Beweisen bestimmter Eigenschaften zu ermöglichen. Offensichtlich ist auch diese Notation brauchbar, um die Negation der Definition herzuleiten. Da gilt:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B,$$

lautet die Negation davon

$$\neg\,(A \Rightarrow B) \equiv \neg\,(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B,$$

also ergibt sich die Negation der Definition von Konvergenz zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{\varepsilon\in\mathbf{R}\\ \varepsilon>0}}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{x\in\mathbf{R}}{\exists}\ \big((x \geq M) \wedge (|f(x)-a| \geq \varepsilon)\big)$$

was weiter vereinfacht werden kann zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{\varepsilon\in\mathbf{R}\\ \varepsilon>0}}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\substack{x\in\mathbf{R}\\ x\geq M}}{\exists}\ (|f(x)-a| \geq \varepsilon)$$

bzw. – unter Auslassung einiger selbsterklärender Details – zu

$$\underset{a\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ \underset{M\in\mathbf{R}}{\forall}\ \underset{x\geq M}{\exists}\ |f(x)-a| \geq \varepsilon.$$

Auf der einen Seite erscheint diese Formel einfach zu merken und zu verstehen. Andererseits scheint es aber schwierig, einfache Methoden zu finden, solche logischen Ausdrücke routinemäßig umzuwandeln, somit bleibt die Umformung derartiger Verknüpfungen von Quantoren eine Herausforderung für die meisten Studierenden.

4. Wenn sich das Schachspiel für manche Studierende als zu kompliziert herausstellt, kann alternativ dazu das Spiel von Bachet [1] mit 10 Spielsteinen auf dem Tisch eingesetzt werden. Hier werden die Spielzüge gemacht, indem eine beliebige Anzahl an Spielsteinen zwischen 1 und 3 vom Tisch genommen wird. Wer den letzten Spielstein vom Tisch nimmt, hat gewonnen. In Abb. 6 nimmt Alice in ihrem ersten Zug 2 Spielsteine vom Tisch und hat damit eine Gewinnstrategie, die ihr erlaubt, am Ende den letzten Stein vom Tisch zu nehmen.

$$\begin{array}{cccccccccc} & \exists & & \forall & & \exists & & \forall & & \\ \hline & & \to & 7 & \to & & \to & 3 & \to & \\ 10 \to & 8 & \to & 6 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 0 \\ & & \to & 5 & \to & & \to & 1 & \to & \end{array}$$

Abbildung 6. Gewinnstrategie im Spiel von Bachet

*Danksagung*. Die Autoren danken Róbert Vajda und Andreas Lindner für ihre Anmerkungen, die das Manuskript wesentlich verbessert haben.

## Literatur


[1] M. Applebaum and V. Freiman. It all starts with Bachet's game. *Mathematics Teaching*, 241:22–26, 2014.

[2] A. Deanin. The rule of four, 2003. tinyurl.com/rvgbjxe.

[3] J. Mulholland. Epsilon-delta game (formal definition of a limit), 2013. http://www.geogebra.org/m/47174.

[4] C. Swinyard and S. Larsen. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 4:465–493, 2012.

[5] M. A. Townsend. The epsilon delta game, Wolfram Library Archive, 2000. http://library.wolfram.com/infocenter/Demos/4734/.

[6] R. Vajda. *Supporting Exploration in Elementary Analysis by Computational, Graphical and Reasoning Tools*. PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz, 2009.



Zoltán Kovács, Johannes Kepler Universität Linz
E-Mail: zoltan@geogebra.org

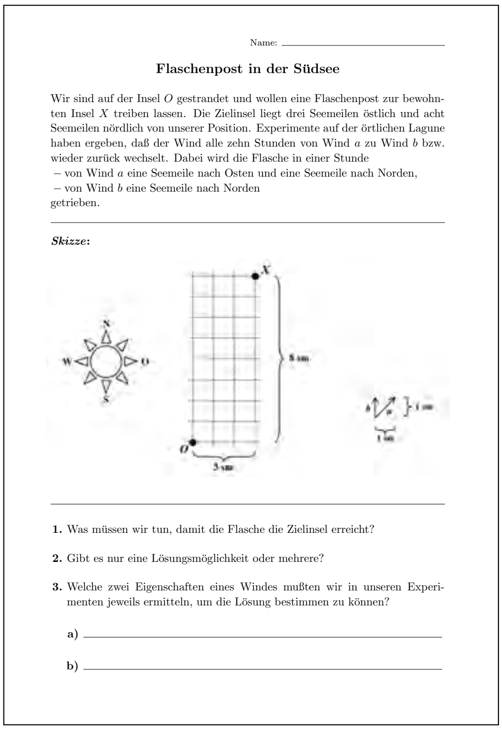
Peter Mayerhofer, Johannes Kepler Universität Linz
E-Mail: peter1.mayerhofer@ph-linz.at


# Ein prägnantes Einführungsbeispiel zur Vektorrechnung

Wilfried Lingenberg

Das Beispiel, das einen neuen mathematischen Begriff einführt, bleibt den Lernenden nachhaltig im Gedächtnis und kann den Erfolg einer ganzen Unterrichtsreihe beeinflussen. Es sollte daher einige Bedingungen erfüllen:

- Inhalt und Zweck des neuen Begriffs sollen möglichst deutlich werden;
- der Begriff soll sich möglichst zwanglos als Instrument zur Lösung des Beispielproblems anbieten;
- möglichst viele Eigenschaften des Begriffs sollen im Beispiel schon angelegt sein, sodass
- die Darstellung im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe immer wieder auf die durch das Beispiel entwickelte Grundvorstellung zurückgreifen kann.


Name: __________

**Flaschenpost in der Südsee**

Wir sind auf der Insel $O$ gestrandet und wollen eine Flaschenpost zur bewohnten Insel $X$ treiben lassen. Die Zielinsel liegt drei Seemeilen östlich und acht Seemeilen nördlich von unserer Position. Experimente auf der örtlichen Lagune haben ergeben, daß der Wind alle zehn Stunden von Wind $a$ zu Wind $b$ bzw. wieder zurück wechselt. Dabei wird die Flasche in einer Stunde
– von Wind $a$ eine Seemeile nach Osten und eine Seemeile nach Norden,
– von Wind $b$ eine Seemeile nach Norden
getrieben.

***Skizze*:**

**1.** Was müssen wir tun, damit die Flasche die Zielinsel erreicht?

**2.** Gibt es nur eine Lösungsmöglichkeit oder mehrere?

**3.** Welche zwei Eigenschaften eines Windes mußten wir in unseren Experimenten jeweils ermitteln, um die Lösung bestimmen zu können?

**a)** __________

**b)** __________

Abbildung 1. Arbeitsblatt „Flaschenpost in der Südsee“

Als ich 2006 für die erste Mathematiklehrprobe in meiner Ausbildung ein griffiges Beispiel zur Einführung des Vektorbegriffs suchte, wollte mir keine der in den Lehrwerken vorgefundenen Möglichkeiten so recht zusagen. Am Ende verfiel ich auf das in Abbildung 1 dargestellte Problem.

Die „Flaschenpost in der Südsee“ ist zunächst einmal nicht mehr als eine nicht allzu schwere Knobelaufgabe. Die Lösung finden die meisten Schüler ohne Hilfe innerhalb weniger Minuten; nur wenige brauchen beispielsweise den Hinweis, dass man die Flasche nicht etwa nur im Moment des Windwechsels ins Wasser werfen kann. Nichtsdestoweniger sind in diesem Beispiel bereits alle wichtigen Eigenschaften des Vektorbegriffs angelegt und können im Verlauf der ersten Stunden der Unterrichtsreihe nach und nach herauspräpariert werden:

1. Ein Vektor wird durch die zwei Eigenschaften „Richtung“ und „Länge“ bestimmt. (Im Arbeitsblatt haben die Schüler in der Regel alle das Wort „Richtung“ eingetragen, während die Formulierungen der anderen Eigenschaft variieren. Eine gute ‚Musterlösung‘ ist das Wort „Stundenstrecke“, das uneingeschränkt sowohl zum Beispiel passt als auch die Brücke zur mathematischen Definition des Vektors schlägt.)
2. Wenn man nach der Formulierung der Definition eines Vektors den Winden die Namen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt (also einfach nur Pfeile auf die Buchstaben in der Skizze setzt), lässt sich die Lösung des Rätsels z. B. in der Form $3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b}$ schreiben. Dieser Term exemplifiziert die beiden in einem Vektorraum gegebenen Verknüpfungen, Skalarmultiplikation und Vektoraddition (Abbildung 2).

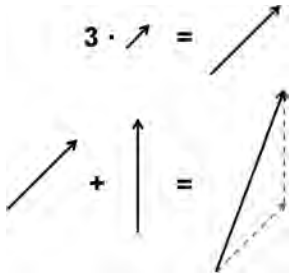



Abbildung 2

3. Die (nicht völlig triviale) Tatsache, dass sowohl $3\vec{a} + 5\vec{b}$ als auch $5\vec{b} + 3\vec{a}$ zum Ziel führen, deutet auf die Kommutativität der Vektoraddition.
4. In der Beschreibung der Winde müssen nur das Wort „Seemeile“ durch „Einheit“ und die Begriffe „nach Osten“ bzw. „nach Norden“ durch „in $x$-Richtung“ bzw. „in $y$-Richtung“ ersetzt werden, um aus der verbalen Beschreibung eine Koordinatendarstellung zu entwickeln. Die vorgegebene Beschreibung des Windes $a$, „eine Seemeile nach Osten und eine Seemeile nach Norden“, übersetzt sich dann zu
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
die des zweiten Windes zu
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Der Lösungsterm des Rätsels macht wiederum unmittelbar anschaulich, wie mit den Koordinaten gerechnet wird:
$$\begin{aligned} 3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
5. Es lohnt sich sogar, kurz die Etymologie des Begriffs zu besprechen: Wörtlich bedeutet das lateinische Wort *vector* ja „Transportierer“; genau das tun die Winde hier mit der Flasche. Der Gegenwartsunterricht in Analytischer Geometrie nutzt die Vektorrechnung in weiten Teilen zur Berechnung statischer Situationen; die Flaschenpost macht demgegenüber deutlich, dass die Grundidee des Vektors eigentlich die einer Bewegung ist. In vielen Zusammenhängen (beispielsweise beim Zeichnen oder auch umgekehrt beim Ablesen von Koordinaten aus einer gegebenen Skizze) profitieren Schüler auch später noch davon, die Koordinatendarstellung eines Vektors als ‚Laufanleitung‘ zu interpretieren: „Geh zwei Schritte in $x$-Richtung, minus fünf in $y$-

und einen in $z$-Richtung“. In dieser Grundvorstellung ist die Ortsunabhängigkeit eines Vektors, die immer wieder Schwierigkeiten macht, ganz zwanglos angelegt: Der Vektor beschreibt nur eine Bewegung an sich, enthält aber keine Informationen über Ausgangs- oder Zielpunkt.

Das in den ersten Monaten meines Lehrerdaseins gefundene Beispiel verwende ich bis heute nahezu unverändert. Vielleicht kann es ja auch anderen Kollegen von Nutzen sein.

Wilfried Lingenberg, Pirmasens
E-Mail: w.lingenberg@mx.uni-saarland.de

# Mathematikdidaktik und Ethik

Jürgen Maaß

„Was hast du getan?“ „Weshalb hast du es getan?“ „Hast du die Folgen bedacht?“ „Hast du etwas Gutes getan?“ „Weshalb hast du nicht etwas anderes getan?“

Solche Fragen werden jedem Menschen von anderen Menschen oder dem eigenen Gewissen immer wieder gestellt. Wer darauf antworten möchte, freut sich, wenn als Begründung für die eigenen Antworten nicht nur ad-hoc-Argumente verwendet werden können, sondern etwas Besseres, insbesondere akzeptierte, allgemein bekannte Argumente, Regeln oder Prinzipien. Wenn also z. B. allgemeine anerkannte Gebote (wie die christlichen 10 Gebote oder grundlegende Prinzipien der geltenden Rechtsordnung) oder Schriften von Aristoteles oder Augustinus oder Kant[1] etc. als Begründung herangezogen werden können, kann das eigene Handeln deutlich besser begründet und verantwortet werden. Seit Jahrtausenden suchen Menschen nach allgemein gültigen und überzeugenden Antworten auf Fragen nach der Verantwortung.

Welche Regeln für „gutes“ Verhalten und „richtiges“ Handeln allgemein anerkannt werden sollen, ist Thema der „Ethik“: „Die (allgemeine) Ethik wird heute als die philosophische Disziplin verstanden, die Kriterien für gutes und schlechtes Handeln und für die Bewertung seiner Motive und Folgen aufstellt.“ (https://de.wikipedia.org/wiki/Ethik)

Neben der Individualethik, der Verantwortung für das eigene Handeln, ist für die folgenden Überlegungen auch ein neuerer Bereich der Ethik wichtig, in dem nach sozialer und gesellschaftlicher Verantwortung für das Handeln in Gruppen und Gesellschaften gefragt wird. Ausgangspunkte für solche Überlegungen sind folgenreiche Großforschungsprojekte wie das Manhattan-Projekt, das Human-Genom-Projekt oder andere Forschungs- und Entwicklungsprojekte, an denen viele Menschen beteiligt sind sowie globale Entwicklungen (etwa Klimawandel), zu denen alle Menschen etwas beitragen.

### Was hat Mathematikdidaktik mit Ethik zu tun?

Selbstverständlich sind alle Menschen, die sich mit Mathematikdidaktik beschäftigen, auch als Privatpersonen (Familienmitglieder, Verkehrsteilnehmer*innen, Staatsbürger*innen, Nachbarn*innen, Konsument*innen, ...) mit ethischen Fragen konfrontiert. Alle Fragen des Alltags haben auch eine ethische Dimension, auch wenn das nicht immer bewusst ist. In diesem Text geht es aber um ethische Fragen, die sich aus der Beschäftigung mit Mathematikdidaktik ergeben.

### Gibt es überhaupt ethische Fragen, die sich aus der Beschäftigung mit Mathematikdidaktik ergeben?

Empirisch gesehen offenbar kaum: Solche Fragen werden nur sehr vereinzelt in Publikationen thematisiert, die GDM hat keinen Ethikrat und keine Ethischen Leitlinien wie andere wissenschaftliche Gesellschaften. Offenbar wird das auch von den meisten Kolleginnen und Kollegen nicht als Mangel empfunden.

In Diskussionen mit Kolleginnen und Kollegen habe ich neben Desinteresse ein paar freundschaft-

[1] Zu meiner Freude habe ich gelesen, dass L. Honnefelder in seinem Beitrag „Personalität – Freiheit – Menschenwürde“ zum Handbuch der Erziehungswissenschaften, Band 1, Paderborn 2008, S. 634f. auf eine ganz ähnliche Trias verweist. Er nennt aber Thomas von Aquin statt Augustinus als Theologen.