Lauener, H. (1982). *Willard v. Quine*. München: Beck.
Leisen, J. (2002). Hausphilosophien im Unterricht. *MNU 55*(8).
Leuders, T. (2003). *Mathematikdidaktik*. Berlin: Cornelsen.
Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
Modrow, E. (2002). *Pragmatischer Konstruktivismus und fundamentale Ideen als Leitlinien der Curriculumentwicklung*. Halle.
Matthews, M. R. (Ed.) (1998). *Constructivism in Science Education*. Dordrecht.
Nüse, R., Groeben N., Freitag B. & Schreier M. (1991). *Über die Erfindungen des radikalen Konstruktivismus*. Weinheim.
Nida-Rümelin, J. (1991). *Philosophie der Gegenwart*. Stuttgart.
Nola, R. (1998). *Constructivism in Science and in Sciene Education*. In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht.
Oeser, E., & Seitelberger, F. (1988). *Gehirn, Bewusstsein und Erkenntnis*. Darmstadt: WBG.
Piaget, J. (1973). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1975). *Ontologische Relativität und andere Schriften*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1979). *Von einem logischen Standpunkt*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1989). *Die Wurzeln der Referenz*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Reich, K. (2006). *Konstruktivistische Didaktik – Ein Lehr- und Studienbuch*. Weinheim: Beltz.
Riedl, R. (2000). Strukturen der Komplexität. Berlin.
Roth, G. (1997). *Das Gehirn und seine Wirklichkeit*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Ryder, L. H. (1996*). Quantum Field Theory*. Cambridge, Cambridge.
Scheunpflug, A. (2001). *Biologische Grundlagen des Lernens*. Berlin: Cornelsen.
Sfard, A. (2001). Symbolizing Mathematical Reality into Being. P. Cobb et al., *Symbolizing and Communication: Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (S. 37–98).
Siebert, H. (1999). *Pädagogischer Konstruktivismus*. Neuwied: Beltz.
Sill, H.-D., (2019). Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells. *Mitteilungen der GDM*, 106, 21–23.
Singer, W. (2002). *Der Beobachter im Gehirn*. Suhrkamp. Frankfurt: Suhrkamp.
Spitzer, M. (2005). *Vorsicht Bildschirm! Elektronische Medien, Gehirnentwicklung, Gesundheit und Gesellschaft*. Stuttgart: Klett.
Suchting, W. A. (1998). Constructivism Reconstructed, In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht: Kluwer Academic.
Sokal, A., & Bricmont, J. (1999). *Eleganter Unsinn*. München: Beck.
Vollmer, G. (1990). *Evolutionäre Erkenntnistheorie*. Stuttgart: S. Hirzel.
Wittmann, G. (2002). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

Reinhard Oldenburg, Universität Ausgburg
reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Die Fermat-Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra

CAS-unterstützte Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik

Kinga Szűcs

Problemstellung: Die Kluft zwischen Schule und Hochschule

Langjährige Erfahrungen, die ich als Hochschuldozentin an der Friedrich-Schiller-Universität Jena in der Mathematiklehrerausbildung im Zeitraum 2008 bis 2019 gesammelt habe, zeigen, dass die Studierenden den Übertritt von der Schule in die Hochschule als *Kulturschock* erleben. An anderen Hochschulen mag dies nicht viel anders sein. Aber nicht nur persönliche Wahrnehmungen, sondern auch bestimmte Tatsachen bestätigen, dass es zweifelsohne eine große Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik klafft, beispielsweise die hohen Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studienfächern, aber auch die Vielzahl an einfallsreichen Überbrückungsmaßnahmen wie Kurse (sie heißen auch so: „Brückenkurse"), Tutorien, Camps (Szűcs & Traxl, 2020, S. 1). Die Gründe hierfür sind vielfältig und zahlreich und um nur einige von ihnen zu erwähnen: die – meines Erachtens Missinterpretation der – Bildungsstandards für die Unterrichtspraxis, die Reduktion der Stundenzahlen der Mathematik, aber auch technische Errungenschaften, die in die Schulen einen schnelleren Einzug haben, als in die Hochschule. Pauschal gesagt, es herrscht nicht nur eine andere mathematische Kultur in der Schule, als an der Hochschule, sondern es wird auch ein ganz anderes Bild von der Mathematik vermittelt: Während Mathematik in der Schule überwiegend als fertig, abgeschlossen, dafür aber gut in der Praxis anwendbar erscheint und als ein solches Fach vermittelt wird, wird Mathematik an der Hochschule als ein System von Definitionen, Sätzen, Beweisen und Lemmata, also eine reine theoretische Wissenschaft rübergebracht. Um Missverständnisse zu vermeiden: Einen Unterschied zwischen Schule und Hochschule hat es schon vor 20 bis 30 Jahren und auch schon zu Felix Kleins Zeiten gegeben, den wird es und soll es immer geben. Dadurch aber einerseits, dass beispielsweise *Beweise* aus der Schule praktisch komplett verschwunden sind (Brunner, 2014, S. 2), während technische Werkzeuge wie CAS (unter CAS – Computeralgebrasystem – wird in dem vorliegenden Beitrag ein Taschenrechner oder ein digitales Gerät mit entsprechender Software verstanden, das mit Variablen in Termen, Gleichungen, Funktionen umgehen kann) und Computer langwierige und komplexe Berechnungen im Nu herbeizaubern, entsteht bei den Lernenden oft der Eindruck, Mathematik ist *nur* eine Anwendung von Formeln und Rechenverfahren. Dafür wird von Studierenden gerade in der Anfangsphase ihres Studiums erwartet, dass sie schnell den Anschluss an Beweisverfahren und -strategien finden und die Mathematik als *reine deduktive Wissenschaft* zu schätzen wissen. Wenn sie das nicht oder nicht in dem erwarteten Tempo können, wird dies als mathematische Unfähigkeit interpretiert, während aber die Kompetenzen, auch technischer Natur, die diese Studierenden aus der Schule mitbringen, nur zum Teil beachtet werden.

Da die Gründe für das skizzierte Problem zahlreich und vielfältig sind, kann es auch keine einfache und pauschale Lösung geben. Sicherlich wird es in der Zukunft notwendig sein, in der Schule mehr Zugänge zu der theoretischen Seite der Mathematik und auch zu deren Entstehen (nämlich der Theorie) zu verschaffen, dass gerade bei der Argumentations- und Beweiskultur Nachholbedarf besteht, wird auch in dem Maßnahmenkatalog der DMV, der GDM und der MNU bestätigt (Koepf, Götze, Eichler & Heckmann, 2019). An dieser Stelle möchte ich aber dafür plädieren, die bereits vorhandene technische Kompetenz der Studierenden bei der Führung von Beweisen in der Hochschulmathematik zu verwerten. Beispielsweise ist der CAS-Einsatz in Thüringen ab der 9. Klasse im Unterricht und hierdurch in der Abiturprüfung verbindlich, in vielen anderen Bundesländern ist er im Unterricht zwar fakultativ vorgesehen, aber trotzdem verbreitet. Auf solche Vorkenntnisse sollte man in der Hochschulmathematik zurückgreifen, und zwar nicht nur, wenn es um Anwendungen geht (Berechnung von Determinanten größerer Matrizen, Nullstellen von Polynomfunktionen höheren Grades u. Ä.). Mit dem vorliegenden Beitrag wird also beabsichtigt, konkrete Beispiele dafür zu geben, wie die Thematisierung von Beweisen an der Hochschule durch den CAS-Einsatz für Studierende anschlussfähiger gemacht werden kann. Ein langfristig erhofftes Ziel dabei ist, Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik einen neuen Blick auf Beweise zu vermitteln und hierdurch zumindest den Boden für eine neue Unterrichtskultur (eine Beweiskultur!) in der Schule – wenn sie selbst Lehrpersonen sind – zu bereiten. Aus diesem Grund werden nachfolgend zwei Sätze, nämlich die Teilbarkeit der Fermat-Zahlen durch 3 sowie der Fundamentalsatz der Algebra unter dem Gesichtspunkt thematisiert, inwieweit das CAS in den Prozess der Satz- und Beweisideefindung erfolgreich eingebunden werden kann. Beide Sätze haben gemeinsam, dass sie unter Rückgriff auf die Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel bewiesen werden können. Meine Erfahrungen zeigen, dass heutzutage selbst diese Verallgemeinerungen den Studierenden Schwierigkeiten bereiten, deswegen wird in einem ersten Schritt ein – ebenfalls CAS-unterstützter – Zugang zu ihnen vorgeschlagen. Hierauf kann man in der Unterrichtspraxis natürlich verzichten, falls diese Verallgemeinerungen den Studierenden bekannt und flexibel zugänglich sind.

Die Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel

In der Schulmathematik werden die 1. ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), die 2. ($(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$) und die 3. ($(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) binomische Formel etwa in der Klassenstufe 8 thematisiert, oft auch geometrische Begründungen der Formeln durch Flächenzerlegungen und -umwandlungen gegeben. Etwa in der Klassenstufe 10 erfolgt die Auseinandersetzung mit dem binomischen Lehrsatz ($(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\binom{n}{k}) a^k \cdot b^{n-k}$), der als Verallgemeinerung der 1. binomischen Formel und mit der Substitution $b := -b$ auch der 2. binomischen Formel gilt. Mögliche Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel bleiben allerdings außer Acht, obwohl sie sich gerade beim Beweisen als nützliche Hilfsmittel erweisen. Da die hier gemeinten Verallgemeinerungen meines Erachtens bereits in der Schule thematisiert werden können, werden in diesem Abschnitt sowohl Lernende in der Schule als auch Studierende an der Hochschule bzw. deren Lehrpersonen und Dozierenden, angesprochen.

Satzfindung mit CAS

Betrachtet man die 3. binomische Formel – und dies sollte den Lernenden und/oder Studierenden so vermittelt werden –, so stellt sich zuerst die Frage, welche Komponenten der Formel überhaupt auf einer allgemeineren Ebene formuliert werden können. Schaut man auf $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, so wird sofort klar, dass auf der linken Seite ein Produkt steht, dessen Faktoren zwar höhere Exponenten als 1 haben können, diese Terme aber durch den binomischen Lehrsatz bereits zur Verfügung stehen. Die rechte Seite aber könnte zu $a^n - b^n$ verallgemeinert werden. Weiterhin, die 3. binomische Formel besagt nichts anderes, als dass aus dem Term $a^2 - b^2$ sowohl $a - b$ als auch $a + b$ ausgeklammert werden kann. Gilt dies für höhere Potenzen? Welche/r Term/e kann/können aus $a^n - b^n$ ausgeklammert werden? Hierdurch entsteht zunächst eine offene Fragestellung, die man mit Hilfe eines CAS erkunden kann und man zur Formulierung entsprechender *Vermutungen*, nämlich, dass aus dem Term $a^n - b^n$ der Faktor $a - b$ immer, der Term $a + b$ für gerade Werte von n ausgeklammert werden kann, gelangt. Auf der Hand liegend ist bei $n = 3$ anzufangen, n sukzessiv zu erhöhen und jeweils eine Faktorisierung durchzuführen, was beispielsweise der Befehl factor liefert (Abb. 1, oben). In *Analogie* dazu kann auch der Term $a^n + b^n$ auf seine Faktorisierbarkeit hin überprüft (Abb. 1, unten) und eine einschlägige Vermutung kann formuliert werden.

Abbildung 1. Faktorisierung von Termen der Form $a^n - b^n$ sowie $a^n + b^n$ für n= 3,. . . 10, mit CASIO Classpad II

Finden einer Beweisidee mit CAS

Eine *Beweisidee* kann die Analyse der restlichen Faktoren sowie eine Rückmultiplikation der Faktoren liefern. Bei der Analyse können Regelmäßigkeiten wie Symmetrie der Terme in den beiden Variablen, abwechselnde Vorzeichen erkannt werden. Zu der Rückmultiplikation würde sich der Befehl expand erst eignen, wenn der Modus auf Assist gestellt ist (Abb. 3 oben), sonst fasst das CAS die Glieder unsichtbar und demzufolge unnachvollziehbar zusammen (Abb. 2). Überdies empfiehlt es sich die Restfaktoren zu einem Term zusammenzufassen sowie nach dem Grad des Faktors a zu sortieren, damit bei der Multiplikation die Glieder, die einander aufheben, nebeneinander auftreten (Abb. 3 unten). Dieses gegenseitige Aufheben ist Dreh- und Angelpunkt eines einschlägigen Beweises, den ab hier *händisch* zu führen nicht mehr schwerfällt und der entweder auf der Multiplikation eines passenden Terms mit $a - b$ bzw. mit $a + b$ oder auf der Durchführung einer entsprechenden Polynomdivision beruhen kann.

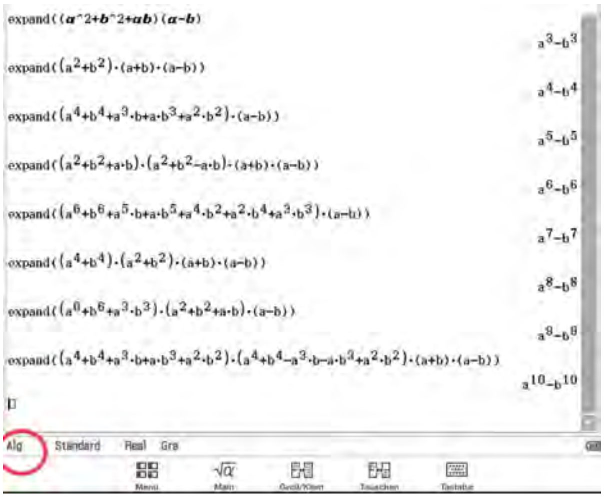

Abbildung 2. Rückmultiplikation mit dem Befehl expand im Algebra-Modus mit CASIO Classpad II

Abbildung 3. Rückmultiplikation mit dem Befehl expand im Assist-Modus ohne und mit Sortieren der Glieder

Eine *Rückschau* sollte die Auseinandersetzung mit diesen Verallgemeinerungen abrunden: Lernende und/oder Studierende sollen selbst formulieren, was sie in der hier skizzierten Unterrichtseinheit gelernt haben, etwa in der Form: Die Differenz zweier n-ten Potenzen kann immer in Produkt umgeformt werden, das Ausklammern der Differenz der beiden Basen ist für jedes n, die Summe der Basen für gerades n möglich. Dieser Zusammenhang wird nachfolgend als 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel genannt. Die Summe zweier n-ten Potenzen kann für ein ungerades n in ein Produkt umgeformt werden, und zwar kann die Summe der Basen ausgeklammert werden. Dieser Zusammenhang wird nachfolgend mit 2. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel bezeichnet.

Teilbarkeit der Fermat-Zahlen

Mit den Fermat-Zahlen werden die Studierenden bereits zu Beginn ihres Studiums konfrontiert, etwa in einer Vorlesung zu Zahlentheorie oder zu linearer Algebra. Auch deren Teilbarkeitseigenschaften werden im Zusammenhang mit der Frage der Fermat-Primzahlen angesprochen, beispielsweise ist bekannt, dass die Fermat-Zahlen, bis auf die erste ($F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$) alle den Rest -1, bzw. was damit Gleichwertig ist, den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen. So ist es denkbar, in einer einschlägigen Lehrveranstaltung nicht nur den nachfolgenden Beweis von Johann von Bolyai (1802–1860) zu thematisieren, sondern sich hierzu basierend auf den Gedanken des hervorragenden ungarischen Mathematikers einen modernen, CAS-unterstützten Zugang zu verschaffen.

Der Beweis von Johann von Bolyai
Laut Kiss (1999, S. 99) hat sich der junge Bolyai, Mitendecker der hyperbolischen Geometrie, viel mit der Primfaktorzerlegung der Fermat-Zahlen beschäftigt. In seinem Nachlass wurden der folgende Satz und der einschlägige Beweis gefunden (Kiss, 1999, S. 99, übersetzt von der Autorin):

> Die Zahlen von der Form $2^{2^m} + 1$ haben immer die Form $6n - 1$, folglich sind sie nie durch 3 teilbar.
>
> [und]
>
> Da $2^{2m-1} + 1 = (2+1)\ldots)$ folgt der Reihe nach, dass $2^{2m-1} + 1 = 3n$, $2^{2m-1} = 3n - 1$, $2^{2m} = 6n - 2$, jede gerade Zweierpotenz ist also von der Form $6n - 2$. Dann ist aber $2^{2m} + 1$, also $2^{2^k} + 1$ von der Form $6n - 1$.

Hier merkt Kiss fehlerhaft an, dass $m, n \geq 1$ und $k \geq 0$ gelten soll. $k = 0$ kann einerseits offensichtlich nicht gelten, da $F_0 = 3$ und somit durch 3 teilbar ist, andererseits aber betont Bolyai in seinem Beweis, dass er Zahlen von der Form *gerade* Zweierpotenz $+1$ meint, und dies trifft auf F_0 wegen $2^0 = 1$ ungerade nicht zu.

Diesen wenigen Zeilen kann man viel Information entnehmen: Bolyais Fokus war offensichtlich auf der Teilbarkeit durch 3 gerichtet, obwohl er dies zum Schluss – wahrscheinlich aus Bequemlichkeit – in Form von Teilbarkeit durch 6 zum Ausdruck brachte. Überdies war der Ausgangspunkt seiner Überlegungen die Faktorisierbarkeit der Summe einschlägiger ungerader n-ten Potenzen, da man hier die Summe der Basen, also $2 + 1 = 3$ als Faktor ausklammern kann. Aus dieser Überlegung leitete er *einen allgemeinen Zusammenhang* für Zahlen von der Form „gerade Zweierpotenz +1" ab, die Fermat-Zahlen bilden dabei einen Spezialfall. Er hat also eine Eigenschaft der Fermat-Zahlen eingesehen und bewiesen, indem er einen deutlich stärkeren Satz bewiesen hat. All diese Informationen finden nachfolgend Anwendung und Verwertung.

Satzfindung mit CAS
Der oben formulierte Satz kann gerade durch den Einsatz von CAS bei der Thematisierung der Teilbarkeit der Fermat-Zahlen schnell gefunden werden. Die Fermat-Zahlen sind per definitionem ungerade, eine erste eigentliche Frage entsteht, wenn man sich die Teilbarkeit durch 3 anschaut. Mit Hilfe des Befehls Define können die Fermat-Zahlen als Funktionswerte abhängig von k festgelegt werden. Einige von ihnen kann man auch berechnen lassen, um ein Gefühl für das exponentielle Wachstum mit exponentiell wachsendem Exponenten zu bekommen (Abb. 4 oben). Der Befehl $iMod(F(k), 3)$ liefert den Rest der jeweiligen Fermat-Zahl modulo 3 (Abb. 4 unten). Die *Vermutung,* dass sie bis auf den Fall $k = 0$ alle den Rest 2 lassen, liegt auf der Hand.

Finden einer Beweisidee mit CAS
In einem nächsten Schritt sollen – im Sinne des Beweises von Bolyai – Zahlen der Form $2^{2m} + 1$ auf ihre Teilbarkeit durch 3 überprüft (Abb. 5 oben) und eine entsprechende Vermutung soll wiederum formuliert werden. Es kann hierbei auch die Frage gestellt werden, wie diese Zahlen mit den Fermat-Zahlen zusammenhängen. Den Studierenden soll klar werden, dass es hier um eine Verallgemeinerung geht. Anschließend sollen noch Zahlen der Form $2^{2m-1} + 1$ analog zu den obigen Überlegungen untersucht werden (Abb. 5 unten). Da es hier um die Summe von ungeraden Potenzen geht, kommen die Studierenden auf die passende Begründung (2. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel) vermutlich selbst. Findet man diesen Schritt aufgezwungen, so kann einfach die Frage

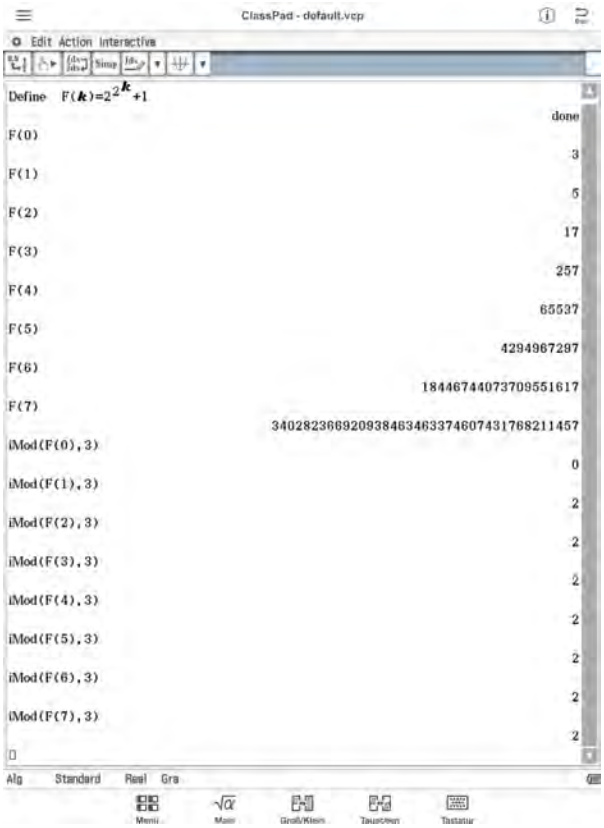

Abbildung 4. Die ersten acht Fermat-Zahlen und deren Rest modulo 3

Abbildung 6. Zweierpotenzen und deren Rest modulo 3

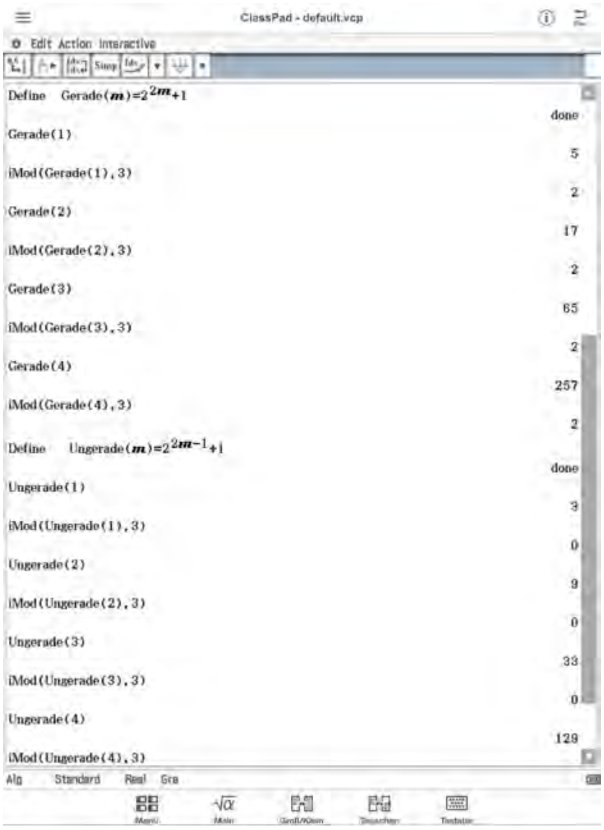

Abbildung 5. Gerade und ungerade Zweierpotenzen und deren Rest modulo 3

aufgeworfen werden, dass vielleicht alle Zahlen der Form „Zweierpotenz+1" den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen. Dass dies nicht der Fall ist, kann wieder mit dem CAS schnell überprüft werden und ein systematisches Vorgehen hierbei motiviert die Sortierung der Potenzen in gerade und ungerade Exponenten (Abb. 6).

In einem vorletzten Schritt soll der Zusammenhang zwischen den Zweierpotenzen mit ungeraden und geraden Exponenten hergestellt werden. Um dies anzuregen, lohnt es sich, eine Tabelle anzulegen (Abb. 7), hier kann, muss aber kein CAS eingesetzt werden. Hier können verschiedene Regelmäßigkeiten erkannt werden, ganz im Sinne des Bolyai-Beweises ist beispielsweise die Erkenntnis, dass jede Zahl der Form $2^{2m}+1$ aus der vorhergehenden Zahl der Form $2^{2m-1}+1$ hervorgeht, indem letztere mit 2 multipliziert und aus dem Ergebnis 1 abgezogen wird. Die Zusammenhänge $3 \cdot 2 = 5 + 1$, $9 \cdot 2 = 17 + 1$, $33 \cdot 2 = 65 + 1$ usw. legen dies nahe, ein algebraischer Nachweis für den allgemeinen Fall $((2^{2m-1}+1) \cdot 2 = 2^{2m} + 2 = (2^{2m}+1) + 1$ soll folgen. In einer kurzen Rückschau soll zum Schluss reflektiert werden, dass hier ein als komplex erscheinender Fall dadurch gezeigt wurde, dass er zuerst verallgemeinert und dieser anschließend auf einen bereits bekannten Zusammenhang zurückgeführt wurde.

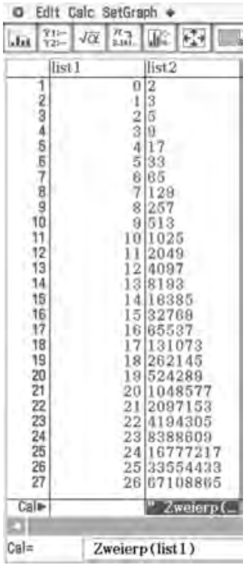

Abbildung 7. Die ersten 27 Zahlen der Form „Zweierpotenz+1"

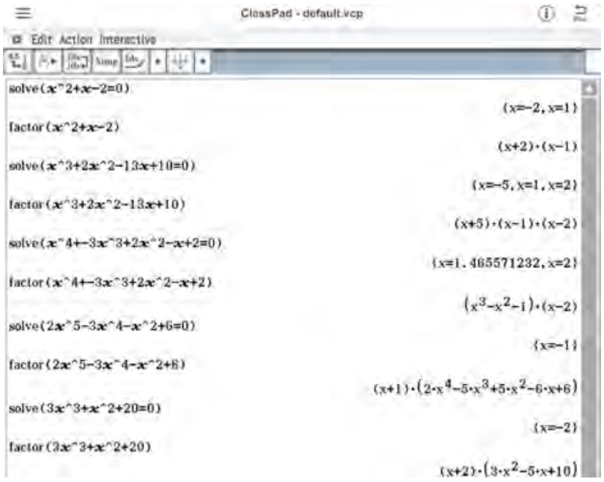

Abbildung 8. Erkundungen zum Finden des Fundamentalsatzes der Algebra mit CAS

Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra bildet einen zentralen Inhalt in der linearen Algebra, zahlreiche Varianten seines Beweises werden in einschlägigen Vorlesungen vermittelt. Auch hier entsteht auf Studierendenseite das Problem, dass weder der Inhalt des Satzes noch dessen Beweis motiviert werden. Fischer & Malle (1985, S. 201) schlagen zwar wohlwollend den Einsatz einer sogenannten Aufgabensequenz (damals noch für Lernende in der Schule!) vor, aber meines Erachtens verfehlen sie das Ziel, indem sie sich auf die sukzessive Erhöhung des Abstraktionsgrades (angefangen bei einer konkreten kubischen Polynomfunktion bis hin zu allgemeinen Polynomfunktionen n-ten Grades) fokussieren, dabei aber die Beweisidee, nämlich die Erweiterung mit Null in geeigneter Form schlicht und einfach bereits am Anfang ihrer Aufgabensequenz vorgeben. Wo kommt die Erweiterung des Funktionsterms mit Null her? Und warum wird diese Null abgezogen und nicht addiert? Warum als Funktionswert einer Nullstelle? Solche Fragen könnten Studierende stellen. Nachfolgend wird versucht, auch zu diesem Satz und zu dessen Beweisidee einen Zugang mit Hilfe des CAS zu verschaffen.

Satzfindung mit CAS
Erkundungen an konkreten, immer allgemeiner werdenden Polynomfunktionen können mit einem CAS schnell durchgeführt werden. Die Befehle solve und factor liefern Nullstellen sowie Faktorisierungen (Abb. 8), sodass die entsprechende Vermutung formuliert werden kann.

Finden einer Beweisidee mit CAS
Um auch den Beweis (bzw. einen von den vielen) zugänglich zu machen, sollte man die Frage stellen, aus welchen Polynomen denn beispielsweise $x-1$, $x+2$, $x-5$ etc. ausgeklammert werden kann. Hierzu sollten passende – anfangs offensichtliche (wie x^5-1, $2x^4-2$, $10x^{10}-10$ etc. zum Term $x-1$), später weniger „durchschaubare" Polynome (wie x^5+2x^4-3, $10x^{10}+x^5+2x^4-13$, usw. ebenfalls zum Term $x-1$) vorgegeben werden. Einerseits wir dadurch der Rückgriff auf die erste Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel deutlich, andererseits wird *die Überprüfung* der Entscheidungen mit dem CAS beschleunigt. Die Beweisidee kann nun dadurch motiviert werden, dass man die Studierenden auffordert, Polynome derart mit einer reellen Zahl zu ergänzen, dass z. B. der Term $x-1$ / $x+2$ / $x-5$, $x-a$ ausgeklammert werden kann (beispielsweise soll beim Polynom $p(x) = 10x^{10}+x^5+2x^4-\alpha$ der Term $x-1$ ausklammerbar sein). Das CAS kann wiederum bei der Überprüfung helfen. Dass hier genau der Wert der entsprechenden Polynomfunktion an der Stelle $1/-2/5/a$ abgezogen werden muss, ist klar, da bereits ein Bezug zu der 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel hergestellt wurde. Bestimmt man anschließend die Nullstellen der *erzeugten* Polynomfunktionen, stellt man fest, dass gerade die vorgegebenen Stellen $1/-2/5/a$ welche sind. Eine *Reflexion* der Arbeit liefert auch die Begründung: Die Polynomfunktionen wurden dadurch erzeugt, dass aus $p(x)$ der Reihe nach $p(1)$, $p(-2)$, $p(5)$ uns $p(a)$ abgezogen wurde. Diese Operation hat die Stellen $1/-2/5/a$ zur Nullstelle der neuen Polynomfunktionen gemacht (Abb. 9)! Der Einwand

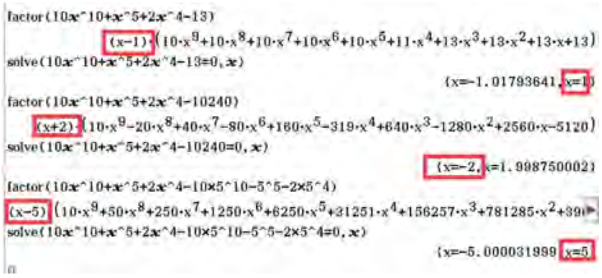

Abbildung 9. Die erzeugten Polynomfunktionen haben Nullstellen an den vorgegebenen Stellen

könnte jetzt formuliert werden, dass hierdurch nur gezeigt wurde, wenn ein linearer Term aus einem Polynom ausgeklammert werden kann, dann ist die Gegenzahl des konstanten Gliedes im linearen Term eine Nullstelle der entsprechenden Polynomfunktion. Meines Erachtens haben wir nicht nur dies gezeigt, sondern eine Motivierung des Beweises, der auf einer Ergänzung mit Null als Funktionswert einer beliebigen Polynomfunktion $P(x)$ in einer Nullstelle $x_0 = \alpha$ beruht. Nun ist *nicht mehr weit hergeholt*, diesen Funktionswert, der ja Null beträgt, als $P(\alpha)$ aufzuschreiben und *abzuziehen*, damit die 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel angewendet werden kann.

Fazit

Die hier vorgestellten Ansätze zum Einsatz von CAS bei der Satzfindung sowie bei der Findung einer Beweisidee während des Prozesses des Beweisens sollen als Anregung dienen, wie, in welcher Form und in welchem Umfang auf – in erster Linie technische – Vorkenntnisse der Studierenden in der Hochschulmathematik zurückgegriffen werden kann. Ziel war nicht dabei, weniger Mathematik zu vermitteln, sondern Kenntnisse aus der Schule in der höheren Mathematik aufgreifen und zum Vorteil machen zu können. Sicherlich kann der Einwand formuliert werden, dass solche und ähnliche Ansätze viel Zeit in Anspruch nehmen und dadurch doch weniger Mathematik vermittelt werden kann. Ich persönlich teile diese Meinung nicht. Zweifelsohne nimmt die Realisierung solcher Ansätze mehr Zeit in Anspruch, als das bloße Anschreiben an die Tafel der entsprechenden Sätze und Beweise, geschweige denn vom Einblenden in einer PPT-Präsentation, und sicherlich kann dieses Vorgehen nicht überall in der Hochschulmathematik praktiziert werden. Dennoch vertrete ich die Meinung, und bin fest davon überzeugt, dass die hier skizzierten Unterrichtsabläufe eine Brücke zwischen Schule und Hochschule schlagen können, und zwar nicht ausschließlich wegen des CAS-Einsatzes, sondern auch wegen des hierdurch ermöglichten induktiven Vorgehens. Die Studierenden lernen selbst Vermutungen zu formulieren, Sätze zu finden, Beweisideen zu finden und schließlich formal zu beweisen. Überdies werden sie mit wichtigen heuristischen Strategien wie Analogiebildung, Verallgemeinern, Fallunterscheidung, Zurückführen auf Bekanntes, aber auch mit konkretem Methodenwissen wie die Erweiterung mit Null vertraut, was langfristig zu mehr mathematischem Verständnis führt.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. doi:10.1007/978-3-642-41864-8

Fischer, R. & Malle, G. (1989). *Mensch und Mathematik.* Zürich: Bibliographisches Institut.

Kiss. E. (1999). *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Koepf, W., Götze, F., Eichler, A., & Heckmann, G. (2019). Mathematik – 19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule–Hochschule. Verfügbar unter tinyurl.com/yd7u9z9a.

Szűcs, K. & Traxl, L. (im Druck). Einstellung von Lehramtsstudierenden mathematischen Beweisen gegenüber – Erstellung eines Kategoriensystems. Beiträge zur 54. Jahrestagung als Onlinetagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 28. September – 1. Oktober 2020 in Würzburg.

Kinga Szűcs, Universität Erfurt
E-Mail: kinga.szuecs@uni-erfurt.de