Ein Film über die Entstehung des Beweisens im Unterricht

Neue Ansätze für eine seit Langem bestehende Herausforderung der Didaktik

Mario Gerwig

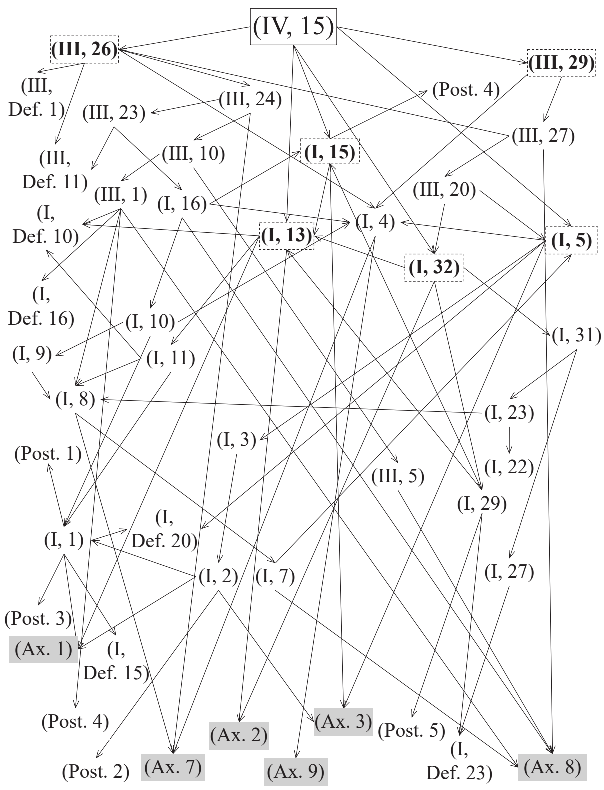
> Lässt man dieses [das Beweisen; M.G.] dergestalt allmählich entstehen, als eine natürliche, der mathematischen Aufgabe angepasste Art des Vorgehens, so lernt der Schüler nicht nur beweisen, sondern er lernt auch etwas viel Wichtigeres: nämlich, was es mit dem Beweisen auf sich hat. Er erlebt aus unmittelbarer eigener Erfahrung, daß dieses Beweisen nicht eine sinnlose Spielerei, eine komplizierte, aber konventionelle Erfindung der Mathematiker ist, sondern, daß es das natürliche Erkenntnismittel der Mathematik ist. Er lernt also, daß das Beweisen sein Heimatrecht in der Mathematik dem Umstand verdankt, daß es einer wohlbestimmten Funktion genügt.
>
> (Alexander I. Wittenberg, 1963, S. 61f.)

Es ist nach wie vor eine zentrale Frage der Mathematikdidaktik, wie das schwierige Thema *Beweisen* so in den Unterricht gelangen kann, dass die Schüler/-innen nicht nur einen konkreten Beweis nachvollziehen und verstehen, sondern auch die dahinter liegende Denkhaltung erfahren, d. h. erkennen, wie die mathematischen Wahrheiten aufeinander ruhen und was es mit dem Beweisen in der Mathematik auf sich hat. Die große Bedeutung dieser didaktischen Kernfrage wird deutlich bei einem Vergleich der *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (KMK, 2015) mit aktuellen Forschungsbefunden. Erstere beschreiben innerhalb der Kompetenz *Mathematisch argumentieren* ein Spektrum an Argumentationen „von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen" (KMK, 2015, S. 14), dessen Ausprägungen u. a. das Wiedergeben und Anwenden von Routineargumentationen (Anforderungsbereich I), das Nachvollziehen von mehrschrittigen Argumentationen und logischen Schlüssen (Anforderungsbereich II) sowie das Nutzen, Erläutern und Entwickeln von Beweisen und anspruchsvollen Argumentationen (Anforderungsbereich III) umfassen. Dennoch ist es eine vielfach diagnostizierte Begebenheit, dass Beweise und vor allem die Tätigkeit des Beweisens in der Schule meist völlig unterrepräsentiert sind (Malle, 2002, S. 4; Brunner, 2014, S. 2). Sie werden häufig als ein Tätigkeitsfeld für begabtere Schülerinnen und Schüler angesehen, wodurch der Aufbau der Kompetenz, die ja für alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen gelten sollte, erschwert bzw. verunmöglicht wird. Zahlreiche empirische Befunde belegen, dass auch starke Schüler/-innen (Ufer/Heinze, 2008) sowie viele Studienanfänger/-innen (Nagel/Reiss, 2016) teils erhebliche Schwierigkeiten beim mathematischen Begründen haben. Und auch vielen Lehrpersonen fällt es schwer, dieses Thema zu unterrichten, da es sich auch für sie um eine hochanspruchsvolle Tätigkeit handelt, bei der Argumente der Lernenden häufig erst noch ergänzt und ggf. in die symbolische Sprache der Mathematik transformiert werden müssen.

> Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass beim Thema ‚Beweisen' eine größere Diskrepanz herrscht zwischen dem Anspruch, wie er sich beispielsweise in Bildungsstandards manifestiert, und der Wirklichkeit, realisiert als alltägliche Praxis des Mathematikunterrichts einzelner Lehrpersonen (Brunner, 2014, S. 2).

Insgesamt erscheint es daher nicht übertrieben, die obige didaktische Kernfrage als fachdidaktisches Zentralproblem zu markieren. Wie könnte eine Antwort aussehen?

Martin Wagenschein (1896–1988) hat bereits vor über 50 Jahren ein Unterrichtsbeispiel entworfen, welches sich mit der Entdeckung des Beweisens befasst (Wagenschein, 1968). Darin beschreibt er anhand eines prägnanten Exempels – der Radius eines beliebigen Kreises lässt sich genau sechsmal auf dessen Rand abtragen – die für die Entwicklung der Wissenschaften insgesamt und für die Mathematik im Besonderen entscheidende Entdeckung der Axiomatik durch Euklid von Alexandria. Wagenscheins Entwurf ist nicht nur ein historisches Beispiel, an welchem die von ihm verfolgte *Exemplarische Methode* und das *Genetische Prinzip* deutlich werden. Er kann trotz seines Alters auch heute noch Basis eines modernen Unterrichts sein, der die Erkenntnisse und Prinzipien der fachdidaktischen und empirischen Unterrichtsforschung beachtet und in dem der entscheidende und weitreichende Paradigmenwechsel weg von der früheren rezeptartig beschriebenen, praktischen Rechen- und Messkunst der alten Ägypter und hin zu jener axiomatisch fundierten und streng beweisenden *Wissenschaft*, die wir heute Mathematik nennen, lebendig wird.



Struktur des Sechsstern-Beweises Euklids (IV, §15). Die Basis des Beweises besteht aus Axiomen, Definitionen und Postulaten.

In einer modernisierten und aktualisieren Fassung ist Wagenscheins Entwurf in den letzten Jahren vielfach an verschiedenen Schulen in Deutschland und der Schweiz sowie in diversen fachdidaktischen und schulpädagogischen Universitätsseminaren unterrichtet und so stetig weiterentwickelt worden (Gerwig, 2015). Der größte Unterschied zur Fassung Wagenscheins besteht in der Hinzunahme des originären Beweises Euklids aus dessen *Elementen* (IV, §15). Damit gelingt es, den Satz über das Sechseck als Muster für die Entdeckungen der antiken Mathematik zu verstehen, an welchem demonstriert werden kann, wie die mathematischen Wahrheiten aufeinander ruhen, wie also ein auf Axiomen aufgebautes System des mathematischen Beweisens entstanden und begründet worden ist. Denn die Analyse des euklidischen Beweises verweist auf die hinter dem Beweis liegende Denkhaltung: Euklid greift in seinem Beweis direkt auf sechs Sätze zurück, die er zuvor bereits bewiesen hat. Diese Beweise beziehen sich wiederum auf zuvor bereits bewiesene Sätze. Was steht am Anfang dieser Argumentationskette? Es sind Definition, Postulate und Axiome. Verdeutlicht man die Struktur des Beweises in einem Diagramm, so wird dieses allgemeingültige und für die Entwicklung der Mathematik so zentrale Prinzip auf eindrückliche Weise deutlich (siehe Abbildung).

Eine Inszenierung dieses Unterrichts ist nun erstmals filmisch dokumentiert worden (Laufzeit: 56 min). Der erteilte, achtstündige Unterricht orientiert sich dabei an den Prinzipien der Lehrkunstdidaktik, die tief in der deutschen Didaktiktradition verwurzelt ist (Wildhirt, Jänichen, & Berg, 2016, S. 111–128). Sie befasst sich mit wissenschaftlich oder kulturell bedeutenden Ereignissen, welche die Sicht auf Kultur, Kunst und Wissenschaft maßgeblich verändert und beeinflusst haben und bis heute gelten. Dazu entwickelt sie mit großer Sorgfalt sogenannte Lehrstücke, in denen die Schüler/-innen in die Ausgangslage früherer Entdecker, Urheber oder Autoren versetzt werden und von welcher aus sie „nach-entdeckend" die Wege zu einer Entdeckung, einer Erfindung oder einem geschaffenen Werk im eigenen Lern- und Bildungsprozess erleben – das Lehrstück zur Entdeckung der Axiomatik ist eines von rund 50 Lehrstücken. Entscheidende Orientierungspunkte sind vor allem die *Exemplarische Methode* und das *Genetische Prinzip*, wie es Martin Wagenschein verfolgt und in seinen zahlreichen Unterrichtsskizzen beispielhaft ausgelegt hat, sowie die *Theorie der Kategorialen Bildung* (1959) Wolfgang Klafkis.

Im filmisch dokumentierten Unterricht zur Entdeckung der Axiomatik werden diese didaktischen und bildungstheoretischen Schwerpunktsetzungen insb. in der *Ouvertüre* sichtbar, in welcher den Schüler/-innen die scheinbar perfekt geschlossene Zirkelrose anhand authentischer Bilder aus Natur und Kultur als reizvolles *Phänomen* begegnet, entstehende *Sogfragen* (Schließt sich die Zirkelrose wirklich genau? Was bedeutet genau? Gibt es Perfektion in der Natur?) in einer möglichst ausgewogenen *Ich-Wir-Balance* untersucht werden, die Begegnung mit der *originären Vorlage* (Euklids Beweis aus den Elementen) in der Erstellung des *Denkbilds* (Zirkelrose) und der gemeinsamen Suche nach einer Begründung angebahnt wird und der *kategoriale Aufschluss* (Mathematik ist nicht autoritär; mathematische Wahrheiten sind begründbar und ruhen aufeinander) durch die eingenommene Fragehaltung und das Wechselspiel aus individuellem Nachdenken, kritischem Nachvollziehen, Diskutieren und Präsentieren vorbereitet wird.

Ein Trailer ist unter tinyurl.com/ycfcpozm abrufbar, dort finden sich auch die Bestelloptionen der DVD, die sich gut zum Einsatz in der Lehrpersonen-Ausbildung eignet. Der didaktische Begleittext (Booklet der DVD und frei zum Download) enthält darüber hinaus weitere Informationen zum erteilten Unterricht.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Gerwig, M. (2015). *Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkunstdidaktik.* Heidelberg: Springer Spektrum.

KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Bonn und Berlin: KMK. Abgerufen unter* tinyurl.com/yczhuhek

Malle, G. (2002). Begründen – eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. Basisartikel. *Mathematik lehren*, *110*. Seelze: Friedrich-Verlag. 4–8.

Nagel, K., & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *19*(2), 299–328.

Ufer, S., & Heinze, A. (2008). Development of geometrical proof competency from grade 7 to 9: A longitudinal study. In *11th International Congress on Mathematics Education, Topic Study Group* 18, 6.

Wagenschein, M. (2008). *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch* (4. Auflage). Weinheim: Beltz.

Wildhirt, S., Jänichen, M., & Berg, H. C. (2016). Lehrstückunterricht. In J. Wiechmann; S. Wildhirt (Hrsg.), *12 Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis* (6. Auflage, S. 111–128). Weinheim: Beltz.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Klett: Stuttgart.

Mario Gerwig, Gymnasium Leonhard, Basel, Schweiz
E-Mail: mariogerwig@gmail.com

Machen E-Lectures die Studierenden faul?

Wolfram Meyerhöfer

Seit mehreren Jahren gibt es für Vorlesende an der Universität Paderborn die Möglichkeit, Vorlesungen elektronisch aufzeichnen zu lassen und diese Aufzeichnungen – E-Lectures genannt – den Studierenden im Internet zur Verfügung zu stellen. Diese Option verringert den Vorlesungsbesuch erheblich. In meinen Vorlesungen besuchen typischerweise 300 Studierende die erste Vorlesung, die Anzahl der Vorlesungsbesucher/-innen pendelt sich dann bis zur dritten Vorlesung bei 100 bis 150 ein. Werden E-Lectures angeboten, so sinkt diese Zahl auf 30 bis 50.

Im Laufe der Jahre entstand bei mir und meinen Mitarbeiter/-innen zunehmend der Eindruck, dass das Vorhandensein der E-Lectures dazu führt, dass die Studierenden sich den Vorlesungsstoff nicht mehr erarbeiten: Unsere Veranstaltungen umfassen 2 SWS Vorlesung, 2 SWS Übungen und Hausaufgaben. Der laufende Erwerb des Vorlesungsstoffes ist dabei für einen erfolgreichen Lernprozess vorausgesetzt. Unser Eindruck war, dass viele Studierende in den Übungen und bei den Hausaufgaben schlechte(re) Leistungen zeigen, weil sie das Rezipieren der Vorlesungsaufzeichnung nach hinten verschieben. Wir hatten also den Eindruck, dass E-Lectures die Studierenden zu Faulheit oder zu prokrastinativem Verhalten verführen und dass wir eventuell besser auf E-Lectures verzichten sollten. Da wir umgekehrt E-Lectures im Sinne der Vereinbarkeit von Studium und Familie, im Sinne von Studienfreiheit und wegen der Option von Wiederholung für sinnvoll halten, führten wir eine Untersuchung zur Nutzung der E-Lectures durch, die hier dokumentiert werden soll.[1]

[1] Unterstützung leistete hierbei Tabea Christel Elke Ophaus im Rahmen ihrer Masterarbeit mit dem Titel: E-Lectures in mathematikdidaktischen Vorlesungen, Universität Paderborn 2020. Die Forschungslage wird in diesem Artikel komplett aus dieser Arbeit heraus rezipiert. Auch die meisten Datenzusammenfassungen stammen von Tabea Ophaus.