

Zu „Das Epsilon-Delta Spiel und Schach“

GDM-Mitteilungen 108 (2020), S. 45–48

Stefan Götz

Im Abschnitt „Grenzwert einer Funktion“ wird behauptet, dass die Ungleichungen $8 < x^2 < 10$ „klarerweise“ erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{8}$ (S. 47, linke Spalte). Das ist meines Erachtens nicht richtig. Für $x = 3.17$ ist zwar $|3.17 - 3| < 3 - \sqrt{8} = 0.1715\dots$, aber $x^2 = 10,04\dots > 10!$ (In dem Zusammenhang ist bei $3 - \sqrt{8} \approx 1.7$ ebenda offenbar ein Druckfehler passiert.)

In der rechten Spalte auf S. 47 wird allgemein behauptet, dass die Ungleichungen $9 - \varepsilon < x^2 < 9 + \varepsilon$ notwendigerweise erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$. Ich habe diese Behauptung nicht nachvollziehen können und daher versucht, diese nachzurechnen. So bin ich überhaupt erst auf den Fehler und das obige Gegenbeispiel gekommen.

Wie sieht nun eine passende δ -Umgebung für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ für die stetige Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ aus? – Es ist $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$. Denn wenn $|x - 3| < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ ist, dann folgt daraus entweder

1. $x - 3 < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ oder
2. $3 - x < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

Im ersten Fall ist $x < \sqrt{9 + \varepsilon}$ und damit $x^2 < 9 + \varepsilon$.

Der zweite Fall ist etwas aufwändiger. Aus $x > 6 - \sqrt{9 + \varepsilon}$ folgt durch Quadrieren $x^2 > 45 - 12\sqrt{9 + \varepsilon} + \varepsilon$. Wir versuchen $45 - 12\sqrt{9 + \varepsilon} + \varepsilon > 9 - \varepsilon$ und erkennen durch Äquivalenzumformungen die zweifellos richtige Aussage $\varepsilon^2 > 0$.

Tatsächlich ist die von den Autoren angegebene δ -Umgebung ein bisschen zu groß. Setzen wir nämlich $3 - \sqrt{9 - \varepsilon} > \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ an, so liefern wiederum einige Äquivalenzumformungen die Ungleichung $9 > \sqrt{81 - \varepsilon^2}$, die unstrittig ist.

Natürlich ändert meine Bemerkung nichts an der Gesamtaussage des Artikels, und das ist ja das Wichtigste. Dennoch meine ich, dass auch die technischen Details Augenmerk verdienen.

Stefan Götz, Universität Wien
E-Mail: stefan.goetz@univie.ac.at