

## Elemente der Arithmetik – dynamisiert und anschaulich

Daniela Götze und Nicole Seidel

Nicht erst seit der weltweiten Corona-Pandemie, sondern eigentlich in nahezu jedem Semester stellt sich die große Herausforderung, dass viele Grundschullehramtsstudierende nicht sonderlich mathematikaffin sind. Sie zeigen teilweise große Schwierigkeiten beim Verständnis elementarer mathematischer Zusammenhänge (Kempen, 2019) und eine eher statische Sichtweise mathematischen Lernens (Grigutsch et al., 1998; Winter, 2003). Ein erheblicher Teil würde das Fach Mathematik nicht freiwillig wählen, wenn es optional wäre (Winter, 2003). In NRW ist der Lernbereich mathematische Grundbildung aber im Umfang von etwa 38 CP im Bachelor und weiteren ca. 12 CP im Master verpflichtend zu studieren. Es stellt sich daher im Übergang von der Schule zur Hochschule – und nicht nur in der aktuellen Lage der digitalen Lehre im totalen Lock-down – die Frage, wie die bestehenden mathematischen Wissenslücken gefüllt und gleichermaßen alte „Überzeugungsstrukturen zur Mathematik“ (Barzel, Eichler, Holzäpfel, Leuders, Maaß, & Wittmann, 2016, S. 38) aufgebrochen werden können.

Damit eine fachwissenschaftliche Veranstaltung zum Aufbau eines angemessenen Bildes von „Mathematik als Prozess“ beiträgt, muss sie begleitet sein von umfangreichen Lernsituationen der individuellen mathematischen Aktivität. (Barzel et al., 2016, S. 38)

In dem im Rahmen eines Fellowships für Innovationen in der digitalen Hochschullehre vom MKW NRW und vom Stifterverband geförderten Projekt „Arithmetik digital“ wurden daher bereits im Jahr 2019 Videos zu verschiedenen Themenbereichen der Arithmetik erstellt und auf der Projektwebseite [adi.dzlm.de](http://adi.dzlm.de) verfügbar gemacht. Darunter sind sowohl illustrierende als auch beweisende Videos aber auch Videos zur Exploration von Illustrationen oder Beweisen zu finden. Aktuell sind auf der Projektwebseite über 45 verschiedene Videos zu den zentralen Themenbereichen der elementaren Arithmetik verfügbar. Dabei wurden vor allem die arithmetischen Inhaltsbereiche gewählt, die gängigerweise an allen Universitäten Deutschlands Bestandteil der Grundschullehramtsausbildung in den ersten Semestern sind, aber natürlich auch Bestandteil anderer Lehramtsstudiengänge (vor allem Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschule) sein können. Folgende Beweis- und Illustrationsvideos sind auf der Webseite zu finden.

### *Teilbarkeit*

- Transitivität der Teilbarkeitsrelation
- Summenregel\*
- Differenzregel\*
- Produktregel\*
- Teilerproduktregel\*
- Teileranzahl
- Gemeinsame Teiler und ggT
- Euklidischer Algorithmus
- Zusammenhang ggT und kgV
- Lineare Diophantische Gleichungen

### *Rechengesetze*

- Konstanz der Summe
- Konstanz der Differenz
- Konstanz des Produkts
- Konstanz des Quotienten

### *Stellenwerte*

- Quersummenregel im Dezimalsystem
- Quersummenregel im 7er-System
- Endstellenregel im Dezimalsystem
- Endstellenregel im 8er-System
- Schriftliche Subtraktion mit Auffüllen im Dezimalsystem\*
- Schriftliche Subtraktion mit Auffüllen im 7er-System
- Schriftliche Subtraktion mit Entbündeln im Dezimalsystem\*
- Schriftliche Subtraktion mit Entbündeln im 6er-System
- Schriftliche Subtraktion mit Erweitern im Dezimalsystem\*
- Schriftliche Subtraktion mit Erweitern im 8er-System
- Umrechnung vom Dezimal- in ein b-System\*
- Direkte Umrechnung vom 2er- ins 4er-System

### *Kombinatorik*

- Produktregel
- Summenregel
- Binomialkoeffizient
- Kombination mit Wiederholung

### *Figurierte Zahlen*

- Quadratzahlen
- Rechteckszahlen
- Dreieckszahlen
- Fünfeckszahlen
- Satz von Sylvester

Die *Beweisvideos* setzen bei angemessenen Elementarisierungen an, bei denen häufig vereinfachende und anschauliche Darstellungsmittel eine zentrale Rolle spielen (Biehler & Kempen, 2016). So werden zentrale Sätze der Arithmetik vor allem anschaulich (am Rechenstrich oder auch mit Hilfe von Flächen) oder auch generisch bewiesen. Ein wichtiges Anliegen dieser Elementarisierung ist einerseits mathematisches Beweisen zu vereinfachen aber andererseits die Beweisidee bzw. den Beweisinhalt nicht zu verfälschen und somit den Studierenden ein Verständnis für diese Beweise zu ermöglichen (Biehler & Kempen, 2016; Kirsch, 1977).

Die *visualisierenden Videos* geben Hilfestellungen beim Verständnis und bei der Durchdringung zentraler Algorithmen und Regeln (schriftliche Subtraktion, euklidischer Algorithmus, Lösungsmengen von diophantischen Gleichungen, Endstellenregel, Quersummenregel, Konstanzgesetze ...).

Da das Verständnis für derartig inhaltlich-anschauliche und auch generische Beweise und Visualisierungen davon abhängig ist, ob und inwiefern der Betrachtende den zu beweisenden oder zu veranschaulichenden Satz, die anschauliche Darstellung sowie das im Beweisvideo Gesagte selbstständig miteinander verknüpft (Kempen, 2019), wurden im Projekt Variationen von ausgewählten Beweisvideos und Visualisierungen zur vertiefenden Auseinandersetzung entwickelt:

- Abbrechender Sprechertext: Der zu beweisende oder zu illustrierende Sachverhalt wird gezeigt. Bei Beweisen werden die Voraussetzungen für den Beweis erläutert. Anschließend verstummt der Sprecher. Die Animation hingegen läuft weiter. Die Studierenden sollen versuchen, einen eigenen Sprechertext zu schreiben.
- Sprechertext mit Fehlern: Von Fehlern anderer zu lernen, kann den Verstehens- und Erkenntnisprozess maßgeblich beeinflussen. Zudem können fehlerhafte Sprechertexte die angehenden Lehrkräfte dafür sensibilisieren, wie wichtig eine eindeutige Sprache beim inhaltlich-anschaulichen oder generischen Beweisen ist. Diese Filme stoppen nach Klärung der Voraussetzung. Eine Zwischeneinblendung signalisiert, dass die folgende Kommentierung des Beweises nicht angemessen ist. Die Studierenden sollen überlegen, an welchen Stellen der Sprechertext verbessert werden muss und korrigierte Sprechertexte erstellen.
- Auswahlantworten: Im Beweisvideo bleibt offen, welcher Satz bewiesen wird. Dazu wird der Beweis gezeigt, aber nicht kommentiert. Am Ende wird gefragt, welcher Satz in diesem Video bewiesen wurde. Aus verschiedenen Antwortalternativen muss eine begründet ausgewählt werden. Zu den in der obigen Liste mit einem Sternchen versehenen Inhalten wurden solche Explorations-

videos erstellt. Zu manchen Sätzen auch verschiedene Varianten. So gibt es zur Summenregel beispielsweise sowohl ein Explorationsvideo zum eigenständigen Schreiben des Sprechertextes als auch eines zur Fehlerkorrektur.

Die Beweis- und Illustrationsvideos und auch die Variationen können nicht nur im Rahmen einer Präsenz- oder auch digitalen Vorlesung eingesetzt werden. Vielmehr bieten sich weitere ggf. auch neuartige Einsatzmöglichkeiten an. So können – zumindest in der Präsenzlehre – die Videos auch zur individuellen Unterstützung einzelner Studierender in den Übungen dienlich sein (spontane oder geplante Unterstützung im Bearbeitungsprozess), denn durch die freie Verfügbarkeit aller Videos auf der Webseite [adi.dzlm.de](http://adi.dzlm.de) haben die Studierenden jederzeit Zugriff auf die Beweis- und Illustrationsvideos. Bearbeitungsprozesse von Studierenden in den Übungen können somit noch mehr individualisiert unterstützt werden. Ebenso bieten sich neue Hausaufgabenformate an: Sprechertexte korrigieren, Sprechertexte selbst schreiben ...

Schlussendlich würden wir uns freuen, wenn die Inhalte der Webseite auch anderen Lehramtsstudierenden an anderen Standorten helfen würden, die Elemente der Arithmetik besser zu verstehen. Obwohl wir die Videos im coronabedingten Online-Sommersemester 2020 nicht wirklich genutzt haben, denn die Elemente der Arithmetik werden in Siegen stets im Wintersemester gelesen, überraschen uns doch die beachtlichen Zugriffszahlen der Seite. Es scheint so zu sein, dass auch andere Standorte unsere Seite rege nutzen. Das freut uns natürlich sehr, wir sind aber auch dankbar über Anregungen, Kommentare und Rückmeldungen.

#### *Danksagung*

Wir danken dem MKW NRW und dem Stifterverband für die finanzielle Unterstützung dieses Projektes. Ebenso danken wir Benjamin Pilger und Philipp Heimers für die tatkräftige Unterstützung bei der konzeptionellen Erstellung der Videos. Martin Durlík danken wir für die technische Umsetzung unserer Ideen und für die digitale Videoerstellung.

#### **Literatur**

Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, L., Leuders, T., Maaß, K., & Wittmann, G. (2016). Vernetzte Kompetenzen statt träges Wissen – Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 33–50). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

- Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 141–179.
- Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3–45.
- Götze, D. (2019). Arithmetisches Verständnis bei Grundschulstudierenden fördern – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt „Arithmetik digital“. In R. Rink & D. Walter (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der universitären Lehrerbildung* (S. 115–132). Münster: WTM.
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer: Spektrum.
- Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik*, 5(2), 87–101.
- Winter, M. (2003). Einstellungen von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik – Erfahrungen und Perspektiven. *mathematica didactica*, 26(1), 86–110.
- Daniela Götze, Universität Siegen  
E-Mail: [daniela.goetze@uni-siegen.de](mailto:daniela.goetze@uni-siegen.de)
- Nicole Seidel, Universität Siegen  
E-Mail: [nicole.seidel@uni-siegen.de](mailto:nicole.seidel@uni-siegen.de)

## Erklärvideos: Chancen und Risiken Zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen

Sabrina Bersch, Andreas Merkel, Reinhard Oldenburg und Martin Weckerle

Erklärvideos treffen den Zeitgeist, sie stillen einen Bedarf nach überall verfügbaren Erklärungen, der besonders in Zeiten von Pandemien und Klausuren hoch ist, andererseits scheinen sie aus der Zeit gefallen: in den letzten Jahrzehnten hat sich ein Verständnis von Lernen als aktiven Konstruktionsprozess durchgesetzt (z. B. Reich, 2000). Was könnte da unsinniger sein, als ein Video, das den Lernenden in eine gänzlich passive Rolle zwingt. Auch der Leser eines Textes ist einer Menge an vorgefertigten Informationen ausgesetzt, aber er kann die Informationsaufnahme flexibel gestalten, sich ohne Probleme zwischendrin seine Gedanken machen und das Gelesene in eigene Vorstellungen überführen (Situationsmodell). Der Zuschauer eines Videos dagegen wird sogar in der Geschwindigkeit seines Denkens gelenkt. Die sinnvolle und oft gehörte Aufforderung, den Pause-Button zu drücken, ist nach eigenen Erfahrungen gar nicht so einfach, weil selten die richtige Stelle für ein eigenes „Zwischendenken“ getroffen wird. Immerhin haben einige Videos markierte Stellen zum Anhalten – aber das dann vorgedacht und nicht vom Lernenden aktiv gesteuert.

Andererseits hat die Lernpsychologie überzeugend nachgewiesen, dass direkte Instruktionen

mit Lernformaten, die mehrere Kanäle ansprechen (Multimedia Effekt, z. B. Mayer, 2009) sehr effektiv sein können. Neben dem Multimedia Effekt, der sich auf sehr viele Lerngegenstände anwenden lässt, spielt die Dynamik eine besondere Rolle in der Mathematik. Zum einen steigert Bewegung ganz unspezifisch die Aufmerksamkeit, zum anderen gibt es mathematische Prozesse, deren Dynamik Lerngegenstand ist. Geometrische Operationen wie Drehungen und Scherungen bilden prototypische Beispiele dafür (und werfen auch gleich die Frage auf, ob nicht die aktive Durchführung in einem dynamischen Geometrieprogramm für das Lernen noch effektiver ist als das Ansehen eines entsprechenden Videos). Zum anderen hat die in der Mathematik weit verbreitete Arbeit mit Kalkül eine eigene symbolische Dynamik: es scheint beispielsweise äußerst schwer, die Durchführung einer Polynomdivision durch das Anschauen einer fertigen Polynomdivision zu lernen. Das Lernen am Modell durch einen Meister (cognitive apprenticeship, siehe z. B. die Darstellung von Bransford et al., 2009) scheint dabei gut zu funktionieren und ist im Einklang mit den Ergebnissen der Forschung zu ausgearbeiteten Lösungsbeispielen (Renkl et al., 2009).