr oder weniger standardisierten Universitätskurs in abstrakter Algebra (Mengen – Abbildungen – Gruppen – Ringe – Körper) vor, um zu demonstrieren, wie Mathematik aufgebaut wird, indem man sich sog. „small spatial stories“ bedient, also Bildern aus dem Feld der menschlichen Handlungen in Raum und Zeit. Er betrachtet bewusst einen ganzen Kursus systematisch, um „doing cognitive poetics“ zu vermeiden. Aber, abgesehen davon, dass auch dieser Zugang die ganze kontinuierlich-geometrische Welt der Mathematik außen vor lässt, ist dies nicht der systemische Gedanke, der hinter der „anderen“ Mathematik in meinem Sinne steckt; es ist gewissermaßen der umgekehrte Zugang: Während Woźny nach dem Kern des mathematischen Verstehens in den Bildern der Sprache und des konkreten menschlichen Handelns sucht (vgl. auch Núñez, 2000), schaut die „andere“ Mathematik von vorneherein auf die innermathematischen Querverbindungen, die freilich keineswegs dem strengen logischen Aufbau, schon gar nicht den kanonisierten Arrangements ungebrochen folgen müssen. Auch hier kann der Zusammenhang aus Bildern und Analogien kommen. Die „small spatial stories“ von Woźny erzeugen mentale Anknüpfungspunkte, die „andere“ Mathematik aber eröffnet, gerade wenn sie Platz lässt für je persönliche Zugänge, systematischen und geordneten Wissensaufbau inklusive der innermathematischen Bilder, soweit sie adäquat und weiterführend sind. Die Entwicklungsdynamik des Aufbaus mathematischen Wissens muss dann aber Gegenstand der u.U idiosynkratischen Aneignungsprozesse sein (vgl. Schmitt, 2017).

(12) Aus der Gegenüberstellung von Satz/Beweis vom Typ „E“ und vom Typ „A“ lassen sich auch Hinweise zu einem ebenfalls aktuell diskutierten schul-/hochschulpolitischen mathematikdidaktischen Problemkreis ableiten, dem Übergang von Schule zur Hochschule. Zunächst zur Funktion von sog. Brückenkursen: Wenn es stimmt, was viele Mathematiker sagen, dass mangelndes Verständnis für das Beweisen das eklatante Defizit beim Übergang von der Schule in die Universität ist, dann ist die Aufgabe von Brückenkursen gerade nicht, den Studierenden „E“-Beweise beizubringen. Jedenfalls macht das, nach den obigen Bemerkungen über den natürlichen Lernkontext, erst dann Sinn, wenn das Konzept einer begründenden und strukturierenden Mathematik (also „A“) hinreichend reflektiert ist. Der didaktische Weg, mit dieser Problematik umzugehen, ist das „Sprechen über Mathematik“ (Neubrand, 2000): Welche Auffassungen über Mathematik, die „eine“ oder die „andere“, kommen jeweils zum Ausdruck? Wie steht es um die logische und die sprachliche Qualität? In welchen weiteren Rahmen gehört der verhandelte Gegenstand? Dass angehende Studierende offen sind für solche Reflexionen, das ist die wirkliche Bringschuld, das „commitment“ (Neubrand, 2015 b), der Schule, und umgekehrt gehört es zur universitären Lehre, sich auf solche Reflexionen einzulassen. Mit ausschließlich der „einen“ Mathematik („E“) kommt man nicht aus, weder hier noch dort.

(13) Nun vom anderen Ende her gedacht: Wenn es stimmt, und auch dies ist recht plausibel, ja sogar empirisch untermauert, was Rüede et al. (2019) konstatieren, dass „wesentliche Komponenten der basalen mathematischen Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit [...] nicht erst auf der gymnasialen Sekundarstufe 2, sondern bereits auf der Sekundarstufe 1, teilweise sogar auf der Primarstufe entwickelt [werden]“ (Rüede et al., 2019, S. 91), dann ist es umso mehr geboten, gerade auf den unteren Stufen bereits „die andere“ Mathematik hinreichend zur Geltung zu bringen.

(14) Nach diesen Streifzügen in die Ebene der bildungspolitischen Realitäten ist man versucht in große Höhen (Tiefen) aufzusteigen (abzusinken). Das wäre naheliegend, ja geradezu zwingend. Mit Volker Gerhardt, Philosoph an der Humboldt-Universität, kann man auf unsere „A“-Fragen nämlich auch so antworten: „Im Normalfall des Wissens aber müssen die somatischen, sozialen, psychischen, semantischen und logischen *Sinnbedingungen* erfüllt sein, damit es zutreffend verstanden, angemessen beurteilt und vernünftig gebraucht werden kann.“ (Gerhardt, 2016, S 47; meine Hervorhebung) So allgemein zu denken hat in der Mathematikdidaktik durchaus Tradition. Heinrich Winter etwa nimmt vier „Charakteristika der geistigen Existenz des Menschen“ als Ausgangspunkt, allgemeine Lernziele für die Mathematik in der Schule zu formulieren, nämlich den Menschen als „schöpferisches“, „Einsicht suchendes“, „wirtschaftendes“ und „sprechendes Wesen“ zu begreifen (alle Zitate aus Winter, 1975, S. 116). Diese Charakteristika konfrontiert Winter dann mit den Möglichkeiten der Mathematik. Eine breite Sichtweise der Mathema-

tik, die eine und die andere, ist dann unabdingbar; auch dies ist eben eine „Sinnbedingung". Übrigens scheint die Notwendigkeit sinnkonstituierende Prozesse in den Fachunterricht einzubeziehen in jüngerer Zeit weiter an Aufmerksamkeit zu gewinnen. Freilich darf man diese nicht einengen auf vordergründige Aspekte einer (oft nur vermeintlichen) Nützlichkeit. Nicht weniger als „Zehn Grundsätze zur Bedeutung der Sinnkategorie in schulischen Bildungsprozessen" haben Birkmeyer et al. (2015) herausgearbeitet, darunter zentral auch das Erkennen von Zusammenhängen, z. B. durch das Erzählen von Geschichten oder – siehe den nächsten, dann abschließenden Abschnitt – dadurch, den eigenen Standort zu reflektieren, als „Identitätsarbeit", wie es bei Birkmeyer et al. (2015) heißt.

(15) Tatsächlich zeigt ein aktuelles ZDM-Heft über „Identity in mathematical education" auf, wie weit die Spanne mathematikdidaktischer Konzepte noch zu ziehen ist. Auch wenn ich hier nicht explizit darüber geredet, ja das Individuelle und das Soziale ganz ausgeblendet habe, so trifft doch auch auf die „andere Mathematik" zu, dass dieser Diskurs, analog zu dem über „identity", dorthin verweist, „[...] where the social, the individual, as well as the cognitive and the emotional are expected to meet and turn into inseparable, co-constitutive aspects of one phenomenon" (Sfard, 2019, S. 556). Dies führt, nach „Wo gehört das hin?" und „Wie passt das zusammen?", zu einer dritten Art von Frage, die der Gedanke von der „anderen" Mathematik impliziert: „Welchen Wert hat das?" Denn „Wert" ist von vorneherein an subjektive oder soziale Referenzsysteme gebunden und muss je persönlich verhandelt, d. h. dementsprechend auch relativiert werden. Ob das Thema Primzahlzwillinge einen Wert hat, wird von Person zu Person verschieden sein; ob es „attraktiv" wird, hängt auch von den jeweiligen Situationen ab. Dass der Doppellotsatz seinen Wert als tool beim Beweisen entfalten kann, bedingt einen Zugang zur Elementargeometrie, der das Beweisen als Kern der Mathematik wertschätzt. Ob die Grundaufgaben der analytischen Geometrie „wert"-voll sein können, erweist sich daran, wie sehr es gelingt ihren Basischarakter jenseits von einzelnen Anwendungen erfahrbar zu machen. Es darf schon verlangt werden, dass für Fragen nach dem Wert hinreichend Raum im Mathematikunterricht bleibt; das wäre Roland Fischers alte Vision (Fischer, 1984), den Mathematikunterricht auch als einen Prozess der „Befreiung vom Gegenstand" zu sehen.

Die hier vorgetragenen Assoziationen zu den beiden sehr elementaren Sätzen aus dem Feld der Arithmetik und der Geometrie und auch die kritischen Anmerkungen zur Konstruktion der Abituraufgabe zeigen jedenfalls, dass mathematikdidaktische Reflexionen vor einem weiten Horizont stattfinden sollten, jedoch ohne die jeweilige Konkretisierung zu verlieren. Denn mit dem Gedanken der „anderen" Mathematik wird herausgearbeitet, dass auch in den einfachsten Gegenständen schon das Potential des authentischen mathematischen Denkens liegt. Dieses Potential ist im Mathematikunterricht bewusst zu entfalten: Man muss „die Welle lesen" (Calvino, 2018) lernen. In dem Gedanken der „anderen", d. h. Kohärenz als zentrales Element begreifenden Mathematik liegt somit analytische, in der weiteren Perspektive aber auch konstruktive Energie.

Wer noch weiter von Italo Calvinos ebenso nüchternem wie reflektierendem Herrn Palomar zum Nachdenken angeregt werden will, der oder dem empfehle ich die Geschichten mit den Ordnungszahlen 3.2.1 oder auch 3.2.3, letztere weil gerade diese fast direkt mit Mathematik zu tun hat. Fokussierend und daher als End-Motto passend erscheint mir das folgende Zitat. Hinter der Geschichte mit der Ordnungszahl 3.1.2 *Schlangen und Schädel*, aus der es stammt, steht immerhin auch ein Kontext von Lehren und Lernen, so dass das Zitat vielleicht doch nicht ganz unbedacht aus dem Zusammenhang gerissen ist:

> *Doch er [Herr Palomar; M.N.] weiß: Nie könnte er das Bedürfnis in sich ersticken, zu übersetzen, überzugehen aus einer Sprache in eine andere, von konkreten Figuren zu abstrakten Worten, von abstrakten Symbolen zu konkreten Erfahrungen, wieder und wieder ein Netz von Analogien zu knüpfen. Nicht zu interpretieren ist unmöglich, genauso unmöglich wie sich am Denken zu hindern.*
>
> Italo Calvino (2018, S. 97)

Literatur

Adler, A. & Coury, J.E. (1995). *The Theory of Numbers: A Text and Source Book of Problems*. Boston, MA: Jones and Bartlett Publishers.

Birkmeyer, J., Combe, A., Gebhard, U., Knauth, Th., & Vollstedt, M. (2015). Lernen und Sinn. Zehn Grundsätze zur Bedeutung der Sinnkategorie in schulischen Bildungsprozessen. In U. Gebhard (Hrsg.), *Sinn im Dialog: Zur Möglichkeit sinnkonstituierender Lernprozesse im Fachunterricht* (S. 9–31). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Calvino, I. (2018; italienisches Original 1983). *Herr Palomar* [aus dem Italienischen von Burkhart Kroeber]. Frankfurt a. M.: Fischer Taschenbuch.

Fischer, R. (1984). Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik, 5*(1–2), 51–85.

Gerhardt, V. (2016). *Glauben und Wissen: Ein notwendiger Zusammenhang* [Reclams Universal-Bibliothek Nr. 19405]. Stuttgart: Reclam.

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(1), 123–133.

Heinze, A. & Ufer, S. (2013). Die Interaktion von Wissen mit Problemlösestrategien am Beispiel geometrischer Beweisprobleme. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 141–150). Münster: WTM-Verlag.

Hilton, P. (1991). The mathematical component of a good education. In P. Hilton, F. Hirzebruch & R. Remmert (Eds.), *Miscellanea mathematica* (pp. 145–154). Berlin, Heidelberg: Springer.

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2010). *Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 in Mathematik am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen: Analysen von Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen. Hinweise zu Aufgabenkonstruktion und zur Fachunterrichtsentwicklung*. Vechta, Oldenburg: Universität Vechta & Carl-von-Ossietzky-Universität/ Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Verfügbar unter uol.de/michael-neubrand.

Neubrand, M. (1987). Visualisieren: Beispiele zum darstellenden und operativen Charakter. *Der Mathematikunterricht, 33*(4), 30–36.

Neubrand, M. (2000). Reflecting as a didaktik construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In I. Westbury, St. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Teaching as a Reflective Practice: The German Didaktik Tradition* (pp. 251–265). Mahwah, N.J.; London: Lawrence Erlbaum Associates.

Neubrand, M. (2010). Inhalte, Arbeitsweisen und Kompetenzen in der (Schul-) Geometrie: Versuch einer theoretischen Klärung. In M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), *Basiskompetenzen in der Geometrie* (S. 11–34). Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand M. (2015a). Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts (Kap. I.3). In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 51–73). Berlin, Heidelberg: Springer.

Neubrand, M. (2015b). Schulmathematik und Universitätsmathematik: Gegensatz oder Fortsetzung? Woran kann man sich orientieren? In J. Roth, Th. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 137–147). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Neubrand, M. (2016). Conway's non-perpendiculars as a tool: The case of the law of cosines. *The Mathematical Intelligencer, 38*(1), 1–3.

Neubrand, M. (2018). The challenges, reforms, and future prospects of elementary and lower secondary mathematics education in Germany. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 105, 30–36.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Takahara & M. Koyama, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–22). Hiroshima: University, Dept. Mathematics Education.

Renner, Ch. (1948). *Planimetrie. Ein Leitfaden mit reichhaltiger Aufgabensammlung*. München: Franz Ehrenwirth Verlag.

Rüede, Ch., Weber, Ch. & Eberle, F. (2019). Welche mathematischen Kompetenzen sind notwendig, um allgemeine Studierfähigkeit zu erreichen? Eine empirische Bestimmung erster Komponenten. *Journal für Mathematik-Didaktik 40*(1), 63–93.

Schmitt, O. (2017). *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Sfard, A. (2019). Making sense of identities as sense-making devices. *ZDM – Mathematics Education, 51*(3), 555–564.

Stern, E. (2018). Lern- statt Leistungsorientierung (Fragen an die Lernforscherin Elsbeth Stern). *Forschung und Lehre, 25*(7), 582–585.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*, 106–116.

Woźny, J. (2018). *How We Understand Mathematics: Conceptual integration in the language of mathematical description*. Cham (CH): Springer International Publishing.

Michael Neubrand,
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
E-Mail: michael.neubrand@uni-oldenburg.de