

Was ist eine Gleichung?

Horst Hischer

1 Einleitung

Die im Titel gestellte Frage scheint rhetorischer Art zu sein, verwenden wohl viele (die meisten?), die sich irgendwie mit Mathematik befassen, das Wort „Gleichung“ eher so, wie es 1945 Ludwig Wittgenstein in seinen „Philosophischen Untersuchungen“, Nr. 43, formulierte:

Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.

Wie kann man also nur darauf kommen, obige Titelfrage zu stellen?

Im April 2018 entdeckte ich in einer Online-Enzyklopädie einen m. E. nicht haltbaren Eintrag zu „Gleichung“. Mein Vorhaben, diesem Mangel abzuwehren, erwies sich zu meiner Überraschung als nicht trivial, obwohl es dazu z. B. einen Eintrag im „Lexikon der Mathematik“ von 2000 gibt:

Gleichung, zwei durch ein Gleichheitszeichen verbundene Terme, also z. B. $T_1 = T_2$ für Terme T_1, T_2 , gesprochen „ T_1 gleich T_2 “.

Das mag zwar zutreffend wirken, jedoch scheint die *Bedeutung* des hier auftretenden *Gleichheitszeichens* nicht erläuternd zu sein – was auch für die hier verwendete *Gleichheit von Termen* gilt. Sollte es etwa genügen, diese überall in der Mathematik auftretenden Termini undefiniert oder (gar unreflektiert) gemäß der Beschreibung von Wittgenstein *nur zu verwenden*? Und dies auch im Mathematikunterricht?

Andererseits ist man in der Mathematik bemüht, verwendete Termini möglichst *explizit* zu definieren, zumindest aber *implizit*, wie es z. B. Richard Dedekind 1888 bei „Zahl“ in seinem Buch „Was sind und was sollen die Zahlen?“ macht. Warum also nicht auch bei „Gleichung“?

In dieser Situation kontaktierte ich mit Blick auf eine Definition von „Gleichung“ den Grundlagenforscher Ulrich Felgner, Tübingen, und das führte zu einer intensiven diesbezüglichen Zusammenarbeit, die 2020 in separate Publikationen zu diesem Themenkreis mündete. Die nachfolgend ange deuteten Ergebnisse sind auch didaktisch relevant bezüglich der Findung und Formulierung von *Grundvorstellungen* zu „Gleichung“.

2 Weitere Blicke in die Literatur

Im Buch *An Introduction To The Modern Theory Of Equations* von Florian Cajori (1919) findet man keine Definition von „Gleichung“, auch nicht bei Gerhard Kowol im Buch „Gleichungen: Eine historisch-phenomenologische Darstellung“ (1990). Im „Handbuch der Mathematikdidaktik“ von Regina Bruder et al. (2015) werden zwar Gleichungen an sehr vielen Stellen im didaktischen Kontext thematisiert, Definitionsansätze werden jedoch auch hier nicht betrachtet.

So legen all diese Einblicke zunächst noch den Verdacht nahe, dass es in der Mathematik und auch in der Didaktik der Mathematik andere Sorgen gibt, als der Frage nachzugehen, was eine Gleichung eigentlich *ist*. Die Betrachtung so simpler Gebilde wie „ $3 + 5 = 8$ “ scheint das zu bestätigen, dürfte wohl seit der Grundschule klar sein, was es *bedeutet*: „ $3 + 5 = 8$ “ kann als *Ergebnis der Rechenaufgabe* „ $3 + 5$ “ angesehen werden, was man auch *ohne das Gleichheitszeichen* hätte schreiben können, nämlich in der Gestalt „ $3 + 5$ ergibt 8“. Das Gleichheitszeichen wäre in dieser Interpretation also nur eine Kurzfassung für „ergibt“ – es wäre *dann* sogar komplett verzichtbar!

Doch kritisch nachgefragt: Was würde *dann* „ $8 = 3 + 5$ “ bedeuten? Hier müsste das Gleichheitszeichen in ganz anderer Lesart auftreten, etwa: „8 ist zerlegbar in die Summe $3 + 5$ “. Wir stehen hier also vor der unerfreulichen Situation, dass das („anscheinend“ oder gar „scheinbar“?) mathematische Symbol „ $=$ “ situativ unterschiedlich interpretierbar ist.

Nun mag man die beiderseits von „ $=$ “ auftretenden Gebilde „8“ und „ $3 + 5$ “ als „*Zeichen für Zahlen*“ auffassen, und zwar gemäß Dedekind dann für *dieselbe Zahl*, was also zur *Gleichwertigkeit* der Schreibweisen „ $3 + 5 = 8$ “ und „ $8 = 3 + 5$ “ führen würde. Jedoch werden andererseits „3“, „5“ und „8“ oft (oder gar meist?) selber als *Zahlen* aufgefasst, nicht aber nur als *Zeichen für Zahlen*. Aber was ist nun „richtig“?

Und wenn auf zumindest einer Seite des Gleichheitszeichens (wie es in der Mathematik bei Gleichungen meistens der Fall ist!) Variablen hinzukommen, entsteht ein weiterer, völlig neuer Deutungsbedarf zur Klärung der Frage dessen, was denn

eigentlich eine „Gleichung“ ist – denn z. B. bei „ $3 + x = 8$ “ ist doch wahrlich nichts „gleich“. Oder etwa doch?

So lesen wir nämlich passend hierzu bei Kevin Houston in seinem Buch „Wie man mathematisch denkt“ (2012) auf S. 44:

Eine **Gleichung** sagt aus, dass zwei Ausdrücke gleich sind, zum Beispiel $3x^2 - 7 = 4x$. Beachten Sie, dass eine **Ungleichung**, beispielsweise $x \leq 5$, keine Gleichung ist, da eine Gleichung eben auch Gleichheit beinhalten sollte. Gleichungen und Ungleichungen sind immer eine Aufforderung. Sie wollen gelöst werden, also die Werte der Unbekannten bestimmt werden, für die sie gültig sind.

Aber in welchem Sinn sind wohl diese „zwei Ausdrücke gleich“, und was ist unter der hier erwähnten „Gleichheit“ zu verstehen? Dass jedoch Gleichungen und Ungleichungen „immer eine Aufforderung“ seien, ist in Bezug auf „immer“ gewiss falsch. Somit tragen diese Betrachtungen nichts zur Klärung bei, im Gegenteil! Zuvor teilt Houston auf S. 37 mit:

[...] wenn wir das Gleichheitszeichen benutzen, behaupten [wir], die beiden Objekte auf den beiden Seiten seien *exakt dieselben* [...]

Auch das ist *nicht akzeptabel*, denn offensichtlich sind in dem zitierten Beispiel die erwähnten „beiden Objekte“ gerade *nicht „exakt dieselben“!*

Heinrich Weber und Josef Wellstein bieten in der „Enzyklopädie der Elementarmathematik“ (1903) im „Ersten Buch“ (*Grundlagen der Arithmetik*) auf S. 17 (im „Ersten Abschnitt“: *Natürliche Zahlen*) folgende Definition an, ohne Rückgriff auf „Terme“ und deren „Gleichheit“:

Ein Satz, der ausspricht, daß ein Zeichen a dieselbe Bedeutung haben soll wie ein anderes Zeichen b , den wir in der mathematischen Zeichensprache auch so ausdrücken $a = b$, heißt eine Gleichung.

Das klingt zwar akzeptabel, aber was ist mit „Bedeutung eines Zeichens“ gemeint? Beziehen sich die Autoren hier vielleicht auf Gottlob Frege? Denn dieser schreibt 1892 bezüglich „Gleichheit“ in seinem Essay „Über Sinn und Bedeutung“ auf S. 25:

Die Gleichheit fordert das Nachdenken heraus durch Fragen, die sich daran knüpfen und nicht ganz leicht zu beantworten sind. Ist sie eine Beziehung? eine Beziehung zwischen Gegenständen? oder zwischen Namen oder Zeichen für Gegenstände?

Und in einer Fußnote zu „Gleichheit“ erläutert er:

Ich brauche dies Wort im Sinne von Identität und verstehe „ $a = b$ “ in dem Sinne von „ a ist dasselbe wie b “ oder „ a und b fallen zusammen“.

Damit nimmt Frege möglicherweise Bezug auf das kurz zuvor, 1888, erschienene bereits erwähnte Buch „Was sind und was sollen die Zahlen?“ von Richard Dedekind, in dem dieser gleich zu Beginn, nämlich im ersten Paragraphen mit dem Titel „Systeme von Elementen“, schreibt:

Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b) und b dasselbe wie a , wenn alles, was von a gedacht werden kann, auch von b , und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a , ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a , b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b , b ein anderes Ding wie a ; es gibt irgendeine Eigenschaft, die dem einen zukommt, dem anderen nicht zukommt.

Dedekind spricht hier weder von „Gleichung“ noch von „gleich“ oder von „Gleichheit“, sondern nur von der Bedeutung des hier benutzten Zeichens „ $=$ “ im Sinne von „*dasselbe*“, nämlich als einer von ihm als „*identisch*“ gedeuteten Beziehung zwischen zwei derartigen „Dingen“, der er dann kontradiktorisch den Terminus „*verschieden*“ gegenüberstellt:

Er kennzeichnet also das für „Gleichungen“ in der Mathematik typische und nicht nur hier auftretende „Gleichheitszeichen“ im Sinne von „*identisch mit*“ und *nicht etwa als „ist gleich“!*

Frege verwendet dann das Wort „Gleichheit“ im Sinne von „Identität“ (s. o.). Sind „Identität“ und „Gleichheit“ etwa gleichbedeutend? So ist im Kontext von „Gleichung“ auch zu klären, was unter „Gleichheit“ und „Identität“ zu verstehen ist: Da sich im Sprachgebrauch zu „gleich“ das „Vergleichen“ gesellt, kann nämlich bei zwei „zu vergleichenden Dingen“ die Frage entstehen, ob diese „gleich“ oder gar „identisch“ seien, ob man also

situativ „die gleichen“ oder „dieselben“ sagen solle. Welche Grundvorstellungen sind hiermit assoziiert oder zu entwickeln?

3 Phänomenologische Aspekte zum Gleichungsbegriff

Zunächst seien einige typische faktische Verwendungszusammenhänge von Gleichungen in Schule und Hochschule aufgelistet, anschließend werden sprachliche Aspekte von „Gleichung“ analysiert.

Mathematisch-inhaltliche Aspekte

Eine bereits vorsichtig geordnete, unvollständige Sammlung könnte die folgende sein:

- Geradengleichung, Kreisgleichung, Parabelgleichung,
- Lineare Gleichung, Quadratische Gleichung, Kubische Gleichung, Bruchgleichung, Wurzelgleichung, Gleichung n -ten Grades, Polynomiale Gleichung, Trigonometrische Gleichung,
- Funktionalgleichung, Differenzgleichung, Differentialgleichung, Algebra-Differentialgleichung, Integralgleichung,
- Laplace-Gleichung, Diophantische Gleichung,
- Bestimmungsgleichung, Bedingungsgleichung,
- Definitionsgleichung, Rekursionsgleichung, Funktionsgleichung.

Neben diesen vorrangig in die Mathematik gehörenden Beispielen findet man weitere aus Physik und Chemie wie etwa die folgenden:

- Bewegungsgleichung, Wärmeleitungsgleichung, Schwingungsgleichung, Wellengleichung, Schrödingergleichung,
- Reaktionsgleichung, Nernst-Gleichung.

Und man stößt auf weitere Termini, die sich auf „Gleichungen“ beziehen:

- Ungleichung, Gleichungssystem, Gleichungslösung, Gleichungslehre, Gleichsetzungsverfahren, Gleichungstypen und -arten.

In diese Liste gehören auch Termini, die weder das Wort „Gleichung“ noch „gleich“ enthalten, aber dennoch ganz offensichtlich damit zu tun haben, so z. B.:

- Formel, Gesetz, Regel.

Dass auch diese letzten Beispiele in diese Sammlung gehören, zeigen die Termini „Formelsammlung“, „Distributivgesetz“ und „Kettenregel“.

Zusammenfassende Interpretation

■ Gleichungen können ...

- ... der formalen Beschreibung mathematischer oder auch außermathematischer Probleme oder Phänomene oder Prozesse dienen,
- ... der formalen Beschreibung erkannter oder erdachter funktionaler Zusammenhänge dienen,
- ... der Definition neuer Funktionen dienen,
- ... dem Ziel des Lösens mathematisch beschreibbarer, ggf. speziell auch funktional beschreibbarer Phänomene oder Probleme oder Prozesse sowohl innerhalb als auch außerhalb der Mathematik dienen.

Und folgende weitere auftretende Aspekte sind hervorzuheben:

- Mit Gleichungen lässt sich eine „Gleichheit“ ...
 - ... feststellen oder behaupten,
 - ... erreichen (indem z. B. nach allen „Lösungen“ gesucht wird, für die diese Gleichheit dann gilt),
 - ... per definitionem festsetzen bzw. vereinbaren (z. B. für Funktionen).

Sprachliche Aspekte

Das Nomen „Gleichung“ könnte als eine Adjektiv-zu-Nomen-Suffigierung aufgefasst werden: „Gleich-ung“ als Zusammensetzung aus dem Adjektiv „gleich“ und dem Suffix „-ung“. Es würde dann als eine Derivation (Ableitung) von „gleich“ erscheinen. Jedoch betrachtet man sprachwissenschaftlich Nomen, die mit dem Suffix „-ung“ zusammengesetzt sind, so, als wären sie durch Suffigierung eines Verbs oder eines Nomens entstanden. Das Nomen „Gleichung“ wird daher als eine Zusammensetzung aus dem Verb „gleich“ und dem Nominalisierungs-Suffix „-ung“ aufgefasst (als Verb-zu-Nomen-Suffigierung oder Verbalabstraktum). Dem Wort „Gleichung“ liegt daher in dieser Sicht das Verb „gleich“ zugrunde:

Mit der Formulierung „Sie gleichen einander wie ein Ei dem anderen“ kommt eine Übereinstimmung zweier Dinge bezüglich bestimmter gegebener Merkmale zum Ausdruck, hier wird also ein Zustand bzw. ein Produkt beschrieben. Andererseits ist der Satz „Sie sollen einander gleichen wie ein Ei dem anderen!“ eine Aufforderung zu einer Handlung, also zu einem Prozess im Sinne von „gleich“ als „gleichmachen“.

In einer „Gleich-ung“ können wir also einerseits ein Ergebnis erkennen (Zustand, Produkt, also eine „Gleich-heit“ oder ein „Gleich-sein“ von mindestens zwei „Dingen“), andererseits einen Weg dorthin (ein „Gleich-werden“ als Prozess oder ein „Ver-gleichen“ als Handlung, die auch ein Prozess ist). Im mathematischen Kontext setzt das einen

Konsens bezüglich einer Auffassung von „gleich“ voraus, die im möglichen Ergebnis bzw. im Zustand in Gestalt einer „Gleich-heit“ (mit „-heit“ als weiterem Nominalisierungssuffix) zum Ausdruck kommt. Während also „Gleich-heit“ nur die Eigenschaft „gleich“ meint, also das „Gleich-sein“ als Zustand oder Ergebnis, bedeutet „Gleich-ung“ weitaus mehr: *auch* einen möglichen Weg dorthin, ein „Gleich-werden“!

Zusammenfassende Interpretation

- Der Terminus „Gleichung“ begegnet uns im umgangssprachlichen Verständnis janusköpfig sowohl in einem „Gleich-Werden“ als auch in einem „Gleich-Sein“ (bzw. in einer „Gleichheit“).

Diese beim alltäglichen Umgang mit „Gleichungen“ vermutlich kaum bewussten Nuancen sind für das Folgende mit zu (be)denken.

Resümee zu den beiden Aspekten

Wesentliches aus der Sammlung und Erörterung dieser phänomenologischen Aspekte lässt sich offensichtlich knapp wie folgt erfassen:

Eine Gleichung kann einerseits dem

- Feststellen einer Gleichheit („Gleichung als Gleich-Sein“) dienen,

und andererseits kann sie dem

- Erreichen einer Gleichheit („Gleichung als Gleich-Werden“) dienen.

Diese beiden Aspekte schließen sich nicht per se aus. Insbesondere sind sie didaktisch als *wesentliche Grundvorstellungen* bewusst zu machen.

4 Gleichheit – Identität – Ununterscheidbarkeit

So bleibt zu klären, wann im mathematischen Kontext zwei Dinge als „gleich“ zu betrachten sind, dieses auch im Unterschied bzw. in Abgrenzung dazu, wann dort zwei Dinge als „identisch“ anzusehen sind, und darüber hinaus ist ein „Vergleich“ (sic!) mit Alltagsauffassungen von „gleich“ und „identisch“ sowohl naheliegend als auch sinnvoll.

Dedekind betrachtet 1888 das Gleichheitszeichen als „Zeichen der Identität“ (s. o.), Frege greift dies 1892 auf und versteht „Gleichheit“ als „Identität“ (s. o.), bei Weber & Wellstein haben 1903 beide Seiten einer Gleichung „dieselbe Bedeutung“ (s. o.), und Felgner beendet seine 2020a publizierte Analyse auf S. 129 mit einem verblüffenden Resümee:

Diese und viele ähnlich lautende Belege zeigen, daß man in guter Gesellschaft ist, wenn man sich dafür entscheidet, einen Ausdruck wie $a = b$ als *Gleichung* zu lesen, aber zugleich betont, daß

damit eigentlich eine *Identifikation* gemeint ist. Es wäre auch nicht falsch, $a = b$ als *Äquivalenz* zu lesen, denn wenn a und b identisch sind, dann sind sie auch äquivalent, aber dann wäre das eigentlich Gemeinte ziemlich verfehlt. Am einfachsten wäre es jedoch, $a = b$ als das, was es sein soll, nämlich als Identifikation zu lesen und von „=“ als dem *Zeichen der Identität* zu sprechen.

Wir werden darauf später zurückkommen.

Im Alltag wird nicht immer zwischen „der gleiche“ (getrennt geschrieben) und „derselbe“ (zusammen geschrieben) unterschieden, und manche Mitmenschen beharren gelegentlich ungerechtfertigt auf einer solchen Unterscheidung. Es geht um folgende Kombinationen bzw. Demonstrativpronomina (letztere sind anaphorische Pronomina der dritten Person):

1. *der gleiche, die gleiche, das gleiche,*
2. *derselbe, dieselbe, dasselbe.*

Diese Bezeichnungen treten in der mündlichen Umgangssprache und in der Schriftsprache auf, wobei die Demonstrativpronomina für *identische Dinge* reserviert sind, die Wortkombinationen hingegen für *gleiche Dinge*.

Dazu sei eine fiktive Situation betrachtet: Zwei Personen mögen *jede von einem Ding* sprechen, d. h., sie sprechen *zunächst von zwei* Dingen, die sich aber im Gespräch *bezüglich aller betrachteten Eigenschaften* als übereinstimmend und sich also *in jeder* (betrachteten!) *Hinsicht gleichen*.

Doch dann stellt sich heraus, dass diese *beiden Dinge* nicht nur (in diesem Sinn!) *ununterscheidbar* sind, sondern dass beide Personen sogar *ein-und-dasselbe* Ding meinen. Man sagt dann, dass diese beiden Dinge *identisch* seien, denn es gibt ja deren nur eines! Somit ist „Identität“ in diesem *Alltagskontext* ein Sonderfall der „Gleichheit“, und zwar als Lehnwort vom spätlateinischen *identitas*, einer Nominalisierung von *idem*, das für „derselbe“, „dieselbe“, „dasselbe“ steht.

Voltaire schreibt in seinem *Dictionnaire Philosophique* (1786) auf S. 225, dass „Identité“ nur „*même chose*“ (also *dieselbe Sache*) bedeute, was im Französischen am besten als „*mêmeté*“ zu beschreiben und mit „*Selbigkeit*“ übersetzbar ist. So würde „selbig“ als eine *Eigenschaft* erscheinen, die „*einem identischen Objekt*“ quasi als „*einzigartig*“ (im Sinne des o. g. Beispiels) zukommt. Im Deutschen gibt es hierzu ältere Formulierungen wie „*Es handelt sich um (den) selbigen*“. Voltaire fügte seinem o. g. Lexikon-eintrag folgenden Kommentar hinzu:

Ce sujet est bien plus intéressant qu'on ne pense.

In der Tat: *Dieses Thema der Identität ist interessanter, als man denkt!*

In diesem Sinn schrieb Ludwig Wittgenstein gemäß einem Hinweis von Felgner (2020a, S. 110) in einem Brief an Bertrand Russell vom 29. 10. 1913 (ähnlich in einem Brief vom 17. 10. 1913):

Die Identität ist der Teufel in Person und ungeheuer wichtig, sehr viel wichtiger, als ich (bisher) glaubte.

Worin zeigt sich nun (in der Mathematik, in der Logik) eine Abgrenzung zwischen *gleich*, *ununterscheidbar* und *identisch*? Gibt es eine solche? Diese Frage untersucht Felgner im Rahmen der *Modelltheorie* mit dem Ergebnis, „identisch“ als Sonderfall von „ununterscheidbar“ und andererseits „ununterscheidbar“ als Sonderfall von „gleich“ anzusehen. Damit ist „ununterscheidbar“ eine Verschärfung von „gleich“, und „identisch“ ist eine Verschärfung von „ununterscheidbar“ – oder anders: Zwei gleiche Dinge sind nicht notwendig ununterscheidbar und können also dennoch „unterscheidbar“ sein – und zwei ununterscheidbare Dinge sind nicht notwendig identisch, es können also tatsächlich zwei Individuen sein!

Felgners Abhandlung zielt auf die Umformulierung und den Beweis des *Vollständigkeitssatzes* von Kurt Gödel (1930), um so den Aspekt der *impliziten Definierbarkeit* des Begriffs der Identität, eingeschränkt auf *Sprachen \mathcal{L} der ersten Stufe*, hervorzuheben. Das sei knapp erläutert:

Eine *formale Sprache \mathcal{L}* (\mathcal{L} steht für „lingua“) ist in der Mathematischen Logik eine *künstliche Sprache*, derer sich die Mathematik für die Formulierung von Definitionen, Theoremen und Beweisen bedienen kann. Sie enthält ein „Alphabet“ für festgelegte Zeichen („Konstanten“) und für „außerlogische“ Zeichen wie Variablen, Operationszeichen usw. (s. o.), so dass man damit zunächst „nichtlogische Terme“ bilden kann und schließlich mittels Relationszeichen und „logischen Zeichen“ wie \neg , \Rightarrow und z. B. dem Allquantor \forall zu „ \mathcal{L} -Formeln“ kommt (man denke hier an Aussagen und Aussageformen), die also in der vorgelegten Sprache \mathcal{L} „formulierbar“ sind. *Sprachen der 1. Stufe* gestatten *Quantifizierungen nur über Elemente des Objektbereichs*, *Sprachen der 2. Stufe* z. B. auch über Teilmengen dieses Objektbereichs, und *infinite Sprachen* ermöglichen z. B. Formeln „unendlicher Länge“ wie $\forall x(A_1(x) \wedge A_2(x) \wedge \dots)$.

Eines der wesentlichen Ergebnisse der tiefliegenden Untersuchungen aus Felgner sei hier zitiert (2020a, S. 126):

Wir haben also das Ergebnis: *Der Begriff der Identität, wenn er auf die Logik der 1. Stufe eingeschränkt wird, ist implizit definierbar, und zwar ist die in (i)*

& (ii) angegebene Liste von Axiomen eine derartige implizite Definition.

Wir erkennen zugleich, daß die *Identität* den klassischen Grundbegriffen der Logik („nicht“, „und“, „oder“, „für alle“, ...) an die Seite gestellt werden kann, da auch ihre Bedeutung (im Unterschied zur umgangssprachlichen Gleichheit) immer eindeutig ist und sie insofern eine „logische Konstante“ ist.

Anmerkung: Die in obigem Zitat auftretenden Axiome sind: (i) $\forall x(x \equiv x)$, (ii) *für jede \mathcal{L} -Formel Φ die Aussage: $\forall x\forall y(x \equiv y \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Phi^*))$* . Das Zeichen „ \equiv “ ist hier nur ein „leeres“, also bedeutungsloses Zeichen.

Dieses vertiefend betont Felgner mit Bezug auf seine Untersuchungen, dass die Eigenschaft der „Unterscheidbarkeit“ *von der Reichhaltigkeit der zugrunde gelegten Sprache* abhängt, und er schreibt dazu bereits an früherer Stelle (ebd., S. 118; Hervorhebungen nicht im Original):

Der Begriff der Identität macht eine ontologische Aussage – nämlich die *Einerleiheit von Dingen* –, während im Begriff der Gleichheit – genauso wie im Begriff der Ununterscheidbarkeit – nur etwas über die sprachlich ausdrückbaren *Eigenschaften von Dingen* ausgesagt wird. Der **Begriff der Identität ist zudem sprachunabhängig**, während der **Begriff der Gleichheit** [...] ganz wesentlich **von der zugrundegelegten Sprache abhängig** ist.

Das führt uns zu folgender *Grundvorstellung*, auch im Sinne einer

- Sprachregelung: Wenn man sagt, dass zwei Objekte „identisch“ seien, so bezieht sich das nicht auf deren „Namen“, sondern auf die *beiden* damit bezeichneten „Dinge“, die also *ein-und-dasselbe Ding* sind.

Diese „Dinge“ sind dann *einerlei* – es liegt somit *nur ein Ding* vor, dieses Ding ist also *einzigartig!*

So beginnt Felgner seine Schlussbetrachtung wie folgt (ebd., S. 126):

Die Begriffe der *Gleichheit* und der *Identität* sind, wie wir gesehen haben, weder in der Umgangssprache noch in der Fachsprache der Mathematik synonym. Aber dennoch wird in der Mathematik immer noch dort, wo man von Identität sprechen sollte, zumeist von Gleichheit gesprochen. Das ist nicht falsch, da *identische* Objekte auch einander *gleich* sind. In dieser Ausdrucksweise wird jedoch das eigentlich Gemeinte verschleiert. Es handelt sich dabei wohl um ein Zugeständnis an den seit Jahrhunderten üblichen Sprachgebrauch.

5 Zur Definition von „Gleichung“

Das „Herzstück“ einer zu entwickelnden Definition für „Gleichung“ liegt in der Quintessenz des Essays von Felgner vor (siehe das erste Zitat in Abschnitt 4), das zu folgenden Zielsetzungen für das Weitere führt (man beachte, dass gemäß Abschnitt 4 die Identität sprachunabhängig ist).

Zielsetzungen.

- (1) Wir verwenden das Zeichen „=“ inhaltlich primär als Zeichen der Identität zweier Dinge, lesen es aber als „gleich“ oder als „ist gleich“, genannt „Gleichheitszeichen“.
- (2) Jedes so entstandene formale Gebilde der Gestalt „ $a = b$ “ nennen wir „Gleichung“.

Das ist mit dem eingangs zitierten enzyklopädischen Eintrag im *‘Lexikon der Mathematik’* vereinbar. Es ist aber noch zu klären, was ein „Term“ ist und was „Gleichheit von Termen“ bedeuten soll. Das geschieht mit Rückgriff auf die Mathematische Logik (wie z. B. bei Felgner 2002):

Dazu legt man eine (ggf. geordnete) *algebraische Struktur* zugrunde, bestehend aus einer nicht-leeren Grundmenge M (der *Trägermenge*), endlich vielen endlichstelligen *Relationen* R_1, R_2, \dots in M , endlich vielen endlichstelligen *Funktionen* f_1, f_2, \dots , die nicht aus M herausführen, ferner endlich vielen *ausgezeichneten Elementen* e_1, e_2, \dots aus M wie z. B. „0“, „1“ oder „ \emptyset “. In dieser Schreibweise treten 2-stellige *Verknüpfungen* als 2-stellige Funktionen auf. Durch *Gesetze* und *Verträglichkeitsbedingungen* ergibt sich eine (ggf. geordnete) *Struktur*, z. B. $(\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot, \leq)$. (Vgl. die ausführliche Darstellung von Felgner 2020b, 265 f.)

Damit lässt sich definieren, was unter „Term“ zu verstehen ist:

- (*) „**Terme** in M “ werden ähnlich wie in der Mathematischen Logik gebildet: durch *rekursiven Aufbau* mit den verfügbaren *Operationen* aus *Konstanten* (z. B. Zahlzeichen wie z. B. $0, 1, \dots, e, \pi, \log_2(3)$) oder z. B. Zeichen für konkrete konstante Mengen wie \emptyset oder \mathbb{N}) und aus *Variablen*, *Funktionsnamen* und *Klammernpaaren*.

„Rekursiver Aufbau“ soll hier u. a. implizieren, dass Terme nur aus endlich vielen der o. g. Dinge bestehen. Diejenigen Elemente, aus denen bezüglich einer gegebenen Struktur (z. B. einer Mengenalgebra) auf diese Weise Terme gebildet werden, gehören zu einer konkreten formalen **Sprache** \mathcal{L} (s. o.), zu der weitere Elemente wie z. B. logische Junktoren (\vee, \wedge, \neg) und Quantoren („für alle“, „es gibt“) gehören können.

Wir betrachten nun „offene“ und „konstante“ Terme (vgl. Felgner, 2002). Statt „algebraische Struktur“ schreiben wir nur „Struktur“:

Definition 1. Es sei $(M; \dots)$ eine Struktur und T ein Term in M gemäß (*).

Dann ist $\text{Fr}(T)$ die Menge aller in T vorkommenden Variablen.

$\text{Fr}(T)$ besteht aus allen in T „frei vorkommenden Variablen“, deren es gemäß oben angedeuteter Termdefinition dann nur endlich viele gibt. So gelten z. B. folgende *Identitäten*: $\text{Fr}(e^2)$ ist dasselbe wie \emptyset , hingegen ist $\text{Fr}(e^x)$ dasselbe wie $\{x\}$. Das als Funktionsname auftretende Kürzel „Fr“ ist hier passend zu „freien Variablen“ bei Aussageformen gewählt worden (im Gegensatz zu z. B. mittels Quantoren „gebundenen Variablen“).

Definition 2. Bezüglich einer gegebenen Struktur $(M; \dots)$ und jeden in M gemäß (*) gebildeten Term T gilt:

- T ist genau dann ein **konstanter Term**, wenn $\text{Fr}(T)$ leer ist.
- T ist genau dann ein **offener Term**, wenn $\text{Fr}(T)$ nicht leer ist.

Damit können wir „Gleichung“ definieren, wobei wir in Definition 1 und 2 auf die Verwendung des Gleichheitszeichens *an dieser Stelle* aus gutem Grund noch verzichtet haben: Gemäß Zielsetzung (1) soll „=“ das Zeichen der „Identität“ zweier Dinge werden, damit benötigen wir nicht mehr das von Felgner (2020a) für den Beweis seines Satzes in (i) und (ii) erforderliche temporär verwendete Zeichen \equiv als ein „leeres Zeichen“.

Definition 3. Es sei $(M; \dots)$ eine Struktur, S und T seien Terme in M , und $=$ sei das Zeichen der Identität (aber gelesen als „ist gleich“).

Dann ist $S = T$ eine **Gleichung**.

Für $2 + 3 = 5$ ist das einleuchtend, auch wenn $2 + 3$ und 5 nicht selbst schon „Dinge“ sein sollten, sondern nur Namen für solche. Aber auch $2 = 3$ wäre dann eine Gleichung. Dem müssen wir auf den Grund gehen:

Konstante Terme S und T bezeichnen *Elemente* aus M und sind dann *Namen für Dinge*. Wenn sie *dasselbe Ding* bezeichnen, dann sind ihre Interpretationen *identisch*, und dann ist $S = T$ also eine wahre Aussage, andernfalls eine falsche. Wenn mindestens einer dieser beiden Terme *offen* ist, können *Einsetzungen* in *allen* Variablen zu einer wahren Aussage führen, die Gleichung ist dann *lösbar*, ggf. sogar für alle Einsetzungen (sie ist dann *allgemeingültig*). Wenn jedoch keine Einsetzung zu einer wahren Aussage führt, so ist sie *unlösbar*. Das führt zu folgender trivialen

Folgerung. Für jede Gleichung $S = T$ in einer gegebenen Struktur $(M; \dots)$ gilt:

- (a) Falls S und T konstante Terme in M sind, so ist $S = T$ entweder eine wahre Aussage oder eine falsche Aussage.
- (b) Ist mindestens einer der beiden Terme offen, so ist die Gleichung entweder lösbar (ggf. allgemeingültig) oder unlösbar.

In einer „Gleichungslehre“ ist das bezüglich der Anzahl der vorkommenden Variablen detailliert aufzufächern, worauf hier verzichtet wird.

Der „kargen“ Definition 3 und den vorhergehenden einschließlich der Folgerung ist noch begründend an die Seite zu stellen, weshalb solche „Gleichung“ genannten Gebilde diesen Namen erhalten und wieso der Terminus „Gleichung“ gleichwohl berechtigt ist. Zugehörige Argumente liegen in Abschnitt 3 in den zusammenfassenden Interpretationen und im Resümee vor und offenbaren entsprechende Grundvorstellungen.

Ferner ist zu betonen, dass diese drei Definitionen und die Folgerung *nicht nur* für numerische Verknüpfungsgebilde gelten, sondern *für jede Struktur, in der Terme gebildet und verglichen werden können*, denn alles basiert auf der *sprachunabhängigen Identität* von Dingen, also gelten sie auch z. B. für Mengenalgebren.

Das hat allerdings weitreichende und vermutlich überraschende Konsequenzen, die hier exemplarisch für Geometrien verdeutlicht seien:

In *Analytischen Geometrien* werden alle betrachteten Objekte und ihre Relationen auf Elemente und Relationen in Körpern zurückgeführt, und damit gelten hier per se dieselben Betrachtungen für „Gleichungen“.

In *Axiomatischen Geometrien* (euklidische, nicht-euklidische, absolute, endliche, ...) werden grundlegende Elemente wie „Punkt“ oder „Gerade“ *nicht explizit* definiert, sondern *nur implizit* mit Hilfe von Axiomen in ihrem Zusammenspiel. Da Punkte und Geraden hier *nicht* wie in der Analytischen Geometrie mittels Koordinaten *unterscheidbar* sind, also *ununterscheidbar* sind (wenn auch i. a. *nicht identisch*), „gleichen“ sich alle Punkte, so wie sich z. B. hier auch alle Geraden „gleichen“. Jedoch können zwei Punkte bzw. zwei Geraden *zusammenfallen*, und sie sind dann also *identisch*! So sind z. B. in Axiomatischen Geometrien zwei „gleiche“ Punkte *nicht notwendig identisch* – während andererseits zwei *gleiche Zahlen* stets identisch sind! Da in Axiomatischen Geometrien die Objekte mit ihren Beziehungen und Operationen in der Mengensprache beschrieben und somit Terme gebildet werden können, gelangen wir auch hier im Sinne der vorgestellten Definitionen zu *Gleichungen*.

- Mit Blick auf $2 = 3$ (s. o.) sei noch gefragt: Was ist eine *Ungleichung*?

Wir können die Antwort hierauf nicht neu erfinden, sondern wir müssen uns am tatsächlichen Gebrauch orientieren: So verweist das Präfix „un-“ oft auf eine logische Verneinung wie z. B. bei „ungenau“, jedoch ist „Ungleichung“ keine logische Verneinung von „Gleichung“ (was sollte das auch sein?), auch nicht von „gleich“. Vielmehr ist „ $2 = 3$ “ gemäß Definition 3 tatsächlich eine Gleichung, wenn auch eine falsche Aussage.

Wir sagen also: „2 ist nicht gleich 3“, was man als „ $2 \neq 3$ “ notiert, und das ist eine wahre Aussage. Es bleibt so nur die Möglichkeit, die faktisch verwendeten sog. „Ungleichheitszeichen“ aufzulisten, bei den reellen Zahlen also $<, >, \neq, \leq, \geq$. Die mit zwei Termen und einem dieser Zeichen anstelle von „=“ wie gemäß Definition 3 gebildeten Zeichenreihen sind dann „Ungleichungen“, obwohl die Relationszeichen \leq und \geq die *Gleichheit* „enthalten“, z. B. $a \leq b : \Leftrightarrow a < b \vee a = b$. Das alles ist nicht schön, nicht systematisch, der Tradition folgend, üblich und wohl nicht zu ändern.

6 Schlussbetrachtung

In der Mathematik ist die *Gleichheit* also auf die *Identität* zurückführbar, jedoch *ist* sie in aller Regel *nicht* die Identität. Man könnte aber eine als „Identität“ verstandene „Gleichheit“ bei „allgemeingültigen“ Gleichungen noch akzeptieren, weil dann bei *allen* zulässigen Einsetzungen eine „Identität“ beider Seiten vorliegt und damit auch deren „Gleichheit“.

Jedoch treten „Gleichungen“ in der Mathematik und ihren Anwendungen – neben der per definitionem erklärten „Gleichheit“ – vor allem im Rahmen des „Lösens“ von Gleichungen auf, wozu auch Funktionalgleichungen und speziell Differentialgleichungen gehören. Aber dort „ist“ gar nichts gleich, sondern es sind jeweils „Lösungen“ derart gesucht, dass *dann* bei *deren* „Einsetzungen“ Identitäten *entstehen*.

Der Terminus „Gleichung“ ist *in solchen Fällen* also von der Sache her *nicht gerechtfertigt*, sondern er ist lediglich der historischen Tatsache geschuldet, dass man „Einsetzungen“ sucht, die *dann* eine „Gleichheit“ (und damit eine „Gleichung“) *im Sinne der „Identität“* liefern. Hierauf wird jedoch zumindest in den hier zitierten Quellen nicht verwiesen.

Diese knappe Sachanalyse zum Gleichungsbegriff (vgl. die ausführliche Fassung 2020) versteht sich als Anstoß in Bezug auf konstruktive Erörterungen didaktischer Konsequenzen. Das betrifft auch die Frage nach *Grundvorstellungen zum Gleichungsbegriff* und damit zusammenhängend von „gleich“, „identisch“ und „Gleichheit“. Beispielsweise die zusammenfassenden Interpretationen inkl. Resümee

in Abschnitt 3 bieten hierzu Anregungen und werden eine inhaltliche Rolle spielen. Auch ist die Rolle der „Gleichheit“ jenseits der Mathematik (z. B. in der Justiz, bei Verfassungen, bei einer Waage, ...) heranziehbar (siehe zitierte Literatur).

Literatur

- Felgner, Ulrich: *Mathematische Logik*, Vorlesungsskript, 2002. (Auffindbar mit Suche nach „Mathematische Logik Felgner 2005“, Suche erfolgreich am 17. 11. 2020.)
- Felgner, Ulrich: Die Begriffe der Äquivalenz, der Gleichheit und der Identität. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, (2020a) 122:109–129. doi:10.1365/s13291-020-00214-0
- Felgner, Ulrich: *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*. Cham: Birkhäuser, 2020b.
- Hischer, Horst: *Studien zum Gleichungsbegriff*. Hildesheim: Franzbecker, 2020.
- Hischer, Horst: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl*. Heidelberg: Springer-Spektrum, 2021 (2. Auflage).

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de