

Realistischer Konstruktivismus

Ein unwissenschaftlicher Beitrag

Reinhard Oldenburg

Der radikale und der soziale Konstruktivismus haben in der Didaktik der Mathematik viele Anhänger gefunden, obwohl er weitreichende metaphysische Annahmen macht, deren Bedeutung in pädagogischen Handlungsfeldern ungeklärt ist. Erstaunlicherweise werden aber in der didaktischen Diskussion fast nur Aussagen des Konstruktivismus benutzt, die auch aus einer Reihe anderer Erkenntnistheorien folgen. Der Aufsatz argumentiert, dass ein moderner Realismus, ein realistisch gewendeter Konstruktivismus, eine bessere Hintergrundtheorie für mathematikdidaktische Überlegungen darstellt als der radikale Konstruktivismus.

Einleitung

Didaktisches Handeln benötigt eine Theorie des Wissens und des Lernens zur Begründung von Methoden und Inhalten. Einen wesentlichen Einfluss haben in den letzten Jahren konstruktivistische Ansätze gewonnen (z. B. Reich, 2006). Minikonsens dieser Ansätze ist die Überzeugung, dass Wissen nicht passiv aufgenommen, sondern vom Individuum aktiv konstruiert wird. Diesem Standpunkt ist uneingeschränkt zuzustimmen, er ist theoretisch fundiert und durch unterrichtspraktische Erfahrung legitimiert. Diese Erkenntnis ist auch keineswegs auf die Strömungen beschränkt, die sich selbst als Teil des Konstruktivismus sehen. Trotzdem ist sie das Markenzeichen des Konstruktivismus und dieser hat in der Didaktik große Fortschritte bewirkt, weil u. a. viele Ideen, die in der Reformpädagogik schon angelegt waren, neuen Schwung bekommen haben. Der Konstruktivismus in dieser weiten Form gab eine neue theoretische Erklärung und Rechtfertigung für die Wichtigkeit des eigenen Tuns. Er motivierte eine intensivere Untersuchung individueller Verstehensprozesse und ermöglicht so z. B. einen neuen und fruchtbaren Zugang zur Diskussion von Schülerfehlern. Diese werden nun eingebettet gesehen in den Kontext der individuell erworbenen Schülerkonstrukte (z. B. Hatanó, 1996). Diese Leistungen sollen ausdrücklich anerkannt werden und es soll mit den folgenden kritischen Überlegungen nicht bestritten werden, dass Lernen als individueller und konstruktiver Vorgang zu verstehen ist.

Der Konstruktivismus im eigentlichen Sinne ist durch weitere Aussagen gekennzeichnet, deren di-

daktischer Nutzen in diesem Aufsatz einer kritischen Diskussion unterzogen werden soll. Dabei wird auch beleuchtet, welche Konstruktion von „Konstruktivismus“ von vielen Didaktikern verwendet wird, und welche Aspekte davon für die Praxis relevant sind. Gleichzeitig wird in diesem Aufsatz eine Gegenposition zum radikalen Konstruktivismus entworfen, die aber durchaus Nähe zur Mainstream-Konstruktivismus-Konstruktion hat, sodass ich sie „realistischen Konstruktivismus“ nenne.

Kritik an konstruktivistischen Positionen gab es auch schon viele. Zuletzt hat Sill (2019) in dieser Zeitschrift kritische Fragen gestellt. Wenn man bedenkt, dass der Konstruktivismus vor allem eine Erkenntnistheorie ist, erscheint es geradezu paradox, dass dieser in der Philosophie kaum Anhänger gefunden hat. Allerdings gibt es einige relativistische Positionen, die eine Nähe zum Konstruktivismus haben. Wohl deswegen hat sich in den letzten 15 Jahren eine Gegenbewegung etabliert, die teilweise unter der Bezeichnung „Neuer Realismus“ firmiert (Boghossian, 2013; Gabriel, 2014; Ferraris, 2015). Während in der Philosophie eine offene Debatte im Gang ist, wurde der vorliegende, mathematikdidaktisch inspirierte Aufsatz bereits von zwei Zeitschriften abgelehnt als „unwissenschaftlich“ und mir wurde gesagt ich sei „verblendet“. Wenn Sie diesen Beitrag jetzt lesen, so sollten Sie das wissen. In dieser leichten Überarbeitung versteht er sich nicht als wissenschaftlich, sondern als Meinungsäußerung. Diese Abgrenzung ist wichtig, weil man sie aus konstruktivistischer Perspektive eigentlich gar nicht machen kann.

Rezeption und Einfluss

Diese Arbeit setzt sich mit verschiedenen Spielarten des Konstruktivismus auseinander, konzentriert sich aber in gewissem Sinne auf den radikalen Konstruktivismus, da dieser am besten greifbar ist, während der soziale Konstruktivismus durch die Vielzahl der Autoren schwer einheitlich dargestellt werden kann.

Eine bemerkenswerte Leistung von Ernst von Glasersfeld (1997) besteht darin, seinen radikalen Konstruktivismus als einzige Alternative zu einer simpel-empiristischen Abbildtheorie des Wissenserwerbs stilisiert zu haben.

Wenn der Westen 3000 Jahre lang geglaubt hat und mit Sprachen gelebt hat, die es als selbstverständlich hinstellen, dass Wissen immer irgendwie eine Darstellung der Realität sein muss, dann ist es sehr schwer diesen Begriff des Wissens aufzugeben. (von Glasersfeld, 1997, S. 324)

Mit dieser Vereinfachung hat er sogar in so herausragenden Büchern wie Malles „Didaktik der elementaren Algebra“ (Malle, 1993, Kapitel 1.7) seine Spuren hinterlassen.

Schon seit längerer Zeit werden in der Pädagogik bzw. Didaktik zwei grundsätzlich verschiedene Auffassungen des Lernens gegenübergestellt. [...] ‚Lernen als Abbilden‘ und ‚Lernen als Konstruieren‘ (Malle, 1993, S. 31)

Bedenklich daran ist, dass die Konstruktivisten ihren argumentativen Erfolg erzielen in einer Auseinandersetzung mit einer Erkenntnisphilosophie (der Abbildtheorie), die seit mehr als einem Menschenleben von keinem Philosophen mehr vertreten worden ist. Der letzte ernsthafte Versuch in diese Richtung dürfte in Wittgensteins „Tractatus logico-philosophicus“ gescheitert sein.

Constructivists claim that knowledge is actively constructed by the child, not passively received from the environment.’ Using this conception of the essence of constructivism, virtually every modern theory of cognitive science can claim to be based on constructivist philosophy. (Lesh & Doerr, 2003, S. 532)

Folgerichtig schreibt auch Suchting in Bezug auf die Verwendung der Piaget’schen Theorie durch von Glasersfeld und die Beschränkung des Individuums auf seine individuelle Erfahrung:

In essence it sets out simply some central features of a fairly standard, middle-of-the-road, more or less recent empirist position. (Suchting, 1992, S. 68)

Neben dem radikalen Konstruktivismus ist für die Didaktik vor allem der soziale Konstruktivismus mit all seinen Spielarten von Bedeutung. In seiner Kritik an konstruktivistischen Positionen konzentriert sich Boghossian (2013) ausschließlich darauf.

Wichtige Teile weder des sozialen noch des radikalen Konstruktivismus sind keineswegs bahnbrechend, sondern moderner Standard (wie durch Beispiele auch noch belegt werden wird).

In der weiteren Rezeption des Konstruktivismus zeigt sich, dass eine Reihe von Didaktikern evolutionäre Denkweisen in Verbindung mit dem Konstruktivismus bringen.

Die erstaunliche Effizienz der Mathematik wird von Konstruktivisten auf den bei der Naturbeschreibung allen Menschen gemeinsamen, während der Evolution auf eine effektive Naturwahrnehmung hin selektierten Erkenntnisapparat zurückgeführt. (Leuders, 2003, S. 25) Hier werden Einflüsse der evolutionären Erkenntnistheorie spürbar. (Modrow, 2002, S. 20)

Allerdings unterscheidet sich die evolutionäre Erkenntnistheorie (etwa im Sinne von Riedl) deutlich vom Konstruktivismus und das spiegelt sich in der klaren Aussage von von Glasersfeld wider:

Lorenz schrieb: ‚Die Anpassung an bestimmte Bedingungen der Umwelt ist äquivalent dem Erwerb von Information über diese Umweltbedingungen.‘ Dies ist die fundamentale Annahme seiner Schule, und sie ist völlig unbegründet. Der biologische Begriff der Viabilität verlangt überhaupt nicht, dass Organismen oder Arten Informationen über eine unabhängig von ihnen gegebene Umwelt besitzen oder Eigenschaften mit dieser teilen. [...] In der Theorie der Evolution wie auch im Konstruktivismus bedeutet ‚passen‘ nichts anderes, als [...] durchgekommen zu sein. (von Glasersfeld, 1997, S. 87)

In diesem Sinne nun einige weitere zentrale Thesen von Glasersfelds, die auch von anderen Konstruktivisten geteilt werden, die aber bei Fachdidaktikern, die sich selbst als Konstruktivisten sehen, kaum beachtet werden:

Über das Sein kann ich von meinem Gesichtspunkt überhaupt nichts sagen. (von Glasersfeld, 1997, S. 329)

Es gibt auch keinen Grund zu der Annahme, dass die ontologische Realität etwas besitzt, was wir Struktur nennen könnten. (Richards & v. Glasersfeld, zitiert nach Nüse et al., 1991, S. 101)

The test for knowledge is not whether or not it accurately matches the world [...] but whether or not it fits the pursuit of our goals. (von Glasersfeld, zitiert nach Nola, 1997, S.52)

Eine zentrale These des sozialen Konstruktivismus ist, dass Tatsachen soziale Konstrukte sind. Nun ist es ja völlig trivial, dass es soziale konstruierte Tatsachen gibt. Dass einem bunt bedruckten Stück Papier ein Wert zukommt, ist eine sozial konstruierte Tatsache. Sozialer Konstruktivismus ist dagegen die These, dass alle Tatsachen sozial konstruiert seien. Diese These ist so stark, dass man als Kritiker darüber Witze machen könnte, wenn die Realität nicht noch erstaunlicher wäre. So berichtet Boghossian (2013, S. 33) vom Ergebnis französischer Wissenschaftler, dass die Obduktion der Mumie

von Ramses II zum Schluss führte, dass dieser wohl an Tuberkulose gestorben sei. Der Konstruktivist Bruno Latour hat das bestritten. Zitat Latour: „Wie konnte er an einem Bazillus sterben, der 1882 von Robert Koch entdeckt wurde?“, und weiter „Vor Koch hatte der Bazillus keine wirkliche Existenz“.

Immer wieder werden konstruktivistische Positionen mit Ergebnissen der Gehirnforschung in Verbindung gebracht. Die Behauptung, die Gehirnforschung habe den radikalen Konstruktivismus bewiesen, ist aber völlig unbegründet. Der radikale Konstruktivismus macht weitreichende Unmöglichkeitsaussagen (wie die oben zitierten), die überhaupt nicht empirisch überprüfbar sind. Die Ergebnisse der Gehirnforschung sind auch mit anderen Ansätzen kompatibel und teilweise sogar besser interpretierbar – dazu später mehr. Die Liebe der Konstruktivisten zur Hirnforschung scheint auch einseitig zu sein. So findet man keine Erwähnung des Konstruktivismus in dem großen Sammelband (Roth & Wulliman, 2001). Schon der Versuch, die biologische Autorität von Piaget zu nutzen ist fraglich, denn „Piaget’s overall position is that of a scientific realist.“ (Nola, 1997, S. 43). Manfred Spitzer bemerkt zu einigen Theorien über Medien, diese Debatten würden

[...] unter Berufung auf den sogenannten radikalen Konstruktivismus angeführt, einer Richtung des Theoretisierens, deren philosophische Schwächen hier nicht weiter erörtert werden sollen (Spitzer, 2005, S. 188).

Suchting (1992) hat beispielhaft vorexerziert, was vom radikalen Konstruktivismus einer ernsthaften philosophischen Probe standhält. Das Buch von Nüse et al. (1991) zielt in eine ähnliche Richtung.

Eine Besonderheit der Rezeption zum Schluss: Die primären Autoren des Konstruktivismus sehen in ihrer Theorie eine umfassende Erklärung der Lernprozesse. In Abwandlung eines Zitats von Watzlawick könnte man also sagen, man kann gar nicht nicht konstruktivistisch lernen. Auch das, was etwa bei einem Vortrag von einem (äußerlich) passiven Zuhörer gelernt wird (wenn es denn überhaupt etwas ist), wird durch aktive Konstruktion gelernt. In der didaktischen Rezeption dagegen ist es üblich geworden konstruktivistisches Lernen als (höherwertigen) Spezialfall von Lernen zu begreifen. Beispiel:

Zum Ziel wird es vielmehr, Lernumgebungen zu schaffen, die Lernen im konstruktivistischen Sinne ermöglichen. (vom Hofe, 2001, S. 6)

Defizite des Konstruktivismus

Den eingangs erwähnten Verdiensten des Konstruktivismus stehen auch weniger wünschenswerte Ef-

ekte gegenüber. Sie wurden teilweise schon angesprochen und sollen nun verstärkt in den Blick genommen werden. Dabei werden schon die Konturen einer modifizierten, realistischen Position deutlich.

Zunächst ist bedauerlich, dass konstruktivistische Didaktik dazu neigt, empirisch gut abgesicherte Befunde zur Wirksamkeit von (sinnvoll gemachter) direkter Instruktion nicht zur Kenntnis zu nehmen, wie sie z. B. in Kirschner et. al (2006) zusammengestellt wurden. Auch Klauer und Leutner (2007) beklagen:

Dennoch plädieren konstruktivistisch orientierte Lehr-Lernforscher – den Bogen mitunter weit überspannend – vehement dafür, dass Schülerinnen und Schüler sich neues Wissen grundsätzlich selbstregulierend [...] aneignen sollen (Klauer & Leutner, 2007, S. 325).

Der gelegentlich gemachte Vorwurf, der Konstruktivismus sei ein Solipsismus trifft m. E. nicht zu. Die Trennlinie ist aber so diffizil, dass es nach meinen Erfahrungen nicht möglich ist, in Gesprächen mit Lernenden ein angemessenes Verständnis zu erzielen.

Konstruktivistische Didaktiker haben meistens Schülerinnen und Schüler im Blick, seltener Lehrerinnen und Lehrer – eine Unterlassungssünde, denn gerade hier zeigt sich seine wohlthuend befreiende Kraft. Die Objektivität des Lehrers z. B. bei der Zensurenvergabe, kann aus konstruktivistischer Sicht nicht einmal mehr als Korrektiv gefordert werden. Viabel ist, womit man durchkommt, und als Lehrer kommt man mit ziemlich Vielem durch.

Die referentielle Abgeschlossenheit des Menschen löst zwar das philosophische Problem der Referenz – in dem es abgeschafft wird – schafft aber neue Probleme. Der beliebte Modellbildungskreislauf mit Prüfung an der Realität kann so nicht verwendet werden. In der Praxis lösen viele Didaktiker das Problem so, dass sie „werktags“ einem naiven Realismus anhängen.

Besonders bedauerlich finde ich, dass man ein großes Wunder einfach abschafft, nämlich das Staunen darüber, dass Mathematik auf die Welt passt. Statt einer tiefen Erklärung, wie sie etwa Piaget für Aspekte des Zahlbegriffs gibt, bleibt einem nur die Ernüchterung, dass gar kein Wunder vorliegt: Wegen der Selbstreferentialität ist es ja gar nicht so, dass Mathematik auf die Welt passt, sie passt nur auf unsere Konstruktion der Welt.

Der Konstruktivismus betont zu Recht die Autonomie des Subjekts in der Konstruktion eines viablen Systems des Wissens. Dabei wird viabel aber nur als passend interpretiert („man kommt damit durch“). Es gibt aus der Sicht des Konstruktivismus kein objektives Kriterium, eine viable Konstruktion

einer anderen viablen vorzuziehen. Es ist deshalb nicht zu erklären, dass die geistige Aktivität bezüglich eines Problems auch anhält, nach dem eine viable Interpretation erreicht wurde. Nur wenn man dem Individuum – entgegen der genannten Grundposition des Konstruktivismus – zugesteht, Information über die Welt zu bekommen, wird das klar. Evolutionär gesprochen hat das Lebewesen mit möglichst viel Information über die Umwelt die größten Erfolgsaussichten. Während für Konstruktivistinnen Lernen mit Perturbationen beginnt, erklärt eine realistische Sichtweise auch den Sinn von geistiger Eigenaktivität ohne aktuelle Perturbation. Realistisch betrachtet wird die Aktivität des Individuums also weiter aufgewertet. Diese Sichtweise stimmt mit der von Wolf Singer in folgendem Zitat überein:

Wie versucht wurde zu zeigen, tun wir gut daran, uns das Gehirn als distributiv organisiertes, hochdynamisches System vorzustellen, das sich selbst organisiert, anstatt seine Funktionen einer zentralistischen Bewertungs- und Entscheidungsinstanz unterzuordnen; als System, das [...] auf der Basis seines Vorwissens *unentwegt* (Hervorhebung RO) Hypothesen über die es umgebende Welt formuliert, also die Initiative hat, anstatt lediglich auf Reize zu reagieren. (Singer, 2002, S. 111)

Der letzte Gedankenzug hat auch eine emotionale Wertigkeit: Die Behauptung, die Welt sei „nur“ eine Konstruktion ohne Reales dahinter, mindert die Bereitschaft zu Anstrengungen. Eine realistische Sicht dagegen belohnt mit dem Versprechen, reale Erkenntnisse gewinnen zu können. Eine Motivation, die in der Geschichte der (Natur-)Wissenschaften eine treibende Kraft gewesen ist, und m. E. auch in Zukunft sein sollte.

Dieser wichtige Kritikpunkt soll noch einmal destilliert ausgesprochen werden: Der Konstruktivismus unterschätzt systematisch die Bedeutung der Eigenaktivität des Gehirns, weil er deren Nutzen – den Vorteil durch bessere Vorhersagen künftiger Ereignisse – nicht erklären kann.

Die Einsicht in die Beschränktheit der menschlichen Erkenntnis führt notwendig zur Aufgabe absoluter Positionen und damit zu einem gewissen Relativismus. Das Hintergrundbuch zur Sokalaffäre (Sokal & Bricmont, 1999) gibt ein illustratives Beispiel: Zwischen einem Richter und einem Polizisten kam es zum Streit, ob ein bestimmtes Beweismittel übergeben worden sei. Als Realist ist man motiviert, das zu erforschen, aber in einem Interview zu diesem Problem erklärte der Kommunikationsanthropologe Yves Winkin:

Es gibt keine transzendente Wahrheit. Deshalb glaube ich auch nicht, dass Richter Doutré

oder der Polizeibeamte Lesage etwas verbergen: Beide erzählen die Wahrheit. Wahrheit ist immer mit einer Ordnung verknüpft, sie hängt davon ab, was als wichtig empfunden wird. (Sokal & Bricmont, 1999, S. 121)

Gegen solche Sichtweisen muss m. E. eine aufgeklärte Pädagogik klar Stellung beziehen. Das wird ihr aber nicht gelingen, wenn sie sich auf den Konstruktivismus stützt, der eben solchem Relativismus Vorschub leistet und „alternative Tatsachen“, wie sie der amtierende US-Präsident gerne benutzt, für völlig normal hält. Nun könnte man meinen, hier ein Scheinproblem vor sich zu haben. Allerdings habe ich selbst schon erlebt, dass Mathematikdidaktiker im Gespräch die Auffassung vertreten haben, eine mathematische Aussage könne für Diplomstudenten fachlich falsch, für Lehramtsstudenten aber richtig sein.

Ein attraktiver Zug des Konstruktivismus liegt in seiner Liberalität und Offenheit für verschiedene Konstrukte. Modrow nennt dies explizit als eines der wichtigsten Pro-Argumente. In der Realität äußert sich diese Liberalität etwa so:

So sei den Kritiken des Konstruktivismus zu bedenken gegeben, dass die Denkstruktur der absoluten Wahrheiten, der verbindlichen Lehrpläne, der eindeutigen Antworten, der objektiven Erkenntnisse solchen Gesellschaftssystemen entspricht, für die hierarchische, autoritäre, technokratische Strukturen charakteristisch sind. (Siebert, 1999, S. 44)

Operatoren und Ontologie: Ein physikalisches Zwischenspiel

Ein Kennzeichen des Konstruktivismus ist seine Ontologie-Feindlichkeit. Aus didaktischer Sicht ist daran problematisch, dass ontologische Fragen für Schüler sehr wichtig sind. Andererseits ist eine naive Alltagsontologie offensichtlich unhaltbar. Es scheint mir in dieser Situation wichtig, dass man zumindest durch eine Analogie eine Vorstellung bekommt, wie sich die Einschränkung auf die lokale Erkenntnistätigkeit eines Subjekts mit objektiven Strukturen verträgt. Mir hat dazu die Quantenfeldtheorie als Modell wichtige Impulse gegeben. Das mag überraschen, denn häufig wird gerade der von vielen Quantenphysikern verwendete Slogan „Realismus ist nicht haltbar“ von Konstruktivistinnen als Bestätigung interpretiert. Allerdings ist der damit gemeine physikalische Anti-Realismus (z. B. Friebe et al., 2015) lediglich die Anerkennung, dass messendes System und gemessenes System verschränkt sind und damit eine irreduzible Unbestimmtheit vorliegt – deren Größe aber quantifizierbar ist.

Im Gegensatz zu vielen anderen Modellen der Physik startet die algebraische Quantenfeldtheorie (im Sinne von Haag, 1992) nicht notwendig mit ontologischen Annahmen. Ausgangspunkt kann vielmehr die Algebra der Operatoren observabler Größen sein, also die abstrakte Beschreibung der dem erkennen Subjekt möglichen Messoperationen und deren Beziehungen. Die Beschreibung der Zustände – sprich die ontologische Bühne – erfolgt durch Vektoren eines (Pseudo-)Hilbert-Raumes, der aber nicht vorgegeben wird, sondern sich aus der Algebra der Operatoren (und zwar bis auf Isomorphie eindeutig!) konstruieren lässt (siehe z. B. Haag, 1992, Kapitel IV). Das bedeutet, dass zwei lokale Systeme, die die gleichen Operationen ausführen können, zu isomorphen Beschreibungen der Ontologie kommen. Also gibt es entgegen naheliegender Vermutung keine Inkompatibilität von realistischen Positionen (sogar eine isomorphe Realität) und ihrer lokalen Rekonstruktion.

Interessanterweise liefert die Quantenfeldtheorie auch gleich noch ein eindrucksvolles Beispiel für das vieldeutige Verhältnis von Zustand und Zustandsbeschreibung. Dies liefert ein physikalisches Analogie-Argument, dass die konstruktivistische Gleichsetzung von Objektivität und Abbildungsprinzip unzulässig ist. In der Eichfeldtheorie wird systematisch die theorieimmanente Freiheit zum Umdefinieren untersucht: Es gibt Transformationen, die alle Observablen invariant lassen. Diese sogenannten Eichtransformationen haben nun die verwunderliche Eigenschaft, dass sie bestimmte Entitäten, die Fadeev-Popov-Geister, verschwinden lassen können. Man kann also im Rahmen dieses Modells, die Ontologie durch willkürliche Wahl verkleinern, allerdings um den Preis, dass die resultierende Formulierung nicht mehr invariant unter Lorentztransformationen ist (Ryder, 1996, S. 254).

Das Verständnis dieser physikalischen Theorien ist für didaktisches Handeln natürlich nicht wichtig. Sie werden hier nur angeführt, um am Beispiel zu zeigen, dass die Beziehung von Realität und ihrer Beschreibung so ist, dass das Konzept eines in hohem Maße frei konstruierenden Individuums mit dem Konzept einer objektiven Realität keineswegs im Widerspruch steht. Außerdem gibt das Beispiel eine schöne Analogie, die zeigt, dass die Konstruktion von Objekten aus Prozessen, wie sie beispielsweise von der Reifikationstheorie (Sfard, 2001) postuliert wird, eine universelle Vorstellung ist.

Evolutionäre Erkenntnistheorie

Konrad Lorenz hat eine biologische Erklärung für Probleme der Erkenntnistheorie angeregt, in dem er vermutete, die Kantschen a priori der Erkenntnis

ließen sich evolutionär als a posteriori deuten. Von diesem Startpunkt aus wurde die evolutionäre Erkenntnistheorie u. a. von Vollmer (1990) und Riedl (1988) zu einem detaillierten System aufgearbeitet. Zentrale Aussagen sind:

- Der Mensch besitzt keinen direkten Zugang zur Realität, die biologische Anpassung seiner Sinnesorgane und seines Erkenntnisapparates sorgen aber dafür, dass man als „hypothetischer Realist“ davon ausgehen kann, dass sich z. B. verschiedene Menschen auf dieselbe Realität beziehen.
- Die Welt besitzt Strukturen die unserer Sinnesorgane affizieren (wenn auch nicht treu abbilden!).
- Denken und Bewusstsein sind Funktionen des Gehirns.
- Alle Wissenschaft bleibt hypothetisch.
- Der Vorgang der Wahrnehmung ist konstruktiv interpretierend: „Wahrnehmung = Interpretation = Bedeutungszuweisung“ (Irrgang, 2001, S. 85).
- Die Bildung von Invarianten ist ein Grundprinzip der Wahrnehmung: Die Interpretation versucht Invarianten zu konstruieren, auf niedrigerer Ebene z. B. Richtungs- und Farbkonstanz bei visuellen Wahrnehmungen.
- Lernen ist ein individueller Vorgang, ermöglicht durch evolutionär ausgebildete Strukturen des Gehirns.

Mir ist besonders wichtig, dass eine der zentralen Aussagen des Konstruktivismus, die aktive Konstruktion von Wissen auch in der evolutionären Erkenntnistheorie zentral ist. Irrgang schreibt, mit Bezug auf Wuketits:

Kognition bei Menschen oder bei anderen Lebewesen ist stets ein aktiver Vorgang und kein Prozess der bloßen Repräsentation bestimmter Objekte der Außenwelt eines Lebewesens. Kognitive Prozesse sind keine bloßen Anpassungsprozesse an eine gegebene Außenwelt, sondern zugleich immer auch Interpretationsprozesse. (Irrgang, 2001, S. 113)

Andererseits zeigen diese Punkte auch deutliche Unterschiede zum Standpunkt von Glasersfeld, wie er anfangs dargelegt wurde. Riedl stellt die Differenz klar:

Alle für die Interpretation der Wirklichkeit entwickelten Symbole sind Erfindungen der Evolution, wenn man will: Konstruktionen. Und es wäre unsinnig zu behaupten, dass die von uns applizierte Interpretationsweise die einzig mögliche wäre. [...] Aber zu erwarten, dass aus diesem Grunde unser Weltbild mit der Wirklichkeit nichts zu tun haben könnte, wie die Konstruktivisten meinen (z. B.: von Förster, Gla-

sersfeld, Maturana, ...), kann auch nicht richtig sein. (Riedl, 2000, S.37)

Naturalisierte Erkenntnistheorie

Willard van Orman Quine ist vermutlich der einflussreichste amerikanische Philosoph des 20. Jahrhunderts. Seine detaillierten Analysen des Erkenntnisprozesses haben zu vielen Debatten Anlass gegeben. Dennoch ist er, gerade in Deutschland, außerhalb der Philosophie kaum bekannt. Es ist deshalb angezeigt, seine Ideen etwas breiter darzustellen. Bedauerlicherweise wird Quine als Schüler Carnaps gelegentlich als Neopositivist eingestuft, obwohl er diese Position nachdrücklich kritisiert hat.

Konkret ging Quines Philosophie aus der detaillierten immanenten Kritik des logischen Positivismus hervor. (Ortner, zitiert von Nidarümelin, 1991, S. 475)

Seine umfassenden Abhandlungen zu Beobachtungssätzen und Fragen der Logik mögen diese Fehleinschätzung unterstützt haben. Gegenüber traditionellen empiristischen Positionen macht Quine geltend, dass es keine reinen Beobachtungen gibt, da diese stets schon Interpretationen und Verallgemeinerungen umfassen.

Die Rede über physikalische Objekte lässt sich nicht in eine Sinnesdatensprache übersetzen. Was – im Sinne der Wissenschaft – gesehen, gehört, ertastet etc. wird, ist nicht einfach gegeben, sondern wird als theoretische Setzung postuliert. (Lauener, 1982, S. 26)

Indem Quine den Versuch durch Introspektion an objektive Sinnesdaten heranzukommen ablehnt, nimmt er eine Position ein, die als behavioristisch gekennzeichnet werden kann. Da er aber dem Individuum sehr viel Freiheit in seinen Konstruktionen einräumt, hat dieser Behaviorismus einen deutlich anderen Charakter als der von Skinner.

Quine ist Realist, d. h. er geht davon aus, dass es eine Außenwelt gibt, die unabhängig von uns existiert, und von der unsere Sinnesorgane – möglicherweise fehlerhafte – Informationen bekommen, die uns dazu bringen, bestimmte Beobachtungssätze zu äußern und für richtig zu halten. Diese gehen in das individuelle geistige Netz eines jeden Menschen über. Quine hat dieses Netz gelegentlich als Kraftfeld beschrieben: Die Beobachtungen bestimmen dessen Randbedingungen, die gesamte Struktur aber wird stark durch innere Gesetzmäßigkeiten beschrieben.

Die Gesamtheit unseres sogenannten Wissens oder Glaubens, angefangen bei den alltäglichen Fragen der Geographie oder der Geschichte bis

hin zu [...] Atomphysik oder reinen Mathematik und Logik, ist ein von Menschen geflochtenes Netz, das nur an seinen Rändern mit der Erfahrung in Berührung steht. (Quine, 1979, S. 47) Als Empirist denke ich mir das begriffliche Schema der Wissenschaft nach wie vor als Werkzeug, schließlich und endlich zur Vorhersage künftiger Erfahrung aufgrund vergangener Erfahrung. Physikalische Objekte werden begrifflich in diese Situation importiert, als gelegene kommende Vermittler – nicht durch Definition aufgrund von Erfahrung, sondern einfach als nicht reduzierbare Setzungen, epistemologisch den Göttern Homers vergleichbar. (Quine, 1979, S. 48)

Das Individuum baut aus den Informationen ein möglichst stimmiges System. Dieses ist aber von den Erfahrungen nicht eindeutig bestimmt. Verschiedene individuelle Konstrukte können kompatibel mit allen Beobachtungsdaten sein, Quine sagt, das Netz ist von der Erfahrung her unterbestimmt.

Die Überzeugung, dass bei Eintreten eines Widerspruchs nicht klar ist, welche Aussage falsifiziert wurde, führt zum semantischen Holismus, nach dem niemals einzelne Aussagen, sondern nur umfassende Theoriesysteme der Erfahrung gegenüber treten. Da die Sprache Teil des geistigen Netzes ist, stellt Quine folgerichtig fest, dass einzelne Wörter im Allgemeinen zu kleine Einheiten sind, um bedeutungstragend sein zu können. Da man beim Lernen einer fremden Sprache aber immer auf kleine Teile angewiesen ist, bleibt eine Unbestimmtheit der Übersetzung, die sich z. B. in einer Unerforschbarkeit der Referenz niederschlägt (Man vergleiche mit der referentiellen Abgeschlossenheit des Konstruktivismus). Quine stellt weiter fest, dass solche Übersetzungsprobleme auch innerhalb einer Sprache auftreten, zuerst beim lernenden Kind. Er konstatiert wiederum eine Unbestimmtheit und schreibt weiter:

Dies ergab die Unerforschlichkeit der Referenz, die uns selbst betrifft; und so wurde die Referenz zu Unsinn. Nicht zu Unrecht; Referenz ist Unsinn, es sei denn, man relativiert sie auf ein Koordinatensystem. Dieses Relativitätsprinzip löst unser Dilemma auf. (Quine, 1975, S. 70)

Diese ontologische Relativität ist, wie Quine im Folgenden nachweist, ausreichend für die Zwecke der Wissenschaft. Er lässt aber auch keinen Zweifel daran, dass ontologische Fragen geklärt werden müssen: Die Ontologie bestimmt nämlich die Bedeutung der Quantoren (über welche Objekte läuft eine Variable, wenn wir „für alle“ sagen), und ohne sie ist keine mächtige Sprache denkbar.

Die ontologische Relativität setzt einerseits unseren Fähigkeiten zu referenzieren Grenzen (dies tut

auch der Konstruktivismus), zeigt aber auch auf, in welchem Rahmen eine (relative) Referenz eben doch möglich ist (eine solche positive Bestimmung fehlt im Positivismus). An dieser Stelle kann man sofort eine nützliche didaktische Regel ableiten: Grundsätzlich neue mathematische Objekte und Konzepte liegen außerhalb des bisherigen ontologischen Referenzrahmens, müssen also konstruktiv aufgebaut werden, und dazu braucht das Individuum viel Raum für den Prozess der Hypothesenbildung und der inneren evolutionären Anpassung des Netzes. Sobald aber der ontologische Referenzrahmen ausreichend ist, können Informationen und Wissen wesentlich einfacher transportiert werden können. Ein Beispiel: Es ist nicht möglich, einem Lernenden den mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff „zu geben“. Nachdem er ihn (und die mit ihm vernetzten Konzepte) aber (re)konstruiert hat, ist sein ontologischer Referenzrahmen ausreichend, bestimmte Informationen aufzunehmen. Im Kontrast dazu liefert der Konstruktivismus die pauschale Empfehlung, der Lehrer müsse für jeden Inhalt einen umfangreichen Konstruktionsprozess initiieren.

Synthese: Realistischer Konstruktivismus

Die Ansätze der evolutionären und der naturalisierten Erkenntnistheorie sind weitgehend kompatibel. Vollmer sieht die evolutionäre Erkenntnistheorie als Konkretisierung des Programms von Quine (persönliche Mitteilung). Das liegt sicher auch daran, dass beide Ansätze die Ideen und Erkenntnisse von Piaget verarbeiten und weiterentwickeln. Diese Synthese braucht hier auch nicht expressis verbis formuliert werden, sie sollte sich aus obigem zwanglos ergeben.

Fazit

Der radikale Konstruktivismus lässt die enormen Anstrengungen von Menschen, Wahrheit zu gewinnen und Realität zu erkennen in einem sehr zweifelhaften Licht erscheinen, und hat deshalb auf der emotionalen Seite negative Auswirkungen bei Lernenden. Dagegen darf sich ein rührig forschender Realist Hoffnungen machen kann, wertvolle Erkenntnisse zu gewinnen, die die Welt besser verstehbar machen. Aus der Sicht des Didaktikers ist es erfreulich, dass bewährte Konzepte wie das epistemologische Dreieck oder der Modellierungskreislauf in bewährter Form beibehalten werden können. Darüber hinaus bieten die umfassend ausgearbeiteten evolutionären und naturalisierten Theorien reichlich Material, das in didaktischen Fragen erkenntnisleitend sein kann. Aus dem semantischen Holismus ergibt sich sofort die Forderung, dass die Einführung von neuen Begriffen, die nicht auf

einem bereits etablierten Referenzrahmen verortet werden können, notwendig umfassende Kommunikation erfordert. Die These von der Unbestimmtheit der Übersetzung lässt Kommunikationsprobleme im Unterricht in einem neuen Licht erscheinen. Sie ermutigt den Lehrer, sich seinen Schülern empirisch forschend zu nähern, also z. B. durch Experimente herauszufinden, in wieweit Schülerkonzepte ähnlich sind zu den intendierten Konzepten.

Die realistische Sichtweise unterstützt nachdrücklich den gesamten Modellbildungskreislauf, also inklusive Bewährung in der Realität. Insbesondere wenn man Realität hier so weit fasst, dass auch gesellschaftliche Realität darunterfällt, kann die Modellbildung zur Leitidee des Unterrichts werden.

Der hier nur skizzierte realistische Konstruktivismus muss in Zukunft sowohl theoretisch weiter ausgearbeitet werden als auch sich in seiner Anwendung auf didaktische Fragen bewähren. Es ist charakteristisch für eine naturalisierte Position, dass der hypothetische Charakter auch für die Theorie selbst gilt, und der Realismus gibt Anlass zur Hoffnung, dass sich evolutionär eine Verbesserung erreichen lässt.

Literatur

- Berghossian, P. (2013). *Angst vor der Wahrheit*. Berlin: Suhrkamp.
- Dörfler, W. (1988). *Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion*. Wien.
- Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. New York, New York Press.
- Ferraris, M. (2015). *New realism*. London: Bloomsbury.
- Friebe, C. et al. (2015). *Philosophie der Physik*, Berlin: Springer.
- Gabriel, M. (Hrsg.) (2014). *Der Neue Realismus*. Berlin: Suhrkamp.
- Girgensohn-Marchand, B. (1992). *Der Mythos Watzlawick und die Folgen*. Weinheim.
- Glaseresfeld, E. v. (1997). *Radikaler Konstruktivismus*. Frankfurt: Suhrkamp.
- Haag R. (1992). *Local Qunatum Physics*. Berlin: Springer.
- Hatano, G. (1996). A conception of knowledge aquisition and its implications for mathematics education. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), *Theories of Mathematical Learning* (S. 197–217). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Irrgang, B. (2001). *Lehrbuch der Evolutionären Erkenntnistheorie*. Stuttgart: UTB.
- Keil, G. (2002). *Quine*. Hamburg.
- Klauer, K., & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen*. Weinheim: Beltz.
- Kirschner, P. A., & Sweller, J.; Clark R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching, *Educational Psychologist*, 41(2), 75–86.

- Lauener, H. (1982). *Willard v. Quine*. München: Beck.
- Leisen, J. (2002). Hausphilosophien im Unterricht. *MNU* 55(8).
- Leuders, T. (2003). *Mathematikdidaktik*. Berlin: Cornelsen.
- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
- Modrow, E. (2002). *Pragmatischer Konstruktivismus und fundamentale Ideen als Leitlinien der Curriculumentwicklung*. Halle.
- Matthews, M. R. (Ed.) (1998). *Constructivism in Science Education*. Dordrecht.
- Nüse, R., Groeben N., Freitag B. & Schreier M. (1991). *Über die Erfindungen des radikalen Konstruktivismus*. Weinheim.
- Nida-Rümelin, J. (1991). *Philosophie der Gegenwart*. Stuttgart.
- Nola, R. (1998). *Constructivism in Science and in Science Education*. In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht.
- Oeser, E., & Seitelberger, F. (1988). *Gehirn, Bewusstsein und Erkenntnis*. Darmstadt: WBG.
- Piaget, J. (1973). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt: Suhrkamp.
- Quine, W. v. O. (1975). *Ontologische Relativität und andere Schriften*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
- Quine, W. v. O. (1979). *Von einem logischen Standpunkt*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
- Quine, W. v. O. (1989). *Die Wurzeln der Referenz*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
- Reich, K. (2006). *Konstruktivistische Didaktik – Ein Lehr- und Studienbuch*. Weinheim: Beltz.
- Riedl, R. (2000). *Strukturen der Komplexität*. Berlin.
- Roth, G. (1997). *Das Gehirn und seine Wirklichkeit*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
- Ryder, L. H. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge, Cambridge.
- Scheunpflug, A. (2001). *Biologische Grundlagen des Lernens*. Berlin: Cornelsen.
- Sfard, A. (2001). Symbolizing Mathematical Reality into Being. P. Cobb et al., *Symbolizing and Communication: Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (S. 37–98).
- Siebert, H. (1999). *Pädagogischer Konstruktivismus*. Neuwied: Beltz.
- Sill, H.-D., (2019). Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells. *Mitteilungen der GDM*, 106, 21–23.
- Singer, W. (2002). *Der Beobachter im Gehirn*. Suhrkamp. Frankfurt: Suhrkamp.
- Spitzer, M. (2005). *Vorsicht Bildschirm! Elektronische Medien, Gehirnentwicklung, Gesundheit und Gesellschaft*. Stuttgart: Klett.
- Suchting, W. A. (1998). Constructivism Reconstructed, In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Sokal, A., & Bricmont, J. (1999). *Eleganter Unsinn*. München: Beck.
- Vollmer, G. (1990). *Evolutionäre Erkenntnistheorie*. Stuttgart: S. Hirzel.
- Wittmann, G. (2002). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Die Fermat-Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra CAS-unterstützte Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik

Kinga Szűcs

Problemstellung: Die Kluft zwischen Schule und Hochschule

Langjährige Erfahrungen, die ich als Hochschuldozentin an der Friedrich-Schiller-Universität Jena in der Mathematiklehrerbildung im Zeitraum 2008 bis 2019 gesammelt habe, zeigen, dass die Studierenden den Übertritt von der Schule in die Hochschule als *Kulturschock* erleben. An anderen Hochschulen mag dies nicht viel anders sein. Aber nicht nur persönliche Wahrnehmungen, sondern auch bestimmte Tatsachen bestätigen, dass es zweifelsohne eine große Kluft zwischen

Schul- und Hochschulmathematik klafft, beispielsweise die hohen Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studienfächern, aber auch die Vielzahl an einfallreichen Überbrückungsmaßnahmen wie Kurse (sie heißen auch so: „Brückenkurse“), Tutorien, Camps (Szűcs & Traxl, 2020, S. 1). Die Gründe hierfür sind vielfältig und zahlreich und um nur einige von ihnen zu erwähnen: die – meines Erachtens Missinterpretation der – Bildungsstandards für die Unterrichtspraxis, die Reduktion der Stundenzahlen der Mathematik, aber auch technische Errungenschaften, die in die Schulen einen schnelleren Einzug haben, als in die Hoch-