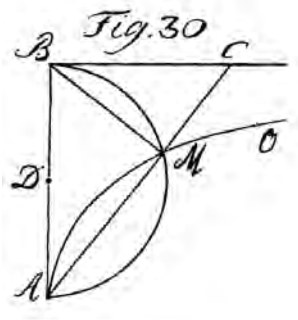
Die Didaktyloide

Bodo von Pape

Heinz Schumann zum 77. Geburtstag

Das Uhlhorn-Problem Nr. 3



3. Aufgabe. In dem rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 30.) ist BM auf AC senkrecht, AM = BC und AB = a, wie vorhin gegeben; man soll das Dreyeck ABC construiren.

Diese Aufgabe formuliert der Oldenburger Hofmechanicus Dietrich Uhlhorn – als solcher geführt in der altehrwürdigen Hamburger Mathematischen Gesellschaft von 1690 – in seinem Hauptwerk „Entdeckungen in der Höhern Geometrie“ [8]. Heute wird diese Aufgabe den Geometer herausfordern, sein aktuelles Konstruktionswerkzeug zu erproben, womöglich aber auch dazu, über „Konstruktionen“ ganz allgemein nachzudenken.

Im Zuge des Nachdenkens wird die Versuchung wachsen, die Lösung nach der klassischen Methode der alten Griechen anzugehen, also mit einer Neusis.[1] Erst seit der Zeit der Araber sind derartige Verfahren – unter der Sammelbezeichnung „Bewegungsgeometrie“ – in Verruf geraten: Bei dem Ein-

[1] Neusis = auf einen Punkt ausgerichtete Einschiebung einer Strecke zwischen zwei Kurven

passen einer Länge könne es sich doch nur darum handeln, „durch manuelle Annäherung auf der Basis sinnlicher Wahrnehmung eine ‚Lösungsposition' zu finden." [4]

Erst Descartes hat der Geometrie wieder zu Exaktheit verholfen. [1] Er hat den Standard neu festgelegt, und zwar über „lignes qu'on puisse imaginer estre descrites par un mouvement continu". [3] (Sein „Mesolab" wird man vor Augen haben.) Nur Lösungen, die diesem Standard genügen, erscheinen fortan noch akzeptabel.

Genau hier knüpft Uhlhorn an mit seiner Didaktyloide. Sie ermöglicht die exakte Lösung der obigen Aufgabe, und Uhlhorn stellt ein Konstruktionswerkzeug dazu vor. Die Rolle, die der „Didaktyloide" für die gestellte Aufgabe zukommt, ist zu vergleichen mit der Rolle, die die Konchoide spielt[2] im Rahmen einer „echten" Lösung des Problems zur Verdopplung des Würfels (bzw. zur Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen zweier Längen): Erst die Kurve legitimiert die Lösung, nur über derartige Kurven kommt man zu „völlig exakten expliziten (theoretischen) Lösungen". [4]

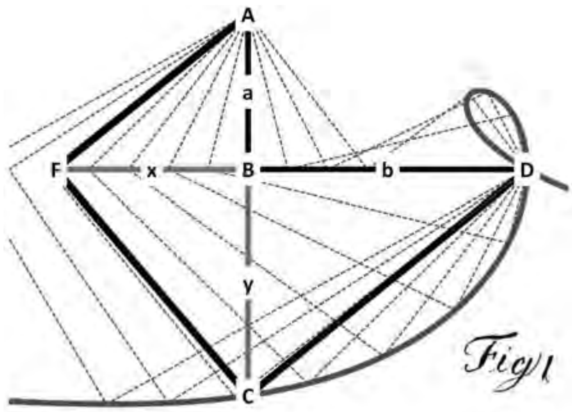
Die Grundidee ist einfach: Das „Herumprobieren" zur Findung eines einzelnen Punktes wird ersetzt durch einen Schnitt mit der Ortskurve aller entsprechenden Punkte. Diese Kurve ist jeweils adhoc auf das anstehende Problem zugeschnitten. Dazu muss dann nur noch ein Gerät vorgestellt werden für eine „organische" Erzeugung. Genau darauf war unser „Mechanicus" spezialisiert.

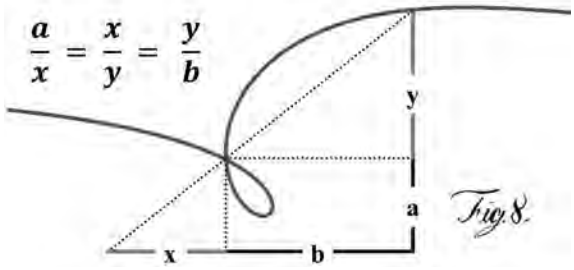
Die Ophiuride und die Toxoide

Die Ophiuride ist die wichtigste der insgesamt 18 höheren Kurven, die Uhlhorn in seinem Buch vorstellt, seine #1. Zu ihrer Erzeugung greift er zurück auf ein Gerät, das Platon zugeschrieben wird, ein Doppelgnomon. Zuätzlich stellt er ein eigenes Gerät vor.

Uhlhorn zeigt, dass sich mit der Ophiuride nicht nur die „Platonische" Lösung des Delischen Problems legitimieren lässt („Fig. 1"), sondern auch der Komplex der drei Lösungen nach Heron, Philo und Apollonius. („Fig. 8")

Zudem zeigt Uhlhorn, wie man mit eben dieser Ophiuride auch das Problem der Dreiteilung eines Winkels lösen kann.



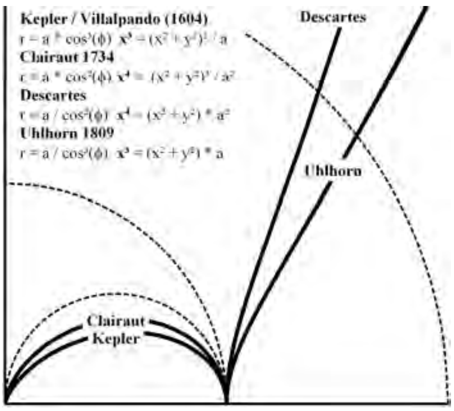


Die Kissoide ist ein Spezialfall der Ophiuride. Zur Legitimierung des Kissoide-nahen Lösungstripels „Diocles/Pappus/Sporus" zeigt Uhlhorn zusätzlich, dass man mit einer Hyperbel zum Ziel kommt. Einen Hyperbel-Zeichner stellt er vor.

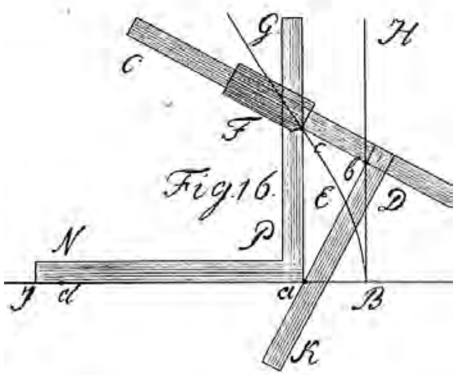
Zur Geschichte der Ophiuride weiß der Mathematik-Historiker Knorr [5] nur, dass die Bezeichnung im 19. Jahrhundert entstanden ist. Im Hinblick auf die Kurve selbst geht er davon aus, dass bereits Eudoxus sie zur Lösung des Problems der Würfelverdopplung eingesetzt hat. In dem Eutocios-Kanon der 12 Lösungen ist die von Eudoxus nicht enthalten. Hier ist nur die Rede davon, dass Eudoxus mit einer „krummen Linie" gearbeitet hat. Diese „Kampyle" des Eudoxus hat vielfach Anlass gegeben zum Spekulieren. Mehrheitlich geht man davon aus, dass es sich um eine Umsetzung des Ansatzes von Archytas handelt. Archytas beschreibt eine Kurve im Raum. Insbesondere dann, wenn man von „Konstruktion" spricht, muss man aber wohl eine ebene Konfiguration fordern. Hier kommt eine weitere der Uhlhorn-Kurven ins Spiel, seine #2, die Toxoide.

[2] Die Frage, ob die Kurve ursprünglich Konstruktionsmittel war oder bloß Mittel zum Nachweis der Möglichkeit, kann hier ausgeblendet bleiben. Nur das letztere lässt sich mit dem überlieferten Text belegen. Unisono heißt es bei Pappus (2x) und Eutocios zu der Neusis-Lösung des Nicomedes: „Dass dies möglich ist, ist vorab mit der Konchoide gezeigt worden." (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς) Apollonius nimmt die Möglichkeit (wie später Vieta [10]) als Postulat. Allgemein heißt es zur Neusis schlicht: „Es sei getan." (γεγονέτω)

Breidenbach [2] gibt einen Überblick über die Kurven, die im Laufe der Jahrhunderte zur Umsetzung des (Kathetensatz-)Ansatzes von Archytas in der Ebene vorgeschlagen worden sind.



Uhlhorns Toxoiden-Zeichner ist noch einfacher als das analoge Gerät von Descartes.



In dem umfassenden Werk von Loria [6] wird in Fußnoten zur Ophiuride und zur Toxoide auf die Urheberschaft von Uhlhorn verwiesen. Danach verliert sich die Spur - vor mehr als 100 Jahren!

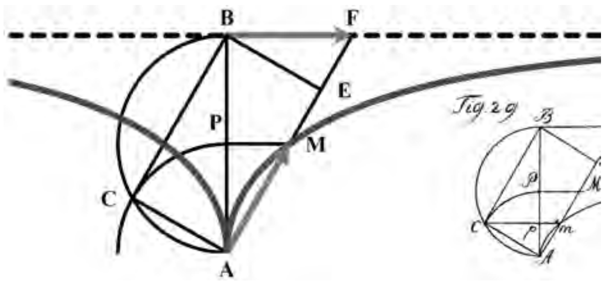
Weitere Uhlhorn-Kurven

In der Zeit nach Descartes standen zunächst die Kurven selbst – auf der Basis ihrer „kunstrichtigen“ [7] Erzeugung – im Vordergrund des Interesses, nicht deren algebraische Darstellungen. (Descartes: "peut estre exprimé par quelque equation") Uhlhorn leitet aber jeweils auch den Term her.

Für die Didaktyloide – Kurve #5 – erhält er:

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}, \text{ folglich } y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Der Name „Didaktyloide (Zweifingerlinie)“ leitet sich daraus ab, dass in der Figur beim Wandern des Punktes F auf der Senkrechten zu AB die „zwei Finger“ BF und AM stets gleich lang bleiben. (Eine Interpretation als „Verfolgungskurve“ liegt nahe.) In der Beweisfigur zeichnen sich die beiden Finger als Pfeile ab. Genau wie Nikomedes im Zuge der Absicherung seiner Lösung, so thematisiert auch Uhlhorn das asymptotische Verhalten seiner Kurve.



Weitere Kurven, zu denen Uhlhorn Zeichengeräte vorstellt, sind: Die Strophoide (#3: „Kukumaide (Querkolbenlinie)“), die Kreisconchoide (#4: „Krommyoide (Zwiebellinie)“) und die „Neilische Parabel“. Zu den ersten beiden stellt er - wie bei der Didaktyloide - jeweils eine eigene Aufgabe vor. Bei der letzten zeigt er, wie man sie zur Lösung des Delischen Problems einsetzen kann .

Zur Algebra hat Uhlhorn keinerlei Berührungsangst. Das stellt er eindrücklich damit unter Beweis, dass er die Wendestelle der Ophiuride ganz schulbuchmäßig über das Nullsetzen der 2. Ableitung einer passenden Funktion bestimmt. Er kommt auf eine Gleichung 8. Grades. Deren Herleitung erstreckt sich über sechs Seiten.

$$\left.\begin{array}{r} 4a^4 \\ 40a^2b^2 \\ 36b^4 \end{array}\right\} y^8 \left.\begin{array}{r} -224a^2b^3 \\ -216b^5 \\ -8a^4b \end{array}\right\} y^7 \left.\begin{array}{r} +540b^6 \\ +496a^2b^4 \\ -44a^4b^2 \end{array}\right\} y^6$$
$$\left.\begin{array}{r} -520a^2b^5 \\ -720b^7 \\ -4a^6b \\ +196a^4b^3 \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{r} -320a^4b^4 \\ +540b^8 \\ +200a^2b^6 \\ +20a^6b^2 \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{r} +80a^2b^7 \\ +256a^4b^5 \\ -40a^6b^3 \\ -216b^9 \end{array}\right\} y^3$$
$$\left.\begin{array}{r} +36b^{10} \\ -96a^2b^8 \\ -92a^4b^6 \\ +40a^6b^4 \end{array}\right\} y^2 \left.\begin{array}{r} +24a^2b^9 \\ -4a^4b^7 \\ -20a^6b^5 \end{array}\right\} y \begin{array}{l} +4a^6b^6 \\ +4a^4b^8 = 0. \end{array}$$

Den Grad dieser Gleichung reduziert Uhlhorn auf 3. Für die Gleichung dritten Grades gibt er eine Lösung – nach Cardano – mit einer Genauigkeit von 5 Stellen. Dazu schreibt er: „Aus dieser Berechnung ersieht man, wie sehr mühsam es gewesen ist, den Wendungspunct durch die Differential=Rechnung zu finden.“ Abschließend stellt Uhlhorn eine Dezimalschachtelung vor. Er hält fest: „Auf diese Art kann man durch Interpolieren Zahlen finden, welche dem wahren Wert, wenn er noch nicht gefunden ist, immer näher und näher kommen.“ Auch dieser Zusatz verdient unsere Beachtung.

Uhlhorns Lebenswerk

Nach Abschluss seines umfassenden Programms[3] zur Anpassung der antiken Lösungen an das neue Konzept von Descartes wandte Uhlhorn sich einem ganz anderen Feld zu, dem Maschinenbau.

Im Jahr 1817 wurde der Prototyp seiner „Kniehebel-Münzpresse" fertig. Über 200 Maschinen haben bis zum Jahr 1878 die Uhlhornsche Fabrik in Grevenbroich verlassen. Einzelne Exemplare werden noch heute ausgestellt (Münze in Berlin, Wien; Dt. Museum München). Das grundlegende „Kniehebelprinzip" findet sich in zahlreichen Vorrichtungen des Alltags. Dabei geht es stets um den Einsatz einer extremen finalen Druck- oder Zugkraft.

Ebenfalls vor genau 200 Jahren erschien Uhlhorns Schrift über den Tachometer. [9] Uhlhorn beschreibt sein Gerät als „ein Instrument, welches ohne Gebrauch einer Uhr jeden Augenblick den Gang derjenigen Maschin angiebt, mit welcher dasselbe in Verbindung gesetzt wird". Zur Berechnung der Skalenteilung kommt er abermals auf eine Gleichung vom Grad 8. Mit diesem Gerät – einem Drehzahlmesser auf rein mechanischer Basis – war Uhlhorn den Bedürfnissen seiner Zeit weit voraus. Vor der Zeit des Automobils – zumindest der ersten Eisenbahn – gab es für die Messung der Momentangeschwindigkeit kein wirkliches Interesse. Heute wird bei „Momentangeschwindigkeit" keiner mehr an den Pionier Diedrich Uhlhorn aus dem Oldenburger Land denken.

Bereits in seinen jüngeren Jahren hatte Uhlhorn sich – als völliger Autodidakt in seinem abgelegenen Heimatdorf Bockhorn – in einer anderen innovativen Grundlagen-Technologie hervorgetan: Der Bau eines achromatischen (!) Fernrohrs hatte ihm 1796 den Titel „Hofmechanicus" seines Landesherrn Peter Friedrich Ludwig eingebracht, dazu ein auskömmliches Jahresgehalt auf Lebenszeit.

Es gibt Menschen, die Großartiges geleistet haben und die sich große Verdienste erworben haben, die aber dem völligen Vergessen anheimgefallen sind. Die Didaktyloide mag uns an einen dieser Menschen erinnern:

Diedrich Uhlhorn
Bockhorn 1763–1837 Grevenbroich

Literatur

[1]. H. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, Springer (2001)

[2]. W. Breidenbach, *Das Delische Problem*, B.G. Teubner (1953)

[3]. R. Descartes, Ǧéométrie, Leyden (1637)

[4]. H. Hischer, *Die drei klassischen Probleme der Antike*, Franzbecker (2015)

[5]. W. Knorr, *The ancient tradition of problem solving*, Dover (1986)

[6]. G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, B.G. Teubner (1902)

[7]. J. C. Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher*, Nürnberg (1670)

[8]. D. Uhlhorn, *Entdeckungen in der Höheren Geometrie, theoretisch und practisch abgehandelt*, Oldenburg (1809)

[9]. D. Uhlhorn, *Theoretische und praktische Abhandlung über einen neu erfundenen Tachometer oder Geschwindigkeitsmesser*, Frankfurt (1817)

[10]. F. Vieta, *Supplementum Geometriae*, Mettayer (1593)

Bodo von Pape
Email: teamherbart@gmail.com

[3] Dazu: B. v. Pape: Dietrich Uhlhorn (1764–1837) und die Großen Probleme der Antike. Erscheint in *Mitt. Math. Gesellschaft Hamburg* 37 (2017).