MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

GDM

101

Juli 2016

Editorial: One–O–One

Liebe Lesende,

mit der Kursbezeichnung "101" werden an amerikanischen Colleges normalerweise die einführenden Kurse in ein Themengebiet bezeichnet, die ehrwürdige „Einführung in die Fachdidaktik Mathematik" hieße im kondensiertesten Fall dann wohl "Math-Ed-101". "101" hat sich über den Bereich der Colleges hinaus zur Abkürzung für die Basics, das Grundlegende und die erste Begegnung mit einem Thema zum geflügelten Wort (oder zum geflügelten Numeral) entwickelt.

Das führt mich dann auch zum vorliegenden Heft und zu dessen ungewöhnlich frühem Erscheinungstermin. Ganz herzlich möchte ich eine spezielle Leser(innen)gruppe begrüßen, nämlich die Teilnehmer(innen) der ICME-Lehrer(innen)tagung, für die dieses Heft womöglich die Erstbegegnung mit der GDM und ihren Veröffentlichungen darstellt. Beim Blick auf das Cover dieser Ausgabe ist ihnen vielleicht schon eine gewisse Dominanz von Hamburger Motiven aufgefallen und in der Tat verdankt das Heft 101 sein frühes und doppeltes (ich komme gleich darauf zurück) Erscheinen dem Großereignis ICME-13 in Hamburg.

Doppeltes Erscheinen insofern, als parallel zum Erscheinen von Heft 101 auch ein "Special Issue: The Foundation and Development of the GDM" der Mitteilungen der GDM erscheint, einerseits unsere englischsprachige Erstausgabe für das internationale Publikum des ICME, andererseits von Format und Umfang ein "back to the basics" für die MGDM, die als 8 Seiten A5-Faltbroschüre ihren Anfang nahmen.

Im Magazinteil der aktuellen Ausgabe riskieren wir im vorliegenden Heft gleich multiple Déjàvus: Für die englischsprachige Sonderausgabe haben wir einen 2004 erschienen Text des damaligen Schriftführers Michael Toepell als Basis hergenommen, den wir in diesem Heft für unsere Neu-Leser(innen) in aktualisierter und ergänzter Fassung parallel in deutscher Sprache noch einmal abdrucken. Wer das Heft von 2004 gelesen hat oder ein Exemplar der englischsprachigen Sondernummer in die Hand genommen hat (das aber bitte eigentlich für unsere internationalen Gäste gedacht ist!), bekommt die Geschichte und Entwicklung der GDM aus der Sichtweise von Michael Toepell also gleich doppelt und dreifach präsentiert. Dass Rudolf vom Hofe in seinem aus seinem Einführungsvortrag der diesjährigen Jahrestagung hervorgegangenen Vorwort dieser Ausgabe auch auf Geschichte und Entwicklung der GDM zu sprechen kommt, stellt eine weitere Doppelung dar. Als Herausgeber erschienen mir die beiden Zugänge aber als hinreichend komplementär, um einen parallelen Abdruck im selben Heft nicht entgegenzustehen.

Für unser Sommerheft eher ungewöhnlich, kommen in dieser Ausgabe auch die Arbeitskreise der GDM recht ausführlich zu Wort, die speziell eingeladen waren, sich unseren potentiellen Neu-Leser(innen) vorzustellen. Im Magazin- und Diskussionsteil herrscht in dem Sinne Kontinuität zu den letzten Heften, als Stoffdidaktik und zentrale Abschlussprüfungen weiterhin thematisch sind, wobei ich Gerd von Harten und Reinhard Oldenburg sehr dankbar bin, dass sie die Debatte um Stoffdidaktik weniger durch Positionspapier als durch exemplarische Beiträge zur Stoffdidaktik bereichern.

Ihnen nun eine anregende Lektüre und weiterhin
eine ertragreiche Tagung wünscht
Andreas Vohns

ISSN 0722-7817

Inhalt

Bildnachweise der Umschlagseite:
Linke Spalte (von oben nach unten): Hafen Hamburg/Peter Glaubitt, Universität Hamburg/Baumann. Rechte Spalte (von oben nach unten): Universität Hamburg/Meike Hansen, GDM. Darunter: GDM

Vorwort des ersten Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,

in diesen Tagen haben wir eine Reihe von kleinen und großen Jubiläen: In Heidelberg konnten wir die 50. Jahrestagung der GDM begehen, beim letzten Heft der Mitteilungen handelte es sich um das 100. und vom 24. bis 31. Juli haben wir mit der ICME 13 nach 40 Jahren bereits zum zweiten mal die wichtigste internationale Tagung für Didaktik der Mathematik zu Gast.

Anlässlich dieser runden Zahlen möchte ich das Vorwort nutzen, auf die Entwicklung der GDM einzugehen und dabei in Anlehnung an meinen Einführungsvortrag in Heidelberg drei Bereiche ansprechen: Die Vorgeschichte, die Entstehung und Entwicklung und die Zukunft unserer Tagungen.

Vorgeschichte und Entstehung einer mathematikdidaktischen Community

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik wurde im März 1975 in Saarbrücken gegründet. Die Jahrestagungen sind aber älter; die erste fand bereits acht Jahre früher statt. Dies mag zunächst einmal erstaunen, könnte man doch denken, dass man normalerweise zunächst eine Gesellschaft gründet und dann – nach der Gründungstagung – ein Tagungskonzept entwickelt.

Wie ist das zu erklären? Und wie sah es überhaupt aus mit der Situation der Mathematikdidaktik vor der Gründung der GDM?

Wie wir alle wissen, ist die wissenschaftliche Mathematikdidaktik eine recht junge Disziplin. Im deutschsprachigen Bereich hat sie im Wesentlichen zwei Wurzeln: Die gymnasiale Mathematikdidaktik und die Rechenmethodik der Volksschule. In beiden Traditionen hatten es sowohl das Fach Mathematik als auch die Mathematikdidaktik nicht leicht, sondern eher schwer.

Zunächst ein Blick auf die Rechenmethodik. Hier ging es im Wesentlichen um die unterrichtliche Einführung elementarer Inhalte wie Zahlen, Operationen und das, was man damals bürgerliches Rechnen nannte. Ihre Vertreter waren meist geisteswissenschaftlich orientiert und standen pädagogischen und psychologischen Konzepten von jeher näher als der Mathematik. Die Ausbildung der Volksschullehrer fand bis in die zwanziger Jahre des letzten Jahrhunderts in Lehrerseminaren, danach an Pädagogischen Akademien statt. Intention dieser Akademien war die Ausbildung zukünftiger Volksschullehrer als schulische Erzieher, fächerspezifische Aspekte im wissenschaftlichen Sinne spielten eine eher untergeordnete Rolle. Dies galt insbesondere auch für Fach Rechnen. Rechnen und Rechenmethodik wurde zwar gelehrt, ihnen wurde jedoch kein hoher Stellenwert zugemessen. Eine deutlich wichtigere Rolle spielte z. B. die Ausbildung in Musik und darstellender Kunst.

Dies änderte sich in den 1960er Jahren im Zusammenhang mit einer Umgestaltung des deutschen Schulsystems. Die alte Volksschule wurde abgeschafft, die Grundschule für alle eingeführt; danach kamen dann die weiterführenden Schulen: Hautschule, Realschule, Gymnasium und – je nach Bundesland – auch Gesamtschulen. Im Zuge dieser Veränderungen wurde die Lehrerausbildung reformiert, sie wurde fachspezifischer und wissenschaftlicher, aus den Pädagogischen Akademien wurden Pädagogische Hochschulen. Und schließlich wurde im Zuge weiterer Umgestaltungen die Lehrerausbildung der Grund-, Haupt- und Realschullehrer auch zunehmend in die Universitäten integriert. Hierzu wurden nun Professuren für Rechendidaktik bzw. Didaktik der Mathematik geschaffen. Zur Lehrverpflichtung kam damit auch die Aufgabe der Forschung.

Und wie entwickelte sich die gymnasiale Mathematikdidaktik? Diese war traditionell sehr von den Fachwissenschaften geprägt, befasste sich aber von jeher auch mit Fragen der unterrichtlichen Umsetzung; z. B. Anschaulichkeit versus Strenge oder genetische versus systematische Begriffsbildung. In der gymnasialen Lehrerausbildung, die an den Universitäten stattfand, spielten didaktische Aspekte aber höchstens am Rand eine Rolle. Professuren für Fachdidaktik gab es daher zunächst nicht.

Doch auch dies änderte sich im Zuge der Entwicklung der 60er Jahre, die zu einer Annäherung der Traditionen der Rechendidaktik und der gymnasialen Mathematikdidaktik führte. Dies ist insofern bemerkenswert, als diese beiden Traditionen bislang – weitgehend unbeachtet von der jeweils anderen Seite – nebeneinander hergelaufen waren. Die bislang getrennten Kulturen von Grund- bzw. Volksschule und Gymnasium wurden nun von einer übergeordneten mathematischen Perspektive aus gesehen, was für manche Grundschuldidaktiker den Blick auf die weiterführende Schule und für manchen Gymnasialdidaktiker den Blick auf die mathematische Frühausbildung öffnete.

Diese Entwicklung führte insgesamt zu einem Aufblühen der Mathematikdidaktik, zu einem neuen Selbstbewusstsein und zu neuen Aktivitäten, so auch zu der Idee, erstmals eine größere Tagung zur Didaktik der Mathematik für den deutschsprachigen Raum durchzuführen, um ein Forum für wissenschaftlichen Austausch zu schaffen. Diese Idee entstand 1966 bei einer Zusammenkunft der Fachdidaktiker am Rande des pädagogischen Hochschultages in Berlin. Im Rahmen solcher pädagogischen Hochschultage trafen sich die Fachdidaktiker bereits seit längerem. Sie bildeten allerdings nur eine kleine Gruppe innerhalb einer insgesamt pädagogisch ausgerichteten Veranstaltung.

Ursula Viet, Professorin für Didaktik der Mathematik in Osnabrück, übernahm die Organisation für diese erste Tagung, die dann im Jahre 1967 an der Universität Osnabrück stattfand. Diese Tagung bildete den Startpunkt für die weitere inhaltliche und organisatorische Entwicklung der jungen Community.

Gründung und Entwicklung der GDM

Die folgenden Tagungen wurden von Mathematikdidaktikern organisiert, die sich nach Absprache dazu bereiterklärten, zunächst ohne einen festen institutionellen Rahmen. Dies zu organisieren wurde aber zunehmend schwieriger. Man brauchte klare Entscheidungsstrukturen um Aktivitäten längerfristig zu planen. Und man benötigte eine finanzielle Absicherung. So war es für die Saarbrücker Tagung 1975 erforderlich, im Vorfeld etliche Auslagen zu begleichen. Hans Schupp hatte in diesem Jahr das benötigte Geld von seinem Privatkonto vorgestreckt, in der Hoffnung dieses Darlehen durch die zu erwarteten Tagungsbeiträge wieder zurückzuerhalten. Dies hat auch geklappt. Dennoch wurde klar, dass nicht nur aus diesen äußeren Gründen, sondern auch zur inhaltlichen Weiterentwicklung die Gründung einer wissenschaftlichen Gesellschaft die bessere Lösung war.

Die DMV betrachtete diese Pläne zunächst mit einer Mischung aus Desinteresse und Skepsis. Es gab Vertreter der Fachmathematiker, die darin eine Fehlentwicklung sahen, da es sich aus ihrer Sicht hier um Fragen handelte, die vielleicht für Hauptschullehrer von methodischem Nutzen sein konnten, die jedoch für die gymnasiale Bildung völlig irrelevant waren. Es gab jedoch auch Professoren für Mathematik, die der Entwicklung einer eigenen Fachdidaktik positiv gegenüber standen und diese unterstützten. So bildeten sich an einigen Universitäten, z. B. Münster, Gießen und Karlsruhe, Seminare für Didaktik der Mathematik, die wesentlich zur Weiterentwicklung der gymnasialen Mathematikdidaktik beitrugen.

Wie sollte nun der Verein aussehen? Wäre es nicht sinnvoll, eine GDM als Untergruppe innerhalb der DMV zu gründen? Diese Idee wurde diskutiert, aber dann verworfen. Die junge Community wollte ihre Selbstständigkeit, die sie gerade von den Pädagogen erstritten hatte, nicht gleich wieder in Frage stellen. Hinzu kam, dass nach den damaligen Aufnahmebedingungen der DMV ein großer Teil der Fachdidaktiker überhaupt nicht der DMV beitreten konnte. So kam es acht Jahre nach der ersten Tagung zur Gründung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, der heutigen GDM.

Die Teilnehmerzahlen haben sich seit den Anfängen erheblich vergrößert, wobei die genauen Zahlen der frühen Tagungen schwer zu ermitteln sind, da es ja noch keine institutionalisierten Aufzeichnungen gab. Nach Berichten waren es auf der ersten Tagung in Osnabrück etwa 50 Teilnehmer. Auf der 9. Bundestagung 1975 in Saarbrücken – also dem offiziellen Gründungsjahr der GDM – waren es dann bereits – wie wir aus einer Pressemetteilung wissen – schon mehr als 300 Wissenschaftler, die sich in über 50 Vorträgen über neue Forschungs- und Entwicklungsergebnisse auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts aller Alters- und Niveaustufen austauschten. Im Jahr 2004 auf der 38. Jahrestagung in Augsburg waren es über 400 Teilnehmer. In diesem Jahr, zur 50. Jahrestagung in Heidelberg, waren 662 Teilnehmer angemeldet.

Genaueres wissen wir über die Entwicklung der GDM-Mitgliederzahlen: Es gab 129 Gründungsmitglieder, von denen heute immer noch 55 Mitglied der GDM sind. Einer von ihnen, nämlich der erste 1. Vorsitzende, war Heinz Griesel, dem ich zahlreiche Informationen zur Geschichte der GDM verdanke und dem ich an dieser Stelle ganz herzlich dafür danken möchte.

Zehn Jahre später hatte die GDM bereits 460 Mitglieder, in den Jahren zwischen 1995 und 2005 schwankten die Zahlen zwischen 500 und 600. Danach stiegen sie fast auf das Doppelte an, d. h. dass wir ca. die Hälfte der aktuellen Mitglieder in den letzten 10 Jahren neu hinzugewonnen haben. Heute haben wir ca. 1100 Mitglieder.

Bei der Durchsicht dieser Zahlen, fielen mir zwei Dinge auf, die ich erstaunlich bzw. denkwürdig finde und die ich hier kurz erwähnen möchte.

1. Bei der Gründungsversammlung 1975 waren dann laut Protokoll 131 Mitglieder anwesend. Das ist insofern merkwürdig, als es laut Mitgliederstatistik 1975 lediglich 129 Mitglieder gab. Die Mitglieder waren also auf der ersten Mit-

gliederversammlung zu mehr als 100% vertreten. Nun ist hier vielleicht falsch gezählt worden, das kann natürlich sein. Jedenfalls war die erste Mitgliederversammlung – gemessen an der Gesamtzahl der Mitglieder – ausgesprochen gut besucht, es waren alle da, sogar zwei Mitglieder, die es gar nicht gab.

2. Interessant ist aber dann die weitere Entwicklung: Bei den Mitgliederversammlungen der folgenden Jahrestagungen bis heute blieb die Anzahl der Mitglieder, die zur Mitgliederversammlung gingen, nahezu konstant: Sie schwankte immer zwischen 110 und 140 Mitgliedern. Letztes Jahr waren es 130 Mitglieder und auch in diesem Jahr in Heidelberg lag die Zahl – trotz der Verlegung des normalerweise an die Mitgliederversammlung anschließenden Gesellschaftsabends auf den Tag *vor* der Mitgliederversammlung -— mit 129 genau in diesem Bereich. Und dies, obwohl sich die Anzahl der Mitglieder von 1975 bis heute mehr als verachtfacht hat. Der Grund dieser scheinbaren Diskrepanz ist mir noch nicht ganz klar. Vielleicht ist es so, dass sich mit einer Verdopplung der Mitgliederzahlen die Tendenz, zur Mitgliederversammlung zu gehen, halbiert. In diesem Fall hätten wir möglicherweise eine bislang unbekannte Vereinskonstante entdeckt.

Gemeinsame Tagungen mit der DMV

Liebe Mitglieder, ich möchte nun noch zu einem anderen Punkt kommen, nämlich zum Verhältnis der GDM zur Mathematik und insbesondere zur DMV. Dieses Verhältnis war von jeher von besonderer Bedeutung für uns. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass die gesellschaftliche Akzeptanz der GDM aufs Engste zusammenhängt mit der Bedeutung, die man der Didaktik für einen erfolgreichen Mathematikunterricht zumisst. Und erfolgreicher Mathematikunterricht ist auch eines der genuinen Interessen der DMV.

Es gab bislang zwei gemeinsame Tagungen mit der DMV, eine in Berlin und eine in München. Zu diesen Tagungen gab es neben Zustimmung auch manche Kritik. So wurde beispielweise die Frage gestellt, ob sich der zusätzliche organisatorische Aufwand einer solchen Doppeltagung wirklich lohnt. Manche hatten mitunter den Eindruck, dass es durch die Größe dieser Tagung schwieriger wurde, sich – wie sonst üblich – zwischen den Veranstaltungen und am Rande des Programms zu treffen und auszutauschen. Hinzu kam vielleicht auch, dass dies in großen Städten wie Berlin oder München ohnehin schwieriger ist als an kleineren Orten.

Zurzeit ist wieder eine gemeinsame Tagung geplant, sie wird im Jahr 2018 in Paderborn stattfinden. Und wir werden versuchen, aus den Erfahrungen der vorhergehenden Doppeltagungen zu lernen und eine Tagungsstruktur zu entwickeln, die genügend Raum für die Einzelverbände lässt und gleichzeitig neue Kontaktmöglichkeiten zwischen den Verbänden eröffnet.

Die Planung dieser Tagung war nicht ganz unproblematisch und ich möchte dieses Problem an dieser Stelle ganz offen ansprechen. Es ging zunächst um den Zeitpunkt der gemeinsamen Tagung. Die GDM-Jahrestagungen finden traditionell im Februar oder März statt, die DMV-Tagung im September. Zweimal hatte die DMV bereits auf ihren traditionellen Septembertermin verzichtet und sich nach der GDM gerichtet. Nun erwartete man Seitens der DMV, dass wir auch mal auf den September gehen.

Eine solche Verlegung ist für uns nicht einfach und ohne einen erheblichen Aufwand kaum zu realisieren. Entsprechend skeptisch war ich vor Beginn der Planung dieser Doppeltagung. Lohnt sich wirklich der organisatorische Aufwand oder ist es nicht besser, den Kontakt mit der DMV auf andere Weise zu pflegen?

Meine zunächst skeptische Haltung änderte sich nach einem Gespräch mit der DMV-Spitze. Hier wurde deutlich, dass die DMV ein erhebliches Interesse an der Zusammenarbeit mit der GDM hat. Dieses betrifft insbesondere Fragen der Lehrerbildung und des Übergangs Schule/Hochschule. In den Gesprächen wurde deutlich, dass beides für die DMV wichtige Problemfelder sind, in denen sie die Zusammenarbeit und Abstimmung mir der GDM sucht. Und ein weiterer wichtiger Aspekt, der Seitens der DMV für eine gemeinsame Tagung angeführt wurde, ist die Außenwirkung einer solchen Doppeltagung, die ein weit größeres Gewicht hat als es etwa gemeinsame Kommissionen haben können.

Die positive und interessierte Haltung der DMV hat mich beeindruckt und überzeugt. Ich denke, dass die aktuellen und zukünftigen Probleme der mathematischen Bildung ohne die DMV kaum zu lösen sind und dass eine verstärkte Zusammenarbeit in diesen Bereichen auch ein vitales Interesse der GDM ist.

Die DMV hat unsere Argumentation, dass wir für eine Verlegung der Tagung in den September einen längeren Vorlauf benötigen, akzeptiert. Wir haben der DMV allerdings signalisiert, dass wir in den kommenden Jahren über einen möglichen Wechsel nachdenken werden, der dann die übernächste gemeinsame Tagung betreffen könnte. Um es noch etwas deutlicher zu sagen, ich habe der DMV signalisiert, dass ich mich als Vorsitzender

der GDM für weitere gemeinsame Tagungen einsetzen werde, dass eine Entscheidung in dieser Sache aber lediglich die Mitgliederversammlung treffen kann.

Für die Zukunft sehe ich drei Möglichkeiten:

1. Wir teilen der DMV mit, dass wir auf absehbare Zeit nicht bereit sind, auf unseren traditionellen Märztermin zu verzichten. Das wäre dann das Ende von gemeinsamen Tagungen und kein gutes Signal an die DMV.
2. Wir verlegen unsere Tagung einmalig oder vielleicht alle 5 Jahre auf den September. Dies würde gemeinsame Tagungen mit der DMV ermöglichen, würde aber zu Problemen innerhalb der GDM führen, da zum einen Wahlperioden erheblich verkürzt oder verlängert und da zum anderen zwei Tagungen im Abstand eines halben Jahres folgen würden.
3. Wir verlegen unsere Tagung generell auf den September, am besten auf die letzte Septemberhälfte. Die Herbsttagungen unserer Arbeitskreise könnte man dann im Gegenzug auf das Frühjahr verlegen.

Liebe Mitglieder, wir müssen das nicht in diesem Jahr entscheiden. Aber ich möchte Sie ganz herzlich bitten, darüber nachzudenken und die damit zusammenhängenden Aspekte zu diskutieren. Eine Entscheidung sollten wir dann nach der Tagung 2018 in Paderborn treffen.

Ich möchte dem nicht vorgreifen, aber als Vorsitzender soviel sagen: Ich halte die Beziehung zwischen GDM und DMV für eine grundlegende Säule für erfolgreiche Arbeit. Daher plädiere ich dafür, die ausgestreckte Hand der DMV anzunehmen und zu sagen: „Ok, der September ist auch ein schöner Monat“.

Mit freundlichen Grüßen
Rudolf vom Hofe
(1. Vorsitzender der GDM)

Die Regeln der Differentialrechnung und ihre direkte Herleitung

Gerd von Harten

Im Gedenken an Dr. Bernd Bekemeier, †12. 7. 2015

In der Sekundarstufe II kann der Begriff der Differenzierbarkeit auf verschiedene Arten eingeführt werden (vgl. Rüthing, 1980). Ein neuerer Vorschlag ist es hyperreelle Zahlen aus der Non-Standard Analysis zu behandeln und auf den Grenzwertbegriff zu verzichten (vgl. Baumman und Kirski, 2016). Als Vorteil wird dabei insbesondere angeführt: „Neu und vorteilhaft ist dabei, und das geht sogar über die Schulmathematik hinaus, dass man bei der Infinitesimalrechnung die Regeln tatsächlich errechnet. Bei der Grenzwert-Analysis ist es dagegen häufig notwendig, diese Regeln zunächst zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzübergang zu bestätigen." (Baumman und Kirski, 2016, S.6).

Schon in Rüthing (1980) wurde diese Problematik für den Beweis der Produktregel für die Ableitung behandelt und eine mögliche Lösung vorgestellt. Der angesprochene Beweis erfolgt üblicherweise durch die sogenannte Nullergänzung (s. u.). Dies kann umgangen werden, in dem zunächst die Ableitung für f^2 mit $2 \cdot f' \cdot f$ hergeleitet und dies dann auf die Funktion $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ angewendet wird.

Wir wollen in diesem Beitrag zunächst zeigen, dass man die Produktregel für zwei Funktionen f, g leicht und ohne Nullergänzung beweisen kann, wenn zunächst der Fall betrachtet wird, dass beide Funktionen an der Stelle gleich 0 sind.

Dann wollen wir zeigen, dass mit einer einfachen Umformung der Definition der Differenzierbarkeit, die Produktregel und auch die Kettenregel ohne Benutzung von Ergänzungen oder der Vermutung des Ergebnisses abgeleitet werden können.

Ein einfacher Beweis der Produktregel

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b), h \in (x_0 - a, b - x_0)$. Dann heißt f differenzierbar in x_0, wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Die Definition lässt sich natürlich auf offene Mengen in $\mathbb{R}$ ausdehnen, sowie auf rechts- oder linksseitige Grenzwerte in Randpunkten.

Die Produktregel für zwei differenzierbare Funktionen f, g wird üblicherweise mit Hilfe der folgenden Umformung bewiesen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}{h} \cdots \\
&\qquad \frac{-f(x_0)\cdot g(x_0+h) + g(x_0+h)\cdot f(x_0)}{h} \cdots \\
&\qquad \frac{-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \Big)
\end{aligned}$$

Durch Ausklammern von $g(x_0+h)$ und $f(x_0)$ erfolgt der Beweis. Dabei wird benutzt, dass eine in x_0 differenzierbare Funktion auch stetig in x_0 ist. Dies werden wir auch ohne Erwähnung gebrauchen.

Der Term $-f(x_0)\cdot g(x_0+h) + g(x_0+h)\cdot f(x_0)$ wird als Nullergänzung bezeichnet. Man kann diese Ergänzung damit begründen, dass man durch Umformung, die Ableitungen der Funktionen erhalten will. Nichtsdestotrotz erweckt der Term den Eindruck, dass er eingeführt wird, weil das Ergebnis schon bekannt ist.

Wir betrachten jetzt zunächst einen einfachen Spezialfall.

Satz 1: Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und $(f\cdot g)'(x_0) = 0$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}{h} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 0}{h} \cdot g(x_0+h) \\
&\quad = f'(x_0)\cdot g(x_0) = 0
\end{aligned}$$

Nun kann die Produktregel für beliebige Funktionen hergeleitet werden.

Satz 2: Sind $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Beweis: Wir betrachten

$$f^*(x) = f(x) - f(x_0) \text{ und } g^*(x) = g(x) - g(x_0).$$

Dann ist

$$f^*(x_0) = g^*(x_0) = 0$$

und deshalb

$$(f^* \cdot g^*)'(x_0) = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} f^*(x) \cdot g^*(x) = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) \\ - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x_0) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &(f^* \cdot g^*)'(x_0) \\ &\quad = (f \cdot g)'(x_0) - f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= (f^* \cdot g^*)'(x_0) \\ &= (f \cdot g)'(x_0) - f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Die Ableitung als lineare Näherung

Die Ableitung einer Funktion kann z. B. als Steigung der Tangente etc. aufgefasst werden, sie ist aber auch eine lineare Näherung der Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0. Dieser Aspekt wird durch folgende Satz deutlich.

Satz 3: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann gilt für alle $h \in (x_0 - a, b - x_0)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o(h)$$

mit $o : (x_0 - a, b - x_0) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Beweis: $o(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$ und wegen der Differenzierbarkeit von f ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Für diesen Satz gilt auch die Umkehrung.

Satz 3 (Umkehrung): Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Gibt es eine Funktion $o : (x_0 - a; b - x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ und ein c, so dass für alle $h \in (x_0 - a; b - x_0)$ gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot c + o(h),$$

so ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = c$.

Beweis: Es folgt durch Umformung:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c + \frac{o(h)}{h}.$$

Wird auf beiden Seiten der Grenzwert gebildet, folgt die Behauptung.

Beweis der Produkt- und Kettenregel mit der Näherungsform

Mit Hilfe von Satz 3 lässt sich die Produktregel einfach beweisen. Sind f, g zwei differenzierbare Funktionen so gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o_1(h)$$

und

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h)$$

und damit:

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) \\ &\quad = f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &\qquad + h \cdot \big(f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)\big) \\ &\qquad\quad + \big(f(x_0) \cdot o_2(h) + g(x_0) \cdot o_1(h)\big). \end{aligned}$$

Die Produktregel ergibt sich durch Umformung oder direkt durch die Umkehrung des Satzes 3. Zum Beweis der Quotientenregel kann zunächst die Ableitung der multiplikativ inversen Funktion bestimmt werden.

Satz 4: Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und $g(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: Die Behauptung folgt leicht aus der folgenden Gleichung und der Stetigkeit von g.

$$\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{-g(x_0) + g(x_0 + h)}{g(x_0 + h) \cdot g(x_0)}$$

Die allgemeine Quotientenregel kann dann aus der Produktregel und Satz 4 abgeleitet werden. Ein anderer Weg ist über die Kettenregel möglich. Auch hier kann ein einfacher Beweis über Satz 3 erfolgen.

Satz 5: Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, so ist $f(g(x))$ differenzierbar in x_0 und es gilt: $(f(g(x_0)))' = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0))$.

Beweis: Nach Satz 3 gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + o_1(h) \qquad (1)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h) \qquad (2)$$

Dann folgt:

$$f\big(g(x_0+h)\big) = f\big(g(x_0) + h \cdot g'(x_0) + o_2(h)\big)$$

Setzen wir $h^* = h \cdot g'(x_0) + o_2(h)$ in (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} f\big(g(x_0+h)\big) & \\ &= f\big(g(x_0) + h^*\big) \\ &= f\big(g(x_0)\big) + h^* \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_1(h^*) \\ &= f\big(g(x_0)\big) + h \cdot g'(x_0) \cdot f'\big(g(x_0)\big) \\ &\quad + o_2(h) \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_1\big(h \cdot g'(x_0) + o_2(h)\big) \end{aligned}$$

Mit $o_3(h) = o_2(h) \cdot f'(g(x_0)) + o_1(h \cdot g'(x_0) + o_2(h))$ folgt dann

$$\begin{aligned} f\big(g(x_0+h)\big) & \\ &= f\big(g(x_0)\big) + h \cdot g'(x_0) \cdot f'\big(g(x_0)\big) + o_3(h). \end{aligned}$$

Da $\lim_{h\to 0} \frac{o_3(h)}{h} = 0$ folgt die Behauptung durch Umformung zur Definition der Differenzierbarkeit von $f(g(x))$ oder aus der Umkehrung von Satz 3.

Aus der Kettenregel lässt sich leicht die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion herleiten.

Schlussbemerkungen

Die Produktregel ist ein „neuralgischer Punkt“ im Analysisunterricht (vgl. Rüthing, 1980). Die angegebenen Beweise stellen wie auch der Beweis in Rüthing (1980) eine Möglichkeit dar, diesen Punkt weniger „neuralgisch“ zu machen. Die Einführung hyperreeller Zahlen im Analysisunterricht kann ein Wert für sich sein, für die Umgehung dieses neuralgischen Punktes braucht man sie nicht.

Die Auffassung der Ableitung als lokale lineare Näherung stellt auch eine sinnvolle Ergänzung anderer Interpretationen dar und hat auch Potential in weiteren Anwendungen.

Literatur

Baumman, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der GDM*, (100), 6–16.

Rüthing, D. (1980). Zum Differenzierbarkeitsbegriff und zur Produktregel der Differentialrechnung. *Praxis der Mathematik*, 22(12), 364–372.

Gerd von Harten, Pelikanweg 22, 46487 Wesel, Email: gerd.vonharten@unitybox.de

Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen

Reinhard Oldenburg

In den letzten Ausgaben der GDM-Mitteilungen gab es zahlreiche Aufsätze, die sich mit dem Begriff der Stoffdidaktik, seiner Definition und seiner Bedeutung beschäftigt haben. Viele Ausführungen können den Eindruck erwecken, in der Stoffdidaktik seien die wesentlichen Fragen geklärt. Dem ist aber nicht so, wie dieser kleine Beitrag zeigt.

Ausgangspunkt ist die folgende Frage: Sind die beiden Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ äquivalent? Äquivalenz von Gleichungen ist ein zentraler Begriff in der Mathematik der Sekundarstufe I und deswegen könnte man annehmen, er sei geklärt. Gegen diese Einschätzung spricht aber eine kleine Befragung im Kollegenkreis: 10 Kollegen sagten „ja“, 7 „nein“, einige weitere waren unentschieden. Fachwissenschaftliche Kollegen tendieren zu „nein“. Diese kleine Befragung erhebt keinen Anspruch auf Repräsentativität, sie beweist aber zweifelsfrei: Es gibt kein geteiltes Verständnis der Äquivalenz von Gleichungen.

Welche Definitionen des Begriffs Äquivalenz von Gleichungen findet man in der Literatur?

- Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Kirsch formuliert das so: „Äquivalenz zweier Aussageformen bedeutet nichts anderes als Gleichheit ihrer Erfüllungsmengen“ (Kirsch, 1997, S. 108). In dieser Sichtweise sind beide Gleichungen äquivalent, da jeweils $\{0\}$ Erfüllungsmenge ist.
- Variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen in der gleichen Variablen sind äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge haben. Kirsch vertritt auch diese Position: „Man kann ein- und dieselbe Menge durch verschiedene Aussageformen mit derselben freien Variablen beschreiben. Das sind dann ‚äquivalen-

te' Aussageformen" (Kirsch, 1997, S. 107).[1] Mit dieser Auffassung sind die beiden Gleichungen nicht äquivalent.

Versionen der ersten Fassung dominieren in den Schulbüchern. Allerdings wird die Umbenennung der Variablen in keinem Fall betrachtet, insbesondere wird nirgends die dann mögliche Äquivalenztransformation der Variablenumbenennung thematisiert.

Da die deutliche Mehrheit der Schulbücher und die knappe Mehrheit der Kollegen, die beiden Gleichungen als äquivalent betrachten, stellt sich die Frage, ob das Problem nicht einfach dadurch gelöst werden kann, dass die variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz als Fehlvorstellung klassifiziert wird. Ich bin aber nicht dieser Auffassung. Grund ist das Substitutionsprinzip: Objekte und Ausdrücke können durch dazu äquivalente Objekte und Ausdrücke ersetzt werden.

Wendet man dieses Prinzip unter der Annahme, die beiden Gleichungen seien äquivalent, auf das Gleichungssystem $x = 0, y + 1 = 2$ an, erhält man $y = 0, y + 1 = 2$. Die korrekte Formulierung des Substitutionsprinzips muss dann lauten: Äquivalente Objekte darf man manchmal, je nach Kontext, durcheinander ersetzen, manchmal auch nicht.

Ein weiteres Problem der Lösungsmengenäquivalenz ist, dass sie sich auf Gleichungen und Gleichungssysteme mit mehr als einer Variablen nur mit Zusatzinformationen (etwa einer Variablenordnung, die die Lösungstupel eindeutig interpretierbar macht) anwenden lässt.

Eine stoffdidaktische Analyse ist einfach und erklärt nebenbei den oben angedeuteten Befund, warum Fachwissenschaftler zur Nichtäquivalenz tendieren.

In der Logik wird die Bedeutung eines Terms oder einer Gleichung (dass man dazwischen nicht unterscheiden muss, ist ein großer Vorteil!) gegeben durch Interpretationen: Eine Interpretation ist eine Belegung von Variablen mit Werten. Zwei Terme oder Gleichungen definiert man sinnvollerweise als einsetzungsäquivalent, wenn sie unter jeder Interpretation jeweils den gleichen Wert haben. Betrachtet man etwa die Interpretation $\{x = 0, y = 1\}$ dann hat unter dieser Interpretation $x = 0$ den Wert „wahr", $y = 0$ dagegen den Wert „falsch", weil sich durch das Einsetzen einmal $0 = 0$, das andere mal $1 = 0$ ergibt. Daher sind die Gleichungen nicht äquivalent.

Es gibt noch einen zweiten Äquivalenzbegriff, den man davon abgrenzen kann: Zwei Gleichungen (oder Terme) sind umformungsäquivalent, wenn sie durch eine Kette zulässiger Äquivalenzumformungen ineinander umgeformt werden können. Dieser Umformungskalkül ist korrekt, wenn alle umformungsäquivalenten Gleichungen auch einsetzungsäquivalent sind, und vollständig, wenn alle einsetzungsäquivalenten Gleichungen auch umformungsäquivalent sind. Beide Ziele kann man nicht erreichen, wie ein klassisches Resultat der Logik zeigt, und Korrektheit ist wichtiger: Man wählt und legitimiert Umformungsregeln gemäß der Bewahrung der Einsetzungsäquivalenz. Auch für den Unterricht interessante Beispiele sind (über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$) die Gleichungen $x^2 + 1 = 0, x^2 + 2 = 0, \sin(x) = 2$, die paarweise einsetzungsäquivalent, aber nicht umformungsäquivalent sind.

Auch in der Schulbuchliteratur könnte man diese Sicht verwenden. Statt Interpretation bietet es sich vielleicht an, von Belegung zu sprechen. Eine Möglichkeit zur Einführung von Variablen ist, dass man statt vieler baugleicher Zahlterme einen Term mit einer Variablen betrachtet (z. B. $3 \cdot x + 4$ als vereinfachten Term für den Preis einer Taxifahrt von x Kilometern) und dann den Wert unter verschiedenen Belegungen $x = 1$, $x = 2$, u.s.w. berechnen lässt. Das Konzept der Belegung dehnt sich dann systematisch auf mehrere Variablen aus und kann im ganzen Verlauf der Algebra verwendet werden. Insbesondere klärt dies auch, was man unter dem Veränderlichenaspekt versteht: Weder das Symbol x ändert sich, noch ändert sich die Zahl, auf die x verweist, sondern man ändert die Belegung. Das Lösen einer Gleichung ist die Suche nach einer Belegung, unter der die Gleichung den Wert „wahr" ergibt.

Nachdem diese Klärung erfolgt ist, sollte man noch einen kritischen Blick zurück werfen – wieso sind so viele Kollegen Anhänger der problematischen Ansicht, die beiden Gleichungen seien äquivalent? Dies dürfte daran liegen, dass wir bei Gleichungen traditionell eine bei Funktionen verbreitete Unterscheidung nicht machen. Bei Funktionen unterscheiden wir zwischen der Funktion und dem Funktionsterm. Die Terme $x + 1$ und $y + 1$ sind selbstverständlich verschieden, die Funktionen mit den Definitionen $f(x) = x + 1, g(y) = y + 1$ sind aber gleich. Das liegt daran, dass hier ein impliziter Allquantor steht, gemeint ist ja $\forall x : f(x) = x + 1$, und durch Quantoren gebundene Variablen können selbstverständlich umbenannt

[1] Ich lese dabei den Teil „in derselben freien Variablen" als Anforderung für die Äquivalenz. Es könnte auch sein, dass Kirsch das verstanden haben wollte als Einschränkung der Definition und dass über Aussageformen mit verschiedenen Variablen gar keine Aussage gemacht werden soll. Dies erscheint mir aber eher wenig plausibel.

werden. Wir haben in der obigen Analyse Gleichungen als analoge Objekte zu Termen verstanden: Eine Gleichung besteht aus zwei Termen und einem Gleichheitszeichen. Anhänger der Äquivalenz könnten diese Sicht zurückweisen und statt dessen Gleichung und Gleichungsfunktion identifizieren (so wie einige, aber wenige, Term und Funktion identifizieren). Die zur Gleichung $x + 1 = 2$ gehörige Gleichungsfunktion ist eine Abbildung $\mathbb{R} -? \{wahr, falsch\}$. Die Gleichungsfunktionen zu den Gleichungen $x = 0, y = 0$ sind gleich, beides sind die Funktionen, die 0 auf *wahr* und alle anderen Zahlen auf *falsch* abbilden. Die Lage wäre also übersichtlicher, wenn man zwischen Gleichung und Gleichungsfunktion ebenso unterscheiden würde, wie zwischen Funktionsterm und Funktion.

Auf Basis dieser stoffdidaktischen Analyse kann man also den Begriff der Äquivalenz klären, leicht zugänglich machen und das Substitutionsprinzip bewahren. Stoffdidaktik wäre überflüssig, wenn nicht in fast allen Schulbüchern eine ungeeignete Definition der Gleichungsäquivalenz stünde.

Literatur

Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis.

Reinhard Oldenburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg,
Email: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Zur Gründung und Entwicklung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Michael Toepell und Andreas Vohns

Vorgeschichte

1890 ging die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* als eigenständige Vereinigung aus der *Mathematisch-Astronomischen Abteilung* der 1822 entstandenen *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte* (GdNÄ) hervor. Diese Abteilung sollte „einen erweiterten Kreis ihrer Betätigung erhalten, welcher die gesamten wissenschaftlichen Interessen der Mathematik umfaßt“ (Bremer Beschlüsse (18. 9. 1890), in: Gutzmer, 1904, 27). Ein wesentliches Band bildeten zudem dabei die Mathematiker(innen) im *Wissenschaftlichen Ausschuss* der GdNÄ.

> Diese immerhin lockere Einordnung der Mathematiker-Vereinigung in das Gefüge der großen und umfassenden Naturforscher-Gesellschaft muss als ein besonders glücklicher Griff bezeichnet werden. Denn einerseits wird die Mathematiker-Vereinigung in ihrer Selbständigkeit und freien Bewegung nicht im mindesten beschränkt, andrerseits ist durch die Naturforscher-Gesellschaft die Möglichkeit geboten, wissenschaftliches und Standes-Interesse mit Hilfe der Naturforscher-Gesellschaft größeren Nachdruck zu verleihen und mit verwandten Disziplinen in wissenschaftliche Berührung zu treten (Gutzmer, 1904, 4f).

Mitglieder der DMV wurden damals vor allem Hochschulmathematiker(innen), Lehrer(innen) an höheren Schulen, die in den ersten Jahrzehnten besonders zahlreich vertreten waren, und Mathematiker(innen) in Industrie und Verwaltung.

1904 schrieb Gutzmer (1904, 8) im Rückblick:

> Überhaupt ist die Frage des Unterrichts, die seit etwa einem Jahrzehnt besonders auch auf mathematischem Gebiete eine allgemeine und grundsätzliche Bedeutung erlangt hat, unausgesetzt von dem Interesse der Vereinigung begleitet gewesen.

Er wies dabei auf rund 30 Arbeiten hin, die dazu in den ersten Jahren in den Jahresberichten erschienen waren (vgl. Gutzmer, 1904, 9f).

Der Mathematik nahestehende Vereinigungen

Bis 1920 blieb die DMV die einzige nationale Vereinigung von Mathematiker(inne)n in Deutschland. 1921 ging aus ihr der *Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine* hervor, der insbesondere eine Beratungsfunktion in Fragen der mathematischen Schul- und Hochschulausbildung übernommen hatte; ein Jahr später die *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik* (GAMM), die vor allem Forschungsergebnisse zur Anwendung der Mathematik diskutierte und förderte.

Noch in den 20er Jahren wurden die Jahresversammlungen der DMV, die sich nun verstärkt der reinen Mathematik zuwandte, gemeinsam mit diesen beiden Gesellschaften, darüber hinaus mit der *Deutschen Physikalischen Gesellschaft* und mit der 1919 gegründeten *Gesellschaft für Technische Physik* veranstaltet (vgl. Tobies, 1986, 122 f.). Die Gründung neuer Gesellschaften führte allmählich dazu, dass bestimmte Berufsgruppen, z. B. die Physiker(innen), in der DMV bald weitaus weniger vertreten waren als noch in den ersten Jahrzehnten des 20.Jahrhunderts. So waren etwa noch Max Planck, Albert Einstein, Arnold Sommerfeld, Werner Heisenberg und Wolfgang Pauli Mitglieder der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (vgl. Toepell, 1991).

Im Zuge der weiteren Spezialisierung der Fachmathematik schlossen sich ab der Jahrhundertmitte die Mathematiklehrer(innen), die seinerzeit zum großen Teil als zweites Fach Physik unterrichten, verstärkt in berufsbezogenen Standesvertretungen zusammen – wie insbesondere im ebenfalls bereits 1890 gegründeten *Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* (MNU), in der 1948 gegründeten *Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft* (GEW) oder in den neu gebildeten mathematischen Fachgruppen der Philologenverbände. Damit ließ sich das DMV-Gründungsziel, auch die Gymnasiallehrer(innen) mit einzubeziehen (vgl. Tobies, 1991, 43), immer weniger realisieren.

Zu den Mitgliedern der DMV gehörten in den 1950er Jahren auch noch zahlreiche ostdeutsche Mathematiker(innen). 1962 gründeten diese Mathematiker(innen) eine eigene Mathematische Gesellschaft, die *Mathematische Gesellschaft der DDR* (MGDDR). Sie hatte zuletzt (1990) rund 1350 Mitglieder, darunter zahlreiche Lehrer(innen), die sich in diesem Teil Deutschlands mit den Hochschulmathematiker(inne)n zusammengeschlossen hatten.

Ausbildung der Volksschullehrer(innen)

Eine noch nicht angesprochene Berufsgruppe bildeten die Mathematiker(innen), die in der Volksschullehrerausbildung tätig waren. Die Ausbildung der Volksschullehrer(innen) erfolgte seit Ende des 18. Jahrhunderts bis in die 1920er Jahre in Lehrerseminaren. Nachdem diese nicht mehr als zeitgemäß angesehen wurden, gründete man in der Weimarer Republik sog. Pädagogische Akademien (wie z. B. in Preußen) und pädagogische Institute (wie z. B. in Sachsen), die Universitäten oder Technischen Hochschulen angegliedert waren (vgl. Griesel, 2000a, 16). An diese erziehungswissenschaftlich und musisch geprägte Ausbildung knüpfte man nach 1945 an. Ein eigenständiges mathematikdidaktisches Wissenschaftsbewusstsein konnte sich dabei jedoch noch nicht entwickeln.

Mit der Reform des Schulwesens Anfang der 60er Jahre kam es zu einer Veränderung der Wertvorstellungen. Die achtjährige lebenspraktisch orientierte Volksschule wurde abgeschafft, die Grundschule und die neunjährige Schulpflicht eingeführt. Es sollte allen Bevölkerungsgruppen der chancengleiche Zugang zu einer breiten wissenschaftlich fundierten Bildung ermöglicht werden.

Die damit verbundene Zielsetzung, zumindest für die Haupt- und Mittelschulen die Fachlehrer wissenschaftlich auszubilden, führte zur Umwandlung der pädagogischen Akademien und Institute in *Pädagogische Hochschulen* (die später in Universitäten eingegliedert wurden bzw. in Baden-Württemberg universitäre Strukturen erhielten) mit einem sechssemestrigen Studium und Promotionsrecht. Im Rahmen der damit zu verändernden Personalstruktur wurden in Deutschland von 1965 bis 1975 ein- bis zweihundert Professuren für Mathematik und ihre Didaktik und zudem in Bielefeld ein sehr gut ausgestattetes *Institut für Didaktik der Mathematik* eingerichtet. Die „Modernisierung des Mathematikunterrichts“ stand an. Der generelle Ausbau aller Fachdidaktiken an Hochschulen und Forschungsinstituten der Bundesrepublik Deutschland unterstrich zugleich die Bedeutung dieser Disziplinen für das Bildungswesen.

Die Professuren haben die *dreifache Aufgabe*, einerseits für eine praxisnahe Ausbildung der Studierenden (Vorlesungen, Seminare, Praktikumsbetreuungen), andererseits für eine praxisnahe Forschung und Entwicklung des Faches und schließlich für bildungsorientierte Dienstleistungen (wie z. B. Lehrerfort- und Lehrerweiterbildungen, Mitwirkung in Lehrplankommissionen, bildungspolitische Öffentlichkeitsarbeit) zu sorgen.

Auf dem *Pädagogischen Hochschultag* 1966 in Berlin versammelten sich informell die sich gegenüber der *Mathematik*didaktik verantwortlich fühlenden Hochschullehrer(innen). Es entstand der Wunsch, ein Forum zu schaffen, auf dem man Forschungsergebnisse, Theorien und Entwicklungen zur Diskussion stellen und organisatorische Fragen besprechen konnte. So beschloss diese Versammlung, jährlich eine sog. *Bundestagung* (später in „Jahrestagung“ umbenannt) *für Didaktik der Mathematik* zu veranstalten. Mit der ersten Jahrestagung 1967 in Osnabrück entstand eine bis in die Gegenwart anhaltende Tradition. Während die ersten Tagungen noch von an Pädagogischen Hochschulen tätigen Mathematik(didaktik)dozent(inn)en organisiert wurden, traf man sich 1981 erstmals an einer Universität und 1982 in Klagenfurt (Österreich) erstmals im (deutschsprachigen) Ausland. 2016 wurde die 50. Jahrestagung mit über 800 Teilnehmer(inne)n in Heidelberg durchgeführt.

Die jeweils daraus hervorgegangenen umfangreichen Tagungsbände *Beiträge zum Mathematikunterricht* dokumentieren die entsprechend vielfältige diesbezügliche Forschungstätigkeit.

Wie kam es zur Gründung der GDM?

Bereits bei der Gründung der DMV hieß es, es sollten dadurch die mathematischen „Verhandlungen der Jahresversammlungen wissenschaftlich in eingehenderer Weise als bisher vorbereitet ... werden" (Gutzmer, 1904, 4). Ein Argument, das auch maßgebend zur Gründung der GDM beigetragen hat. Wer größere Kongresse organisiert hat, weiß, dass eine Folge derartiger Tagungen langfristig vorbereitet und koordiniert werden muss. Zudem sollten die finanziellen Risiken nicht von einem einzelnen, sondern von einer Solidargemeinschaft getragen werden.

Ein weiteres Problem entstand insbesondere in den Jahren der Reform des Mathematikunterrichts um 1970: Den die Öffentlichkeit vertretenden Medien fehlte nicht selten sachkundige Ansprechpartner, eine entsprechende Institution, an die man sich bei den zahlreichen Fragen zum neuen Mathematikunterricht wenden konnte.

Zu diesen beiden eher äußerlichen Gründen kam etwas hinzu, was sich – auf dem Feld der Mathematik – ebenso bei der Gründung der DMV in den Jahren 1890/91 artikuliert hatte: Die mathematikdidaktisch Tätigen hatten das Empfinden, für die Entwicklung eines eigenen Wissenschaftsbewusstseins wäre die Gründung einer entsprechenden wissenschaftlichen Gesellschaft (*scientific community*) von Nutzen. Sie könnte zudem einen Rahmen bilden für die wissenschaftliche Kommunikation zu mathematikdidaktisch spezifische Forschungsrichtungen und -methoden, die – im Gegensatz zur jahrhundertalten *mathematischen* Forschungstradition – in dieser jungen Wissenschaft erst nach und nach zu etablieren waren. Ziel war es, die Mathematikdidaktik zur *Berufswissenschaft* der Mathematiklehrenden auszubauen.

Ein Jahr nach Gründung der *Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik* (GDCP) wurde 1974 auf der Tagung zur *Didaktik der Mathematik* in Oberwolfach (die damals noch jährlich stattfanden) der Beschluss zur Gründung der GDM gefasst. Die Verbundenheit mit den anderen Fachdidaktiken kommt heute durch den Dachverband *Gesellschaft für Fachdidaktik* (GFD; früher in der *Arbeitsgemeinschaft fachdidaktischer Gesellschaften*) zum Ausdruck.

Am 12./13. März 1975 wurde dann die *Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (GDM) auf der Jahrestagung für Didaktik der Mathematik in Saarbrücken gegründet. Zur Gesellschaft gehört ein vierköpfiger Vorstand (Erster und Zweiter Vorsitzender, Schriftführer und Kassenführer) sowie ein wissenschaftlicher Beirat von maximal 15 Personen, die den Vorstand in den allgemeinen wissenschaftlichen Leitlinien und Zielsetzungen beraten und unterstützen.

Die Ersten Vorsitzenden waren seit Gründung der GDM: Heinz Griesel (1975–1979), Hans Schupp (1979–1983), Heinrich Winter (1983–1987), Gerhard Becker (1987–1991), Heinrich Bürger (1991–1995), Werner Blum (1995–2001), Kristina Reiss (2001–2005), Elmar Cohors-Fresenborg (2005–2007), Hans-Georg Weigand (2007–2013) und Rudolf vom Hofe (seit 2013).

Bei der Gründung der GDM lag natürlich auch die Überlegung nahe, ob es nicht – wie etwa in der MGDDR – besser sei, eine didaktische Arbeitsgruppe innerhalb der DMV zu gründen. Doch standen dem die Befürchtungen entgegen, sich zu sehr in Abhängigkeit von Entscheidungen des Präsidiums der DMV zu begeben. Die Mathematikdidaktik ist weder ein Teilgebiet noch ein Supplement der Mathematik. Möglicherweise hätten auch aus den Erziehungswissenschaften oder der Psychologie kommende Mathematikdidaktiker(innen) wegen der damals strengen DMV-Aufnahmebedingungen gar nicht Mitglied werden können (vgl. Griesel, 2000a, 21). Zahlreiche Mathematikdidaktiker(innen) (unter ihnen viele DMV-Mitglieder) fühlten sich mit ihrem Hauptanliegen, den Mathematikunterricht zu verbessern, in der damaligen DMV nicht ausreichend vertreten. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Mathematikdidaktik nicht nur die Probleme des Lehrens und Lernens am Gymnasium, sondern an *allen* Schularten zu berücksichtigen hat – also insbesondere auch an Grundschulen, Hauptschulen, Realschulen (Mittelschulen) und Berufsschulen.

Da es in Deutschland auch keinen eigenständigen Verband der Mathematiklehrer(innen) gibt, ließ sich auch ein Zusammengehen von Mathematiklehrer(inne)n und Mathematikdidaktiker(inne)n wie etwa in den USA im 90.000 Mitglieder zählenden Verband NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) nicht realisieren.

Nach dem Ausbau der Fachdidaktiken in den 1960er und 70er Jahren kam es in den 80er Jahren zu einer deutlichen Gegenbewegung. Die nicht gerade besonders gefällige *Lehrerschwemme* wurde in den Medien zum Modewort. Die Kapazitäten für die Lehrerbildung, speziell die der Fachdidaktiken, wurden drastisch abgebaut. Die systematische Erforschung der Fragen des mathematischen

Bildungserwerbs, des Lernens, hatte es schwer gegenüber der unangefochtenen Reputation des Faches Mathematik. Einschränkende Voraussetzungen und Entfaltungsschwierigkeiten können andererseits aber auch die Besinnung auf den eigentlichen Kern einer jungen Wissenschaft stärken, wie es etwa der damalige Vorsitzende Heinrich Winter im Rückblick beschreibt (vgl. Winter, 2000, 38f.).

Die politische *Wende* in Deutschland führte vielfach auch zur Veränderung wissenschaftlicher Strukturen. Es war insbesondere die Sorge um die Zukunft der Mathematik, die in der DMV 1991 eine *Strukturreform* ausgelöst hat. Die in diesem Rahmen vorgesehene weite Öffnung der DMV war für die Mathematikdidaktik ein neues Signal, das nicht ungehört blieb. Lisa Hefendehl-Hebeker hat darüber in den GDM-Mitteilungen berichtet (vgl. Hefendehl-Hebeker, 1991). Hans-G. Bigalke ging mit einem offenen Brief (v. 2. 4. 1991) an den damaligen Präsidenten der DMV, Martin Grötschel, auf die Bedeutung der Strukturreformvorschläge für die GDM ein (vgl. Bigalke, 1991). Die Kontakte eröffneten eine neue Epoche der Verständigung und Kooperation.

Darauf aufbauend nahmen in der zweiten Hälfte der 90er Jahre die bildungspolitischen Aufgaben und Verpflichtungen der GDM spürbar zu. Vor allem auch unterstützt durch die Studien von TIMSS und PISA rückte der Unterricht in Mathematik und den Naturwissenschaften in das Bewusstsein der Medien und so wurden deren Didaktiken nicht nur verstärkt nachgefragt, sondern auch in bildungspolitische Entscheidungen miteinbezogen.

Aufgabenbereiche der GDM

Das führt zur Frage nach den Aufgabenfeldern der GDM. Wie Heinz Griesel schreibt, hatten die Gründer der GDM eine *weite Auffassung* von Mathematikdidaktik. Sie

> wurde nicht verengt als Bestandteil der Mathematik, der Pädagogik oder der pädagogischen Psychologie angesehen, sondern als eine eigenständige wissenschaftliche Disziplin, welche *alle* Fragen der Forschung und Entwicklung zu bearbeiten habe, die das Lernen und Lehren von Mathematik betreffen, und zwar in allen Schulformen, aber auch außerhalb von Schulen (vgl. Griesel, 2000a, 22; auch in: Griesel, 2000b, 7).

Nach seiner Auffassung sollten dabei in der Forschung vordringlich die Probleme behandelt werden, die sich Lehrer(inne)n bei ihrer konkreten Arbeit im Unterricht stellen, wobei auch allgemeine Grundlagenfragen dazugehören (vgl. Griesel, 2000a, 30).

Um den mathematikdidaktisch Tätigen eine verbesserte Entfaltung zu ermöglichen, hat die GDM einen organisatorischen Rahmen geschaffen, der eine Reihe von *Aufgabenbereichen* umfasst:

1. An erster Stelle stehen dabei die Planung der bereits erwähnten *Jahrestagungen zur Didaktik der Mathematik* und die Herausgabe der Jahresbände *Beiträge zum Mathematikunterricht* (bis 2004 im Verlag Franzbecker Hildesheim/Berlin, seit 2005 im WTM Verlag Münster und zudem online unter https://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/de/home/bzmu_home.html). Die Jahrestagungen bilden neben den Hauptvorträgen einen „Markt der Überlegungen, Erfahrungen und Meinungen" (Schupp, 2000, 33).
2. Zudem wurden verschiedenste *Arbeitskreise* eingerichtet. Wenn es auch Arbeitskreise zur Geometrie oder Stochastik gibt, so sind sie doch insgesamt weniger auf fachmathematische Gebiete als auf didaktische Forschungs- und Themenfelder bezogen. Folgende Arbeitskreise sind derzeit in der GDM aktiv:
   - Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik (zuvor: Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht),
   - Frauen und Mathematik,
   - Geometrie,
   - Grundschule,
   - Hochschulmathematikdidaktik,
   - Interpretative Unterrichtsforschung,
   - Lehr-Lern-Labore Mathematik,
   - Mathematik und Bildung,
   - Mathematikgeschichte und Unterricht,
   - Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge (zuvor: Mathematikunterricht und Informatik),
   - Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich,
   - Problemlösen,
   - Psychologie und Mathematikdidaktik,
   - Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik,
   - Stochastik in der Schule,
   - Ungarn,
   - Vernetzungen.

   Aus dem langjährig bestehenden *Arbeitskreis Schweiz-Liechtenstein* ist im Jahr 2014 mit der „GDM Schweiz" nach einer entsprechenden Satzungsänderung der erste Landesverband der GDM hervorgegangen.

   Die meisten Arbeitskreise treffen sich – neben den Sitzungen auf den GDM-Jahrestagungen – zur intensiveren Arbeit auf eigenen jährlichen (Herbst-)Tagungen.

3. Mit dem *Journal für Mathematikdidaktik* (JMD) wurde 1980 eine eigene referierte Vierteljahres-Zeitschrift mit wissenschaftlichem Anspruch gegründet. Ein vom Beirat der GDM gewähltes Dreiergremium ist für die Herausgabe verantwortlich und setzt damit die Fahne unter der das Schiff segelt. Seit 2010 erscheint das JMD zweimal jährlich im Springer-Verlag, alle zuvor erschienen Jahrgänge sind zudem retrodigitalisiert worden und somit stehen Mitgliedern der GDM sämtliche Jahrgänge der Zeitschrift auch unter SpringerLink online zur Verfügung. Mit dem Wechsel zum Springer-Verlag erscheinen im Zeichen der Internationalisierung zunehmend auch englischsprachige Beiträge, z. T. gebündelt in bislang drei Themenheften (*Empirical Research on Mathematical Modelling* (2010), *Early Childhood Mathematics Teaching and Learning* (2012), *Subject Matter Analysis from a Didactical Perspective* (2016)).
4. Das Organ für den Informationsaustausch zwischen Vorstand, Beirat, Arbeitskreisen und den Mitgliedern der GDM bilden die *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Seit 1975 sind (anfangs mit einem Jahresumfang von rund 32, zuletzt von rund 160 Seiten) davon 100 Hefte erschienen. Sie werden von der jeweiligen Schriftführung im Auftrag des Vorstands herausgegeben und bilden ein weites mathematikdidaktisches Diskussionsforum.
   Daneben enthalten die Mitteilungen auch Hinweise, etwa auf Arbeitskreise, bildungspolitische Entwicklungen, Denkschriften, Kommissionen, Forschungsprojekte, internationale Themen und nationale und internationale Tagungen sowie Rezensionen.
5. Neben dem JMD und den Mitteilungen als offiziellen Organen der GDM unterstützt die GDM die internationale Fachzeitschrift *ZDM – Mathematics Education*. Das ZDM wurde als „Zentralblatt für Mathematikdidaktik“ bereits 1969, also 5 Jahre vor der GDM als das Informations- und Dokumentationsportal zur Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum gegründet. Von 1980-1996 erschien das ZDM unter der Federführung des *Fachinformationszentrums Karlsruhe* (FIZ). Während sich aus dem Informationsteil die anerkannte internationale Zeitschrift „ZDM – Mathematics Education“ entwickelte, ging aus dem Dokumentationsteil die Online-Fachdatenbank *MathEduc* (zuvor: MathDI) (https://www.zentralblatt-math.org/matheduc/) hervor, bei deren Betreuung FIZ und GDM auch heute noch eng kooperieren. MathEduc ist die weltweit einzige internationale Referenzdatenbank zur Mathematikdidaktik. In dieser Literaturdatenbank werden regelmäßig die Beiträge aus über 500 einschlägigen Fachzeitschriften und thematisch relevante Monographien und Sammelbände mit Abstracts, z. T. auch mit Reviews erfasst.
   Neben dieser internationalen Online-Literaturdatenbank wird seitens der GDM seit einigen Jahren als weitere Online-Aktivität mit der *Madipedia* (http://madipedia.de) an einem zentralen Nachschlagewerk zur Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum in Form eines Wikis gearbeitet. Derzeit sind knapp 600 Personen und 860 mathematikdidaktische Dissertationen erfasst, zudem sind in der Madipedia u. a. auch fast alle Arbeitskreise und die GDM-Nachwuchsgruppe mit einer eigenen Seite vertreten.
6. Die von Anfang an in der GDM geplante Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses ist erst zu Beginn der 2000er Jahre (begünstigt von einer verbesserten Stellensituation) u. a. durch Förderpreise und regelmäßige *Doktorandenseminare* in Gang gekommen. Vorbild waren die Doktorandenseminare der MGDDR (Griesel, 2000a, 27). Seit 2003 ist als weiteres Format der Nachwuchsförderung die *GDM Summerschool* hinzugekommen, die vor allem einen Einblick in verschiedene Forschungsmethoden gewähren möchte, mit denen sich die Teilnehmenden in Workshops und Vorträgen intensiv auseinander setzen. Erst in den 2010er Jahren hat sich zudem die *Nachwuchsvertretung der GDM* als selbstorganisierte Gruppe von Doktorand(inn)en und Post-Docs gegründet, die seit einigen Jahren eigene Aktivitäten für den Nachwuchs im Rahmen der GDM Jahrestagungen organisiert und in der Regel auch in die Planung der Doktorandenseminare und Summerschools eingebunden ist.
7. Vereinigungen bilden sich auch in der Hoffnung, offiziellen Verlautbarungen und Empfehlungen ihrer Mitglieder stärkeres Gewicht verleihen zu können. So wurden von der GDM in den knapp drei Jahrzehnten ihres Bestehens eine Reihe verschiedener Stellungnahmen, etwa zur Lehrerbildung oder zum Mathematikunterricht einzelner Schularten, herausgegeben. Um die Ausstrahlungskraft zu erhöhen, zeichnet sich in den letzten Jahren die Entwicklung ab, derartige Stellungnahmen im Verbund mit Partnervereinigungen – wie der DMV oder der MNU – abzugeben. Mit den in den letzten Jahren eingerichteten gemeinsamen Kommissionen *Lehrerbildung* und *Übergang Schule-Hochschule* haben GDM, DMV und MNU mittlerweile auch außerhalb dringlicher Stellungnahmen ein Forum zum Austausch über alle drei Verbände betreffende bildungspolitische

Entwicklungen etabliert, auch in der Hoffnung, nicht nur auf Bildungspolitik reagierend, sondern auch diese aktiv gestaltend Einfluss zu gewinnen.

8. Schließlich betrachtet es die GDM auch als ihre Aufgabe, Hilfestellung bei der Beschaffung von *Drittmitteln* zu gewähren, etwa durch wiederholt stattfindende Antragsworkshops in Kooperation mit der Gesellschaft für Didaktik der Physik und Chemie (GDCP).

Kontakte und Kooperationen

Die GDM wurde bewusst nicht als „deutsche" Gesellschaft für Didaktik der Mathematik gegründet. In der Mitte Europas angesiedelt, ist sie bestrebt, europäischen Aufgaben gerecht zu werden. Die meisten der rund 1100 Mitglieder der GDM gehören dem deutschen Sprachgebiet an. Von Anfang an waren Mathematikdidaktiker in Österreich (zur Zeit 60 Mitglieder) und in der Schweiz (derzeit 140 Mitglieder) in die Gründungsplanungen mit einbezogen worden. Die GDM versteht sich als offene mathematikdidaktische Gesellschaft, die zudem traditionell viele Mitglieder im außerdeutschen Sprachraum hat – hier insbesondere im osteuropäischen Raum – und die internationale Kooperation in besonderer Weise fördert.

Neben den Kontakten zur GDCP und zum Förderverein MNU sind die zur DMV besonders hervorzuheben: Auf den DMV-Jahrestagungen haben Mathematikdidaktiker seit Jahrzehnten eine eigene verdienstvolle Sektion eingerichtet und mit mehr oder weniger umfangreichen Vortragsangeboten beleben können. In den Jahren 2007 (in Berlin) und 2010 (in München) fanden zudem gemeinsame Jahrestagungen der GDM und der DMV statt.

Aus der Zusammenarbeit bei der Erarbeitung gemeinsamer Empfehlungen von DMV, GDM und MNU zu „Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik" ging 2008 ein ständiger gemeinsamer Arbeitskreis „Lehrerbildung" hervor, aus dem schließlich 2011 die oben bereits erwähnte *gemeinsame Kommission Lehrerbildung* hervorging. Im selben Jahr wurde eine Arbeitsgruppe zur Schnittstelle *Übergang Schule Hochschule* ins Leben gerufen, die heute als zweite, ständige gemeinsame Kommission der drei Verbände geführt wird. Die Kooperation der drei Vereine geht in diesen Kommissionen mittlerweile deutlich über das Verfassen bildungspolitischer Stellungnahmen hinaus und beinhaltet regelmäßige Tagungen aus denen auch bereits mehrere Publikationen hervorgegangen sind.

Die Kooperation mit fachdidaktischen Gesellschaften ist seit 2001 in Deutschland in der *Gesellschaft für Fachdidaktik* als Dachorganisation der fachdidaktischen Gesellschaften in Deutschland institutionalisiert. Im Jahr 2012 wurde in Österreich mit der *Österreichischen Gesellschaft für Fachdidaktik* eine entsprechende Organisation gegründet, in der die GDM ebenfalls vertreten ist. Neben regelmäßigen Tagungen zur Förderung des interdisziplinären Gedankenaustausches zwischen Fachdidaktikern aller Fachrichtungen und Tätigkeitsbereiche und gemeinsamen Aktivitäten zur Nachwuchsförderung besteht auch hier ein Motiv der Zusammenarbeit im verbandsübergreifenden „Schulterschluss", um in bildungspolitischen Fragen als relevante Größe wahrgenommen zu werden.

Literatur

Bigalke, H.-G. (1991). Offener Brief an den Präsidenten der DMV. *Mitteilungen der GDM*, (52), 34–36.

Griesel, H. (2000a). Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) – Gründung, Vorgeschichte und Entwicklung 1975 bis 1979. *Mitteilungen der GDM*, (70), 14–31.

Griesel, H. (2000b). Die Gründung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) vor 25 Jahren. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000* (S. 6–9). Hildesheim: Franzbecker.

Gutzmer, A. (1904). Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von ihrer Begründung bis zur Gegenwart. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *10*, 1–30.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Überlegungen zu einer DMV-Strukturreform. *Mitteilungen der GDM*, (52), 32–33.

Schupp, H. (2000). Bericht über meine Tätigkeit als 1. Vorsitzender der GDM in den Jahren 1979-1983. *Mitteilungen der GDM*, (70), 31–36.

Tobies, R. (1986). Zur Geschichte deutscher mathematischer Gesellschaften. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR*, *1986*(2/3), 112–134.

Tobies, R. (1991). Warum wurde die Deutsche Mathematiker-Vereinigung innerhalb der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte gegründet? *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *93*(1), 1–30.

Toepell, M. (Hrsg.). (1991). *Mitgliedergesamtverzeichnis der Deutschen Mathematiker- Vereinigung 1890-1990*. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität München.

Winter, H. (2000). Zwischen Stellenabbau und Selbstbesinnung – persönliche Anmerkungen zur Didaktik in der BRD von 1983 bis 1987. *Mitteilungen der GDM*, (70), 37–42.

Michael Toepell, Universität Leipzig, Karl-Heine-Straße 22b, 04229 Leipzig, Email: toepell@uni-leipzig.de

Von Andreas Vohns überarbeitete, gekürzte und aktualisierte Fassung des gleichnamigen Beitrags von Michael Toepell, erschienen in den Mitteilungen der GDM, Heft 78 (2004), S. 147–152. Wiederabdruck mit freundlicher Genehmigung des Autors.

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an Gymnasien in Österreich

Eva Sattelberger und Jan Steinfeld

Im Schuljahr 2014/2015 wurde für die allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS), d.h. die österreichischen Gymnasien, im Schuljahr 2015/2016 für die berufsbildenden höheren Schulen (BHS) die neue Reife- und Diplomprüfung für alle Schulstandorte in Österreich verpflichtend. Damit wurde eine längere Reformphase abgeschlossen, die zu einem deutlichen Paradigmenwechsel im österreichischen Schulsystem führte, werden doch durch standardisierte Prüfungsteile Prüfungen unabhängig von einzelnen Lehrenden auf ein gemeinsames österreichisches Qualifikationsniveau gebracht und damit objektiver und vergleichbar. „Das Verfahren sichert die Chancengleichheit und die Vergleichbarkeit der Abschlüsse der Schülerinnen und Schüler, indem es gleiche Anforderungen an jeden Prüfungsteilnehmer stellt" (Kühn 2010, zitiert nach Kahnert 2014, S. 42). Die Grundidee der neuen Reifeprüfung umfasst demnach die Standardisierung (der schriftlichen Klausuren) und – zusätzlich – die Kompetenzorientierung, sodass die Kandidatinnen und Kandidaten ihre Teilprüfungen hinsichtlich klar definierter Anforderungen ablegen (vgl. BIFIE 2013a, S. 2).

Die Entwicklung einer standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung in Mathematik an AHS wurde im Jahr 2008 unter der Leitung von Werner Peschek und Roland Fischer (vgl. AECC 2009) begonnen. Die beauftragte Projektgruppe, bestehend aus Mathematik-Didaktikerinnen und -Didaktikern, Mathematikerinnen und Mathematikern sowie Lehrkräften, erstellte ein bildungstheoretisch fundiertes Konzept auf Basis des gültigen Mathematik-Lehrplans der gymnasialen Oberstufe an allgemeinbildenden höheren Schulen (BMUKK 2004) sowie valider Erkenntnisse der Fachdidaktik und der Bildungswissenschaft. Das Konzept (BIFIE 2013b) wurde in der Folge im Auftrag des Bundesinstituts für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) überarbeitet und als Grundlage für die standardisierte schriftliche kompetenzorientierte Reifeprüfung (in Folge SRP) in Mathematik an AHS implementiert.

Bildungstheoretischer Hintergrund zur Beschreibung von Grundkompetenzen[1]

Ausgangspunkt der bildungstheoretischen Orientierung, welche den mathematischen Grundkompetenzen zugrunde liegt, ist das Individuum und dessen Rolle in unserer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft, analog zu bildungstheoretischen Konzeptionen von beispielsweise Klafki (1963) oder Heymann (1996), und nicht die (objektive Seite der) Mathematik. Im Konzept zur SRP in Mathematik an österreichischen Gymnasien wurden die konzeptionellen Überlegungen der „höheren Allgemeinbildung" von Fischer (2001) aufgegriffen. Dieses Konzept präzisiert zum einen, wie viel und welche Mathematik Absolventinnen und Absolventen der AHS zu ihrem eigenen Nutzen benötigen und welche Inhalte gesellschaftlich relevant sind. Zum anderen wird für Erziehungsberechtigte, tertiäre (Bildungs-)Institutionen und Abnehmer/innen in der Wirtschaft verdeutlicht, welche mathematischen Inhalte von Schülerinnen und Schülern mindestens erlernt werden und langfristig verfügbar sein sollten.

Für Maturantinnen und Maturanten wird die Befähigung zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten einerseits und der Allgemeinheit andererseits als das zentrale Lernziel identifiziert (Fischer 2012, S. 12). In vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens geht es darum, Informationen einzuholen oder Aussagen von Expertinnen und Experten zu verstehen, zu bewerten und zur eigenen Erfahrungswelt in Beziehung zu setzen, um z. B. Entscheidungen treffen zu können. Die jungen Erwachsenen können hier eine wichtige Vermittlerrolle zu mathematischen Themen einnehmen, da sie in der Lage sein sollten, Meinungen zu sammeln, diese zu verstehen, Expertisen verständlich zu erklären und Vorschläge für die Bewertung und Integration solcher Informationen zu entwickeln, sodass sie als „entscheidungskompetente bzw. entscheidungsbefugte Laien" (Fischer 2012, S. 14) fungieren können.

[1] Der folgende Abschnitt ist auch in Siller et al. (2016) nachzulesen.

Um über mathematische Inhalte gewinnbringend kommunizieren zu können, ist sowohl Grund- als auch Reflexionswissen bzw. -vermögen in und mit Mathematik notwendig. Gleichzeitig ist es wichtig, Transferleistungen zu erbringen, d. h. das erlernte Wissen in neuartigen Situationen anwenden zu können.

Unter Grundwissen werden fundierte Kenntnisse hinsichtlich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete verstanden. Zudem sollen die Wirkungsweise von Begriffen und Verfahren, ihre Leistung im jeweiligen Kontext oder ihre Grenzen hinterfragt werden können. Auf dieser Grundlage wurden die in AECC (2009) bzw. in BIFIE (2013b) formulierten Grundkompetenzen als „sorgsam ausgewählte und gut begründete Kompetenzen, die aufgrund ihrer fachlichen und gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind" (AECC 2009, S. 6), erarbeitet.

Umsetzung des Konzepts in standardisierten kompetenzorientierten Prüfungen

Zur Sicherung des Unterrichtsertrags – hinsichtlich der eingangs erwähnten Vergleichbarkeit und Transparenz in Bildungsabschlüssen – müssen die im Konzept angeführten (mathematischen) Grundkompetenzen einer (schriftlichen) Überprüfung zugänglich gemacht werden. Ziele und Inhalte, auf die in Prüfungssituationen fokussiert werden soll, müssen für das Fach grundlegend sein, sodass im Sinne einer Accountability eines Systems (Wissens-)Defizite in diesen Bereichen einen verständigen Umgang mit den geforderten mathematischen Inhalten und erfolgreiches Weiterlernen beeinträchtigen würden.

Um den Nachweis von Grundkompetenzen einer zentralen schriftlichen Überprüfung zugänglich machen zu können, werden Prüfungsaufgaben entwickelt, die definierten Kriterien entsprechen und in einer für alle Schüler/innen unmissverständlichen Sprache formuliert sind.

Diese Aufgaben lassen sich anhand zweier Charakteristika unterscheiden und werden als Typ-1- bzw. Typ-2-Aufgaben (vgl. BIFIE 2013b, S. 23) bezeichnet. Sie variieren sowohl in Bezug auf inhaltlich-strukturelle Merkmale als auch auf mit den Aufgaben einhergehenden Anforderungen. Dies impliziert, dass die beiden Aufgabentypen konsekutiv in zwei voneinander getrennten Testheften (Teil 1 und Teil 2) bearbeitet werden (vgl. dazu exemplarisch u.a. BIFIE 2015):

1. Typ-1-Aufgaben sind *„Aufgaben, die auf die im Konzept zur schriftlichen Reifeprüfung angeführten Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen"* (BIFIE 2013b, S. 23). Verschiedene gebundene Antwortformate wie Multiple-Choice-Format und Lückentextformat ermöglichen eine objektive Punktevergabe. Zur Vergabe der Punkte bei Aufgaben mit offenem und halboffenem Antwortformat werden für die Auswertung Lösungserwartungen und klar formulierte Lösungsschlüssel angegeben.
2. Typ-2-Aufgaben sind *„Aufgaben zur Anwendung und Vernetzung der Grundkompetenzen in definierten Kontexten und Anwendungsbereichen. Dabei handelt es sich um umfangreichere kontextbezogene oder auch innermathematische Aufgabenstellungen, im Rahmen derer unterschiedliche Fragestellungen bearbeitet werden müssen und bei deren Lösung operativen Fertigkeiten gegebenenfalls größere Bedeutung zukommt. Eine selbstständige Anwendung von Wissen und Fertigkeiten ist erforderlich"* (BIFIE 2013b, S. 23). Auch diese Aufgaben sind in Aufbau und Darstellungsweise sowie hinsichtlich der Punktevergabe differenziert gestaltet (vgl. BIFIE, 2013a).

Voraussetzung für das Antreten zur SRP ist die positive Absolvierung der Abschlussklasse (12. bzw. 13. Jahrgangsstufe). Zu einem vom Bundesministerium für Bildung und Frauen (bmbf) festgesetzten Zeitpunkt erhalten alle zugelassenen Kandidatinnen und Kandidaten gedruckte Klausurhefte, wobei alle Kandidatinnen und Kandidaten im Vorfeld und zu Beginn der Klausurarbeiten umfassend über den geplanten Ablauf der Prüfung zu informieren sind.

Die Gesamtarbeitszeit für beide Prüfungsteile beträgt 270 Minuten. Dabei muss in den ersten 120 Minuten der Teil mit den Typ-1-Aufgaben bearbeitet und abgegeben werden. Erst danach kann mit der Bearbeitung des zweiten Teils mit den Typ-2-Aufgaben begonnen werden, wobei dafür 150 Minuten an Arbeitszeit zur Verfügung stehen.[2]

[2] Die Überarbeitung des Konzepts sah einen technologiefreien ersten Aufgabenteil (Teil 1) vor, diese Vorgabe konnte jedoch im Laufe des Projekts nicht umgesetzt werden, die zeitliche Trennung der Bearbeitung der beiden Teile blieb aber bestehen.

Die Aufgabenentwicklung

Im Rahmen der SRP in Mathematik geht es darum, die mathematischen Kompetenzen (vgl. obige Ausführungen) mit geeigneten Methoden zu messen. Dabei wird zunächst mit Hilfe einer Aufgabe in Kombination mit einem Aufgabenformat (vgl. BIFIE 2013a, S. 55) die zu messende Grundkompetenz operationalisiert. Dies geschieht am Beginn des Prozesses durch ein Team von Aufgabenentwicklerinnen und -entwicklern (allesamt aktiv tätige Lehrkräfte mit hoher fachdidaktischer Expertise), deren Auftrag es ist, Aufgaben – entlang der im Konzept (BIFIE 2013b) ausgewiesenen Grundkompetenzen – zu entwickeln. Danach durchläuft jede Aufgabe mehrere Qualitätsschleifen. So erfolgt nach dem ersten Schritt der Aufgabenentwicklung eine Kommentierung jeder einzelnen Aufgabe durch die so genannte Aufgabenkommentierungsgruppe (bestehend aus universitären Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern sowie Fachpraktikerinnen und Fachpraktikern) hinsichtlich verschiedener Kriterien zur Umsetzung des Konzepts. Nach Überarbeitung durch die Entwicklerteams werden die Aufgaben in einer nächsten Qualitätsschleife hinsichtlich ihrer fachlichen Korrektheit und der präzisen Abbildung der jeweiligen Grundkompetenz überprüft. Nach diesen qualitativen Qualitätsschleifen werden die Aufgaben in den Feldtestungen auch empirisch überprüft. Es wäre denkbar, dass trotz der sorgsamen Konstruktion der Aufgaben weitere Aspekte gemessen werden, die aber nicht gemessen werden sollen (d. h. Aspekte, die nicht konstruktrelevant sind). Aufgaben sollen für unterschiedliche Personen die gleichen Parameter messen. Wenn dies nicht der Fall ist, dann wird dies als differential item functioning (DIF; Penfield & Camilli 2006) bezeichnet (vgl. auch Sattlberger & Steinfeld 2016, S. 96). Neben diesem sehr wichtigen Aspekt werden auch weitere empirische Kennwerte generiert, die sich nicht nur auf eine Abschätzung der empirischen Schwierigkeit einer Aufgabe beziehen, sondern auch wertvolle Information über die Güte der so genannten Distraktoren (Antwortmöglichkeiten bei geschlossenen Aufgabenformaten, die nicht die Lösung sind) liefern.

Besonderes Augenmerk wird zudem vor allem folgenden Kriterien gewidmet:

a. Sind die Aufgaben in einer für alle österreichischen Maturantinnen und Maturanten verständlichen – vom vorangegangenen Unterricht unabhängigen – Sprache formuliert?
b. Enthalten alle Aufgaben klare und unmissverständliche Handlungsaufforderungen?
c. Welche (inner- und außermathematischen) Begriffe werden in den einzelnen Aufgaben verwendet? Bedarf es eventuell weiterer Erklärungen verschiedener Begriffe, welche womöglich für Maturantinnen und Maturanten nicht selbstverständlich sind?
d. Formulierung der Korrekturanleitungen (Lösungserwartungen)[3]
e. Messen die Aufgaben für unterschiedliche Gruppen die gleichen Parameter?

All diese kurz beschriebenen qualitativen und quantitativen Kennwerte sowie die schon einleitend beschriebenen Rahmenbedingungen der SRP beziehen sich auf die so genannten Gütekriterien der Testkonstruktion. Dabei handelt es sich um testtheoretische Merkmale (vgl. Kubinger 2009; Moosbrugger & Kelava 2012), anhand derer die Qualität eines Tests (einer Prüfung) beurteilt werden kann. Einige der wichtigsten zu erwähnenden Gütekriterien der Testkonstruktion sind die Objektivität, die Reliabilität und die Validität (vgl. BIFIE 2013c, S. 22). Zudem werden die in der Feldtestung eingesetzten Aufgaben und ihre Bearbeitung durch die Schüler/innen von speziell geschulten Personen korrigiert, wobei weitere Rückmeldungen über die Qualität der einzelnen Aufgaben gewonnen werden können.

Nachdem alle Aufgaben die fachlichen und empirischen Qualitätsschleifen durchlaufen haben, werden diese abschließend anhand eines Kompetenzstufenmodells eingestuft. „Dabei werden sowohl inhaltliche Komplexität bzw. das Anspruchsniveau der Aufgaben als auch die jeweiligen Handlungsaspekte von Fachexpertinnen und -experten beurteilt (Linnemann et al. 2015; Siller et al. 2013, 2014, 2015, 2016). Diese Prozesse (im Zusammenspiel mit den empirischen Kennwerten der Aufgaben) sollen gewährleisten, dass Prüfungshefte unterschiedlicher Prüfungstermine vom Anspruchsniveau an die Testperson vergleichbar sind sowie die oben genannten Gütekriterien eingehalten werden.“ (Sattlberger & Steinfeld 2016, S. 96)

Erst nach all diesen Qualitätsschleifen – die Entwicklung einer einzelnen Klausuraufgabe erstreckt sich über einen Zeitraum von ca. zwei Jahren – stehen die Aufgaben bereit für die jeweiligen Auswahlverfahren der Klausurtermine.

[3] Korrekturanleitungen werden zu allen Klausuraufgaben als sogenannte Lösungserwartungen formuliert und sind auf alle Performanzen der schriftlichen Reifeprüfung in gleicher Weise anzuwenden, um eine Vergleichbarkeit der Punktevergabe zu gewährleisten. Oberste Priorität bei der Einstufung der Performanz als gelöst bzw. nicht gelöst hat die Erfüllung der geforderten Aspekte der Grundkompetenz (siehe dazu auch Sattlberger & Steinfeld 2016).

Kriterien für die Klausurheftzusammenstellung

Ein Ziel von standardisierten Abschlussprüfungen sind die Vergleichbarkeit und die Transparenz von Anforderungen auf der einen sowie Fairness und Objektivität in der Beurteilung auf der anderen Seite. „Um diesen Ansprüchen gerecht zu werden, finden sich in der Fachliteratur Richtlinien, die in die Aufgabenerstellung einfließen und damit eine Spannbreite von möglichen Prüfungsaufgaben beschreiben (Alderson et al. 1995, EALTA 2006). Zentral ist dabei ein inhaltlicher Rahmen, ein Modell, mit dem Ansprüche zunächst auf einer übergeordneten Ebene eingegrenzt und Kompetenzen beschrieben werden können. Hieraus abgeleitet werden Aufgaben mit unterschiedlichem Anspruchsniveau erstellt, die in Kombination miteinander Klausurhefte ergeben, in denen implizit (im Rahmen der SRP kriterienorientiert) die inhaltlichen Ansprüche an eine Testperson einfließen (vgl. Cohen et al. 2011, S. 478; Friedl-Lucyshyn et al. 2012, S. 26).“ (Sattlberger & Steinfeld 2016, S. 95)

Als Basis für die Zusammenstellung der Klausurhefte dient das der Prüfung zugrunde liegende Konzept, das neben dem Grundkompetenzkatalog auch das Beurteilungsmodell sowie relevante Details aus der Reifeprüfungsverordnung umfasst (vgl. BIFIE 2013b). Pro Klausurpaket müssen 24 Typ-1-Aufgaben und vier bis sechs Typ-2-Aufgaben (mit je 2 bis 4 Subitems) ausgewählt werden.

Die Zusammenstellung der Aufgaben für die Klausurhefte erfolgt durch ein Gremium von Vertreterinnen und Vertretern der universitären Fachdidaktik, der Schulaufsicht und der Schulpraxis.

Bei der Auswahl der Aufgaben für die Klausurpakete sind alle oben beschriebenen Kennwerte der einzelnen Aufgaben miteinzubeziehen, zudem sind für jedes einzelne Klausurpaket folgende Kriterien zu beachten:

a. gleichmäßige Abdeckung aller im Konzept angeführten Inhaltsbereiche (Algebra und Geometrie, funktionale Abhängigkeiten, Analysis, Wahrscheinlichkeit und Statistik)
b. Streuung der Aufgaben über möglichst viele Grundkompetenzen
c. Anordnung der Aufgaben dem Aufbau des Grundkompetenzkatalogs folgend (Teil 1)
d. Ausgewogenheit der Aufgabenformate (in Teil 1)
e. empirische Schwierigkeit
f. Überprüfung und Einschätzung der fachlichen und fachdidaktischen Qualität der Aufgaben
g. Einordnung der Aufgaben im Kompetenzstufenmodell (bzgl. Stufung und Handlungsbereich)
h. Abbildung aller Schulstufen der Oberstufe
i. sprachliches Komplexitätsniveau innerhalb eines Klausurpakets
j. Abbildung der bildungstheoretischen Orientierung innerhalb eines Klausurpakets

Nach Abschluss der Zusammenstellung der Klausurpakete werden diese Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) vorgelegt, die diese noch einmal auf mathematische und formale Korrektheit hin überprüfen und zudem eine Begutachtung der Korrekturanleitungen vornehmen.

In einer letzten Phase werden die einzelnen Klausurtermine ins Slowenische (für Gymnasien mit Slowenisch als Unterrichtssprache) und Englische (für sogenannte IB-Schulen) übersetzt. Dies erfolgt jeweils in der Erstübersetzung durch eine/n Native Speaker mit mathematischen Fachkenntnissen und wird danach von einem/einer gerichtlich beeideten Gutachter/in zertifiziert.

Zusätzlich werden die Klausurtermine für Kandidatinnen und Kandidaten mit besonderen Bedürfnissen als PDF bzw. im RTF-Format (barrierefreie Versionen zur Konvertierung in Braille-Schrift für blinde und stark sehbehinderte Kandidatinnen und Kandidaten) zur Verfügung gestellt.

Die Endverantwortung für die Freigabe aller Klausurhefte obliegt dem BIFIE.

Beurteilung der Klausur

Zur Beurteilung der von den Kandidatinnen und Kandidaten im Rahmen der SRP in Mathematik erbrachten Leistungen wurde ein Bewertungsmodell entwickelt, das einerseits die Vorgaben der geltenden Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) umsetzt, andererseits aber auch fachdidaktische und fachliche Gegebenheiten an Österreichs allgemeinbildenden höheren Schulen berücksichtigt.

Grundsätzlich ist zu betonen, dass den Typ-1-Aufgaben im Rahmen der schriftlichen Prüfung eine wesentliche Rolle zukommt. Die Typ-2-Aufgaben sind für die Vergabe der Noten Befriedigend, Gut und Sehr gut relevant. Allerdings enthalten auch die Typ-2-Teilaufgaben extra ausgewiesene Komponenten (so genannte Ausgleichspunkte), die für die Beherrschung der wesentlichen Bereiche relevant sind, also auch für das Genügend. Die Beurteilung erfolgt nach einem vorgegebenen Punkteschlüssel (vgl. dazu exemplarisch BIFIE 2015).

Lehrer/innen erhalten am Tag der Klausur genaue Vorgaben zur Korrektur und Beurteilung. Zum einen werden für jede Aufgabe Lösungserwartungen zur Verfügung gestellt, zum anderen ermöglicht ein Lösungsschlüssel die Einordnung der Kandidatenleistungen in das vorgegebene Beurteilungsschema. Während die Typ-1-Aufgaben grundsätzlich einer „0“- und „1“-Beurteilung (richtig/falsch) unterworfen sind, können für die im Vergleich dazu „offeneren“ Typ-2-Aufgaben jeweils 0 bis 2 Punkte vergeben werden.

Für individuelle Rückfragen bei der Beurteilung sind ein – mit Fachexpertinnen und -experten besetzter – Helpdesk und eine telefonische Hotline eingerichtet, die allen beurteilenden Lehrerinnen und Lehrern nach der Klausur zur Verfügung stehen.

Bei einer negativen Beurteilung der schriftlichen Klausurarbeit besteht für die Kandidatinnen und Kandidaten die Möglichkeit, im Rahmen einer mündlichen Kompensationsprüfung desselben Termins die negative Beurteilung der schriftlichen Klausuren zu kompensieren und damit einen Laufbahnverlust zu vermeiden. Die dabei gestellten Aufgaben bilden dieselben Kompetenzen ab, die auch Gegenstand der standardisierten schriftlichen Klausuren sind (soweit dies in einer mündlichen Prüfung möglich ist). Die Aufgabenstellungen werden auch bei dieser Prüfung zentral vom BIFIE erstellt.

Begleitende Maßnahmen und Vorbereitung

Im Schuljahr 2013/2014 nahmen österreichweit insgesamt 44 Klassen freiwillig an einem Schulversuch zur SRP in Mathematik (AHS) teil[4]. Die Schulen standen in regelmäßigem Austausch mit dem BIFIE über aktuelle Entwicklungen im Projekt, zudem gab es verschiedene Unterstützungsmaßnahmen wie Probeklausuren, Kompetenzchecks und Fortbildungen für Lehrer/innen. Die Ergebnisse der Klausurarbeiten (BIFIE 2014) wurden auf Itemebene rückgemeldet, womit die Daten von 818 Schülerinnen und Schülern (465 weiblich, 353 männlich) ausgewertet werden konnten. Außerdem wurden noch Rückmeldungen von beteiligten Lehrkräften im Rahmen einer Feedbackveranstaltung im Sommer 2014 eingeholt. Insgesamt konnte aus den gewonnenen Daten ein durchaus konkretes Bild über die verschiedenen Aspekte der Durchführung und Beurteilung gezeichnet werden (vgl. dazu Sattlberger & Steinfeld 2016).

Die Rückmeldungen und Ergebnisse derjenigen Schulen, die bereits 2013/2014 am Schulversuch teilgenommen haben, wurden für eine Weiterentwicklung genutzt; Hauptaugenmerk lag dabei vor allem auf einer Optimierung der Aufgabenformulierungen und Lösungserwartungen (inkl. Formulierung der Lösungsschlüssel) sowie auf einer Verbesserung der Kriterien für die Auswahl der Ausgleichspunkte.

In dieser Zeit wurden auch die Unterstützungsangebote weiter ausgebaut. Schüler/innen hatten nun einen Aufgabenpool mit mehr als 350 den Prüfungsformaten entsprechenden Aufgaben (BIFIE 2016) sowie eine Plattform zur digitalen Bearbeitung von Übungsaufgaben zur Verfügung. Zudem wurden Modellschularbeiten, Kompetenzchecks und Probeklausuren angeboten. Alle Klausurpakete sind online auf der BIFIE-Website abrufbar. Eine intensive Auseinandersetzung mit der neuen Form der Reifeprüfung erfolgte auch in den Veranstaltungen der regionalen Arbeitsgemeinschaften für Mathematik, wo Lehrer/innen die Möglichkeit hatten Unterstützung, in der Vorbereitung der SRP zu finden.

Erste flächendeckende Durchführung

Im Schuljahr 2015/2016 wurde dann erstmals an allen AHS in Österreich die SRP verpflichtend durchgeführt. Auch hier wurden die Ergebnisse auf Itemebene eingeholt, Abbildung 1 zeigt die Lösungsquoten der einzelnen Items vom Haupttermin 2015 (BIFIE 2015).[5]

Die Erhebung der Daten ermöglichte eine tiefergehende Analyse in den verschiedensten Bereichen. Diese soll(t)en vor allem Rückschlüsse auf weitere Implementierungsmaßnahmen zulassen und ggf. Parameter für weitere Adaptierungen im System auf einer übergeordneten Ebene liefern. Auch die Anfragen im Rahmen des Helpdesks und der Hotline wurden einer genauen Analyse unterzogen, um dadurch Rückschlüsse auf Aufgabenformulierungen und Korrekturanleitungen zu ziehen. Alle Ergebnisse wurden den Aufgabenentwicklerinnen und -entwicklern sowie der Aufgabenkommentierungsgruppe und der Auswahlgruppe zurückgespielt und flossen somit auf mehreren Ebenen in die Optimierung des Projekts ein.

[4] Auch im Schuljahr 2011/2012 fand bereits im Rahmen des Pilotprojekts (noch vor Überarbeitung des derzeit gültigen Konzepts) eine standardisierte schriftliche Reifeprüfung an verschiedenen österreichischen Schulen statt (vgl. dazu AECC 2009).

[5] Zur Schulstufenzuordnung der einzelnen Aufgabenstellungen vom Haupttermin 2015 siehe auch den Bericht von Bruder et al. im AK „Empirische Bildungsforschung“ in diesem Heft

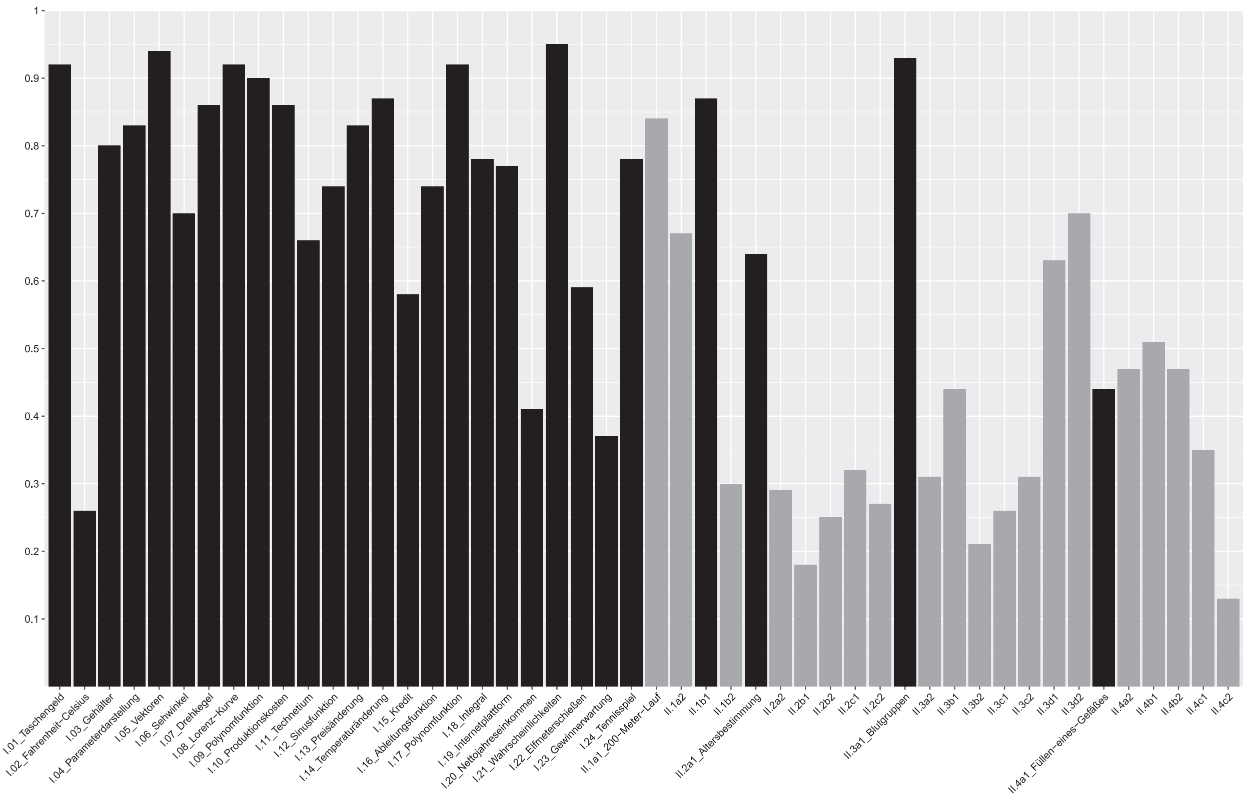


Abbildung 1. Ergebnisse Haupttermin 2015 – Itemebene (Lösungsquoten der einzelnen Aufgabenstellungen, schwarz: Aufgabenstellungen aus dem Teil 1 inklusive der vier Aufgabenstellungen, die zum Ausgleich herangezogen werden können, grau: Aufgabenstellungen aus Teil 2)

Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln

Es findet also neben der Erstellung von Klausurpaketen (inkl. jenen für die Kompensationsprüfungen) eine ständige Evaluierung und Weiterentwicklung des Projekts statt. Da Entwicklungen stark vom eingesetzten Werkzeug beeinflusst werden und eine Schwerpunktverlagerung vom Operieren weg zum Nutzen von Grundwissen und Reflektieren angestrebt wird, ist im Konzept festgehalten, dass ab dem Schuljahr 2017/2018 höherwertige Technologie zur Bearbeitung von Aufgaben(teilen) nötig sein wird. „Im § 18 Abs. 3 der Prüfungsordnung AHS werden ab dem Haupttermin 2018 gewisse Minimalanforderungen für elektronische Hilfsmittel folgendermaßen festgelegt:

Bei der Bearbeitung beider Aufgabenbereiche sind der Einsatz von herkömmlichen Schreibgeräten, Bleistiften, Lineal, Geo-Dreieck und Zirkel sowie die Verwendung von approbierten Formelsammlungen und elektronischen Hilfsmitteln zulässig. Die Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik.

Darüber hinaus ist für die Dauer der Prüfung die Verwendung elektronischer Hilfsmittel zur Kommunikation (z. B. via Internet oder Mobilfunknetzwerken) mit anderen unzulässig.“ (BIFIE 2013b, S. 24)

Nach einer Übergangsphase (Klausurtermine 2015, 2016, 2017), bei denen die Aufgabenbearbeitung mit den gewohnten Hilfsmitteln (WTR, GTR oder CAS) erfolgen sollte, ist ab dem Haupttermin 2018 vorausgesetzt, dass den Schülerinnen und Schülern Computeralgebrasysteme, Tabellenkalkulation und Dynamische-Geometrie-Software zur Verfügung stehen. Entsprechend diesen Vorgaben werden ab diesem Zeitpunkt auch Aufgabenteile im zweiten Teil der Klausur gestaltet sein. Statt der Ausführung steht dann die Planung von Problemlösungen im Vordergrund und der vermehrte Technologieeinsatz soll zur Reflexion anregen.

Entsprechende Anpassungen wurden in der Neuauflage des Konzepts (BIFIE 2013b, gültig ab Maturatermin 2018) in den jeweiligen Anmerkungen vorgenommen.

Schlussbemerkung

Die Grundideen der neuen Reifeprüfung, die im Rahmen der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik umgesetzt werden, sind jene der Standardisierung und der Kompetenzorientierung. Mit der Einführung der SRP in Österreich erfolgte eine lang vorbereitete Reformmaßnahme, die den Übergang von einem inputgesteuerten Schulsystem zu einem System mit Outputorientierung vollzog. Wurden in den Jahren davor die Schwerpunkte der Schulentwicklung in der Sekundarstufe vor allem in den Bereichen Schulautonomie, neue Lernformen, Individualisierung und Differenzierung gelegt, so setzt die verpflichtende Durchführung der neuen Reifeprüfung einen neuen Standard. Erstmals gibt es ein Instrument, mit dem der Output eines Systems – zumindest in Teilbereichen – direkt sichtbar wird.

Damit wird das Ziel verfolgt, allen Maturantinnen und Maturanten einen vergleichbaren Abschluss zu garantieren. Nachfolgende Institutionen können von einem für alle verbindlichen Standard an Wissen und Können ausgehen.

Für das Fach Mathematik an AHS war der Umbruch, der im Unterricht auf Basis der neuen Rahmenbedingungen erfolgen sollte, wahrscheinlich über alle Fächer gesehen am gravierendsten. Die Umstellung weg von der Reproduktion von gelernten Aufgaben in Prüfungssituationen hin zu einer kompetenzorientierten Unterrichts- und Prüfungskultur scheint in diesem Fach nicht allen beteiligten Akteurinnen und Akteuren leicht zu fallen. Insgesamt kann aus dem Projektverlauf und den Analysen der Schluss gezogen werden, dass die SRP in Mathematik (AHS) eine große Umstellung „im System“ bedingt hat und damit sicher zu einer Weiterentwicklung des Unterrichts beigetragen hat. Wichtig wird es in den kommenden Jahren sein, den „Washback“ der neuen Reifeprüfung in Mathematik im Unterricht zu beobachten.

Literatur

AECC (Hrsg.) (2009). Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ – Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Klagenfurt: Institut für Didaktik der Mathematik. Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Alpen-Adria-Universität.

Alderson, J. C., Clapham, C., Wall, D. (1995). Language Test Construction and Evaluation. Cambridge: Cambridge University Press.

BIFIE (Hrsg.) (2013a). Standardisierte kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung Grundlagen – Entwicklung – Implementierung. Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442 [25.05.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2013b). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Wien. Verfügbar unter https://www.BIFIE.at/node/1442 [09.02.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2013c). Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 2. Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/2391 [25.05.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2014). Haupttermin 2013/14. Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/2633 [25.05.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2015). Haupttermin 2014/15. Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/3014 [25.05.2016].

BIFIE (Hrsg.) (2016). Unterrichtsaufgaben zur Unterstützung der Vorbereitung auf die SRP-M (Aufgabenpool Mathematik AHS). Wien. Verfügbar unter https://aufgabenpool.bifie.at/srp_ahs/ [25.05.2016].

BMUKK (Hrsg.) (2004). Lehrplan Mathematik – Oberstufe. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [25.05.2016].

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2011). Research Methods in Education. Abington: Routledge.

European Association for Language Testing and Assessment. (EALTA) (Hrsg.) (2006). EALTA Richtlinien zur Qualitätssicherung bei der Bewertung von Sprachkompetenzen. Verfügbar unter http://www.ealta.eu.org/documents/archive/guidelines/German.pdf [25.05.2016].

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In: Fischer, A., Fischer-Buck, A., Schäfer, K.H., Zöllner, D., Aulcke, R., Fischer, F. (Hrsg.). Situation – Ursprung der Bildung. Franz-Fischer-Jahrbuch der Philosophie und Pädagogik 6, S. 151–161. Leipzig: Universitätsverlag.

Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In: Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung, S. 9–17. Linz: Trauner Verlag.

Friedl-Lucyshyn, G., Sigott, G., Frötscher, D. et al. (2012). Testtheoretische Grundlagen der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung. In: Erziehung und Unterricht 1/2. Wien: ÖBV.

Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Kahnert, J. (2014). Das Zentralabitur im Fach Mathematik – Eine empirische Analyse von Abitur- und TIMSS-Daten im Vergleich. Münster: Waxmann.

Klafki, W. (1963). Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik – zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch konstruktive Didaktik. Weinheim: Beltz.

Kubinger, K. D. (2009). Psychologische Diagnostik – Theorie und Praxis psychologischen Diagnostizierens (2. Aufl.). Göttingen: Hogrefe.

Kühn, S. M. (2010). Steuerung und Innovation durch Abschlussprüfungen? Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.

Linnemann, T., Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Steinfeld, J., Sattlberger, E. (2015). Kompetenzmodellierung am Ende der Sekundarstufe II. In: Caluori, F., Linneweber-Lammerskitten, H., Streit, C. (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM.

Moosbrugger, H., Kelava, A. (Hrsg.) (2012). Testtheorie und Fragebogenkonstruktion (2., aktual. u. überarb. Auflage). Heidelberg: Springer.

Penfield, R., Camilli, G. (2006). Differential Item Functioning and Item Bias. In: Rao, C. R., Sinharay, S. (Eds.). Handbook of Statistics, Volume 26, Psychometrics. p. 125–167. Amsterdam: Elsevier.

Sattlberger, E., Steinfeld, J. (2016): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik (AHS) – Einsichten und Hintergrundinformationen. In: Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 48, S. 94–107.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., Schodl, M. (2013). Stufenmodellierung mathematischer Kompetenz am Ende der Sekundarstufe II. In: Greefrath, G., Käpnick, F., Stein, M. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. S. 950–953. Münster: WTM.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., Sattlberger, E. (2014). Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung. In: Roth, J., Ames, J. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. S. 1135–1138. Münster: WTM.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., Sattlberger, E. (2015). Competency level modelling for school leaving examination. In: CERME Proceedings TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research, p. 194–204.

Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., Linnemann, T., Steinfeld, J., Sattlberger, E. (2016). Kompetenzstufenmodell zu Reifeprüfungsaufgaben und deren Eignung für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In: Keller, S., Reintjes, C. (Hrsg.). Aufgaben als Schlüssel zur Kompetenz – Didaktische Herausforderung, wissenschaftliche Zugänge und empirische Befunde. Waxmann Verlag Münster & New York.

Eva Sattlberger und Jan Steinfeld, bifie – Standort Wien, Stella-Klein-Löw-Weg 15/Rund Vier B, 1020 Wien, Email: e.sattlberger@bifie.at, j.steinfeld@bifie.at

Schöne neue Mathewelt?!

Christian Dorner und Stefan Götz

Im Folgenden möchten wir auf den Beitrag „Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015“ von Kühnel und Bandelt, erschienen im Jubiläumsheft der GDM-Mitteilungen 2016 (Kühnel und Bandelt, 2016), eingehen. Der im Vorwort gezogene Schluss, „dass auf diese Weise letztlich beabsichtigt ist, beim Fach Mathematik die Matura auf das Niveau des … ‚mittleren Schulabschlusses‘ … abzusenken … “ (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 30), ist nach nur einem Durchgang der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik wohl als voreilig zu beurteilen. Oder ist der Beitrag als Warnung (für Österreich, Deutschland, das Abendland) zu verstehen? Dazu kommt noch, dass der von den Autoren vorgenommenen Zuordnung der Aufgaben zu den Klassenstufen in Tabelle 1 (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 32) zum Teil widersprochen werden muss.

Das gewichtete arithmetische Mittel (Aufgaben 1 und 20) in der NMS zu verorten, erscheint zumindest aus österreichischer Sicht als gewagt. Im Allgemeinen wird diese Erweiterung des Mittelwertbegriffs in der zehnten Schulstufe (AHS 6) thematisiert. Ebenso werden Funktionen in mehreren Variablen wohl kaum in der NMS gebracht (Aufgabe 7). Das Beurteilen von Aussagen über eine Lorenz-Kurve, wie das in Aufgabe 8 gefordert wird, verlangt sicher mehr als bloßes Ablesen von Prozenten. In Aufgabe 10 wird zweifellos eine lineare Funktion untersucht, allerdings in einem Kontext (Aue u. a., 2015, S. 22), der nicht Gegenstand der NMS ist, sondern im sogenannten Kontextkatalog (Aue u. a., 2015, S. 19 ff.) vorgesehen ist. Hier liegt also keine Lehrplanüberschreitung vor, da der Kontextkatalog bestimmte inhaltliche Schwerpunkte im Rahmen des Lehrplans setzt. Änderungsmaße wie sie in Aufgabe 13 vorkommen, sind Gegenstand der zehnten Schulstufe (AHS 6) und keinesfalls der NMS. Die Rekursion in Aufgabe 15 passt entweder in die zehnte Schulstufe, in der unter anderem reelle Folgen besprochen werden, oder gar in die zwölfte, wenn man die gesuchte Gleichung als Differenzengleichung auffasst. Die in Aufgabe 24 gefragte Wahrscheinlichkeit wird üblicherweise der Binomialverteilung zugeordnet, welche erst in der elften Schulstufe unterrichtet wird. Natürlich wäre es auch möglich mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit diese Aufgabe zu lösen, ob ihrer Komplexität erscheint das aber unwahrscheinlich.

Die elementare Erkenntnis, „dass ein Viertel die Hälfte der Hälfte ist“ (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 31), wird leider nicht immer mit dem Begriff Halbwertszeit verknüpft. Stattdessen wird addiert statt multipliziert, daher ist nach zwei Halbwertszeiten nichts mehr vorhanden. Warum in Aufgabe 22 Kenntnisse von Fußballregeln von Nöten sind (es geht darum den Binomialkoeffizienten 11 über 5 im Kontext von elf potentiellen Elfmeterschützen zu interpretieren), entzieht sich unserer Kenntnis. Das Gegenteil ist der Fall. Die Lösungserwartung lautet: „11 über 5 gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, von den elf Spielern fünf Schützen für das Elfmeterschießen – unabhängig von der Reihenfolge ihres Antretens – auszuwählen“ (Bifie, 2015 , S. 23). Dabei meint „Elfmeterschießen“ nicht den sportlichen Terminus technicus, sondern die bloße Tätigkeit. Ein Gender-Gap (in Kühnel und Bandelt, 2016, auf S. 32 vermutet) konnte bei dieser Aufgabe nicht festgestellt werden (Vortrag von E. Sattlberger und S. Kramer beim ÖMG-LehrerInnenfortbildungstag an der Universität Wien am 1. April 2016). Die „Pippi-Langstrumpf-Aufgabe“ (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 31) haben übrigens nur 26% der ReifeprüfungskandidatInnen richtig gelöst, das ist die niedrigste Lösungsquote bei den Typ-1-Aufgaben (Vortrag E. S. und S. K.).

Aufgaben zur Modellbildung im Sinne von Bandelt eignen sich wohl kaum als Prüfungsaufgaben. Daher ist die von den Autoren festgestellte Verkleidung von Aufgabe 1 in Teil 2 nicht weiter verwunderlich (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 32 f.). Es ist unbestritten, dass bei Unteraufgabe (a) Methoden der Differentialrechnung nicht gebraucht werden. Allerdings benötigt der von den Autoren skizzierte Lösungsweg eine gewisse Vertrautheit mit dem Kontext, die der Arbeitsauftrag nicht nahelegt. „Bei der vorliegenden Formulierung“ (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 33) der Unteraufgabe (b) wird in Kühnel und Bandelt (2016) verschwiegen, dass der Mittelwertsatz der Differentialrechnung angesprochen wird, ein durchaus nicht üblicher Inhalt des Analysisunterrichts in der elften Schulstufe.

Bei Aufgabe 4 in Teil 2 entdecken die Autoren, dass das Volumen des gegebenen Gefäßes elementar berechenbar ist. Tatsächlich ist das aber nicht gefragt. Dass Interpretationsaufgaben zum bestimmten Integral als „‚höhere Mathematik für Dummies‘“ (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 33) bezeichnet werden, kann nur als tendenziöser Untergriff bewertet werden. Die von den Autoren vorgeschlagene Lösung ist kein so selbstverständlicher Bestandteil der (aktuellen österreichischen) Unterrichtsrealität, wie diese suggerieren. Tempora mutantur!

Generell muss festgehalten werden, dass die lockere Distanz, die zwei professionelle Mathematiker gegenüber den (Reifeprüfungs-)Aufgaben in der Schule an den Tag legen, wohl die wenigsten SchülerInnen bzw. ReifeprüfungskandidatInnen teilen.

Das zugrundeliegende Reifeprüfungskonzept fokussiert auf Fähigkeiten, die für das Fach grundlegend, längerfristig verfügbar und gesellschaftlich relevant sind (vgl. Aue u. a., 2015, S. 3). Dabei wird als Ausgangspunkt „das Individuum und dessen Rolle in unserer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft gewählt“ (Aue u. a., 2015, S. 3). Im Vordergrund steht „die Befähigung zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten und der Allgemeinheit“ (Aue u. a., 2015, S. 4) (Konzept der höheren Allgemeinbildung nach R. Fischer). „Durch diesen Zugang wird es notwendig, sich ein reflektiertes Basiswissen anzueignen, [. . .]. Vor diesem Hintergrund wurde daher [. . .] ein Katalog an Grundkompetenzen entwickelt [. . .]“ (Aue u. a., 2015, S. 3). Typ-1-Aufgaben sind nun solche, die auf diese Grundkompetenzen fokussieren. Bei diesen Aufgaben sind Grundwissen und Grundfertigkeiten ohne darüber hinausgehende Eigenständigkeit nachzuweisen (vgl. Aue u. a., 2015, S. 23). Das ist der fundierte bildungstheoretische Hintergrund der Typ-1-Aufgaben, die in Kühnel und Bandelt (2016) durchaus beleidigend als „Quickies“ (S. 32) bezeichnet werden.

Nur ausgezeichnete SchülerInnen der mittleren Reife würden es schaffen genau 16 Punkte für eine positive Beurteilung zu erreichen. Die unterschwellig transportierte Botschaft mit Wissen der mittleren Reife in Österreich die Reifeprüfung bestehen zu können, ist daher bloß theoretischer Natur und in der Praxis nahezu irrelevant.

Abschließend wollen wir festhalten, dass der Grundkompetenzkatalog eine echte Teilmenge des Lehrstoffs ist (vgl. Aue u. a., 2015 , S. 1). Auch die von den Autoren schmerzlich vermissten komplexen Zahlen (Kühnel und Bandelt, 2016, S. 31) sind daher nicht von der österreichischen Bildungslandschaft verschwunden. Die früheren Maturaaufgaben, die aus dem Stoff des gesamten Lehrplans der Oberstufe konzipiert werden konnten, waren daher tatsächlich zum Teil erheblich komplexer (und mathematisch anspruchsvoller) als die aktuellen. Allerdings kann man in den Jahresberichten der einzelnen Gymnasien durchaus unterschiedliche Anspruchsniveaus der Aufgabenstellungen erkennen, wobei natürlich die jeweilige Vorbereitung mit in Betracht zu ziehen ist. Gleichwohl, hier Vergleichbarkeit herzustellen war ein wesentliches Motiv für die Einführung der Zentralmatura. Davor machte schon die Vertrautheit mit den Formulierungen in der Aufgabenstellung oft nach ein paar (Signal-)Wörtern klar, was zu tun ist. Jetzt ist ein tieferes Verständnis der Begriffe und Konzepte nötig, um flexibel mit ihnen in einfacheren, aber nicht vertrauten Situationen umgehen zu können.

Bei einer zentralen Prüfung müssen ebenfalls Annahmen über die erfolgte Vorbereitung getroffen werden, die im Laufe der Zeit gemäß den gemachten Erfahrungen eine Präzisierung erfahren werden.

Jedenfalls bildet die Zentralmatura *nicht* den Mathematikunterricht der Oberstufe ab, sondern nur einen (wichtigen, weil grundlegenden) Teil davon. Die Einhaltung des Lehrplanes ist selbstverständlich nach wie vor bindend. Nur diejenigen Schüler und Schülerinnen, die die achte Klasse (zwölfte Schulstufe) erfolgreich absolviert haben, dürfen zur Matura antreten. Der Unterricht würde verarmen, wenn nur mehr die Grundkompetenzen der Zentralmatura durchgenommen werden würden, und das ist auch nicht intendiert.

Literatur

Aue, V., Frebort, M., Hohenwarter, M., Liebscher, M., Sattlberger, E., Schirmer, I., … Willau, E. (2015). Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik – Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: Oktober 2015). Redaktionelle Änderungen für die Neuauflage: G. Gurtner, S. Kramer, G. Steinlechner-Wallpach. Zugriff unter https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf

Bifie. (2015). Korrekturheft Mathematik AHS Teil-1-Aufgaben 11. Mai 2015. Zugriff unter https://www.bifie.at/system/files/dl/KL15_PT1_AHS_MAT_T1_CC_LO_0.pdf

Kühnel, W. & Bandelt, H.-J. (2016). Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015. *Mitteilungen der GDM*, (100), 30–34.

Christian Dorner und Stefan Götz, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Österreich,
Email: christian.dorner@univie.ac.at,
stefan.goetz@univie.ac.at

Zur Geschichte der Methodik des Mathematikunterrichts in der SBZ und der DDR

Bemerkungen zu den Ausführungen von Hans-Dieter Sill und Gert Schubring

Peter Borneleit

Ich teile die von Hans-Dieter Sill in den GDM-Mitteilungen 99/2015 beschriebene Sichtweise auf die Geschichte der Mathematik-Didaktik in den meisten Punkten. Aus Platzgründen muss ich es, was meine Zustimmung anbelangt, bei dieser allgemeinen Bemerkung belassen. Im Folgenden werde ich lediglich zu Einzelheiten, welche die Methodik des Mathematikunterrichts in der sowjetischen Besatzungszone und DDR betreffen und auch von Gert Schubring in den GDM-Mitteilungen 100/2016 angesprochen wurden, etwas anmerken.

Hans-Dieter Sill hatte aus meinem Beitrag zur Etablierung der Disziplin Methodik des Mathematikunterrichts an den Universitäten und Hochschulen der damaligen sowjetischen Besatzungszone (Borneleit 2006) herausgelesen, dass dort mit einem Befehl der sowjetischen Militäradministration Lehrstühle für Methodik des Mathematikunterrichts eingerichtet worden seien, und Gert Schubring hatte dem widersprochen. Solche Lehrstühle gab es tatsächlich noch nicht (sie wurden erst später in der DDR geschaffen), wohl aber die von mir im Beitrag aufgeführten Professuren. Diese wurden an den Pädagogischen Fakultäten eingerichtet, die mit einem Befehl der sowjetischen Militäradministration an den von Hans-Dieter Sill genannten Universitäten bzw. Hochschulen gegründet wurden.

Hans-Dieter Sill unterschied möglicherweise deshalb nicht zwischen Professuren und Lehrstühlen, weil in der DDR beide in der Regel miteinander verbunden waren – jedoch war das erst ab der 3. Hochschulreform 1968 der Fall. Die Planstellen an der Hochschule hauptamtlich tätiger, sogenannter ordentlicher Professoren wurden als Lehrstühle bezeichnet (Verordnung 1968). Es gab zwar auch außerordentliche Professoren, das waren wegen besonderer Verdienste dazu ernannte (manchmal aus politischen Gründen nicht höherberufene) hauptamtlich tätige Dozenten oder wissenschaftliche Mitarbeiter (Ministerrat 1966), doch spielten sie – ebenso wie nebenamtlich wirkende Honorarprofessoren – quantitativ nur eine untergeordnete Rolle, erst recht auf dem Gebiet der Methodik des Mathematikunterrichts.

Vor 1968 jedoch wurde in der sowjetischen Besatzungszone bzw. in der DDR ausdrücklich unterschieden zwischen Professoren mit Lehrstuhl und solchen mit vollem Lehrauftrag bzw. mit Lehrauftrag. Erstgenannte waren für das jeweilige gesamte Fach oder für ein bedeutendes Teilgebiet verantwortlich (Deutsche Verwaltung 1949, §7 und §9). Gert Schubring bemerkt zutreffend, dass innerhalb der neu geschaffenen Pädagogischen Fakultäten nur wenige Lehrstühle eingerichtet wurden, wie etwa für systematische Pädagogik, für Geschichte der Pädagogik, für Didaktik, für praktische Pädagogik. Für Methodik des Mathematikunterrichts gab es, wie schon erwähnt, noch keine eigenen Lehrstühle in der in der sowjetischen Besatzungszone. Sie wurde der praktischen Pädagogik zugeordnet und entweder von einem der an der Fakultät tätigen Lehrstuhlinhaber mit wahrgenommen, oder man vergab einen Lehrauftrag für sie durch Ernennung eines Professors oder Dozenten oder durch Abschluss eines Arbeitsvertrages für einen Lehrbeauftragten oder Lektor.

Gert Schubring ist zuzustimmen, wenn er die Bedeutung des Befehls der sowjetischen Militäradministration betont, der zur Integration der Grundschullehrerausbildung in die Universitäten bzw. Hochschulen sowie der pädagogisch-didaktischen Ausbildung von Grundschul- und Oberschullehrern an den neu geschaffenen Pädagogischen Fakultäten führte. Allerdings ist das Verdienst nicht ausschließlich der sowjetischen Militäradministration zuzuschreiben. Wie sich einer ihrer ehemaligen Mitarbeiter (Heinemann 2000, 119) und noch genauer Heinrich Deiters (1989, 171–176) erinnern, ging die Initiative zur Gründung Pädagogischer Fakultäten von deutscher Seite aus und stieß zunächst auf Ablehnung des Hochschulsektors der sowjetischen Militäradministration. Diese gab den Befehl, so schildert es Heinrich Deiters (ebd.), der unter Leitung von Paul Wandel damals in dieser Sache verhandelte, erst auf Drängen von Vertretern der Deutschen Zentralverwaltung für Volksbildung und entgegen eigener deutlicher Bedenken. Eine vollständige Eingliederung der Lehrerbildung in die Universitäten gab es in der Sowjetunion nicht, und sie erschien den sowjetischen Offizieren zu kostspielig für die sowjetische Besatzungszone in Anbetracht des verlorenen Krieges.

Übrigens war die Fachausbildung von Lehrern für die achtklassige Grundschule in Universitäten bzw. Hochschulen auch auf deutscher Seite von Anfang an umstritten, und mit der Zeit sank innerhalb und außerhalb der Lehrerschaft die Zahl ihrer Befürworter, während die ihrer Gegner wuchs, bis schließlich Mitte der 50er Jahre die Pädagogischen Fakultäten aufgelöst wurden, mit Ausnahme nur einer, der von Heinrich Deiters geleiteten an der Humboldt-Universität zu Berlin, In dem Zusammenhang muss auch gesehen werden, dass es wegen des gewaltigen und anhaltenden Lehrermangels (viele Neulehrer kehrten in ihre alten Berufe zurück oder wanderten ebenso wie viele Altlehrer nach der Bundesrepublik Deutschland ab) niemals gelang, alle Lehrer an den Pädagogischen Fakultäten auszubilden, und es weiterhin auch eine Vielzahl von behelfsmäßigen Kursen gab (vgl. Deiters 1989, 199–208). Nach Auflösung der Pädagogischen Fakultäten bei Übernahme ihres Lehrkörpers in eine andere (meist die Philosophische) Fakultät der jeweiligen Universität bzw. Hochschule wurden, wie von Hans-Dieter Sill aufgeführt, an einer Reihe weiterer Standorte Pädagogische Institute gegründet und später in Pädagogische Hochschulen umgewandelt. Durchweg wurde erreicht, dass die Unterrichtsmethodiken einen festen Platz im Fächergefüge von Universitäten und Hochschulen einnahmen.

Doch zurück zur Gründung der Pädagogischen Fakultäten. „Diese grundlegenden Strukturreformen für die Lehrerbildung“, schreibt Gert Schubring, „knüpften an zwei Traditionen aus der Weimarer Zeit an: einerseits den Pädagogischen Akademien in Preußen – mit Hochschulstatus und einer zentralen Wissenschaft der Pädagogik – , während die Ausbildung in den Schulfächern Dozenten für die ‚Methodik‘ dieser Fächer übertragen war; und anderseits der kurze Zeit in Thüringen realisierten ‚vollakademischen' Ausbildung von Lehrern, d. h. für Primar- und Sekundarbereich." Damit sieht Gert Schubring die Strukturreformen zu Recht in der Linie der Weimarer Zeit, doch erscheint das Wort „anknüpfen" in Hinsicht auf die erstgenannte Tradition etwas irreführend, denn die Spranger-Beckersche Konzeption der Pädagogischen Akademien kam gar nicht in Betracht, vielmehr „stand in der Deutschen Zentralverwaltung für Volksbildung in Berlin von anfang an fest, daß die alte forderung der größten lehrerorganisation, des Deutschen Lehrervereins, und der demokratischen und der sozialistischen parteien nunmehr erfüllt und die ausbildung der volksschullehrer, der heutigen grundschullehrer, an die universität verlegt werden sollte" (Deiters 1946, 8). Ergänzt sei, dass es außer in Thüringen auch in Sachsen, in Mecklenburg-Schwerin und noch in wenigen weiteren kleinen Ländern eine Universitätsausbildung von Lehrern für die Volksschule (diese schloss die vierjährige Grundschule ein) gab (Kittel 1957, 285–297). Damit war innerhalb des Verwaltungsgebietes der sowjetischen Militäradministration bzw. Deutschen Zentralverwaltung für Volksbildung, wie Deiters schreibt, „die ausbildung der lehrer an der universität nichts völlig neues. Bei den überlegungen, vorberatungen und vorbesprechungen, die bereits im november 1945 begannen, konnten die erfahrungen benutzt werden, die an den universitäten Jena, Leipzig und der Technischen Hochschule in Dresden zwischen 1922 oder 1924 und 1933 gemacht worden waren." (Deiters 1946, 8)

Die zwei von Gert Schubring angeführten Komponenten „zentrale Wissenschaft der Pädagogik – Ausbildung in den Schulfächern durch Dozenten für die ‚Methodik' dieser Fächer" fanden sich allerdings auch in der Universitätsausbildung für Volksschullehrer aus der Weimarer Zeit, hier noch ergänzt durch ein Wahlfach an der Universität bzw. Hochschule als dritter Komponente, wobei die erste Komponente der Philosophischen Fakultät und die zweite einem mit der Universität bzw. Hochschule mehr oder weniger eng verbundenen Pädagogischen Institut zufiel. Und man kann sie auch in der Struktur der neu gegründeten Pädagogischen Fakultäten antreffen, in denen es als Pendant zur theoretischen die praktische Pädagogik gab, welche Unterrichtsbesuche und -versuche sowie die Behandlung der Fächergruppen der achtklassigen Grundschule einschloss, um die Studenten mit den Inhalten und den besonderen Unterrichtsmethoden der einzelnen Unterrichtsfächer vertraut zu machen.

Darüber hinaus sah man aber bei den Strukturreformen in der sowjetischen Besatzungszone, um in den Schulen die bisherige Trennung von höherer und volkstümlicher Bildung aufheben zu können, „eine dringende notwendigkeit, den fachstudien einen größeren raum in der ausbildung des lehrers zuzubilligen, als früher von den verfechtern der akademischen lehrerbildung verlangt wurde." (Deiters 1946, 13) In der Weimarer Zeit sollte ja der aus einer Pädagogischen Akademie oder einer Universität bzw. Hochschule hervorgegangene Volkschullehrer in erster Linie Menschenbildner statt wissenschaftliche Fachlehrer sein. Deshalb sollte neben der Erziehungswissenschaft als zentraler Disziplin „das Bildungsgut der Volksschule und seine Verwertung" behandelt werden – dies aber nicht wissenschaftlich im herkömmlichen Sinne. Vielmehr sollte hierbei der künftige Lehrer bildende Begegnungen mit den die Fächer bestimmenden Sachverhalten erfahren, im Falle der Universitätsausbildung zusätzlich noch beim hochschulmäßigen Studium eines Faches die Maßstäbe und Methoden der Wissenschaft überhaupt kennenlernen (Kittel 1957, 142–148). Im Gegensatz dazu zielten die Strukturreformen in der sowjetischen Besatzungszone auf einen Grundschullehrer mit Fachausbildung ab Klassenstufe 5 ab. Demgemäß forderte der Lehrplan für Lehrer der achtklassigen Grundschule (Technische Hochschule Dresden 1949, 38–40) neben der Pädagogikausbildung das Studium zweier Fächer und räumte jedem dieser beiden in jedem der 6 Semester je 8 Stunden ein. Beispielsweise gehörten zum Mathematiklehrplan: Einführung in die Höhere Mathematik, Analytische Geometrie, Differentialgeometrie, Funktionentheorie, Algebra I und Praktische Analysis. Allerdings konnten Grundschullehrerstudenten mit dem Ziel Unterstufe deren Methodik anstelle eines der beiden Fächer wählen. Um eine qualitativ hochwertige Lehrerausbildung in den Fachwissenschaften (und wohl auch um das Einvernehmens mit deren Vertretern) zu gewährleisten, übertrug man sie den jeweiligen universitären Spezialisten, also nicht den Dozenten für die „Methodik" (wie es in den Pädagogischen Akademien die Regel war) und i. A. auch nicht der Pädagogischen Fakultät (Deiters 1946, 13). Den Methodikdozenten oblag die Behandlung der Unterrichtsfächer der achtklassigen Grundschule und ihrer Unterrichtsmethoden.

Gert Schubring betont, dass es in der DDR-Zeit bei der ausschließlichen Bezeichnung „Methodik des Mathematikunterrichts" geblieben ist. Das allein begründet m. E. aber noch nicht einen entscheidenden Unterschied zur bundesdeutschen Mathematikdidaktik, den er „seit deren Entwicklung zur wissenschaftlichen Disziplin" sieht. Denn in der DDR wurde das Verhältnis zwischen allgemeiner Didaktik und den Unterrichtsmethodiken so begriffen, dass letztere als spezielle Didaktiken verstanden und jede als Didaktik des betreffenden Faches bezeichnet werden konnte (vgl. Pädagogische Enzyklopädie 1963, 642; Klein und Tomaschewsky 1963, XVI–XVII; Klingberg 1965, 13–15; Klingberg 1972, 37–39; Pädagogisches Wörterbuch 1987, 255), was übrigens auch bei naturwissenschaftlichen Unterrichtsfächern vereinzelt erfolgte und sich z. B. in Buchtiteln wie „Didaktik des Biologieunterrichts" (Uhlig und Baer, 1962), „Grundriß der allgemeinen Didaktik des Chemieunterrichts" (Keune, 1963) widerspiegelte. Jedoch hat die Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR (unter dem Gesichtspunkt praktischer Relevanz, begrenzter Forschungskapazität oder herrschender schulpolitischer Linie) ein engeres Spektrum von Fragestellungen bearbeitet als die bundesdeutsche Didaktik der Mathematik, und sie hat nicht eine solche Neuorientierung vollzogen, wie sie dort vom IDM begonnen wurde (freilich viele bundesdeutsche Mathematikdidaktiker auch nicht).

Gert Schubring greift, um einen Unterschied aufzuzeigen, das von Hans-Dieter Sill angeführte Beispiel der Abteilung Mathematik der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR auf und kennzeichnet deren zentrale Aufgabe, abgrenzend von „wissenschaftlicher Theoriebildung" im IDM, als „Materialentwicklung". M. E. ist dieses Wort durchaus brauchbar zur Abgrenzung, aber (obwohl ausdeutbar) zu vage, um den Prozess von Forschung und Entwicklung in der Abteilung der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften adäquat zu erfassen (was freilich auch nicht Anliegen von Gert Schubrings Ausführungen war). Tatsächlich ging es in diesem Forschungsprozess (wie auch in der Methodik des Mathematikunterrichts insgesamt) nicht in erster Linie um die Produktion mehr oder minder anspruchsvoller wissenschaftlicher Theorien (das räumt ja Hans-Dieter Sill ein), sondern vor allem um eingreifende Stellungnahmen und Aktivitäten gegenüber der Praxis des Mathematikunterrichts mit dem Ziele ihrer Verbesserung, das heißt, hohe praktische Relevanz wurde höher bewertet als theoretische. Oft gab es ein sehr umfangreiches intentional aufeinander bezogenes Bündel von Maßnahmen, Interventionen, Analysen, empirischen Untersuchungen zur Ermittlung von Veränderungsbedarf, zur Entwicklung von Konzeptionen, zur Erarbeitung curricularer Dokumente, zu deren Evaluation und zu deren Umsetzung in der Praxis. Auch eine Reihe von Dissertationen (vgl. Madipedia, Kategorie: Dissertationen Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR) ordnete sich diesen Zielstellungen unter. Empirische Forschung spielte eine bedeutsame Rolle, ohne dass man dabei die methodische Strenge zeitgenössischer empirischer Sozialforschung zu erreichen suchte. Wenn man für das praktizierte Vorgehen schon eine allgemeinere Bezeichnung finden will, möglichst einer bekannten Methodologie, so ist es der Aktions- und Handlungsforschung (wenn auch nicht intendiert, aber faktisch) am nächsten gekommen.

Gert Schubring folgt Hans-Dieter Sill nicht darin, in der Abteilung Mathematik der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR ein Analogon zum bundesdeutschen IDM zu sehen. Als einzige Analogie gesteht er zu, dass sie Zentralinstitute waren. Doch selbst in diesem Punkt gibt es m. E. einen Unterschied: Bei jener Abteilung handelte es sich, wie Hans-Dieter Sill anführt, um ein die gesamte Methodik des Mathematikunterrichts der DDR koordinierendes Zentrum, während das IDM, wie ich meine, trotz seiner unbestrittenen Bedeutung wohl doch kein solcher Mittelpunkt für die bundesdeutsche Mathematikdidaktik war, von dem her diese gesteuert worden wäre. Die Abteilung Mathematik der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften hat die Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR wesentlich mit geprägt und zu deren Entwicklung viel beigetragen, zugleich auch dazu, diese auf schulpolitischem Kurs zu halten.

Literatur

Borneleit, Peter (2006): Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichts an Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) 1946-49. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.

Deiters, Heinrich (1946): Der studienplan der pädagogischen fakultäten. In: pädagogik 1 (1946) 2, S. 8–20

Deiters, Heinrich (1989): Bildung und Leben. Erinnerungen eines deutschen Pädagogen. Hrsg. u. Eingel. von Detlef Oppermann. Mit e. Nachwort von Wolf Fabian. Köln, Wien: Böhlau 1989

Deutsche Verwaltung für Volksbildung in der sowjetischen Besatzungszone Deutschlands (1949): Vorläufige Arbeitsordnung der Universitäten und wissenschaftlichen Hochschulen der sowjetischen Besatzungszone Deutschlands vom 23. Mai 1949

Heinemann, Manfred (Hrsg.)(2000): Hochschuloffiziere und Wiederaufbau des Hochschulwesens in Deutschland 1945-1949: die sowjetische Besatzungszone. Unter Mitarbeit von Alexandr Haritonow, Berrit Haritonow, Matthias Judt, Anne Peters und Hartmut Remmers. Berlin: Akademie Verlag 2000

Keune, Hans (1963): Grundriß der allgemeinen Didaktik des Chemieunterrichts. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963

Kittel, Helmut (1957): Die Entwicklung der Pädagogischen Hochschulen. Berlin, Hannover, Darmstadt: Hermann Schroedel Verlag K. G. 1957

Klein, Helmut und Karlheinz Tomaschewsky (1963): Schulpädagogik, Teil 1. Didaktik. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1963

Klingberg, Lothar u. a. (1965): Abriss der allgemeinen Didaktik. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1965

Klingberg, Lothar (1972): Einführung in die Allgemeine Didaktik. Vorlesungen. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1972

Ministerrat der Deutschen Demokratischen Republik, Staatssekretariat für das Hoch- und Fachschulwesen (1966): Grundsätze für die Ernennung der Hochschullehrer, die wissenschaftlichen Mitarbeiter und für die akademischen Grade (Entwurf)/November 1966

Pädagogische Enzyklopädie, 2. Band. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963 Pädagogisches Wörterbuch. 1. Auflage. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1987 Technische Hochschule Dresden: Personal- und Vorlesungsverzeichnis, Sommersemester 1949. Landesdruckerei Sachsen, Dresden A 1949

Uhlig, Albert und Heinz-Werner Baer (1962): Didaktik des Biologieunterrichts. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962

Verordnung über die Berufung und Stellung der Hochschullehrer an den wissenschaftlichen Hochschulen (Hochschullehrerberufungsverordnung) vom 6. November 1968. In: GBl. II Nr. 127 vom 13. Dezember 1968 S. 998 ff.

Mehr Papierfalten braucht das Land

Dmitri Nedrenco

Auf der diesjährigen GDM-Jahrestagung in Heidelberg habe ich wieder enttäuscht festgestellt, wie gering die Rolle des mathematischen Papierfaltens im deutschsprachigen Mathematikunterricht zu sein scheint; gerade zwei Beiträge gab es auf der Tagung zu dem Thema.

Meines Wissens ist Origami sowie dessen Rolle und Auswirkung auf die Leistungen von Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht nur selten Gegenstand der Forschung in Deutschland gewesen.[1] Zwar setzen viele mir bekannte Mathematiklehrerinnen und -lehrer Origami im Unterricht hin und wieder ein, jedoch gibt es wenig wissenschaftliche Arbeiten zum Nutzen oder zur Methodik eines solchen Einsatzes.

Es wäre schön, wenn mehr Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler dieses spannende Gebiet in ihre Überlegungen einbeziehen würden. Etwa in Israel wird am Israeli Origami Center seit mehr als 20 Jahren an diesem Thema geforscht – und die Ergebnisse dieser Forschung sind dort bereits in vielen Schulen eingesetzt worden (vgl. Golan und Jackson, 2009).

Nicht wenige kennen das Buch »Origami und Mathematik« von Herrn Jürgen Flachsmeyer (2008). Ferner widmete »Der Mathematikunterricht« 2009 ein ganzes Heft der Origamimathematik (Flachsmeyer, 2009). Trotzdem konnte Papierfalten bisher keine tieferen Wurzeln im Mathematikunterricht[2] bzw. in der mathematikdidaktischen Forschung schlagen. Ich glaube das könnte in erster Linie daran liegen, dass die meisten vorgelegten Bücher, Essays und Arbeitsblätter vor allem an einer (schönen) Veranschaulichung bekannter mathematischer Tatsachen oder interessanter Körper interessiert waren. Zum anderen ist es bisher nicht gelungen (oder besser: nicht versucht worden), eine systematische Behandlung des mathematischen Papierfaltens für den Mathematikunterricht vorzulegen. Die Arbeitsblätter in „Papierfalten im Mathematikunterricht 5 bis 12“ (Schmitt-Hartmann und Herget, 2013) deuten eine systematische Aufarbeitung des Themas für die Schule an, die angegebenen Arbeitsblätter sind jedoch thematisch nicht zusammenhängend und zeigen exemplarisch Möglichkeiten

[1] Man muss natürlich erwähnen, dass Jürgen Flachsmeyer, Bernd Wollring, Hans-Wolfgang Henn, Hans Walser, Michael Schmitz (um nur einige Namen zu nennen) zu dem Thema Origami und seinem Einsatz im Mathematikunterricht publiziert haben.

[2] Man muss auch sagen, dass die Spannweite des mathematischen Papierfaltens alle Schulformen und Jahrgangsstufen erfasst und sogar auf universitärem Niveau sinnvoll eingesetzt werden kann.

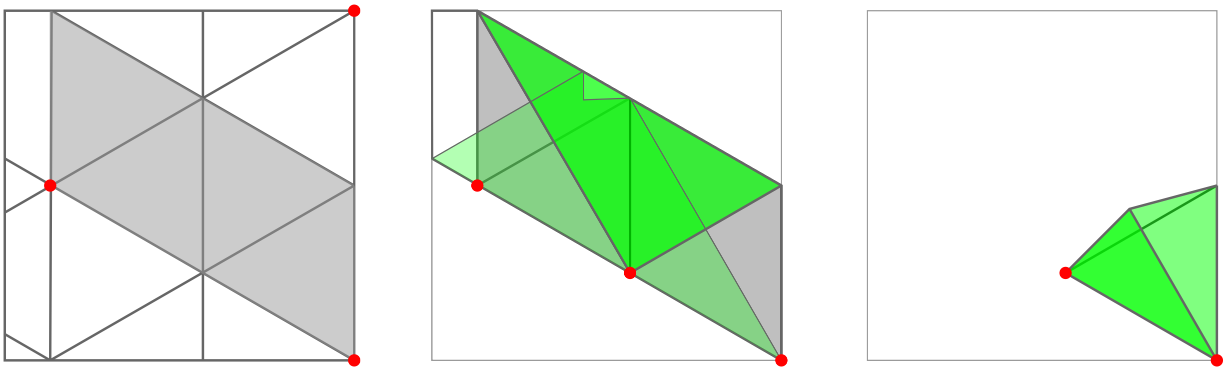


Abbildung 1. Links: Ein Faltmuster des regelmäßigen Tetraeders; die Referenzpunkte deuten ein regelmäßiges Dreieck an. Mitte: Das beinahe gefaltete Tetreder sowie die aktuelle Position der Punkte; Rechts: Das fertige Tetraeder. (Nach Montroll, 2009, pp. 65–66)

des Einsatzes bei verschiedenen Unterrichtsthemen auf.

Letztlich wurde noch keine regelgeleitete Behandlung der Theorie des Papierfaltens im Mathematikunterricht entwickelt: Mal faltet man ein Stück Papier, mal mehrere; mal schneidet man, mal ist das verboten; mal faltet man approximativ, mal verlangt man mathematische Exaktheit. Die Theorie muss systematisiert werden und es müssen klare Regeln aufgestellt werden, um die für Schülerinnen und Schüler ansprechenden Figuren (und vielmehr ihre Konstruktionen) auch mathematisch beschreiben zu können.

Doch was ist am Origami so faszinierend? Was bedeutet *Origami* überhaupt?

Origami ist japanisch für *Papierfalten*. Mathematisches Papierfalten kann mindestens zweierlei bedeuten: Falten von Papier bestimmten Regeln folgend oder Designen (und Falten) von bestimmten Figuren (Kranich, Ikosaeder, Mittelsenkrechte). Zwar ist das Falten eines Kranichs in der Regel nicht mehr als ein – zum Teil – anspruchsvolles Folgen einer Bauanleitung. Doch das Designen, *Modellieren* eines Faltmusters, aus dem ein Kranich entsteht, bedarf einer tiefergehenden mathematischen Planung Hull, 2005. Die meisten Menschen empfinden Origami als eine heitere Kinderbeschäftigung. Dies entsprach im Wesentlichen auch der Wahrheit bis vor etwa 100 Jahren.[3] Doch inzwischen steckt viel Mathematik in diesem ehemals harmlosen Zeitvertreib; dies sollten wir für den Mathematikunterricht konstruktiv nutzen!

Mathematisches Papierfalten kann man etwa so sehen: Ein Quadrat Papier ist ein Teil der Ebene, das darf ich so falten, dass ich Ecken aufeinander oder auf Quadratseiten, oder Quadratseiten aufeinander falte; dabei entstehen Mittelsenkrechten, Verbindungsgeraden, Parabeltangenten, Winkelhalbierenden – eine ganze Reihe geometrisch interessanter Objekte! Das Papier wird entfaltet und ich darf so weitermachen, dass ich zusätzlich bereits gefaltete Falze mitverwende, vgl. Abbildung 2. Einfach gesagt, ich darf das Papier einmal falten, dann auffalten, dann wieder (etwa an einem anderen Falz) falten. Man fragt sich schnell: Was erfalte ich mir auf diese Weise – alle Punkte, die ich auch mit Zirkel und Lineal konstruieren kann? Ja! Und noch mehr. Gar das Delische Problem[4] kann exakt gelöst werden.

Das ist nur eine Möglichkeit, Papierfalten zu »mathematisieren«, Regeln einzuführen. Nun wird es spannend, sich zu überlegen, was man alles auf diesem Wege konstruieren kann. Kann man etwa eine Strecke exakt dritteln? Fünfteln? Ein regelmäßiges Siebeneck falten? Ein regelmäßiges Neuneck? Solche Fragen kann man zielgerichtet systematisch untersuchen, Parallelen zu Konstruktionen mit üblichen Werkzeugen aufdecken und dabei noch mit einfachen Mitteln interessante Figuren erschaffen.

Viele der in den KMK-Standards festgelegten Ziele für den Mathematikunterricht können auf eine natürliche und motivierende Weise durch Papierfalten angestrebt werden; ich will versuchen, einige davon direkt auf Origami zu übertragen und mögliche Fragestellungen generieren.

[3] Das erste tiefergehende Buch über geometrisches Papierfalten erschien 1893 in Madras, Indien von Sundara Rao (1893).

[4] Man konstruiere $\sqrt[3]{2}$.

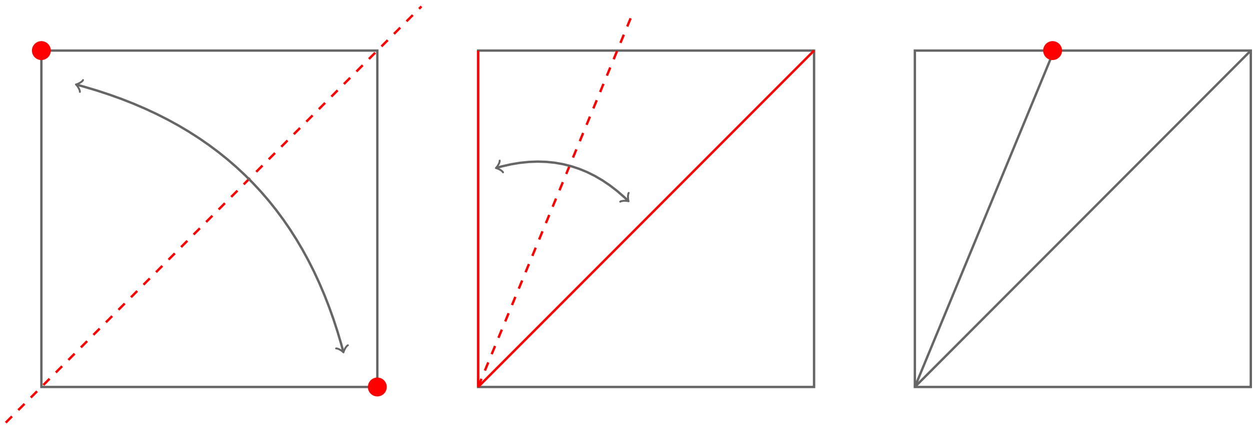


Abbildung 2. Links: Falten der Mittelsenkrechten beider markierter Punkte; Mitte: Falten der Winkelhalbierenden der markierten Geraden; Rechts: Als Resultat – ein neuer konstruierter (Schnitt)punkt.

Modellieren
Die Grundfrage des Origami: Wie kann ich eine Figur (Elefant, Dodekaeder, ein Plus-Zeichen) falten? Wie designe ich ein Faltmuster, das die richtige Figur ergibt? Dazu gibt es inzwischen wirkungsvolle Computerprogramme wie TreeMaker (Lang, o. J.). Das Thema kann von besonders einfach (Man falte eine Schachtel, eine Geschenkverpackung, ein Kuvert) zu besonders anspruchsvoll (Man entwickle ein Computerprogramm, das das nötige Faltmuster ergibt) variieren.

Eine auf der Hand liegende Fragestellung für die Didaktik wäre etwa: *Verbessert sich das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch einen solchen Zugang zu geometrischen Objekten? Oder konkreter: Schneiden Schülerinnen und Schüler in standardisierten Tests zum räumlichen Vorstellungsvermögen besser ab, als solche, die keinen Kontakt zum Falten hatten? (vgl. Boakes, 2009, Boakes, 2011).*

Beweisen lernen
Wenn ich etwas gefaltet habe (ein Dreieck, ein Drittel eines Winkels, einen Würfel), wie kann ich begründen, dass das Objekt wirklich das Gewünschte ist und nicht nur grob und ungefähr dieses Objekt wiedergibt? Wie beweise ich das? (Etwa mit Ähnlichkeitssätzen, der Euklid-Maschinerie, wenn man so will, mit dem Starrheitssatz von Cauchy, etc.).

Ich behaupte, dass nur bestimmte Faltmuster (2-färbbare![5]) flachgefaltet werden können – warum ist das so und wie begründet man das? (vgl. Hull, 2013, Ch. 21–22, Nedrenco und Beck, 2016).

Profitieren Kinder davon, dass sie selber Fragen des Papierfaltens entwickeln und beweisen? Kann diese Beschäftigung zum besseren Verständnis von Beweisen beitragen?

Konstruieren
Die klassische Frage der Geometrie: Wie dreiteile ich einen gegebenen Winkel? Oder: Wie konstruiere ich ein Objekt mittels gegebener Werkzeuge? Mit Papier kann man das Delische Problem exakt lösen, man kann mehr regelmäßige Polygone konstruieren, als mit Zirkel und Lineal; man kann Lösungen von quadratischen wie kubischen Gleichungen vorfalten.

Können Schülerinnen und Schüler solche Konstruktionen besser verinnerlichen, wenn sie sie gefaltet haben, als wenn sie zusätzliche Instrumente verwenden (Zirkel, markiertes Lineal, Ellipsenwerkzeuge, etc.)?

Visualisieren
Falte ich einige Körper bzw. Objekte (Tetraeder vgl. Abbildung 1, Fünfecke, Rhombendodekaeder, Mittelsenkrechten), dann kann ich sie in der Hand drehen und analysieren.

Kann ein solcher Zugang hilfreich sein? Profitieren Schülerinnen und Schüler von einem solchen Zugang zu 3D-Objekten mehr als von einem Zugang zum Thema über digitale Medien, etwa GeoGebra und Ähnliches?

Kommunizieren
Faltet man interessante und motivierende Objekte (etwa ein Oktaeder aus einem Stück Papier, ohne Schneiden und Kleben!), so bedarf es fortgeschrittener motorischer Fähigkeiten. Oft gelingt

[5] Das heißt solche, deren Flächen man mit zwei Farben färben kann, ohne dass die „Nachbarländer“ die gleiche Farbe bekommen.

die Faltung nicht auf Anhieb, dann schaut man zum Nachbarn hinüber, lässt sich erklären in welche Tasche genau die trotzige Lasche gehen muss (motorische Fähigkeiten!), versucht es erneut und endlich hat man es geschafft!

Verbessern gemeinsame (mathematische) Faltübungen Kommunikationskompetenzen der Schülerinnen und Schüler?

Es gibt viele spannende Fragen, die zu untersuchen sich lohnen könnte (vgl. Boakes, 2009, Boakes, 2011, Arici und Aslan-Tutak, 2013, Golan und Jackson, 2009, Arslan, 2012 für Fragen, die bereits gestellt und teilweise beantwortet wurden).

Meine Untersuchungen zu diesem Thema betreffen Universitätsmathematik und Lehramtsstudenten sowie den Einfluss des Papierfaltens auf Fragen, die mit axiomatischem Denken verknüpft sind.

Literatur

Arici, S. & Aslan-Tutak, F. (2013). The effect of Origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 179–200.

Arslan, O. (2012). Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education (Doctoral dissertation, Middle East Technical University). Zugriff unter http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.633.122&rep=rep1&type=pdf

Boakes, N. (2009). The Impact of Origami-mathematics lessons on achievement and spatial ability of middle school students. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 4* (S. 471–482). Natick Mass. (USA): AK Peters.

Boakes, N. (2011). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In P. Wang-Iverson, R. J. Lang, & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5* (S. 173–188). Boca Raton: CRC Press.

Flachsmeyer, J. (2008). *Origami und Mathematik: Papier falten – Formen gestalten*. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Lemgo: Heldermann.

Flachsmeyer, J. (Hrsg.). (2009). *Mathematik und Origami*. Der Mathematikunterricht.

Golan, M. & Jackson, P. (2009). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 4* (S. 459–470). Natick Mass. (USA): AK Peters.

Hull, T. (2005). Review of: Origami Design Secrets by Robert Lang. *The Mathematical Intelligencer*, *27*(2), 92–95.

Hull, T. (2013). *Project origami: Activities for exploring mathematics* (2. ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.

Lang, R. (o. J.). Treemaker. Zugriff unter http://langorigami.com/article/treemaker

Montroll, J. (2009). *Origami polyhedra design*. Natick, Mass: A K Peters.

Nedrenco, D. & Beck, J. (2016). *Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. Institut für Mathematik.

Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht ; 5–12* (1. Aufl.). Moderner Unterricht. Stuttgart: Klett.

Sundara Rao, T. (1893). *Geometrical exercises in paper folding*. Madras: Printed by Addison.

Dmitri Nedrenco, Emil-Fischer-Straße 30,
97074 Würzburg,
Email: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de

Spione im Kloster – Protokoll des GDM-Doktorandenkolloquiums 2015

Andreas Frank, Raja Herold-Blasius, Marcel Klinger, Sebastian Kollhoff und Hana Ruchniewicz

Wir schreiben den 8. September 2015. Das einsame Kloster Bronnbach an der Tauber liegt ruhig und besinnlich am Weinberg. Die Sonne steht hoch, als gegen Mittag 21 Spionagelehrlinge (auch Nachwuchswissenschaftler in der Mathematikdidaktik genannt) zum ersten Mal aufeinandertreffen. Aus ganz Deutschland und Österreich sind sie angereist. Ihre Mission lautet: Möglichst viel über das wissenschaftliche Arbeiten in der Mathematikdidaktik herausfinden, indem sie das eigene Spionageprojekt vorstellen, sich den kritischen Augen und Ohren der Top-Agenten und der Nachwuchscommunity stellen sowie konstruktive Anregungen und Feedback für eine weitere erfolgreiche Spionagearbeit erhalten.

Der Ablauf des Spionagelehrgangs lässt sich wie folgt schildern:

Tag 1:

13.56 Uhr: Frau Ruwisch beginnt überpünktlich mit der Verteilung der Namenskärtchen und der Vorstellungsrunde.

14.17 Uhr: Herr Weigand initiiert die Besprechung der Spionagemission. Ein genauer Zeitplan liegt vor.

14.30 Uhr: Erster Einsatz. Zwei mutige Spionagelehrlinge wagen den Anfang und berichten im beeindruckenden Ambiente des Fürstensaals und der Bibliothek über ihr bisheriges Vorgehen.

14.50 Uhr: Es wird brenzlig. Die Agenten und Mitspione geben erstmalig Rückmeldung und Anregungen.

15.30 Uhr: Zweiter Einsatz. Die nächsten zwei Spionagelehrlinge berichten.

16.32 Uhr: Die Aufregung macht hungrig – Kaffeepause. Die Spione ebenso wie die Agenten stärken sich bei Heißgetränken und Kuchen. In den alten Gemäuern beginnt sich eine familiäre Atmosphäre zu entwickeln. Die Spionagelehrlinge tauschen sich über ihre bisherigen Erlebnisse im Kloster, aber auch über die Ausgangsvoraussetzungen an den jeweiligen Standorten aus und verlieren langsam die Scheu vor den Top-Agenten.

17.00 Uhr: Der Lehrgang wird fortgesetzt. Weitere vier Spionagelehrlinge präsentieren ihre Arbeiten und stellen sich der Diskussion.

19.03 Uhr: Hungrig strömt das Spionageteam durch den Kräutergarten zur lichtdurchfluteten Orangerie, um sich beim Abendessen für die weitere Mission zu stärken.

20.07 Uhr: Die ausbildenden Top-Agenten bieten die Gelegenheit auch privatere Eindrücke aus dem Leben eines Mathematikdidaktikers sowie Erfahrungen rund um eine Promotion zu gewinnen. Die Spionagelehrlinge lauschen gespannt. Es wird berichtet, dass eine Promotion in der Fachmathematik von einer zündenden Idee abhänge, aber durchaus innerhalb von zwei Jahren vollendet werden könne. Wichtig seien dabei vor allem drei Dinge: Fleiß, Durchhaltevermögen und ein kleines bisschen Glück. Außerdem ist zu hören, dass eine Promotion im Fachbereich der Mathematikdidaktik nicht immer selberverständlich gewesen sei. Ein ständiges Auf und Ab habe diese Zeit geprägt, was einigen Spionagelehrlingen sehr bekannt vorkommt. Des Weiteren könne gerade die Forschungsphase einer Promotion sehr zeitintensiv sein. Das wäre aber durch ein fixes Niederschreiben der Arbeit zu kompensieren. Am Ende bedürfe es Kompromissbereitschaft, um die zentralen Aspekte der Arbeit zu fokussieren und ein Gleichgewicht zwischen neuen Methoden, den Inhalten und konstruktiven Hinweisen für die Unterrichtspraxis im Einklang mit den Betreuern herzustellen.

21.00 Uhr: Programmpunkt „Lokalbesuch". Heimlich, still und leise verlassen alle das Klosterareal und kehren im Gasthaus Klosterhof direkt nebenan ein – zufrieden und voller neuer Eindrücke.

Tag 2:

Nach dem Frühstück geht es um 9 Uhr wieder los. Vorträge, Rückmeldungen, Kaffeepause – immer im Wechsel.

15.45 Uhr: Treffen vor der Unterkunft zur gemeinsamen Wanderung. Bewegung und frische Luft beflügeln das Gemüt und den Geist. Einzelne Gespräche ermöglichen das Ordnen der Eindrücke, der neu gewonnen Ideen und Gedanken. Bei Kaffee und Rotweinkuchen im Gasthaus „Zum Riesen" stärken sich alle für den Rückweg entlang des Flusses.

Die Spionagelehrlinge und ihre vier ausbildenden Agenten (Foto: Marcel Klinger)

20.00 Uhr: Programmpunkt „Weinprobe". Die Tische unter den weiten Decken der Vinothek im Klosterkeller sind gerichtet. Begleitet von reichhaltigen Informationen über Traubenanbau, -auswahl und -ernte sowie von Erzählungen aus der Region und über den Franken an sich werden Spezialitäten der Klosterregion verkostet. Doch Moment mal! Weißer Wein aus roten Trauben? Kritische Blicke. Kann man sich das mathematisch herleiten? Einige denken offensichtlich kurzfristig über ein neues Spionageprojekt nach. Auch noch Stunden später.

Tag 3:
Nach dem Frühstück geht es um 9 Uhr wieder los. Vorträge, Rückmeldungen, Kaffeepause – immer im Wechsel.

8.00 Uhr: Frühstück. Die Weinprobe hat keine Spuren hinterlassen. Alle Spionagelehrlinge sind hochmotiviert ihren neugewonnenen Freunden auch am letzten Tag die volle Aufmerksamkeit zu schenken.

9.08 Uhr: Nach dem Auschecken und einem dadurch verzögerten Beginn werden die letzten drei Präsentationen gehalten und kommentiert.

11.24 Uhr: Geheimer Fototermin.

11.33 Uhr: Alle Spionagelehrlinge werden gebeten, die letzten drei Tage Revue passieren zu lassen. Es sollen positive und negative Punkte aufgeschrieben werden. So wird neben der Unterkunft und dem lokalen Ambiente vor allem die allgemein sehr angenehme und offene Atmosphäre hervorgehoben, sowohl innerhalb als auch außerhalb der Diskussionsrunden. Dazu hat ganz besonders auch das gesellige Rahmenprogramm beigetragen, das einen stetigen und regen Austausch gefördert hat. Der Zeitplan – da gehen die Meinungen auseinander: Wohingegen für die meisten eine Zeitstunde für Vortrag und Diskussion ausreichend war, hätten sich andere gerne etwas mehr Zeit für Rückmeldungen oder gar eine zweite Diskussion gewünscht. Zudem sind – wie sollte es anders sein – nicht alle Spionagelehrlinge mit ihrer Rückmeldung einverstanden. Die Lektion „Kritik annehmen und richtig damit umgehen" ist jedoch wichtig, und der Spionagenachwuchs ist gewillt, diese zu lernen.

12.00 Uhr: Mittagessen. Ein letztes Mal genießen alle Top-Agenten und Spionagelehrlinge die sonnige Orangerie, wo das Essen wieder vornehmlich serviert wird.

12.54 Uhr: Mission erfüllt. Heimreise. Mit im Gepäck: Wertvolle Eindrücke, neue Kontakte und ein Protokoll über alle Beiträge zum eigenen Spionageprojekt. Die Arbeit kann fortgesetzt werden.

Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bedanken sich außerordentlich beim Expertenteam (Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker, Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp, Prof. Dr. Silke Ruwisch, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand) für die umfangreichen Rückmeldungen, die Hilfsbereitschaft und vor allem die Offenheit. Die Fähigkeit sowie Motivation und der Einsatz, sich in jedes einzelne Projekt hineinzudenken und sich in die Position der Nachwuchswissenschaftler zu versetzen, um ihnen bestmögliche und vor allem hilfreiche Rückmeldungen zu geben, sind nicht als selbstverständlich anzusehen – dafür noch einmal: Herzlichen Dank!

Ein großes Dankeschön gilt insbesondere der GDM, die dieses Doktorandenkolloquium überhaupt erst ermöglicht hat, und natürlich Herrn Prof. Dr. Weigand sowie der Universität Würzburg für die gelungene Organisation.

Andreas Frank (korrespondierender Autor), Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße 31, 93053 Regensburg,
Email: andreas.frank@ur.de

Editorischer Hinweis: Der Bericht ist rechtzeitig für Heft 100 eingegangen und wurde vom Herausgeber übersehen. Wir bitten das verspätete Erscheinen zu entschuldigen.

Angebote der GDM-Nachwuchsvertretung im Rahmen der 50. Jahrestagung der GDM in Heidelberg

Raja Herold-Blasius, Kerstin Hein, Julia Ollesch, Petra Carina Tebaartz
(für die Nachwuchsvertretung der GDM)

Auch in diesem Jahr konnte die Nachwuchsvertretung der GDM ein umfassendes Programm für die Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler anbieten.

Zum Nachwuchstag (6.–7. März 2016) meldeten sich dieses Jahr insgesamt über 90 Personen an. Aus personellen und organisatorischen Gründen musste die Anzahl der Teilnehmerinnen und Teilnehmer letztlich auf 65 Personen reduziert werden, was zu optimalen Rahmenbedingungen für einen produktiven Austausch führte.

Der Nachwuchstag beginnt traditionell gegen 14 Uhr am Tag vor Tagungseröffnung, dieses Jahr also am Sonntag, 6. März 2016, und endet am Montagmittag. Dank der Fachschaft der PH Heidelberg konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer an beiden Tagen auf Spendenbasis mit Brezeln, belegten Brötchen, Kaffee und Tee versorgt werden. Dieses Angebot wurde von allen Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftlern dankend angenommen.

Begonnen wurde der Nachwuchstag mit einem sogenannten *Thematischen Networking*. Durch zuvor gesammelte Informationen zu den jeweiligen Promotionsthemen fanden sich kleinere Gruppen zusammen, die sich in demselben Themenbereich bewegen, z. B. fächerübergreifender Mathematikunterricht, Sprache oder Inklusion im Mathematikunterricht. In einer zweiten Runde wurden größere Gruppen zu den Bereichen Primarstufe, Sekundarstufe und Hochschule gebildet. Durch dieses thematische Networking konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmern sowohl erste Kontakte knüpfen als auch weitere mathematikdidaktische Forschungsthemen kennenlernen.

Im Anschluss daran starteten wir mit dem Workshop-Angebot. Dieses Jahr konnten die Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler wieder zwischen vier Workshops wählen:
1. Zeit- und Arbeitsmanagement,
2. Umgang mit Literatur,
3. Vorträge halten und
4. Wissenschaftliches Schreiben.

Wir versuchten dabei, in den von uns selbst gestalteten Workshops eine ausgewogene Balance zwischen Input und Aktivierung herzustellen. So konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch Gedanken und eigene Erfahrungen austauschen.

Neben den Workshops hatten die Nachwuchswissenschaftlerinnen und –wissenschaftler die Möglichkeit, einen Probevortrag zu halten. In diesem Jahr konnten wir alle zwölf Anfragen im Programm integrieren. So konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer ihre GDM-Vorträge vorab in einem geschützten Rahmen proben. Eine Gruppe von ca. 20 Personen gab jeweils Rückmeldung zur Gliederung, Präsentation, Rhetorik, Körpersprache oder gar zur Kleiderwahl. Die Probevorträge wurden nicht nur von den Vortragenden, sondern auch vom Publikum als äußerst hilfreich empfunden.

Das Feedback des Nachwuchstags zeigte, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit dem Angebot und dem zeitlichen Rahmen insgesamt zufrieden waren. Zusätzlich zu den Probevorträgen wurde das Kennenlernen von und der Austausch mit anderen Doktorandinnen und Doktoranden als besonders positiv hervorgehoben.

Direkt im Anschluss an den Nachwuchstag fand die Talkrunde statt, die sich stets auch an andere interessierte Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler richtet. Dieses Jahr konnten wir Prof. Dr. Kathleen Philipp von der Pädagogischen Hochschule Zürich und J.-Prof. Dr. Alexander Salle von der Universität Osnabrück für uns gewinnen. Beide berichteten von ihrem individuellen Werdegang, den Hürden und Stolpersteinen auf dem Weg zu einer Professur. Das Publikum empfand die Informationen und Berichte als sehr hilfreich und interessant für den weiteren beruflichen Weg.

Die Nachwuchsvertretung der GDM organisierte neben dem Nachwuchstag und der Talkrunde auch verschiedene andere Angebote während der GDM-Jahrestagung 2016. So fanden sich beim Kneipenabend über 100 Personen im Café Villa ein, wo wir einen wunderbaren Abend verbringen und sich alle in einem etwas weniger offiziellen Rahmen kennenlernen konnten.

Weiterer Bestandteil unseres Angebots war die Expertensprechstunde. Insgesamt fragten uns 10 Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler an und suchten das Gespräch mit einer Expertin bzw. einem Experten ihrer Wahl. Die Nachwuchsvertretung der GDM stellte die Kontakte her und konnte so alle Anfragen erfolgreich vermitteln.

Außerdem informierten wir im Nachwuchsforum über die GDM, die GDM-Mitgliedschaft, die Beiratswahl, die Summerschool 2016 in Kassel sowie die ICME 2016 in Hamburg.

Ausgebaut wurde in diesem Jahr das Angebot für die Post-Docs, das auch von weiteren GDM-Mitgliedern dankenswerterweise organisiert wurde. So bot Prof. Dr. Andreas Eichler beispielsweise den Post-Doc Workshop mit dem Thema Karriereplanung an. Ein Workshop zur Erstellung von DFG-Anträgen wurde von Prof. Dr. Aiso Heinze ins Leben gerufen. Zudem bot das JMD-Herausgeberteam einen Schreibworkshop an, in dem Beiträge für das JMD überarbeitet und diskutiert wurden. Einen zweiten Schreibworkshop soll es im Herbst 2016 geben.

Dieses vielfältige Programm mit der Einladung von Expertinnen und Experten sowie der große Andrang an Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftlern führten dazu, dass die Nachwuchsvertretung der GDM zunehmend Ausgaben tätigen musste, z. B. für Moderationskarten, Geschenke für die Gastvortragenden oder zur Bereitstellung von Verpflegung. Erstmals wurde der Nachwuchsvertretung in diesem Jahr vom GDM-Organisationsteam ein finanzielles Budget eingeräumt, mit dem wir genau diese Kosten decken konnten.

An dieser Stelle möchten wir uns dafür ganz herzlich bedanken. Außerdem bedanken wir uns bei allen Beteiligten, die zum Gelingen des Nachwuchsprogramms beigetragen haben.

Derzeit besteht die Nachwuchsvertretung aus: Georg Bruckmaier, Andreas Frank, Kerstin Hein, Raja Herold-Blasius, Marcel Klinger, Mona-Lisa Maisano, Angel Mizzi, Julia Ollesch, Stefanie Rach, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Alexander Schüler-Meyer, Ulrike Siebert, Petra Carina Tebaartz und Daniel Thurm.

Aktuelle Informationen zur Nachwuchsvertretung und zum Programm findet man unter: http://madipedia.de/wiki/Nachwuchsvertretung_der_GDM

Landesverband GDM Schweiz

Esther Brunner und Lis Reusser

Jahresbericht 2015 (März – Dezember)

Mitgliederversammlung

Weil die Jahrestagung der GDM im Februar 2015 in Basel stattfand, verzichteten wir auf die Durchführung einer eigenen Wintertagung im Januar und führten die erste ordentliche Mitgliederversammlung am Dienstag, 24. 3. 2015 durch. Der Jahresbericht 14/15, die Rechnung 2014 sowie das Budget 2015 wurden dort genehmigt und der Mitgliederbeitrag unverändert bei CHF 140,– belassen.

Informiert wurde weiter über die geplanten Themenschwerpunkte für das laufende Vereinsjahr: Kompetenzorientierte Beurteilung (im Zusammenhang mit der Jahrestagung 2016), Integration und Mathematikunterricht, Fachwissen in der Mathematikdidaktik sowie Medieneinsatz im Mathematikunterricht.

Weitere Anlässe: Fachdidaktische Diskussion

Die im September 2014 begonnene fachdidaktische Diskussion zum Thema Apps und Tablets wurde erneut aufgegriffen und dazu eine Folgeveranstaltung angeboten. Ulli Kortenkamp von der Uni Potsdam konnte für ein Referat im Anschluss an die Mitgliederversammlung am 24. 3. 15 gewonnen werden. Er stellte Qualitätskriterien für gute Apps zur Diskussion. Aus dieser Diskussion heraus wurde anschliessend von Mirjam Probst und Esther Brunner von der PHTG unter Einbezug der Ideen von Bernhard Dittli, Philippe Sasdi und Ulli Kortenkamp ein Kriterienraster entwickelt, das beim Einschätzen von Apps und Lernsoftware nützen könnte. Dieses wird demnächst auf der Website im internen Bereich zur Verfügung gestellt werden.

Am 10. 9. 15 fand eine zweite Fachdidaktische Diskussion statt. Diese widmete sich ganz den fachwissenschaftlichen Standards, welche die GDM in Zusammenarbeit mit der DMV 2008 veröffentlicht hat. Im Rahmen der Diskussion wurde in zwei Stufengruppen (Primarstufe und Sekundarstufe I) überlegt, inwiefern welche fachlichen Ansprüche für die einzelnen Studien-gänge an unseren Pädagogischen Hochschulen sinnvoll und bedeutsam sind. Eine Gruppe von Dozierenden der Sekundarstufe I hat sich in der Folge im November nochmals intensiv mit den Standards auseinandergesetzt. Einigkeit herrscht darüber, dass Fachwissen zentral ist für alle Studiengänge und dass Fachwissen die Basis für die darauf aufbauende Fach-didaktik ist, wie das auch Studien (z. B. COACTIV) nahelegen und deutlich machen. Wie wir das Fachwissen stärken können und damit auch Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Ausbildung stärker zusammenbringen können, wird uns auch im laufenden Jahr beschäftigen. Die Diskussion zeigte auch das grosse Bedürfnis nach einem stärkeren Austausch, einerseits innerhalb der gleichen Stufe zwischen den verschiedenen PHs, andererseits zwischen den Stufen.

Sitzungen und Geschäfte

Der Vorstand traf sich zwischen März und Dezember 2015 zu drei Sitzungen und beschäftigte sich mit zahlreichen Geschäften. Die erste Sitzung Ende März stand im Zeichen des Rück-blicks auf die Mitgliederversammlung und die Fachdidaktische Diskussion. Ein zweites grosses Thema waren der Ausblick und die Organisation der Fachdidaktischen Diskussion vom September und der Jahrestagung 2016. Rückmeldungen und Optimierungen für die neue Website waren ein weiteres Traktandum. Und schliesslich wurde auch die Zusammenarbeit mit der Präsidentin der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik der Schweizerischen Gesellschaft für Lehrerinnen- und Lehrerbildung (SGL), Marianne Walt, geklärt. Sie erhält Gaststatus an den Vorstandssitzungen der GDM Schweiz und ist mitverantwortlich für die Organisation der Jahrestagung. Die gemeinsame Jahrestagung der GDM Schweiz zusammen mit der SGL Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik ermöglicht die kostenlose Teilnahme an der Tagung für alle GDM Mitglieder und für alle SGL Mitglieder. Der finanzielle Zustupf der SGL an die eigene Arbeitsgruppe fliesst in eines der Honorare der Referierenden ein.

Anfang Juni traf sich der Vorstand zur zweiten Sitzung. Nebst der Organisation der verschiedenen Anlässe ging es insbesondere um die inhaltliche Zusammenarbeit mit der AG Mathematikdidaktik der SGL, um die Arbeit am Kriterienraster zur Einschätzung von Apps und Lernsoftware sowie um das Thema Rekrutierung von Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern Sek II als Mitglieder der GDM Schweiz. Seit längerem stellen wir fest, dass es uns zu wenig gelingt, Mathematikdidaktikdozierende der Sekundarstufe II als Mitglieder der GDM Schweiz ansprechen und gewinnen zu können. Wir haben beschlossen, dass wir dies einerseits thematisch mit der Auswahl der Themen und Referierenden an der Jahrestagung und anderseis mit direktem Ansprechen und Einladen der entsprechenden Personen verbessern möchten.

An der Novembersitzung standen nebst den organisatorischen Fragen rund um die Wintertagung das Thema Landesvertretung in der ICMI sowie die ICME 13 auf der Tagesordnung.

Der Beirat der GDM tagte im September in Frankfurt. An der Sitzung, die jeweils von 11–18 h dauert, nahm Esther Brunner teil.

Lis Reusser vertrat die GDM Schweiz an der Sitzung von KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz).

Dank

Zahlreiche Mitglieder haben aktiv zum Gelingen der GDM Schweiz beigetragen. Ihnen sei an dieser Stelle sehr herzlich gedankt. Allen voran möchten wir unseren Kolleginnen und Kollegen aus dem Vorstand für die konstruktive Zusammenarbeit und Unterstützung danken.

Tagungsbericht Jahrestagung GDM Schweiz vom 15. 1. 16 in Luzern

An der Wintertagung der GDM Schweiz vom 15. 1. 16 nahmen knapp 60 Personen teil. Die Tagung war dem Thema Kompetenzorientierung gewidmet. Das Thema wurde aus verschiedenen Perspektiven anhand von drei Referaten beleuchtet:

Im ersten Referat stellte Prof. Dr. Jürgen Oelkers (Emeritus der Universität Zürich) einen Bezug zur öffentlichen Wahrnehmung der Kompetenzorientierung her. Er referierte zum Thema „Wie versteht die Öffentlichkeit die Kompetenzorientierung der Volksschule?". Im Vortrag ging er insbesondere auf die öffentliche Kritik und Rezeption des Lehrplans 21 ein. Er führte in seinem Referat aus, dass die für den Lehrplan 21 zentrale ‚Kompetenzorientierung', die für alle Fächer gelten soll, in der Öffentlichkeit sehr kontrovers diskutiert wird, was auch in den politischen Vorstössen gegen den neuen Lehrplan erkennbar wird. Entscheidend für das Gelingen ist aber ein Verständnis, das tatsächlich von Kompetenzen ausgeht und dabei theoretische Voraussetzungen beachtet. In der politischen Kritik des Lehrplans 21 lassen sich eher populistische Argumente feststellen. Insbesondere wird infrage gestellt, was der didaktische Mehrwert des Lehrplans 21 mit sich bringt. Oelkers stellte im Vortrag sodann die Umsetzungsbedingungen vor, die vor allem damit zu tun haben, dass die ‚beliefs' im Feld anders sind als der Lehrplan 21 voraussetzt.

Das zweite Referat beleuchtete das Thema aus Sicht der Berufsbildung. Dr. Hansruedi Kaiser vom EHB (Eidgenössisches Hochschulinstitut für Berufsbildung) und selbst GDM-Mitglied stellte in seinem Referat den Begriff der „Handlungskompetenz" ins Zentrum. Mit diesem Begriff, der in der Schweizerischen Berufsbildung als zentrale Kompetenz gilt, zeigte er eine radikale Orientierung an der Fähigkeit auf, „eine bestimmte Klasse von Situationen zu bewältigen." Diese Situationen stammen aus beruflichen Kontexten und sind je nach Berufsfeld ganz unterschiedlich. Nicht zuletzt stellte Kaiser eine Reihe von Forderungen an die abgebende, öffentliche Schule auf, über welche mathematischen Fähigkeiten zukünftige Berufsleute verfügen müssten.

In der Diskussion wurde darauf aufmerksam gemacht, dass ein erheblicher Unterschied zwischen mathematischer Bildung und mathematischer Ausbildung besteht und blosse Ausbildung im Sinne einer unmittelbaren Nützlichkeitsorientierung im aktuellen Beruf zu kurz greift.

Das dritte Referat, das nach der ordentlichen Mitgliederversammlung stattfand, hielt Prof. Dr. Christina Drüke-Noe von der PH Weingarten. In ihrem Referat zum Thema „Kompetenzorientierte Leistungsüberprüfung im Mathematikunterricht" fokussierte sie verschiedene Formen der Leistungsüberprüfung und die an sie gestellte Forderung, insbesondere auch an die Qualität der gestellten Aufgaben.

Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau, Unterer Schulweg 3, 8280 Kreuzlingen, Schweiz, Email: esther.brunner@phtg.ch
Lis Reusser, Pädagogische Hochschule Bern, Institut für Heilpädagogik, Fabrikstrasse 8, 3012 Bern, Schweiz, Email: lis.reusser@phbern.ch

Informationen zum Förderpreis der GDM

Regina Bruder

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vergibt in der Regel alle zwei Jahre den Förderpreis der GDM für eine herausragende Dissertation an eine Mathematikdidaktikerin oder einen Mathematikdidaktiker. Die bisherigen Preisträgerinnen und Preisträger der GDM waren:

1989 Martin Stein
1991 Horst Struve
1994 Manfred Borovcnik
1996 Reinhard Hölzl
1998 Petra Scherer
2002 Katja Krüger
2004 Stephan Hußmann
2006 Andreas Eichler
2008 Marei Fetzer und Elke Söbbecke
2010 Sebastian Rezat
2012 Florian Schacht
2014 Kathleen Philipp

Im Herbst 2016 wird die Jury wieder eine herausragende Dissertation auswählen und for-dert daher alle Mitglieder der GDM auf, potentielle Kandidatinnen und Kandidaten zu benennen. Dabei ist zu beachten, dass die Verteidigung der Dissertation nicht länger als vier Jahre zurückliegen darf. Vorschläge sollen zusammen mit einer ca. zweiseitigen Begründung und fünf Exemplaren oder Kopien der Arbeit bis zum 1. September 2016 an die Jury-Vorsitzende eingereicht werden. Es wird gebeten parallel dazu auch eine elektronische Version/einen Weblink auf eine elektronische Version der Arbeit an die Jury-Vorsitzende zu senden.

Die Entscheidung der Jury wird auf der GDM-Tagung in Potsdam Anfang März 2017 bekannt gegeben werden.

Die Jury: Regina Bruder, Darmstadt (Vorsitz); Tommy Dreyfus, Tel Aviv; Andreas Eichler, Kassel; Anna-Susanne Steinweg, Bamberg; Hans-Georg Weigand, Würzburg.

Anschrift der Jury-Vorsitzenden:
Prof. Dr. Regina Bruder, TU Darmstadt, FB Mathematik, Schlossgartenstraße 7, 64289 Darmstadt, Email: bruder@mathematik.tu-darmstadt.de

Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 10.3.2016 in Heidelberg

Zeit: 16:30–18:30 Uhr
Ort: Pädagogische Hochschule Heidelberg

Rudolf vom Hofe begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an die im Jahre 2015 verstorbenen Kolleg(inn)en:
– Gerhard König (20. 10. 2015)
– Susanne Müller-Philipp (15. 11. 2015)
– Fritz Nestle (30. 12. 2015)

1 Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Die in Heft 100 der Mitteilungen veröffentlichte Tagesordnung wird aus aktuellem Anlass (vorzeitiges Ausscheiden des Kassenprüfers Fritz Haselbeck) in Punkt 5: Wahlen um einen Unterpunkt „Kassenprüfer(in)“ ergänzt und ansonsten ohne Änderungen einstimmig angenommen. Ebenso einstimmig ohne Änderungswünsche angenommen wird das in Heft 99 veröffentlichte Protokoll der Mitgliederversammlung vom 7. 2. 2015 in Basel.

2 Bericht des Vorstands

2.1 *Wahrgenommene Termine im Rahmen der Vorstandstätigkeit (2015)*

Ort und wahrnehmende Person in Klammern:

23. 1. Gespräch mit der DMV-Spitze (gemeinsame Tagung Paderborn),
(Bielefeld, R. v. Hofe)

10. 2. ICME-Verein u. Vereinsvorstandssitzung
(Basel, S. Ruwisch, R. v. Hofe)

29. 3. MNU Bundesstagung
(Saarbrücken, R. v. Hofe)

11./12. 5. GFD Mitgliederversammlung
(Berlin, R. v. Hofe)

31. 8. Sitzung des Vorstands
(Frankfurt a.M., Vorstand)

1. 9. Gemeinsame Sitzung Vorstand und Beirat
(Frankfurt a. M., Vorstand und Beirat)

21. 9. ÖGFD-Symposium
(Klagenfurt, A. Vohns)

2.2 *Nachwuchsförderung*

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Heidelberg* geht Dank an Georg Bruckmaier, Andreas Frank, Kerstin Hein, Raja Herold-Blasius, Marcel Klinger, Mona-Lisa Maisano, Angel Mizzi, Julia Ollesch, Stefanie Rach, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Alexander Schüler-Meyer, Ulrike Siebert, Petra Tebaartz und Daniel Thurm.

Hans-Georg Weigand berichtet über das *GDM-Doktorandenkolloquium 2015* im Kloster Bronnbach (8. 9.–10. 9. 2015).Dank geht an die beteiligten Expert(inn)en (Lisa Hefendehl-Hebeker, Ulrich Kortenkamp, Silke Ruwisch und Hans-Georg Weigand).

Angelika Bikner-Asbahs berichtet über die *Summerschool 2015* in Bremen (14. 9.–17. 9. 2015). Dank geht an die Organisator(inn)en (Angelika Bikner-Ahsbahs, Daniela Behrens, Julia Lange) und die Expert(inn)en (Michèle Artigue, Angelika Bikner-Ahsbahs, Dagmar Bönig, Anna Susanne Steinweg, Nils Buchholtz, Dominik Leiss, Stanislaw Schukajlow, Anne Levin, Anke Lindmeier, Christine Knipping, David Reid, Maike Vollstedt, Michael Windzio).

Andreas Eichler lädt ein zur *Summerschool 2016* vom 29. 8.–2. 9. 2016 in Kassel, nähere Informationen: www.uni-kassel.de/go/summerschool16

2.3 Gemeinsame Kommissionen
Kommission für Lehrerbildung
Jürgen Roth berichtet: Aktuell sind (gewählt bis 2018) Timo Leuders, Susanne Prediger und Anna Susanne Steinweg als reguläre Mitglieder und Gabriele Kaiser, Jürgen Roth und Petra Scherer als stellvertretende Mitglieder gewählt. Die Aufgaben der Kommission bestehen grundsätzlich im Austausch über Entwicklungen in den einzelnen Bundesländern, der wissenschaftspolitischen Einflussnahme (z. B. in Form von Stellungnahmen) und in der Konzept-Arbeit (z. B. in Form von Fachtagungen und Publikationen). Die 5. Fachtagung zum Thema „Umgang mit Heterogenität in der Fachausbildung des Lehramtsstudiums Mathematik" wird im Frühjahr 2017 an der Universität Göttingen stattfinden.

Kommission „Übergang Schule–Hochschule"
Gilbert Greefrath berichtet: In der Kommission Schule-Hochschule der drei Fachverbände DMV, MNU und GDM sind in der aktuellen Amtsperiode als Vertreter der GDM Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath tätig, Regina Bruder und Christina Drüke-Noe sind Stellvertreterinnen. Die Kommission hat im September 2015 eine Podiumsdiskussion „Wie viel Mathematik brauchen Studierende der MINT-Fächer?" im Rahmen der DMV-Jahrestagung organisiert und sich in ihrer Sitzung im Oktober 2015 mit einer Diskussion über den KMK-Aufgabenpool beschäftigt. In Heft 100 der GDM-Mitteilungen ist ein ausführliches Interview mit den Sprechern der Kommission enthalten. Für Mai 2017 ist eine Tagung zum Thema „Mathematik in Schule und Hochschule – Wie groß ist die Lücke und wie gehen wir mit ihr um?" geplant.

2.4 Kommende Tagungen
Die nächsten Jahrestagungen der GDM finden statt in

2017: Potsdam (27. 2.–2. 3.)
2018 Paderborn (gemeinsam mit der DMV)
2019: Regensburg

Silke Ruwisch berichtet über den *International Congress on Mathematical Education* (ICME-13), der von der GDM als Veranstalterin getragen und vom 24.–31. 7. 2016 in Hamburg stattfinden wird: Feste Bestandteile des ICME sind u. a. die 54 Topic Study Groups mit jeweils einem Team-Mitglied aus den deutschsprachigen Ländern, 4 Hauptvorträge und zwei Podiumsdiskussionen. Neue Bestandteile des ICME-13 sind der Early Career Researcher Day (Sonntag, 24. 7.), Workshops und Discussion Groups und eine Lehrkräftetagung (27. 7.–29. 7.) in deutscher Sprache (mit geringerem Teilnahmebetrag). Stand 10. 3. waren ca. 1800 Teilnehmer(innen) angemeldet, davon allerdings erst 270 aus dem deutschsprachigen Raum, zur Lehrkräftetagung waren etwa 110 Teilnehmer(innen) angemeldet. Es wird dringend gebeten, für beide Veranstaltungen weiter zu werben. Nähere Informationen zu ICME-13 unter: http://icme13.org/

2.5 Bericht der Schriftführung
Andreas Vohns berichtet über Stand und Entwicklung der Mitgliederzahlen (Stichtag: 20. 1. 2016): Die GDM verfügt derzeit über 1094 Mitglieder. Im Jahr 2014 sind regulär zum 31. 12. 2014 62 Personen ausgetreten, zum 1. 1. 2014 sind 50 Personen neu eingetreten, zum 1. 1. 2015 bislang 26 Personen. Die gegenüber dem Vorjahr leicht erhöhte Zahl der Austritte ist u. a. auf eine größere Adressrecherche im Sommer 2015 zurückzuführen, bei der Mitglieder mit fehlenden Adressangaben gezielt ermittelt und kontaktiert wurden, wobei einige dieser Mitglieder diese Kontaktaufnahme dann zum Anlass der Kündigung genommen haben. Im Zuge dieser Recherche konnte andererseits für 125 Mitglieder eine bislang fehlende Emailadresse nachgetragen werden. Redaktionsschluss für die kommenden Hefte der Mitteilungen sind der 30. 5. und der 30. 11.2016.

3 Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

Bericht der Kassenführerin
Christine Bescherer berichtet: Die bereits in den letzten beiden Jahren festgestellte Entspannung der Kassenlage hat sich auch im Jahr 2015 bestätigt. Im Jahr 2015 standen Ausgaben in Höhe von € 115 925 Einnahmen in Höhe von € 103 862 gegenüber, zum 2. 3. 2016 befanden sich € 21 705,25 auf dem Konto der GDM. Die deutliche Überschreitung der geplanten Ausgaben für 2015 (€ 91 500) erklärt sich dadurch, dass der Beitrag zur Förderung der Planung und Durchführung des ICME für das Kalenderjahr 2016 bereits im Jahr 2015 überwiesen wurde. Sie erläutert ferner detaillierter die Zusammensetzung der Ausgabenposten. Für das Jahr 2016 sind nach derzeitigem Planungsstand Ausgaben in Höhe von ca. € 80 000 und Einnahmen in Höhe von € 100 000 zu erwarten. Christine Bescherer erinnert auch noch einmal daran, dass reduzierte Mitgliedsbeiträge für pensionierte Mitglieder rechtzeitig (bis April des Beitragsjahres) und für Nachwuchsmitglieder zudem jährlich neu zu beantragen sind. Sie weist zudem

darauf hin, dass der ICME-Zuschlag (€ 20 reguläre Mitglieder, € 18 reduziert für pensionierte Mitglieder) letztmalig 2016 mit den Mitgliedsbeiträgen eingehoben wird, ab 2017 sind wieder die reinen Mitgliedsbeiträge zu zahlen.

Aufgrund gesundheitlicher Probleme konnte der gewählte Kassenprüfer Fritz Haselbeck die Kasse nicht wie geplant im Rahmen der Jahrestagung prüfen. Für das kommende Jahr hatte er bereits zuvor erklärt, nicht mehr wieder als Kassenprüfer zur Verfügung zu stehen. Christine Bescherer bedankt sich im Namen des Vorstands für die im Rahmen seiner 10-jährigen Amtszeit immer sorgfältig durchgeführte Kassenprüfung.

Seitens des Vorstands wurden aufgrund der gebotenen Dringlichkeit im Rahmen der Vorstandssitzung am 6. 3. 2016 Anne Schneider und Guido Pinkernell (beide PH Heidelberg) kommissarisch mit der Prüfung der Kasse betraut. Die Mitgliederversammlung bestätigt die ersatzweise mit der Kassenprüfung betrauten Personen per Akklamation.

Bericht der Kassenprüfer(innen)
Guido Pinkernell und Anne Schneider berichten: Die Kasse wurde eingehend geprüft. Gegenstand der Prüfung waren der Anfangsbestand aus dem Jahr 2014 (1. 1. 2015), Einnahmen- und Ausgabenbelege mit den dazu gehörigen Rechnungen sowie der Jahresabschluss 2015. Das datumsgemäß geordnete Kassenjournal, die Kontoauszüge der Bank und die Rechnungsbelege stimmen in Termindaten und aufgeführten € -Beträgen voll überein. Buchungsklassen und Wertstellungen sind im Kassenjournal genau dokumentiert. Die Rechnungsbeträge sind im Konto-Korrent vom 1. 1.–31. 12. 2015 sachlich korrekt verbucht, die Nachweise für Einnahmen und Ausgaben sind vollständig abgeheftet. Die Bearbeitung des GDM-Kontos erfolgte gründlich und gewissenhaft, die Anlage des Kontodepots von Frau Bescherer zum Rechnungsjahr 2015 liegt übersichtlich und klar vor.

Die Kassenprüferin und der Kassenprüfer empfehlen unter diesen Bedingungen die Entlastung der Vorstandschaft und der Kassenführerin.

4 Entlastung des Vorstands

Lisa Hefendehl-Hebeker empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei vier Enthaltungen zugestimmt.

5 Wahlen

Kassenprüfer
Rudolf Sträßer wird als Kassenprüfer vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Rudolf Sträßer wird per Akklamation gewählt und nimmt die Wahl an.

2. Vorsitz
Silke Ruwisch wird zur Wiederwahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Silke Ruwisch wird wiedergewählt (Ja-Stimmen: 122, Nein-Stimmen: eine, Enthaltungen: 2, Ungültige Stimmen: keine). Silke Ruwisch nimmt die Wahl an.

Schriftführung
Andreas Vohns wird zur Wiederwahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Andreas Vohns wird wiedergewählt (Ja-Stimmen: 123, Nein-Stimmen: 2, Enthaltungen: 1, Ungültige Stimmen: keine). Andreas Vohns nimmt die Wahl an.

Beirat
Es scheiden aus (Wiederwahl bei allen Personen möglich): Andreas Eichler, Stefanie Rach, Maike Vollstedt, Hans-Georg Weigand.

Es kandidieren: Andreas Eichler, Gabriele Kaiser, Guido Pinkernell, Stefanie Rach, Maike Vollstedt.

Gewählt werden: Andreas Eichler (113 Stimmen), Stefanie Rach (92 Stimmen), Guido Pinkernell (78 Stimmen) und Maike Vollstedt (78 Stimmen). Gabriele Kaiser (61 Stimmen) wird nicht gewählt.

Alle gewählten Personen nehmen die Wahl an.

JMD-Herausgeber(innen)
Petra Scherer scheidet zum 31. 12. 2016 aus dem Herausgeber(innen)gremium aus, Hedwig Gasteiger wurde im Beirat als ihre Nachfolgerin gewählt.

JMD-Beratungskomitee
Aus dem Beratungskomitee durch Wahl zur Herausgeber(in) ausscheiden muss zum 31. 12. 2016 Hedwig Gasteiger, zudem enden zum 31. 12. 2016 die Amtsperioden von Elisabeth Moser Opitz und Alexander Renkl. Für diese drei frei werdenden Posten wurden für die nächste Periode (bis 31. 12. 2019) im Beirat Elisabeth Moser Opitz, Matthias Nückles und Petra Scherer gewählt.

6 MathEduc und Madipedia

Ulrich Kortenkamp berichtet: Ziel von *MathEduc* ist eine möglichst vollständige Erfassung des mathematikdidaktischen Literaturbestandes. Derzeit umfasst MathEduc über 165.000 Einzeleinträge, darunter gut 3000 Bücher, jährlich werden etwa 6000 neue Einträge aufgenommen. Da alle Einträge möglichst auch mit kurzen Inhaltsangaben/Rezensionen versehen wurden, werden besondere Incentives für Reviews (rezensierte Bücher dürfen behalten werden, kleine finanzielle Vergütung, Rabatte beim Kauf von Springer Büchern) ausgelobt. Reviewer für MathEduc werden laufend gesucht.

Madipedia als zentrales Nachschlagewerk zur Mathematikdidaktik im Internet umfasst derzeit knapp 600 Personeneinträge, sowie gut 850 verzeichnete Dissertationen. Es wurden daneben auch bereits gut 80 Enzyklopädieartikel zu mathematikdidaktischen Themen eingepflegt. Zur Gewinnung neuer Enzyklopädieartikel wird im Frühjahr/Sommer 2016 noch eine besondere Aktion gestartet, über die rechtzeitig per Email informiert wird.

7 Zeitschriften

7.1 Journal für Mathematik-Didaktik

Petra-Scherer berichtet: 2014 verfügten 5413 Institutionen weltweit über einen Online-Zugang zum JMD, was in etwa einer Verdoppelung seit 2010 entspricht, die Zahl erfolgreicher Downloadversuche hat sich zwischen 2012 und 2015 von 4500 auf 20 500 beinahe vervierfacht. Die derzeitige Heftplanung sieht für das Jahr 2016 zwei Hefte mit spezifischem Themenschwerpunkt (1/2016: Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung (in memoriam Arnold Kirsch); 1a/2016: Subject matter analysis from a didactical perspective (Stoffdidaktik)) vor. Das zweite dieser Hefte (1a/2016) stellt eine Sonderausgabe aus Anlass des ICME in Hamburg dar. Das nächste Heft mit Themenschwerpunkt wird dann (nach einem offenen Call für ein Thema) Heft 1/2018 (Psychologische Theorien in der Mathematikdidaktik (vorläufiger Titel)) sein. Petra Scherer weist darauf hin, dass Beiträge in diesen thematisch definierten Heften dem gleichen Review-Verfahren unterliegen wie die weiterhin möglichen und erwünschten Einzelbeiträge zu thematisch ungebundenen Heften des JMD. Im Reviewverfahren haben sich zwei Änderungen ergeben: Die Option eines Pre-Reviews für voraussichtlich stark änderungsbedürftige Manuskripte zur Entlastung des Reviewerpools wurde eingeführt und bereits einmalig angewendet und die Bewertungskategorie „major revision“ in „acceptable after major revision“ und „worthy of reconsideration after major revision“ aufgeteilt, wobei die erste der neuen Unterkategorien kein neuerliches vollständiges Begutachtungsverfahren erfordert. Zur Erhöhung der Zahl qualitativ hoher Einreichung von insbesondere jüngeren Forscher(inne)n wurde auf der GDM Jahrestagung 2015 ein Vortrag im Rahmen des Nachwuchsprogramms gehalten, auf der Jahrestagung 2016 ein Workshop zur Manuskriptererstellung. Ein weiterer solcher Workshop ist für den Herbst 2016 geplant.

Rudolf vom Hofe und Silke Ruwisch danken Petra Scherer als scheidender Herausgeberin des JMD für ihre Arbeit, Petra Scherer bedankt sich bei ihren bisherigen Mitherausgebern, auch dem Ende 2015 ausgeschiedenen Rolf Biehler.

7.2 ZDM

Silke Ruwisch informiert stellvertretend für Gabriele Kaiser über die Entwicklungen beim ZDM: Im Jahr 2015 erschienen insgesamt 7 Ausgaben des ZDM mit einem Umfang von gut 1300 Seiten. Die Zahl erfolgreicher Downloadversuche hat sich von 53 000 in 2012 auf 102 600 in 2015 annähernd verdoppelt. Die Online-Fassung wird mit 31 % der Zugriffe aus dem asiatisch-pazifischen Raum am häufigsten aufgerufen, gefolgt von 30 % aus Europa und 23 % aus den USA.

7.3 mathematica didactica

Andreas Eichler berichtet über Herausgabemodalitäten sowie Stand und Entwicklung der Beitrageinreichungen zu mathematica didactica: Im Jahr 2015/16 wurden 14 Einzelbeiträge publiziert, eingereicht wurden 16. Im Jahr 2016 sollen zwei Themenhefte (Problemlösen, Überzeugungen von Lehrkräften) erscheinen. Wilfried Herget und Anselm Lambert sind aus dem Herausgeberteam ausgeschieden, Katja Lengnink und Benjamin Rott sind neu in das Team aufgenommen worden.

7.4 Der Mathematikunterricht (MU)

Andreas Vohns berichtet stellvertretend für Henning Körner: Der MU ist die älteste deutschsprachige Zeitschrift zur Mathematikdidaktik. Herausgeber sind Stefan Deschauer, Henning Körner und Jörg Meyer. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zur Unterrichtspraxis. Bis Anfang/Mitte 2017 ist man thematisch bereits ausgebucht, danach weiterhin an Gastherausgeber(inne)n interessiert.

8 Verschiedenes

Auf Nachfrage aus der Mitgliederversammlung erläutert der Erste Vorsitzende, dass der Förderpreis der GDM 2016 nicht vergeben wird, sondern die Einreichfrist um ein Jahr verlängert wurde.

Ullrich Kortenkamp lädt alle Mitglieder herzlich zur GDM Jahrestagung 2017 in Potsdam ein, die vom 27. 2.–3. 3. am Standort Potsdam Griebnitzsee stattfinden wird.

Protokoll: Andreas Vohns

Arbeitskreis: Empirische Bildungsforschung

Bericht von der Frühjahrstagung in Hannover, 29.–30. 4. 2016

Gabriele Kaiser und Timo Leuders

Bericht zur Frühjahrstagung 2016

Am 29. und 30. April 2016 veranstaltete der Arbeitskreis „Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik" seine Frühjahrstagung in Hannover mit fast 40 Teilnehmenden. Der Arbeitskreis widmet sich Themen der empirischen Bildungsforschung in der ganzen Breite und befasst sich dabei auch immer wieder mit aktuellen bildungspolitischen Entwicklungen, insbesondere im Bereich der Bildungsstandards. So bestand auch diese Tagung wieder aus zwei Schwerpunkten: einerseits der Vorstellung und Diskussion von drei empirischen Projekten zu Kompetenzen von Lehrkräften (Hannah Heinrichs, Jessica Hoth, Claudia Lazarevic, alle Universität Hamburg) und andererseits der Präsentation und Diskussion von zwei Aktivitäten im Kontext der Bildungsstandards: der Arbeit an der Aufgabenentwicklung zu den deutschen Abiturstandards (Werner Blum, Gilbert Greefrath) und zur schriftlichen Reifeprüfung in Österreich (Regina Bruder, Torsten Linnemann, Eva Sattlberger, Hans-Stefan Siller, Jan Steinfeld).

Während die empirischen Projekte durch wissenschaftliche Veröffentlichungen verfügbar sind bzw. in Kürze verfügbar sein werden, sind bildungspolitische Maßnahmen oft nicht so gut dokumentiert. Daher möchten wir an dieser Stelle den beiden Teams danken, dass sie den aktuellen Diskurs in Berichten an dieser Stelle wiedergeben.

Bericht 1: Das O-M-A-Kompetenzstufen-Modell – Ergebnisse aus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung 2015 in Mathematik (Österreich) (Regina Bruder; Torsten Linnemann, Eva Sattlberger, Hans-Stefan Siller, Jan Steinfeld)

Wenn sich ein ganzes Land auf den Weg macht, um von bislang dezentralen schriftlichen Reifeprüfungen auf eine zentrale schriftliche Reifeprüfung umzustellen und dafür auch ein elaboriertes Konzept zugrunde legt (vgl. https://www.bifie.at/node/1442), dann erhalten nicht nur der dahinter stehende Entwicklungsprozess, sondern auch die ersten Prüfungsaufgaben und -ergebnisse besondere Aufmerksamkeit. In Österreich fand nach einer mehrjährigen Vorbereitungsphase im Mai 2015 die erste flächendeckende schriftliche standardisierte Reifeprüfung an 324 Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) mit 17490 Kandidatinnen und Kandidaten statt.

Im Vortrag lag der Schwerpunkt auf den Prüfungsergebnissen in Verbindung mit einem theoretischen Kompetenzstufenmodell O-M-A (Operieren – Modellieren – Argumentieren), das von Siller, Bruder, Linnemann und Hascher im Auftrage des Bifie (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens) entwickelt wurde (s. Siller, Bruder, Hascher, Linnemann, Steinfeld & Sattlberger 2016). Aufgabe dieses mit jeweils vier Ausprägungsstufen grobmaschig konzipierten Stufenmodells ist u. a. die Sicherung einer Vergleichbarkeit der Prüfungsanforderungen im Längsschnitt. Eva Sattlberger (Bifie) beschrieb nach Einblicken in den Entwicklungsprozess zur zentralen Reifeprüfung den Umgang mit dem O-M-A-Modell an Aufgabenbeispielen aus der ersten zentralen Reifeprüfung 2015. Thematisiert wurden auch Ratingschwierigkeiten, da Aufgaben, die durch Training vertraut waren, mitunter bessere Ergebnisse erzielt haben als im theoretischen Modell erwartet wurde. Solche curricularen Effekte führten in der Folge zu Problemen die empirische Evidenz für eine dimensionale Trennung der drei Handlungsaspekte Operieren, Modellieren und Argumentieren – zumindest in den unteren Schwierigkeitsstufen – aufzuzeigen. Jan Steinfeld (Bifie) gab zunächst Einblicke in die aufgabenbezogenen Prüfungsergebnisse in der großen Kohorte und dann in das gestufte Vorgehen zur psychometrischen Modellierung, um die Beziehungen der Aufgaben untereinander besser zu verstehen. Unter der Annahme, dass die betrachteten Aufgaben inhaltlich zusammenhängen, deuten die Daten darauf hin, dass eine dimensionale Trennung bei den drei Handlungsaspekten besteht.

In der anschließenden Diskussion ging es einerseits um den theoretischen Hintergrund der gewählten Kompetenzstufenmodellierung und um die gewählten Begrifflichkeiten (z. B. wie viel „Modellieren" beinhaltet der österreichische Ansatz der Kompetenzstufenmodellierung bzw. enthalten die definierten Grundkompetenzen). Andererseits wurden einige der in den Diskussionsbeiträgen in den DMV- und GDM-Mitteilungen bereits veröffentlichten Kommentare zur österreichischen Reifeprüfung aufgegriffen. In Bezug auf

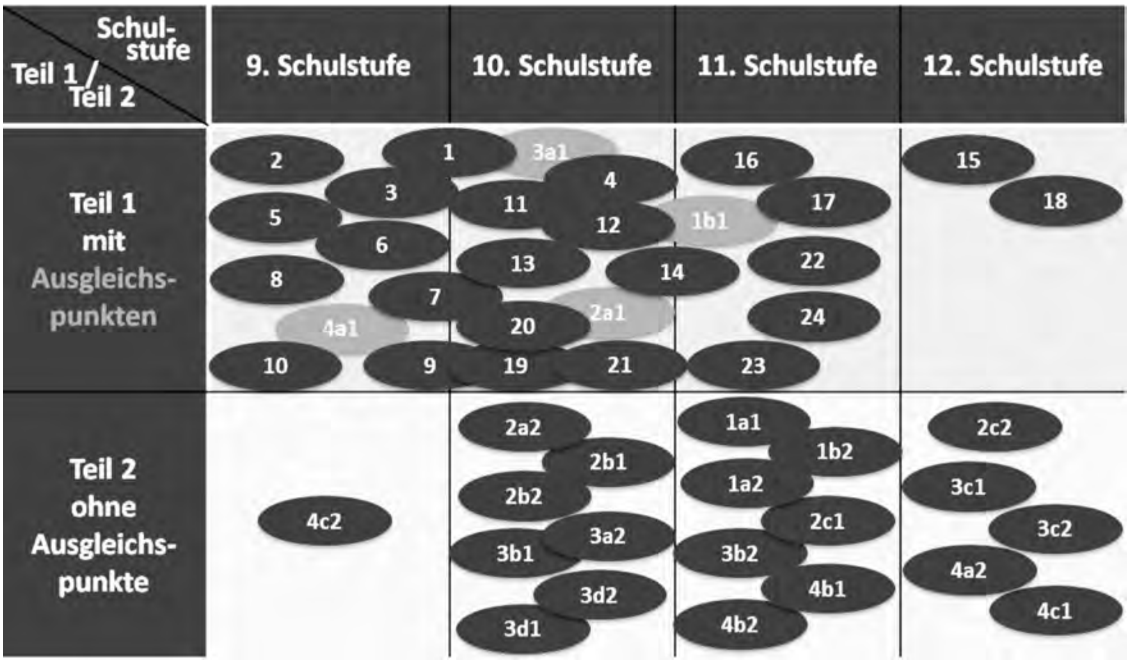


Abbildung 1. Schulstufenzuordnung Haupttermin 2015

die Leistungsvoraussetzungen wies Eva Sattlberger darauf hin, dass eine Zulassung zur Reifeprüfung ohne eine Bewältigung der Anforderungen in der gymnasialen Oberstufe gar nicht möglich sei. Insofern müssen die Inhalte der Oberstufe gelernt und in Tests nachgewiesen worden sein. Damit rückt der bildungstheoretisch legitimierte Ansatz der standardisierten Reifeprüfung in ein anderes Licht. In dieser Prüfung sollen mathematische Grundkompetenzen nachgewiesen werden, die stringent auf grundlegenden Lerninhalten der Sekundarstufe I aufbauen. Interessanterweise werden in der österreichischen Reifeprüfung gerade solche Wissens- und Könnenselemente geprüft, deren fehlende Verfügbarkeit in den weiterführenden Bildungseinrichtungen Deutschlands derzeit so sehr beklagt werden und in der Schweiz im Frühjahr 2016 in den Rahmenlehrplan zur Maturität aufgenommen wurden (basale Studierkompetenzen). Abbildung 1 zeigt die Zuordnung der Prüfungsaufgaben von 2015 zu den Schuljahren, in denen die relevanten mathematischen Inhalte Gegenstand sind.

Künftig gilt es weiter zu verfolgen, welche Steuerungswirkung die österreichische standardisierte schriftliche Reifeprüfung auf den Unterricht entfaltet und inwiefern sich das theoretische Kompetenzstufenmodell noch weiter verifizieren lässt.

Literatur

Siller, H.-St.; Bruder, R.; Hascher, T.; Linnemann, T.; Steinfeld, J.; Sattlberger, E. (2016). Competency level modelling for school leaving examination. In K. Krainer; N. Vondrová (Eds.). CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic. (pp. 2716–2723), Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Bericht 2: Entwicklung kompetenzorientierter Abituraufgaben im Fach Mathematik (Gilbert Greefrath & Werner Blum)

Einführung

Seit mehr als zwei Jahren wird an der Erstellung eines Abituraufgabenpools im Fach Mathematik für alle Bundesländer in Deutschland gearbeitet. Ein solcher Aufgabenpool, dessen Erstellung durch Experten aus allen Bundesländern vom Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen in Berlin koordiniert wird, ist Teil der Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring. Für die Abiturprüfungsaufgaben wird durch die Erstellung eines zentralen Pools „eine besondere Strategie gewählt, die vergleichbare und standardbezogene Anforderungen in den Abiturprüfungen der Länder gewährleisten soll und sich von der Überprüfung der Bildungsstandards in der Primar- und Sekundarstufe I unterscheidet." (KMK 2015). Eine empirische Überprüfung der Standards für die Allgemeine Hochschulreife ist allerdings – im Gegensatz zum Vorgehen bei den Standards für die Sekundarstufe I – nicht vorgesehen, was insbesondere die Erstellung eines Katalogs von unverzichtbaren Basiskompetenzen erschwert.

In ihren Vorträgen „Abituraufgaben in Zeiten von Bildungsstandards“ (G. Greefrath) und „Modellieren in Abituraufgaben – Möglichkeiten und Grenzen“ (W. Blum) haben die beiden Autoren im Arbeitskreis über die aktuellen Arbeiten am Aufgabenpool informiert und einige konkrete Fragen in diesem Zusammenhang diskutiert.

Abituraufgabenpool
Im Juni 2013 hat die Kultusministerkonferenz den Aufbau eines gemeinsamen Pools von Abiturprüfungsaufgaben für die Jahre ab 2017 beschlossen, mit den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife als inhaltliche Grundlage. Die Leistungsanforderungen in den Ländern sollten so schrittwiese angeglichen werden. Zurzeit gibt es in den Bundesländern sehr unterschiedlichen Rahmenbedingungen bei den Abiturprüfungen im Fach Mathematik. Beispielsweise werden unterschiedliche digitale oder weitere Hilfsmittel vorgeschrieben, die Bewertungseinheiten und ihre Umsetzung in Notenpunkte ist ganz verschieden und es gibt unterschiedliche Regelungen zur Arbeitszeit sowie zur Anzahl und Auswahl der Aufgaben.

Der entwickelte Abituraufgabenpool wird im Jahr 2017 erstmals eingesetzt. Es gibt bereits aktuell Beispielaufgaben, die die Struktur der Aufgaben erläutern und die Vorgaben aus den Bildungsstandards verdeutlichen (s. www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik). Die für eine Abiturprüfung ausgewählten Aufgaben sollen laut Bildungsstandards Bezug auf mindestens zwei der mathematischen Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik nehmen und sich nicht nur auf die Inhalte eines Schulhalbjahres beschränken. Mindestens ein Drittel der Anforderungen muss sich auf Analysis beziehen und die beiden anderen Sachgebiete dürfen nicht über mehrere Jahre ausgeschlossen werden (KMK 2012, S. 24). Dies ist zwar mehr, als bisher in einigen Ländern üblich war, aber weniger als das, was die Fachverbände immer gefordert haben, nämlich dass alle drei Sachgebiete immer im Abitur vorkommen sollen.

Möglichkeiten im Rahmen der Bildungsstandards
Die Bildungsstandards bieten gemäß ihrer Konzeption vielfältige Möglichkeiten für die Erstellung von Abituraufgaben. Dabei ist die Vielfalt bezogen auf die Sachgebiete, die allgemeinen mathematischen Kompetenzen und die Anforderungsbereiche der Aufgaben ein wichtiges Ziel. Dies ist auch eines der Prinzipien für die aktuelle Aufgabenerstellung am IQB. So sind also Aufgaben zum „technischen Arbeiten“ ebenso möglich wie Aufgaben zu mathematischen Begründungen, zum Problemlösen oder zur Förderung der Fachsprache. Im Rahmen der Bildungsstandards sind aber auch weitere Aufgabentypen denkbar, die zurzeit nicht in die Sammlung der Beispielaufgaben aufgenommen wurden. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist ein sog. „mathematischer Aufsatz“. Eine Aufgabenstellung könnte etwa sein: „Erläutern Sie in einem Text (15–20 Zeilen) Extrempunkte von Funktionsgraphen. Gehen Sie auf unterschiedliche Arten von Extrempunkten und mögliche Nachweismethoden ein. Beschreiben Sie den Nutzen der Kenntnis von Extrema beim Arbeiten mit Funktionen.“ (Heintz, Drüke-Noe, & Greefrath 2015, S. 176). Eine solche Aufgabenstellung böte trotz zentraler Prüfungen die Möglichkeit, eigene Schwerpunkte zu setzen und ein Themengebiet unterschiedlich intensiv und individuell strukturiert darzustellen. Sie schafft zudem die Möglichkeit, den produktiven Teil der Kompetenz des mathematischen Kommunizierens verstärkt anzusprechen. Das Beispiel zeigt, dass trotz der aktuellen Bemühungen, eine Vielfalt an Inhalten aus den verschiedenen Sachgebieten anzusprechen und alle allgemeinen Kompetenzen zu berücksichtigen, noch viele weitere Möglichkeiten für zentrale Abituraufgaben gemäß den Bildungsstandards bestehen.

Es ist allerdings zu bedenken, dass an Abituraufgaben vielfältige Ansprüche gestellt werden, deren gleichzeitige Erfüllung nicht immer leicht möglich ist. So sollte eine Prüfungsaufgabe nicht nur die in den Bildungsstandards ausgewiesenen Anforderungs- und Inhaltsbereiche abdecken und ein ausgewogenes Spektrum prozessbezogener Kompetenzen aufweisen, sondern zudem auch inner- und außermathematische Kontexte berücksichtigen, struktur-, anwendungs- und problemorientiert sein, mit Texten und Sprache sinnvoll umgehen und digitale Werkzeuge sinnvoll nutzen (Heintz et al. 2015, S. 178). Zusätzlich sollen Teilaufgaben in einem sinnvollen Zusammenhang miteinander stehen und gleichzeitig so gestaltet sein, dass eine Fehlleistung in einer Teilaufgabe nicht die Bearbeitung der weiteren Teilaufgaben deutlich erschwert (KMK 2012, S. 24). All dies ist gemeint, wenn kurz von „kompetenzorientierten Abituraufgaben“ gesprochen wird.

Digitale Mathematikwerkzeuge
In Bezug auf die Verwendung von digitalen Mathematikwerkzeugen als Hilfsmittel werden im zentralen Aufgabenpool grundsätzlich zwei Teile vorgesehen werden. In einem Prüfungsteil A, der 45 Minuten dauert, sind Aufgaben, für deren Bearbeitung eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht erlaubt ist. Zum Prüfungsteil B, für den eine Bearbeitungszeit von 225 Minuten im erhöhten Niveau und von 180 Minuten im grundlegenden Niveau vorgesehen ist, gehören Aufgaben, für deren Be-

arbeitung ein digitales Hilfsmittel vorgesehen ist. Als Aufgaben, die mit digitalen Hilfsmitteln bearbeitet werden können, sind zwei Varianten vorgesehen, die die Länder jeweils auswählen können. Eine Variante besteht aus Aufgaben, die mit einem einfachen wissenschaftlichen Taschenrechner bearbeitet werden können, und die andere Variante aus Aufgaben, die mit einem Computeralgebrasystem bearbeitet werden können. In Einzelfällen hat die Einordnung der Aufgaben in Prüfungsteil A oder B deutliche Auswirkungen auf die zu prüfenden Kompetenzen. Während bei einigen Aufgaben, bei denen die Hilfsmittelverwendung keine Vorteile bringt, die Zuordnung zu den Gruppen kaum Auswirkungen hat, kann bei anderen Aufgaben durch die Zuordnung ein bestimmter Lösungsweg besonders gefordert oder auch die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten deutlich vergrößert werden. Wenn einzelne Länder andere digitale Werkzeuge verwenden wollen, müssen die Aufgaben aus dem Pool entsprechend angepasst werden.

Das Ziel der Verwendung dieser digitalen Mathematikwerkzeuge ist in jedem Fall nicht die Überprüfung der Bedienkompetenz dieser Werkzeuge, sondern die Überprüfung der in den Bildungsstandards geforderten mathematischen Kompetenzen. Zu genaueren Ausgestaltung der Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge sind allerdings weitere Vorgaben durch die Bundesländer erforderlich, z. B. welche Geräte genau verwendet werden dürfen und über welche Funktionalitäten die Werkzeuge genau verfügen sollen.

Anwendungen und Modellieren

Die vielfältigen Anforderungen an Prüfungsaufgaben führen in Aufgaben mit Anwendungssituationen und Modellierungen zu besonderen Herausforderungen, die z. B. so gelöst werden können, dass Anwendungssituationen in Prüfungsaufgaben nur vorkommen, soweit sie einen authentischen Mathematikgebrauch darstellen oder wenn sie Vorteile bei der Problemerschließung bieten. Aufgaben für die Prüfung werden in der Regel kleinschrittiger aufgebaut sein als Aufgaben für den Unterricht. Daher ist es schwierig, wirklich authentische Anwendungen in Prüfungsaufgaben zu verwenden. Insofern können u. E. nur Teilschritte des Modellierungskreislaufs in Prüfungsaufgaben aufgenommen werden. Wenn man vermeiden will, dass nur bloße Einkleidungen statt echter Anwendungen verwendet werden, führt dies in der Praxis zu einer stärkeren Trennung von Kalkül und Modellierung in Prüfungsaufgaben (Greefrath, Leuders, & Pallack 2008). Die bisherige Praxis der Abituraufgaben in Bezug auf Modellierungsanteile ist ganz unterschiedlich. In vielen Ländern kommen nur Einkleidungen vor, in deren Rahmen kleine lokale Mathematisierungen oder Interpretationen erforderlich sind, während am anderen Ende des Spektrums Hamburg seit vielen Jahren sämtliche Abituraufgaben in Anwendungskontexte einbettet, teilweise mit umfangreichen Sachtexten, und viele Modellierungsanforderungen verlangt.

Folgende Prinzipien für die in Abituraufgaben abzufragenden Modellierungsanforderungen erscheinen uns vernünftig, wobei deren Berücksichtigung im derzeitigen zentralen Aufgabenpool erst in Teilen erreicht ist, auch weil dies eine spürbare Änderung der Praxis in eingen Bundesländern bedeutet:

- Modellieren kann und muss auch in der Abiturprüfung gefordert werden, beschränkt auf die wesentlichen Teilkompetenzen: Verstehen einer Sachsituation, Vereinfachen/Strukturieren, Mathematisieren, Interpretieren, Validieren/Beurteilen.
- Im Abitur müssen auch innermathematische Kontexte vorkommen.
- Außermathematische Kontexte und zugehörige Fragestellungen müssen auch im Abitur stimmig und grundsätzlich glaubwürdig (wenn auch nicht authentisch) sein; Einkleidungen sollen als solche erkennbar sein; die Kontexte müssen grundsätzlich bekannt sein.
- Der Aufwand beim Textlesen muss in einem angemessenen Verhältnis zum Aufwand beim Modellieren und beim mathematischen Arbeiten stehen.

Im Unterricht muss hingegen das volle Spektrum von Kompetenzen und Teilkompetenzen des Modellierens auf allen Anforderungsbereichen behandelt werden, auch umfassende Modellierungsprozesse.

Entscheidend ist eine insgesamt breite und ausgewogene Berücksichtigung der verschiedenen Kompetenzen und Anforderungsbereiche in der Abiturprüfung.

Fazit

Der entwickelte Abituraufgabenpool bietet ab 2017 erstmals länderübergreifende Abituraufgaben mit Hilfsmitteln an und ermöglicht – abhängig von der tatsächlichen Verwendung der Aufgaben in den einzelnen Ländern – eine bessere Vergleichbarkeit über die Ländergrenzen hinweg. Auch wenn sicherlich noch eine weitere Optimierung (z. B. bzgl. Terminen, Hilfsmitteln, Klausurlängen, Aufgabenauswahl, etc.) möglich ist, liegt hier u. E. ein gutes und ausbaufähiges Modell für deutschlandweite Abiturprüfungsaufgaben im Fach Mathematik vor.

Die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit und der Verbände ist dabei weiterhin sehr sinnvoll und notwendig, um die Chancen für eine höhere Verbindlichkeit und eine größere Vergleichbarkeit der Abituranforderungen auch tatsächlich weitestgehend nutzen zu können. Insbesondere muss im ersten Jahr der Nutzung des Pools, also 2017, darauf geachtet werden, wie die Länder mit dem Pool umgehen, d. h. wie ernst sie ihre Selbstverpflichtung nehmen, durch Nutzung der Aufgaben aus dem Pool eine höhere Verbindlichkeit und größere Vergleichbarkeit zu erreichen und so zur Umsetzung der Bildungsstandards beizutragen.

Literatur

Greefrath, G., Leuders, T., Pallack, A. (2008). Gute Abituraufgaben – (ob) mit oder ohne Neue Medien, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 61 Bd. 2, 79–83

Heintz, G., Drüke-Noe, C., Greefrath, G. (2015). Abituraufgaben im Sinne der Bildungsstandards, in: W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe & A. Roppelt (Hrsg.). Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II (S. 171–180), Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

KMK (2012) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Zugriff am 15. 5. 2015 unter www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

KMK (2015) = Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2015). Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring (Beschluss der 350. Kultusministerkonferenz vom 11.06.2015). Zugriff am 15. 5. 2016 unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2015/2015_06_11-Gesamtstrategie-Bildungsmonitoring.pdf

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg, Fakultät EPB – für Erziehungswissenschaft, Psychologie und Bewegungswissenschaft, Von-Melle-Park 8, 20146 Hamburg,
Email: Gabriele.Kaiser@uni-hamburg.de

Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg, IMBF, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg,
Email: leuders@ph-freiburg.de

Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

Einladung zur Herbsttagung in Frankfurt am Main, 28.–29. 10. 2016

Renate Motzer

Einer der Schwerpunkte wird im Kontext von Heterogenität im Mathematikunterricht die Frage nach der Gestaltung „gendersensiblen Mathematikunterrichts“ sein. Leisten interdisziplinäre oder historische Themen im Mathematikunterricht einen Beitrag?

Neben diesem Schwerpunkt freuen wir uns auf weitere Beiträge aus dem Kreis der Teilnehmenden. Dies kann zu unserem Schwerpunktthema „Gendersensibler Mathematikunterricht“ sein, aber auch andere empirische Fragestellungen oder Beispiele aus der Praxis zum Thema „Gender (Frauen) und Mathematik“ sind herzlich willkommen.

Das Tagungsprogramm und die Anmeldemodalitäten werden veröffentlicht unter www.math.uni-augsburg.de/projekte/ak_frau_math/aktuelles/.

Der Zeitplan sieht vor, dass die Tagung von Freitag um 14.00 Uhr beginnt und spätestens Samstag um 17.00 Uhr endet.

Für den Freitagnachmittag werden auch Lehrkräfte zum Thema „Gendersensibler Mathematikunterricht“ eingeladen.

Für Rückfragen wenden Sie sich an die Arbeitskreissprecherin Renate Motzer (renate.motzer@math.uni-augsburg.de) oder an die Organisatorin der Tagung Rose Vogel (vogel@math.uni-frankfurt.de).

Renate Motzer, Universität Augsburg,
Universitätsstraße 10, 86135 Augsburg
Email: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis: Grundschule

Einladung zur Herbsttagung in Bad Salzdetfurth, 11.–13. 11. 2016

Claudia Lack

Der Arbeitskreis Grundschule blickt inzwischen auf eine 25jährige Tradition zurück. Er wurde 1991 auf Anregung von Hendrik Radatz gegründet. Ziel ist die stetige Weiterentwicklung der Didaktik der Grundschulmathematik. Der im Arbeitskreis etablierte kontinuierliche Dialog zwischen Schulpraxis, allen Phasen der Lehreraus- und Weiterbildung sowie der Schulverwaltung unterstützt und bereichert dieses Bestreben. Inzwischen engagieren sich über 150 Personen aktiv. Die inhaltliche Diskussion findet in erster Linie auf der jährlichen Herbsttagung statt. Seit 2011 wird zu jeder Tagung ein Tagungsband herausgegeben. Er erscheint in der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule" der UBP (University of Bamberg Press) unter dem Titel der Tagung und wird von Anna Susanne Steinweg (Bamberg) herausgegeben. Über OPUS (http://opus-bayern.de/uni-bamberg/) besteht Zugang zur elektronischen Version.

Die nächste Herbsttagung wird vom 11. November bis zum 13. November 2016 in Bad Salzdetfurth stattfinden. Sie widmet sich dem Thema „Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten". Neben vier Hauptvorträgen von Uta Häsel-Weide, Natascha Korff, Juliane Leuders sowie Elisabeth Moser-Opitz werden auch wieder die bewährten thematischen Arbeitsgruppen zusammenkommen. Hier haben Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler die Gelegenheit, ihre laufenden Projekte vorzustellen. Weitere Informationen: http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/. Der Arbeitskreis freut sich auf eine interessante Tagung und lädt alle Interessierten herzlich ein.

Der Sprecherrat des Arbeitskreises Grundschule: Hedwig Gasteiger, Claudia Lack, Christof Schreiber, Sebastian Wartha

Claudia Lack, Universität Paderborn, Institut für Mathematik EIM, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: cl.lack@web.de

Arbeitskreis: Lehr–Lern-Labore

Einladung zur Herbsttagung in Gießen, 23.–24. 9. 2016

Jürgen Roth, Katja Lengnink und Ann-Katrin Brüning

Am 23. und 24. September 2016 findet die zweite Herbsttagung des Arbeitskreises Lehr–Lern-Labore an der Justus-Liebig-Universität Gießen statt. Dazu laden wir Sie herzlich ein.

An immer mehr Universitätsstandorten gibt es „Lehr–Lern-Labore Mathematik", die Schülerinnen und Schüler mit Studierenden und Forschenden zusammenbringen. Mit der Vielfalt an Aktivitäten solcher außerschulischer Lernorte und Ideen zu ihrer Vernetzung setzt sich der Arbeitskreis Lehr–Lern-Labore (http://ak-lll.mathe-labor.de/) der GDM auseinander, der im Herbst 2015 in Landau gegründet wurde. Die erste Herbsttagung in Landau hat sich mit dem allgemeinen Einblick in die Aktivitäten zu Lehr-Lern-Laboren an den unterschiedlichen Standorten befasst.

Mit den Lehr-Lern-Laboren werden danach in der Regel mehrere Ziele verfolgt:

– Schülerlabore bzw. Lernwerkstätten dienen als außerschulische Lernorte für Mathematik, mit dem Ziel, das Interesse von Schülerinnen und Schülern an Mathematik zu wecken und/oder zu fördern sowie die mathematisches Denken und Arbeiten authentisch erlebbar zu machen. Der Fokus kann dabei auf sehr unterschiedlichen Zielgruppen liegen.
– Lehr-Lern-Labore ermöglichen eine theorie- und forschungsbasierte sowie praxisnahe Ausbildung von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik.
– Lehr-Lern-Labore fungieren als Forschungsumgebung für fachdidaktische und bildungswissenschaftliche empirische Forschung im Sinne einer zyklischen fachdidaktischen Entwicklungsforschung. Durch den direkten Einbezug von Schülerinnen und Schülern wird die Praxisrelevanz der fachdidaktischen Forschung sichergestellt. Darüber hinaus können in der Labor-

umgebung sehr gezielt Einflussvariablen für den Lernprozess variiert und kontrolliert werden.

Auf der kommenden Herbsttagung sollen nun die Forschungsaktivitäten und -methoden im Rahmen der Lehr–Lern-Labore an den einzelnen Standorten fokussiert werden. Dafür ist jeder teilnehmende Standort eingeladen, ein Plakat zu entwerfen, das die Forschungsaktivitäten im Überblick darstellt.

Nähere Informationen zur Anmeldung und zum Tagungsprogramm: http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore_Mathematik

Jürgen Roth, Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik, Universität Koblenz-Landau, Fortstraße 7, 76829 Landau, Email: roth@uni-landau.de

Katja Lengnink , Institut für Didaktik der Mathematik, Justus-Liebig-Universität Gießen, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen,
Email: katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Ann-Katrin Brüning, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik, Universität Münster, Fliednerstraße 21, 48149 Münster, Email: a_brue22@uni-muenster.de

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Einladung zur Herbsttagung an der FU Berlin, 5.–6. 11. 2016

Eva Müller-Hill und David Kollosche

Der GDM-Arbeitskreis ‚Mathematik und Bildung' lädt zur Herbsttagung am 5. und 6. November 2016 an der Freien Universität Berlin ein. Im Zentrum des diesjährigen Treffens steht das Schwerpunktthema ‚Soziologische Perspektiven auf mathematische Bildung'. In den letzten zwei Jahrzehnten hat sich der Einfluss soziologischer Theorien auf mathematikdidaktische Diskurse deutlich verstärkt. Im Fokus stehen dabei nicht nur mikrosoziologische Beiträge zur Analyse von interaktiven Lernprozessen, sondern soziolinguistische und soziokritische Perspektiven auf das Lehren und Lernen von Mathematik, die insbesondere die Realisierbarkeit bildungstheoretischer Ziele des Mathematikunterrichts in Frage stellen und ungleiche Partizipationsmöglichkeiten an mathematischer Bildung aufzeigen. Vor dem Hintergrund dieser Befunde ist schließlich auch die Frage nach dem Wesen von und Zugängen zu mathematischer Bildung neu zu stellen. Wir freuen uns bereits auf folgende Beiträge:

– Uwe Gellert (FU Berlin) gibt einen Überblick die Potentiale soziologischer Theorien für die Erforschung von Mathematikunterricht.
– Nikola Leufer (LIS Bremen) und Nina Bohlmann (FU Berlin) problematisieren mit Bezugnahme auf die Bildungssoziologie Basil Bernsteins am Beispiel der Thematisierung realitätsbezogener Mathematikaufgaben im Unterricht das Verhältnis von Implizitheit und Explizitheit.
– David Kollosche (Universität Potsdam) diskutiert das Potential der Gesellschaftskritik Michel Foucaults innerhalb der Mathematikdidaktik.

Weitere Beiträge sind sehr willkommen und können gerne bis zum 25. September 2016 über die Tagungshomepage angemeldet werden. Diese können sich sowohl auf das diesjährige Schwerpunktthema ‚Soziologische Perspektiven auf mathematische Bildung' als auch als freier Beitrag allgemein auf ‚Mathematik und Bildung' beziehen.

Für den Arbeitskreis,
Eva-Müller Hill und David Kollosche

Arbeitskreis: Problemlösen

Kurzporträt und Aktivitäten im Jahr 2016

Ana Kuzle und Benjamin Rott

Der Arbeitskreis *Problemlösen* richtet sich an Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler ebenso wie Lehrerinnen und Lehrer sowie alle weiteren Interessierten, die sich mit der Forschung zum (mathematischen) Problemlösen und zur Heuristik im weiteren Sinne beschäftigen. Ziele des Arbeitskreises sind die Verbesserung des Mathematikunterrichts hinsichtlich des problemorientierten Lehrens und Lernens, die Förderung der zahlreichen Diskussionen und der Austauschs sowie der Aufbau möglicher Kooperationen, um diesen Bereich gezielt weiter zu entwickeln. Mathematikdidaktische Forschung und Lehreraus- und Lehrerfortbildung werden im Arbeitskreis aufeinander bezogen, um sowohl der Entwicklung einer neuen Unterrichtskultur als auch der Entwicklung der Kultur der Lehrerbildung und -fortbildung zu dienen.

Veranstaltungen im Jahr 2016

Am 14. und 15. 10. 2016 findet an der Technischen Universität Braunschweig die 3. Herbsttagung des Arbeitskreises Problemlösen unter dem Motto „Mathematische Problemlösekompetenzen fördern" und unter Federführung von Frank Heinrich und seiner Arbeitsgruppe statt. Der Beginn ist am 14. 10. 2016 um 14.00 Uhr im Campus Nord der Universität, Bienroder Weg 97, 38106 Braunschweig, Raum BI97.9 vorgesehen. Tagungsende soll am (späteren) Nachmittag des 15. 10. 2016 sein.

Nach der Eröffnung wird Herr Prof. Dr. Harald Schaub (Abteilungsleiter Human Factors und Mensch-System-Integration bei der IABG, Ottobrunn bei München, außerplanmäßiger Professor an der Universität Bamberg) im Hauptvortrag über Möglichkeiten der Förderung von Problemlösekompetenzen aus psychologischer Sicht sprechen.

Neben dem Hauptvortrag haben wir für Samstagmorgen einen Workshop geplant, in dem wir uns inhaltlich über Konzepte zur Förderung der Problemlösekompetenz aus mathematikdidaktischer Sicht austauschen und positionieren wollen. Daneben haben wir Platz für mehrere Kurzvorträge eingeplant. Ein solcher kann einschließlich Diskussion 45 min Zeit in Anspruch nehmen. Die Referentin/der Referent kann dabei frei entscheiden, wie sie/er diese Zeit im Hinblick auf Vortrags-, Diskussions- und/oder Workshopanteile gestaltet.

Schließlich möchten wir auch auf die ProMath-Tagung hinweisen. Die Tagung der europäischen ProMath-Gruppe findet vom 7. 9. bis zum 9. 9. 2016 an der Universität Zadar, Kroatien, statt. Diese wird von Maja Cindric unter Unterstützung von Ana Kuzle ausgerichtet. Das Thema der Tagung lautet „Opportunities and Challenges of Teaching through Problem Solving". Weitere Informationen befinden sich auf der Tagungsseite (http://promath.org/meeting2016.html).

Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin bzw. den Sprecher des Arbeitskreises, Ana Kuzle und Benjamin Rott.

Ana Kuzle, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Karl-Liebknecht-Straße 24–25, 14476 Potsdam, E-Mail: kuzle@uni-potsdam.de

Benjamin Rott, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen, E-Mail: benjamin.rott@uni-due.de

Arbeitskreis: Stochastik

Bericht von der Herbsttagung in Paderborn, 20.–22. 11. 2015

Philipp Ullmann

Jedes Jahr richtet der Arbeitskreis Stochastik eine Herbsttagung aus, die sich an interessierte Kolleginnen und Kollegen aus Schule und Hochschule richtet. In diesem Jahr sollten *Digitale Medien im Stochastikunterricht* auf ihre Chancen und Möglichkeiten hin ausgelotet werden.[1]

Den Eröffnungsvortrag *Kurzes Tutorium Statistik – Kurzgeschichten zur Statistik auf YouTube* am Freitagabend hielt Mathias Bärtl von der Hochschule Offenburg. Im Rahmen seiner Lehrtätigkeit erstellt er kurze Lehrvideos als Begleitmaterial für seine Grundlagenvorlesung zur Statistik. Die Videos sollen die Praxistauglichkeit statistischer Verfahren anhand von Problemstellungen aus dem Alltag motivieren und dadurch das Fach attraktiver machen und zugleich Einstiege in die einzelnen Themen erleichtern. Inzwischen hat sich eine beachtliche Zahl an Videos angesammelt, die im YouTube-Kanal Kurzes Tutorium Statistik gesammelt und frei zugänglich sind.[2]

In einem kurzweiligen Vortrag wurden zunächst fachliche und methodisch-didaktische Überlegungen sowohl zum Gesamtkonzept als auch zum Aufbau einzelner Videos erläutert. An-

[1] Programm der Herbsttagung: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ak-stoch/vergangene-herbsttagungen.html#2015
[2] YouTube-Kanal Kurzes Tutorium Statistik: https://www.youtube.com/channel/UCtBEklAtHHji2V1TsaTzZXw/videos

schließend wurde über die Nutzung der und Reaktionen auf die Videos berichtet. Die anregende Diskussion wurde dann im Weinlokal Krüger weitergeführt.

Der Samstagvormittag stand ganz unter dem Zeichen der Schulpraxis. Zu Beginn stellte Reimund Vehling unter dem Titel *Stochastik in der Sek II mit GeoGebra und dem TI-Nspire. Von Prognoseintervallen, Stichprobenverteilungen und Konfidenzintervallen* (s)ein Konzept vor, den Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II mittels Computereinsatz verständnisorientiert zu gestalten. Dieser Ansatz wird von ihm in Niedersachsen seit vielen Jahren sowohl im Unterricht als auch in der Lehrerfortbildung erfolgreich umgesetzt und weiterentwickelt. Insbesondere komplexe Themen wie Stichprobenverteilungen oder Prognose und Konfidenzintervalle werden durch die konsequente Visualisierung begrifflich leichter fassbar.

In eine ähnliche Richtung zielte dann der Vortrag *Simulations, a Revolution in the Didactics of Statistics*, in dem Carel van der Giessen zunächst den Nutzen von Simulationen im Stochastikunterricht herausarbeitete, um anschließend einige Beispiele aus dem von ihm mitentwickelten Softwarepaket VUstat (für: *visual understanding of statistics*) vorzustellen. VUstat ist ursprünglich in den Niederlanden entwickelt worden und wird dort seit langem erfolgreich eingesetzt. Das Paket ist inzwischen auch auf Deutsch verfügbar und kann kostenlos heruntergeladen werden.[3] Insbesondere die schrittweise kontrollierbare Wiederholung von Zufallsexperimenten und Stichproben-Ziehungen überzeugt und erleichtert stochastisches Verständnis.

In der Mittagspause folgte ein kurzer Stadtrundgang, bei dem Katja Krüger bekannte und weniger bekannte Sehenswürdigkeiten Paderborns (wie den Hohen Dom mit seinem Perspektivgitter) kenntnisreich vorstellte.

Den Hauptvortrag *Plattformunabhängige Lernobjekte zur Statistik für Schule und Hochschule – ein Erfahrungsbericht* hielt dieses Jahr Hans-Joachim Mittag, der in seiner Lehrtätigkeit an der Fernuniversität Hagen kleine Lernobjekte zur Statistik entwickelt hat, die in einer Web-App zusammengefasst sind und kostenlos genutzt werden können.[4]

In *Stochastik in der Schule*, Heft 35 (2015), Seiten 6–11, ist gerade ein Aufsatz erschienen, in dem die App ausführlich vorgestellt wird. Daher möchte ich hier nur den Charme der universellen Einsetzbarkeit dieses minimalistischen Konzeptes hervorheben und verweise zu den Einzelheiten gerne auf den o. g. Beitrag.

Der weitere Nachmittag galt der Nachwuchsförderung. Zwei Promotionsvorhaben wurden vorgestellt und ausführlich diskutiert. Zum einen berichtete Lea Hausmann unter dem Titel *Abschätzungen bei Lorenzkurve und Gini-Koeffizient* über eine Lernumgebung, die sie im Rahmen von Schülerwochen an der RWTH Aachen entwickelt und erprobt hat. Zum anderen stellte Candy Walther unter dem Titel *Planung und Durchführung statistischer Erhebungen im Mathematikunterricht* sein Konzept und erste Schritte einer empirischen Untersuchung vor, mit der er dieses schulische Themenfeld mit Blick auf typische Schülerschwierigkeiten systematisch erfassen und strukturieren möchte.

Nach der Sitzung des AK-Stochastik und der sich anschließenden Mitgliederversammlung des Vereins zur Förderung des Stochastikunterrichts wurde der Abend mit einem gemeinsamen Abendessen im Ratskeller beschlossen.

Am Sonntagvormittag berichtete Rolf Biehler über *Stochastik kompakt – Eine Fortbildungsreihe zum GTR-unterstützten Stochastikunterricht in der Sekundarstufe II*, die im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerfortbildung in Mathematik (DZLM) mit und für Lehrkräfte in Nordrhein-Westfalen und Thüringen konzipiert und weiterentwickelt worden ist. In der viertägigen Fortbildung wird Lehrkräften technisches und didaktisches Wissen zum GTR-Einsatz vermittelt. Die behandelten Beispiele umfassen Simulationen, die Berechnung und Veranschaulichung von Verteilungen sowie interaktive Visualisierungen komplexer stochastischer Zusammenhänge (Eins-durch-Wurzel-n-Gesetz, Fehler beim Hypothesentesten, Operationscharakteristik).

Im letzten Tagungsvortrag *Tools für Excel und LibreOffice zur Unterstützung elementarer Datenanalyse mit Dotplot, Histogramm, Boxplot, Streu /Residuendiagramm und Mehrfeldertafel* stellte Thomas Wassong schließlich Tabellenblätter für LibreOffice bzw. Excel vor, in denen einschlägige elementare Techniken der Datenanalyse, die in statistischen Programmpaketen standardmäßig vorhanden sind, nun auch in der Tabellenkalkulation zur Verfügung stehen. Die entsprechenden Dateien sowie eine digitale Lernumgebung, die anhand von Videos den Umgang mit den Tools erläutert, sind im Internet frei verfügbar.[5]

Die Vorträge der diesjährigen Herbsttagung haben deutlich gezeigt, dass digitale Medien beim

[3] Softwarepaket *VUstat*: http://vustat.de
[4] Web-App *Statistische Methoden und statistische Daten – interaktiv*: https://www.hamburger-fh.de/statistik-app
[5] Die EDA-Tools für Excel bzw. LibreOffice finden sich unter http://eda-el.dzlm.de.

Lernen und Lehren von Stochastik wenigstens fünf mögliche Stärken aufweisen: Sie können zeitlich, räumlich und kulturell sehr flexibel gestaltet werden (*Flexibilität*), bieten vielfältiges Potenzial, selbst Hand anzulegen (*Interaktivität*), und ermöglichen eine anschaulich-intuitive Aufbereitung von Informationen (*Visualität*); dabei kann auf erweiterte Möglichkeiten des (Be)Rechnens zurückgegriffen werden, sei es im Vorder- oder Hintergrund (*white/black box*), und schließlich können zufällige Prozesse unmittelbar beobachtet und erlebt werden – wieder und wieder (*Simulation*). Insbesondere der letzte Punkt stützt einen spezifischen Aspekt der Stochastik, dessen Möglichkeiten noch lange nicht ausgeschöpft sind: Das simulationsgestützte Sammeln von Primär- bzw. Sekundärerfahrungen mit dem Zufall.

Damit aber digitale Werkzeuge auch so genutzt werden (können), dass stochastische Begriffe und Verfahren besser verstanden und als nützlich erfahren werden, kommt alles darauf an, Inhalte und Methoden aufeinander abzustimmen. Was das im Einzelfall genau bedeutet und wie dies im Unterricht jeweils erreicht werden kann, muss immer wieder neu durchdacht und zur Passung gebracht werden. Angebote, so flexibel und interaktiv sie sein mögen, müssen zuallererst genutzt werden. Visualisierungen, so durchdacht und strukturiert sie sein mögen, müssen zuallererst gelesen und verstanden werden. Auch und gerade im digitalen Zeitalter gehört es zu den zentralen Problemfeldern stochastikdidaktischer Forschung,

– Einstiegshürden zu senken (welche fachlichen bzw. Werkzeugkompetenzen sind in welcher Situation unbedingt notwendig, wünschenswert oder gar überflüssig?),
– die richtige Balance zwischen Rezeption und Konstruktion zu finden (wann ist es ratsam, vorgegebene Lernobjekte zu erkunden, wann ist es sinnvoll, eigene Objekte zu erstellen?) und
– den Mehrwert digitaler Hilfsmittel wie etwa Videos, (Web)Apps, GTR, CAS oder GeoGebra im Lehr-Lern-Prozess überzeugend zu nutzen (wann bleibt das Arbeiten mit digitalen Werkzeugen bloßes „Rumfummeln am Gerät", unter welchen Bedingungen kann echtes, also inhaltliches Verständnis begünstigt werden?).

Ob sich in der schulischen Praxis ein breiter Konsens zur Nutzung digitaler Medien beim Lehren und Lernen von Stochastik etabliert und wie ein solcher aussehen kann – das bleibt abzuwarten. Die gegenwärtige Lage bietet jedenfalls Anlass zur Hoffnung: Sowohl eine enge Abstimmung zwischen den (nicht immer identischen) Bedürfnissen von Schule und Hochschule als auch der (sanfte) Transfer zwischen Theorie und Unterrichtspraxis scheint sich bereits in einiger Breite etabliert zu haben – und zwar in beide Richtungen und auf Augenhöhe. Einen kleinen Beitrag dazu hat gewiss auch diese Herbsttagung geleistet.

Zum Schluss bleibt nur, all jenen Personen zu danken, die zum Gelingen dieser Tagung beigetragen haben; ebenso herzlicher Dank gilt all jenen, die schon jetzt die kommende Herbsttagung vorbereiten, die vom 30. September bis 2. Oktober 2016 in Rostock stattfinden wird.

Philipp Ullmann, Universität Frankfurt, Institut für Didaktik der Mathematik, Robert-Mayer-Straße 6–8, 60325 Frankfurt, Email: ullmann@math.uni-frankfurt.de

Zuerst erschienen in: *Stochastik in der Schule* 2016 (36), Heft 1. Mit freundlicher Genehmigung des Autors.

Arbeitskreis: Ungarn

Kurzporträt und Aktivitäten in den Jahre 2015/16

Gabriella Ambrus

Der Arbeitskreis wurde auf der 49. Jahrestagung der GDM in Basel im jahr 2015 gegründet, um die lange Tradition eher persönlicher Beziehungen auf dem Gebiet der Mathematikdidaktik zwischen Ungarn und den deutschsprachigen Ländern zu erweitern und mit neuen Zügen zu bereichern. Entsprechend haben wir unsere Ziele wie folgt formuliert:

– Verstärkung der Beziehungen und der Zusammenarbeit der Mathematikdidaktiker in Ungarn und in den deutschsprachigen Ländern
– Veröffentlichung der erfolgreichen ungarischen mathematikdidaktischen Traditionen
– Verbesserung des Mathematikunterrichts und der Situation der Mathematikdidaktik als selbständige Wissenschaft in Ungarn, auch aufbau-

(einbezogen werden die Nachwuchsfrage und Doktorandenschulen)

Die erste Tagung des Arbeitskreises fand am 2. und 3. Oktober 2015 an der Eötvös Loránd Universität in Budapest statt, an ihr haben 19 Kolleginnen und Kollegen aus Ungarn, Deutschland, Österreich und der Schweiz teilgenommen.

Die Zielsetzungen des Arbeitskreises wurden auf der Tagung um folgende Vorschläge ergänzt:

- Förderung der Internationalität und Interkulturalität
- Vergleich von historischen Entwicklungen und aktuellen Tendenzen im Bildungswesen der verschiedenen Länder (Matura, Abitur)
- Verstärkung der Beziehungen und der wechselseitigen Zusammenarbeit in der Lehrerausbildung
- Stärkere Beachtung des Grundschulbereichs
- Einbeziehen von weiteren Kollegen aus verschiedenen (ungarischen) Universität

Weitere Informationen sind auf der Internetseite des Arbeitskreises unter http://gdm.elte.hu/ zu finden.

Sitzung „Arbeitskreis Ungarn" am 10. 3. 2016, während der 50. Jahrestagung der GDM an der PH Heidelberg

Auf der Sitzung des Arbeitskreises war unser Hauptthema die Lehrerausbildung in Ungarn. Ödön Vancsó, der Leiter des Mathematikdidaktischen Zentrums an der Unversität ELTE hielt dazu einen Vortrag, in welchem er zuerst eine Übersicht über die „Vorgeschichte der Lehrerausbildung" gab. Danach sprach er über die neue Struktur.

Zur Zeit gibt es in Ungarn eine zweistufige Lehrerausbildung: Nach einer gemeinsamen Bildung von 3 Jahren haben die künftigen Lehrer, die in den Klassen 5–10 unterrichten möchten, noch ein Ausbildungsjahr zu absolvieren. Die angehenden Lehrer, die in den Klassen 5–12 unterrichten möchten, müssen noch weitere zwei Jahren absolvieren. In beiden Varianten der Ausbildung gibt es neben den fachdidaktischen Seminaren sowohl ein kurzes als auch ein längeres Schulpraktikum. Das kurze Praktikum während des 4. bzw. 5. Studienjahres, das längere Praktikum folgt erst nach dieser Studiumzeit, wird von einem Mentor betreut und dauert ein Jahr. Da die neue Form der Lehrerausbildung erst seit drei Jahren läuft, gibt es bislang noch keine Erfahrungen mit dem getrennten Studienanteil. Erst im nächsten Jahr kommt es zu den „getrennten" Studienjahren und man wird Aussagen dazu machen können, wie viele Studenten welche Ausbildungsform wählen. Es zeichnet sich aber bereits ab, dass die Anzahl der Lehramtstudenten mit der Einführung der neuen Ausbildungsmethode beträchtlich zugenommen hat. Das ist allerdings auch den neu eingeführten, nach Fächern differenzierten Stipendien zu verdanken.

Schon während des Vortrages gab es dazu viele Fragen. Für die nächste Herbsttagung ist auch ein Vortrag über die neue ungarische Evaluation der Lehrerarbeit vorgesehen.

An der Sitzung haben auch drei österreichische Kollegen teilgenommen. Sie haben den Wunsch geäußert, in der Zukunft eine gemeinsame Sitzung mit dem „Arbeitskreis Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österrich" zu organisieren. Dieser Gedanke wurde von den Teilnehmern der Sitzung unterstützt und wird noch auf der Sitzung des österreichischen Arbeitskreises besprochen. Gemeinsames Thema könnte die Ausbildung von der Grundschule bis zum Abitur sein. Die Organisation einer solchen gemeinsamen Tagung wirft aber auch mehrere, eher finanzielle Fragen auf, die noch erörtert werden müssen.

Ebenso gibt es Interesse für eine gemeinsame Sitzung von der Seite des Arbeitskreises Problemlösen. Wir freuen uns darüber und hoffen, dass eine solche Sitzung in den nächsten Jahren eingeplant werden kann.

Als Termin für die Herbsttagung des Arbeitskreises wurde der 7. 10.–8. 10. 2016 und als Tagungsort wie im Vorjahr die Universitat ELTE in Budapest festgelegt. Als Themen wurden Problemlösen und die schon erwähnte neue Evaluation der Lehrer vorgeschlagen. Für weitere Vorschläge sind wir noch offen.

Es wurden noch weitere aktuelle Fragen besprochen, darunter die Situation bzgl. des geplanten Tagungsbandes zur Herbsttagung 2015, dessen Herausgabe von Éva Vásárhelyi betreut wird. Leider gab es zum Zeitpunkt der Jahrestagung der GDM noch immer fehlende Texte bzw. Rückmeldungen von den Teilnehmern.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität, Pázmány P. sétány 1/c, 1117 Budapest, Ungarn
Email: ambrusg@cs.elte.hu

Arbeitskreis: Vernetzungen

Bericht von der Frühjahrstagung in Hildesheim, 22.–23. 4. 2016

Astrid Brinkmann, Thomas Borys und Matthias Brandl

Die *9. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“* fand an der Universität Hildesheim am 22. und 23. April 2016 statt; sie wurde von Barbara Schmidt-Thieme und Alexander Wolff perfekt organisiert.

Das diesjährige Veranstaltungsprogramm beinhaltete wieder ein sehr vielfältiges Vortragsangebot und gliederte sich in einen Lehrerfortbildungsnachmittag und einen arbeitskreisinternen Teil. Es wurde über Forschungsarbeiten und Projekte berichtet, Handlungsbedarf bzgl. Vernetzungen im Mathematikunterricht aufgezeigt und, insbesondere am Lehrerfortbildungstag, wurden Methoden für einen vernetzenden Mathematikunterricht sowie Beispiele für inhaltliche Vernetzungen vorgestellt und diskutiert.

Rückblick

Freitag, 22. April
(im Rahmen der Lehrerfortbildung)

Astrid Brinkmann (Münster) und Thomas Borys (Karlsruhe): Maps als Unterrichtsmittel
Graphische Darstellungen, die sich sowohl zum Visualisieren als auch zum Lernen vernetzten mathematischen Wissens in besonderer Weise eignen, sind Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen. Verschiedene Einsatzmöglichkeiten solcher Vernetzungsdiagramme im Mathematikunterricht wurden vorgestellt.

Insbesondere wurde auf das strukturierte Lehren und Lernen mit Maps eingegangen. Da Maps, die in klassischer Weise von Schüler/-innen erstellt werden, individuell sehr unterschiedlich gestaltet sein können, wobei die Lehrperson aber mit Blick auf die Unterrichtsziele ganz bestimmte Inhalte mit ihren Vernetzungen dargestellt haben möchte, wurden für solch inhaltliche Eingrenzungen verschiedene methodische Vorgehensweisen vorgestellt und Beispiele für den Unterricht angegeben. Einen ausführlichen Artikel hierzu findet man im Band 3 der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“; passende Arbeitsblätter für den Unterricht zu vielen mathematischen Themen werden im Band Kopiervorlagen und Materialien zu Band 1–3 sowie im Band 4 der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ bereit-gestellt.

Im zweiten Teil des Vortags wurde ferner anhand konkreter Unterrichtsmaterialien dargelegt, wie speziell gestaltete Maps gewinnbringend beim Problemlösen und beim Modellieren eingesetzt werden können. Band 4 der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ enthält hierfür einen beschreibenden Artikel und mehrere Arbeitsblätter zum direkten Einsatz im Unterricht.

Winfried Müller (Potsdam): Schöne Dreiecke, Mittelwerte und mehr
Neben den bekannten Pythagoräischen Tripeln gibt es entsprechende Tripel für zwei weitere zusammenhängende Dreieckstypen. Die Thematik ist im Dreieck von Geometrie, Algebra und Arithmetik vernetzt mit einer überraschenden Brücke zu Mittelwerten und Anwendungen für Vierecke.

Eine Darlegung dieser reizvollen Entdeckungen ist im neu erschienenen Band 4 der Schriftenreihe „Mathe vernetzt“ nachzulesen.

Thomas Borys (Karlsruhe): Kryptologie im Mathematikunterricht
Die Kryptologie war und ist eine Jahrhunderte alte geheime Wissenschaft. Heutzutage gibt es einen öffentlichen Teil, der für jedermann nutzbar ist und einen geheimen, den nur die entsprechenden Nachrichtendienste kennen. Wegen ihren vielen Anwendungen rund um den Computer gibt es ein reges Interesse am öffentlichen Anteil dieser Wissenschaft. Wie kann man nun Schülerinnen und Schüler an diese Wissenschaft heranführen? Was sollte man in einem Curriculum berücksichtigen? Auf Grund der vielfältigen Vernetzungen der Kryptologie mit der Mathematik wird gezeigt, wie im Rahmen eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts diese Fragen beantwortet werden können. Hierzu werden an verschiedenen Verschlüsselungsverfahren die inhaltlichen Vernetzungen der Kryptologie zu den Inhalten des Mathematikunterrichts dargelegt. Insbesondere werden dabei auch praktische unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten aufgezeigt, Beispiele hierzu befinden sich im Materialien-Band zur Schriftenreihe „Mathe vernetzt“.

Barbara Schmidt-Thieme (Hildesheim): Sprachenlernen und Mathematiklernen
Jeder Fachunterricht ist auch Sprachunterricht! Das weiß man schon lange, es bekommt jedoch Aktualität durch die Anforderungen durch Inklusion und DaZ-Lernende. An verschiedenen

Beispielen und Aufgaben wurde vorgestellt, wie Sprachlernen und Mathematiklernen vernetzt vonstattengehen kann.

Michael Bürker (Tübingen): Die Erweiterung des Weltbilds von Eratosthenes bis Einstein – Eine naturphilosophisch-mathematisch-physikalische Vernetzung
In diesem Vortrag wurde die Entwicklung und Erweiterung des geographischen, astronomischen und naturwissenschaftlichen Weltbilds von der Antike bis zum 20. Jahrhundert angedeutet. Dabei sollte Galileis Ausspruch „Die Sprache der Natur ist die Mathematik" der rote Faden sein, der die Fächer Mathematik, Physik, Astronomie und Geschichte miteinander vernetzt. In Form von Mathematik-Aufgaben für die Sekundarstufen I und II wurden im Einzelnen folgende Punkte besprochen: Die Berechnung des Erdumfangs nach Eratosthenes (sowie die Entfernungsabschätzungen Erde–Mond und Erde–Sonne in der Antike), die Wendepunkte von der Naturphilosophie zur mathematisch geprägten Naturwissenschaft (Galilei und Kepler), die Mondrechnung nach Newton und die Entwicklung des Raum-Zeit-Begriffs nach Einstein. Dabei wurden auch die didaktischen Voraussetzungen und die schulmathematischen Hilfsmittel unter die Lupe genommen. Für das letzte Problem, das ausführlicher dargestellt wurde, wurde eine schulgemäße dynamische Geometrie-Software verwendet.

Samstag, 23. April
(im Rahmen der internen Sitzung)

Michael Bürker (Tübingen): Lesung (Fragment aus dem neuen Roman des Vortragenden): „Die Raumzeitgeister"
In Ergänzung zu dem Vortrag über „die Erweiterung des Weltbilds von Eratosthenes bis Einstein" wurde ein Abschnitt aus dem zugrunde liegenden Romanfragment gelesen. Darin geht es um die Berechnung des Erdumfangs nach Eratosthenes:

> Wir sind im Jahr 219 v. Chr. Miro und sein Freund Sarkus machen sich auf den Weg vom Zeitschloss ins antike Griechenland, zuerst nach Athen, wo sie Philippos, den Schüler des Lykeions und Sohn einer wichtigen Persönlichkeit kennen lernen. Außerdem erfahren sie einiges über Platon's Philosophie und die hohe Wertschätzung der Geometrie in der Platonischen Akademie. In Alexandria, der damaligen „Hauptstadt der Wissenschaften" befindet sich die größte Bibliothek der damaligen Zeit. Deren Leiter ist ein Geograph und Naturwissenschaftler namens Eratosthenes. Als sie in der ägyptischen Hafenstadt ankommen, stoßen sie um die Mittagszeit auf dem Platz des großen Obelisken auf eine Gruppe von Schülern des berühmten Bibliotheksleiters. Sie erleben, wie Eratosthenes in einem Vortrag vor einem großen Publikum mit Hilfe seiner Messungen in Alexandria und Syene den Erdumfang bestimmen kann …

Wolfgang Pfeffer (Passau): Vorstellungen von Hochschuldozenten zum studentischen Übergang Schule-Hochschule in Mathematik
Im Rahmen eines größeren Forschungsprojektes zu den Übergangsschwierigkeiten Schule–Hochschule in Mathematik wurden Hochschuldozent/inn/en mittels Interviews zu ihren Vorstellungen und Erwartungen befragt. Insbesondere stand ihre Einschätzung der mentalen Begriffsentwicklung der Studierenden hinsichtlich zentraler Begriffe aus der Linearen Algebra im Fokus.

Anna-Maria Schwarz und Matthias Brandl (Passau): Fachwissenschaftlich-fachdidaktische De-Fragmentierung im Fachbereich Mathematik
Vorgestellt wurden Problemfelder und Ziele des Teilprojekts der Passauer Lehr- und Forschungseinheit „Lehramtsausbildung Mathematik und Informatik" im Rahmen von SKILL (Strategien zur Kompetenzentwicklung: Innovative Lehr- und Beratungskonzepte in der Lehrerbildung) als Bestandteil der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung". Dabei geht es zentral um die Verbesserung der Rezeption fachwissenschaftlicher Inhalte in der Lehramtsausbildung Mathematik durch die Entwicklung vernetzender Lehr-Lern-Formate.

Thomas Borys (Karlsruhe): Krypto im Advent
Bei diesem Entwicklungsprojekt handelt sich um einen interaktiven Adventskalender mit dem Schülerinnen und Schüler an die Welt der Kryptologie herangeführt werden. Die Aufgabe der Schülerinnen und Schüler besteht darin, 24 verschiedene Krypto-Rätsel zu lösen. Der Aufbau des Online-Adventskalenders und eine erste Auswertung der Rückmeldungen wurden vorgestellt. Der Kalender ist zu finden unter: www.krypto-im-advent.de

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Organisatorisches:

- Planung der nächsten Tagungen:
  Brigitte Leneke übernimmt die Organisation der 10. Tagung des Arbeitskreises, die voraussichtlich am 21. April 2017 an der Universität Magdeburg stattfinden wird. Nähere Infos sind zu finden unter: www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html
- Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht" (Siehe: www.aulis.de/items/

view/mathe-vernetzt.html) des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann:
Band 4 liegt mittlerweile als eBook vor und kann unter folgendem Link bei Aulis bezogen werden: http://tinyurl.com/gmho6uw.
Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter: www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Das gesamte Tagungsprogramm und weitere Informationen zu den Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht" findet man unter: www.math-edu.de/Vernetzungen.html. Interessierte sind als weitere Mitglieder stets herzlich willkommen.

Astrid Brinkmann, Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstraße 21, 48149 Münster
Email: astrid.brinkmann@math-edu.de

Thomas Borys, Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Bismarckstraße 10, 76133 Karlsruhe
Email: borys@ph-karlsruhe.de

Matthias Brandl, Universität Passau, Fakultät für Informatik und Mathematik, Innstraße 33, 94032 Passau
Email: matthias.brandl@uni-passau.de

ISTRON-Gruppe

Einladung zur Herbsttagung in Augsburg, 6.–7. 10. 2016

Gilbert Greefrath, Stefan Siller und Reinhard Oldenburg

Die Sprecher der ISTRON-Gruppe freuen sich auch in diesem Jahr zur Herbsttagung der ISTRON-Gruppe herzlich einzuladen. Dieses Jahr kann das 25. Jubiläum der ISTRON-Gruppe sowie dieser erfolgreichen Tagungsreihe gefeiert werden. Zum ersten Mal findet die Tagung in Bayern statt – Grund genug als Motto zu wählen: Mathematisch Modellieren – Überall. Aber Modellieren ist nicht nur räumlich überall, man findet es in allen Curricula und Bildungsstandards – es ist eine Erfolgsgeschichte. Dennoch gibt es viele Hinweise, dass das Modellieren in der Schulpraxis noch nicht überall angekommen ist. Die Jubiläumstagung bietet also gute Gelegenheit, das Erreichte zu reflektieren und neue Perspektiven des Modellierens auszuloten. Wie in jedem Jahr besteht die Herbsttagung aus einem internen Treffen der ISTRON-Gruppe und einem Fortbildungstag für Lehrkräfte.

Im Laufe der ISTRON-internen Tagung am 6. 10. 2015 wird die Möglichkeit bestehen, dem intensiven Diskurs der ISTRON-Gruppe beizuwohnen. Wir werden uns in diesem Jahr mit der Frage des Mathematischen Modellierens im Abitur beschäftigen und uns auch über den Stand von Modellierungsaktivitäten, welche im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung an den einzelnen Standorten implementiert werden, austauschen.

Der ISTRON-Fortbildungstag am 7. 10. 2015 ist öffentlich und gibt vor allem Lehrkräften die Möglichkeit, an einem sehr vielfältigen Fortbildungs-Programm teilzuhaben. Als Hauptvortragender wird Prof. Dr. Werner Blum, der Gründer der ISTRON-Gruppe, über „Modellieren im Mathematikunterricht – Ballast oder Beitrag zur Allgemeinbildung?" sprechen. Anhand der prozessbezogenen Kompetenz des mathematischen Modellierens wird Professor Blum aufzeigen wie kompetenzorientierter Mathematikunterricht einen Beitrag zur Allgemeinbildung leistet. Erkenntnisse zum Lehren und Lernen von Modellieren werden dabei besonders in den Mittelpunkt gestellt.

Der zweite Hauptvortragende ist Prof. Dr. Jürgen Roth von der Universität Koblenz-Landau. Er wird das mathematische Modellieren in Lehr-Lern-Laboren aufgreifen, in dem er auf das „Modellieren im Lehr-Lern-Labor – Ein Zusammenspiel von gegenständliche Materialien, Simulationen sowie Papier und Bleistift" fokussiert. Im Vortrag wird exemplarisch dargestellt, wie mit Hilfe einer geeigneten Gestaltung von Lernumgebungen das mathematische Modellieren gelingen kann und einen weiteren Mehrwert für Lernende bringen kann.

Das Programm der ISTRON-Tagung können Sie auf der Homepage der ISTRON-Gruppe unter www.istron-gruppe.de finden.

Für die Tagung fallen keine Tagungsgebühren an. Verpflegungs- bzw. Übernachtungskosten tragen die Teilnehmenden selbst. Eine Liste mit Hotels, die selbst gebucht werden müssen, wird über die Email-Liste der ISTRON-Gruppe mitgeteilt, Weitere Informationen gibt die Tagungshomepage www.istron-gruppe.de → Tagungen. Über Ihre Anmeldung zur Herbsttagung, die über die Tagungshomepage erfolgt, würden wir uns sehr freuen. Anmeldeschluss ist der 1. 10. 2016. Bayerische Lehrkräfte melden sich bitte über das FIBS an.

Für die ISTRON-Gruppe:
Gilbert Greefrath (Münster),
Hans-Stefan Siller (Koblenz-Landau)
Lokale Tagungsleitung:
Reinhard Oldenburg (Augsburg)

Gilbert Greefrath, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstraße 21, 48149 Münster

Hans-Stefan Siller, Universität Koblenz-Landau, Mathematisches Institut, Universitätsstraße 1, 56070 Koblenz

Reinhard Oldenburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg

E-mail: istron@uni-koblenz.de
www.istron-gruppe.de

Arbeitsgruppe: PriMaMedien

Kurzporträt und Aktivitäten im Jahr 2016

Silke Ladel und Christof Schreiber

Die Arbeitsgruppe PriMaMedien tagt seit 2007 regelmäßig im Arbeitskreis Grundschule der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Die Mitglieder dieser Arbeitsgruppe teilen das Interesse an der Entwicklung, der Konzeption, dem Einsatz und der Bewertung digitaler Medien für den Mathematikunterricht in der Primarstufe. Auf der Homepage der Arbeitsgruppe (www.pri-ma-medien.de) sind die Mitglieder sowie deren Projekte und Publikationen zu einem sinnvollen und zielgerechten Einsatz digitaler Medien aufgeführt. Ebenso berichtet die Homepage stets aktuell über geplante Tagungen und Neuigkeiten aus der Arbeitsgruppe. Weitere Informationen über Aktivitäten der PriMaMedien erhalten Sie insbesondere auch über den E-Mail-Verteiler, in den Sie gerne aufgenommen werden können (hierzu bitte eine kurze E-Mail an ladel@math.uni-sb.de).

Das nächste Treffen der Arbeitsgruppe findet im Herbst im Rahmen der Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule vom 11. 11.–13. 11. 2016 in Bad Salzdetfurth statt. Nähere Informationen hierzu folgen über den E-Mail-Verteiler und werden auf der Homepage veröffentlicht. Bis dahin ist auch der sich aktuell in Arbeit befindliche 3. Band der Reihe „Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe" im WTM-Verlag Münster erschienen. Dieser Band richtet sich insbesondere an Lehrende der Hochschulen und enthält konkrete Beispiele und Anregungen für einen guten und sinnvollen Einsatz digitaler Medien in der Hochschullehramtsausbildung.

Sehr erfreulich in diesem Jahr ist die Initiative der Deutschen Telekom Stiftung zum „Digitalen Lernen Grundschule". Im Rahmen der Initiative unterstützt die Deutsche Telekom Stiftung sechs Hochschulen, die bis 2018 Konzepte für den produktiven Einsatz digitaler Medien im Grundschulunterricht entwickeln und erproben. Mit dabei sind die Pädagogische Hochschulen Ludwigsburg und Schwäbisch Gmünd sowie die Universitäten Bremen, Hamburg, Potsdam und München, die alle im Rahmen einer Ausschreibung ausgewählt wurden. Die einzelnen Projekte zur Mathematik finden Sie ebenfalls auf der Homepage der PriMaMedien, weitere Informationen zur Initiative hier: www.telekom-stiftung.de/de/digitales-lernen-grundschule

Der Nationale IT-Gipfel kommt in diesem Jahr nach Saarbrücken. Im Fokus steht das Thema „Digitalisierung und Bildung", eines der Handlungsfelder der digitalen Agenda 2014–17 der Bundesregierung. Digitales Lehren und Lernen betrifft Kinder, Jugendliche und Erwachsene gleichermaßen. Die Universität des Saarlandes plant daher gemeinsam mit MINT Zukunft schaffen eine eintägige, den IT-Gipfel begleitende Auftaktveranstaltung (am 16. November 2016) zum digitalen Lehren und Lernen entlang der lebenslangen Bildungskette. Ziel der Veranstaltung ist es, über Digitalisierung zu informieren und digitales Lehren und Lernen für Jung und Alt erlebbar zu machen. Nähere Informationen erhalten Sie bei Anfrage von Silke Ladel.

Silke Ladel, Email: ladel@math.uni-sb.de
Christof Schreiber, Email: christof.schreiber@math.uni-giessen.de

„Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion“ Ein Tagungsbericht

Friedhelm Käpnick und Ralf Benölken

Am 24. und 25. 4. 2015 fand am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster eine wissenschaftliche Tagung und zugleich Lehrerfortbildung aus Anlass des zehnjährigen Bestehens des Projektes „Mathe für kleine Asse“ zur Förderung mathematisch begabter Kinder und des einjährigen Jubiläums des Projektes „MaKosi“ („Mathematische Kompetenzen sichern“) zur Förderung von Kindern mit Rechenproblemen statt. Da die „inhaltliche Klammer“ zwischen beiden Projekten mit Inklusiver Bildung gekennzeichnet werden kann, bildeten diese aktuelle schulpolitisch wie schulpraktisch relevante Thematik sowie die spezielle Förderung von rechenschwachen und mathematisch begabten Kindern die drei Themenschwerpunkte der Veranstaltung. Im Folgenden wird über die Hauptreferate und Parallelvorträge bzw. Workshops der Tagung sowie über die Ziele, die Organisationsformate und bisher Erreichtes beider Projekte in Bezug auf die individuelle Förderung von Kindern, auf die Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften wie auch hinsichtlich der fachdidaktischen Forschung im Überblick informiert sowie ein Überblick über einige Anschlussaktivitäten gegeben.

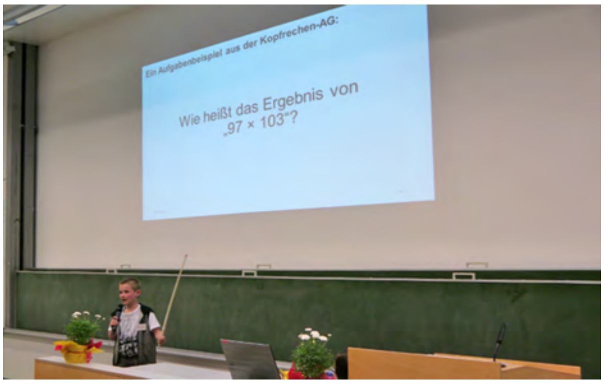
Leitidee der Tagung

Die zentrale Leitidee der Veranstaltung bestand darin herauszustellen, dass WissenschaftlerInnen, LehrerbildnerInnen und SchulpraktikerInnen (mehrheitlich) bereit sind, die unbestritten enormen Herausforderungen Inklusiver Bildung anzunehmen, und dass sie zusammen tragfähige Konzepte für ein gemeinsames Lernen aller Kinder im Mathematikunterricht entwickeln können. Diese positive Grundhaltung prägte die mehr als 130 teilnehmenden WissenschaftlerInnen, Lehrkräfte und Studierenden aus Deutschland sowie Österreich, den Niederlanden und Belgien. In einer offen-konstruktiven Gesprächsatmosphäre wurden dementsprechend sowohl aus verschiedenen wissenschaftlichen Perspektiven als auch auf der Basis diverser Erfahrungen aus der Schul- und Projektarbeitspraxis konzeptionelle Theorieansätze, ebenso aktuelle Probleme und Hemmnisse bei der Umsetzung inklusiven Lernens im Mathematikunterricht, weiterhin markante Einzelfallstudien gelungener individueller Förderung von äußerst verschiedenen Kindern u. v. a. m. vorgestellt und diskutiert.

Übersicht über Haupt- und Parallelvorträge bzw. Workshops

Im ersten Hauptvortrag erläuterte Frau Prof. Dr. C. Solzbacher (Universität Osnabrück) aus einer Kind orientierten Forschungsperspektive wesentliche Zusammenhänge von individuellem Fördern und Inklusion in der Grundschule und bestimmte hierbei (größtenteils noch zu schaffende) schulische Rahmenbedingungen für eine gelingende Inklusive Bildung. Herr Prof. Dr. Ch. Fischer (WWU Münster) hob in seinem Vortrag ein in der „Inklusionsdebatte“ häufig vernachlässigtes Thema, die Begabungsförderung als immanente Komponente von Inklusion, hervor. Dabei zeigte er sowohl generelle als auch konkrete Chancen für eine sehr gewinnbringende Nutzung der inzwischen reichhaltigen Erkenntnisse und Erfahrungen aus der Begabungsforschung und praktischen Begabtenförderung bei der Entwicklung von Inklusionskonzepten auf. In einem dritten Hauptvortrag begründete Herr Prof. Dr. F. Käpnick (WWU Münster) auf der Basis empirischer Befunde zu intuitiven Theoriekonstrukten von Kindern, die er als stetige Begleiterscheinung ihres individuell konstruktiven Lernens charakterisierte, wechselseitige bereichernde Effekte des individuellen und inklusiven Lernens verschiedenartiger Kinder. Zudem mahnte er eine stärkere Berücksichtigung von Anforderungen Inklusiver Bildung in der fachdidaktischen Lehramtsausbildung an. Ein spezieller „Hauptvortrag“ war darüber hinaus der Präsentation beider Universitätsprojekte gewidmet. Hieran wirkten neben den beiden Projektleitern auch Kinder aus dem Begabtenprojekt und Studierende aus beiden Projekten aktiv mit. Die authentischen Fallbeispiele zu Kindern aus beiden „Extremgruppen“ zeigten eindrucksvoll auf, wie wichtig es ist, Lehr-Lernprozesse (auch) aus der Kinderperspektive zu betrachten. Die Beispiele verdeutlichten zudem, dass die Projektteilnahme für Lehramtsstudierende einen sehr wichtigen Beitrag zu einer frühzeitigen wie auch nachhaltigen Herausbildung einer potenzialorientierten, auf die individuelle Entwicklung kindlicher Persönlichkeiten fokussierten pädagogischen Grundhaltung zu bewirken vermag.

Prof. Dr. Franz Mönks, langjähriger Präsident des European Council for High Ability (ECHA) bei seiner Grußansprache



Dominic M. (4. Klasse) bei der Präsentation eines Kopfrechentricks

Im Pfad „Inklusive Förderung aller Kinder“ erörterte Herr M. Veber (WWU Münster) aus wissenschaftlicher Perspektive die Prägung Inklusiver Bildung zwischen normativer Begründung und empirischer Fundierung. Frau St. Jansing (Westricher Grundschule Dortmund) und Frau C. Hammad (IGS Rotenburg) berichteten demgegenüber, wie sie in der Schulpraxis schrittweise „funktionierende“ Lösungen für ein inklusives Lernen im Mathematikunterricht entwickelten und welche Hürden sie hierbei in ihren jeweiligen Teams aus Fach- und Förderlehrkräften sowie LogopädInnen, PsychologInnen, … zu überwinden hatten bzw. noch zu meistern haben. Im Pfad „Förderung mathematisch begabter Kinder“ stellte Frau Prof. Dr. M. Fuchs (HS Neubrandenburg) eine eindrucksvolle Längsschnittstudie zu einem mathematisch begabten Mädchen vor. Sie kennzeichnete dabei die frühkindliche Entwicklung der besonderen Begabung des Kindes vom vierten bis zum neunten Lebensjahr und verdeutlichte überzeugend die Notwendigkeit einer individuellen Förderung spezieller Potenziale vom Vorschulalter an – aus einer freilich ganzheitlichen Sicht auf die kindliche Persönlichkeitsentwicklung. Frau Dr. N. Berlinger (WWU Münster) und Frau Dr. K. Meyer (Drei-Religionen-GS Osnabrück) präsentierten in ihren Beiträgen jeweils die Hauptergebnisse ihrer Promotionen. Beide Referentinnen stellten heraus, dass ihre gewonnenen Erkenntnisse zum einen zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Kinder und zum anderen zu individuellen Ausprägungen mathematischer Begabungen im Vorschulalter nicht nur für die Förderung besonders begabter bzw. äußerst leistungsstarker Kinder, sondern auch für die Breitenförderung eine große Relevanz besitzen.

Im Pfad „Förderung von Kindern mit Rechenproblemen“ reflektierte Herr W. Grohmann (Universität Halle-Wittenberg) reichhaltige unterrichtspraktische Erfahrungen bzgl. des Erkennens und Förderns von rechenschwachen Kindern. Er betonte dabei besonders die Bedeutung eines Unterrichts, der tatsächlich auf die individuellen Lernwege von Kindern ausgerichtet ist. Frau Prof. Dr. M. Nolte (Universität Hamburg) stellte vielfältige theoretische Perspektiven zum Themenkomplex Rechenschwächen vor und diskutierte anhand diverser Fallbeispiele z. T. sehr unterschiedliche individuelle Ausprägungen sowie Möglichkeiten der Diagnostik und Förderung. Herr JProf. Dr. R. Benölken (WWU Münster) präsentierte Erfahrungen zur Diagnostik und Förderung von Kindern mit Rechenproblemen sowie zu Möglichkeiten einer frühzeitigen Professionalisierung von Lehrkräften in der ersten Phase der Lehrerbildung aus dem Projekt (und Lehr-Lern-Labor) „MaKosi“.

Ein im WTM-Verlag erschienener Tagungsband enthält für interessierte LeserInnen schriftliche Fassungen zu allen Referaten (Benölken & Käpnick, 2016).

Das Projekt „Mathe für kleine Asse“

Das Münsteraner Projekt besteht seit dem Schuljahr 2004/2005 und wurde auf der Basis langjähriger Erfahrungen aus dem Neubrandenburger und dem Braunschweiger Projekt als ein Enrichmentprojekt konzipiert (siehe u. a. Käpnick, 2011). Die Förderung der Kinder ist demgemäß darauf gerichtet, den Lernstoff des regulären Mathematikunterrichts durch vergleichsweise anspruchsvollere Fragestellungen zu vertiefen bzw. ihn durch solche Inhalte anzureichern, die auch später nicht zum üblichen Stoffkanon gehören. Neben der zielgerichteten Förderung mathematischer Kompetenzen sind unsere Intentionen – ausgehend von einer ganzheitlichen Sicht auf das Lernen von Kindern – darauf gerichtet, die teilnehmenden Kinder in ihrer gesamten Persönlichkeitsentwicklung zu fördern.

Als die Projektarbeit vor zehn Jahren mit einer Zweitklässlergruppe begann, kooperierte die Arbeitsgruppe in Absprache mit der hiesigen Bezirksregierung zunächst nur mit vier Grundschulen. Aufgrund zahlreicher Anfragen von verschiedenen Schulen sowie von Eltern, die per „Mundpropaganda“ schnell auf die Projektaktivitäten aufmerksam wurden, erweiterte sich das Förderangebot Schritt für Schritt. Möglich wurde dies u. a. durch großzügige finanzielle Unterstützungen von Eltern. Seit etwa fünf Jahren gehören zwei Jahrgangsgruppen des dritten Schuljahres, je eine Gruppe des vierten, fünften, sechsten, siebten und achten Schuljahres sowie eine Kopfrechen-Projektgruppe und zwei Fördergruppen im Vorschulbereich zum festen Bestand der Förderarbeit. Hinzu kommen in unregelmäßigen Abständen wechselnd drei bis vier Kooperationsprojekte mit Schulen, an denen jeweils Arbeitsgemeinschaften zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder von besonders engagierten und qualifizierten Studierenden geleitet werden. Somit werden insgesamt ca. 200 kleine Matheasse aus inzwischen mehr als 20 Grundschulen und fast allen Gymnasien der Stadt Münster Jahr für Jahr im Rahmen der Projektarbeit gefördert. Hinzu kommen einzelne Kinder aus der näheren Umgebung, aber auch aus dem Ruhrgebiet oder aus Niedersachsen, die trotz einer meist mehr als einstündigen Anfahrt regelmäßig an den Förderstunden teilnehmen. Die auf kontinuierliche Förderung ausgerichtete Projektarbeit ist so konzipiert, dass für die Kinder in allen Altersgruppen jeweils 90-minütige Förderstunden in einem 14-tägigen Rhythmus durchgeführt werden. Bzgl. der Förderstunden lassen sich folgende Organisationsformen unterscheiden:

– das Bearbeiten komplexer mathematischer Problemfelder,
– ein „Knobeln an Stationen“,
– mathematische Wettbewerbe (Diagnosetests),
– mathematische Exkursionen.

Unser Haupttyp ist das Bearbeiten komplexer Problemfelder. Zu Beginn einer solchen Förderstunde lernen die Kinder anhand eines kleineren Ausgangsproblems ein Problemfeld kennen oder werden durch ein gemeinsames Gespräch auf ein mathematisches Thema „eingestimmt“. Die Einleitungsphase endet dann mit dem Herausarbeiten interessanter Fragestellungen für die nachfolgende „Forscherarbeit“. Die wichtigsten Erkundungsaufträge werden an der Wandtafel oder auf Arbeitsblättern festgehalten. Für die „Forscherarbeit“ erhalten die Kinder zudem vorbereitete Aufgabenblätter. Während die zeitlich relativ kurze Einstiegsphase von wissenschaftlichen MitarbeiterInnen oder Studierenden moderiert geleitet werden, arbeiten die Kinder in der „Forscherphase“ eigenständig. Dabei können sie jeweils selbst bestimmen, ob sie allein oder in kleinen Gruppen arbeiten, ob und welche Hilfemittel sie nutzen und wie sie ihre Ergebnisse darstellen wollen.

Hierbei ist wichtig, dass

– individuell bevorzugte Lern- und Denkstile der Kinder generell respektiert werden, sodass Kinder sich evtl. auch zeitweilig in eine Ecke zurückziehen und allein über ein Problem „brüten“ können (was auch vielfach – vor allem beim Finden einer „zündenden Idee“ – vorkommt),
– die Kinder immer wieder animiert werden, kreativ zu sein und eigene Ideen zu entwickeln,
– sich die MitarbeiterInnen bzw. die Studierenden darauf beschränken, Ansprechpartner bei Fragen der Kinder zu sein und ihnen ggf. Impulse zu geben.

Der letzte Teil der Förderstunde dient einem gemeinsamen Vorstellen und Diskutieren der Ergebnisse. (Zahlreiche konkrete Beispiele für eingesetzte Problemfelder findet man in den Bänden „Mathe für kleine Asse“, z. B. Käpnick & Fuchs, 2009 – viele weitere theorie- und praxisorientierte Publikationen, insbesondere auch die Dissertationen, die im Projektrahmen entstanden sind, sind auf der Projekthomepage zusammengefasst).

Das aufeinander „aufbauende“ System der Jahrgangsgruppen erlaubt uns eine sehr langfristige Förderung von Kindern. So nimmt etwa die Hälfte der DrittklässlerInnen im nachfolgenden Jahr an den Förderstunden der ViertklässlerInnen teil und ein Großteil dieser Gruppe bildet wiederum sukzessive den „Stamm“ der nachfolgenden Jahrgangsgruppen. In dieser Langfristigkeit besteht u.E. ein besonderer Vorzug des Projektes. Hierdurch erwachsen stabile emotionale Bindungen und Identifikationen der Kinder mit dem Projekt, darüber hinaus ergeben sich sehr gute Möglichkeiten für nachhaltige Effekte in der Persönlichkeitsentwicklung der kleinen Matheasse.

Insgesamt gesehen, bestehen die Hauptziele in Bezug auf die Förderung der Kinder im Folgenden:

– Der Spaß der Kinder am Umgang mit Zahlen und mit Formen soll erhalten und vergrößert werden.
– Die Freude der Kinder am Problem lösenden Denken soll gefördert und intellektuelle Neugier geweckt werden.
– Der übliche Stoffkanon des schulischen Mathematikunterrichts soll bereichert und vertieft werden (ohne jedoch wesentliche Inhalte des späteren Mathematikunterrichts vorwegzunehmen).
– Die Kinder sollen ein adäquates „Bild von Mathematik“ (einschließlich vom mathematisch-produktiven Tun, von vielfältigen Anwendun-

gen der Mathematik und von Querverbindungen zwischen Mathematik, Naturwissenschaften, Technik, Architektur, ...) entwickeln.
– Die Persönlichkeitsentwicklung der Kinder soll gestärkt werden (z.B. Entwicklung des Selbstbewusstseins, der Anstrengungsbereitschaft, der Ausdauer, Förderung sozialer Kompetenzen).

Wie schon angesprochen, nehmen auch Studierende an den Förderstunden teil. Insgesamt sind es ca. 40 bis 60 Studierende pro Semester, die sich aus dem fachdidaktischen Lehrangebot unseres Instituts für eine aktive Mitarbeit an diesem besonderen „Lehr-Lern-Labor“ als Wahlpflichtseminar entscheiden können. In Bezug auf die Förderung der Lehramtsstudierenden sind die Ziele insbesondere auf
– den Erwerb spezieller Qualifikationen in der Diagnostik und Förderung mathematisch begabter Kinder und
– die aktive Mitarbeit an wissenschaftlichen Projekten (Durchführung von Einzelfallstudien, Erprobungen von Aufgabenmaterialien, ...)

fokussiert. Es besteht hierbei zugleich die Möglichkeit, dass die Studierenden Bachelor- oder Masterarbeiten anfertigen und darüber hinaus auch an einzelnen Publikationen mitwirken können. Im Verlauf der zehn Jahre sind auf diese Weise mehr als 130 Examens- bzw. Masterarbeiten und ca. 130 Bachelorarbeiten fertiggestellt worden.

Die Förderstunden mit den kleinen Matheassen bieten uns zugleich sehr günstige Voraussetzungen für eine empirisch orientierte bzw. reflektierte Forschung (siehe beispielsweise Käpnick, 2014; Käpnick & Fritzlar, 2013). Unsere auf viele Jahre ausgerichteten Forschungsschwerpunkte sind
– die Durchführung komplexer Fallstudien (als Basis für theoretisch-analytische und theoretisch-konstruktive Untersuchungen),
– die Konzipierung von Merkmalsmodellen für mathematisch begabte Grundschulkinder sowie für Matheasse in den Klassenstufen 5 und 6,
– die Entwicklung spezieller Instrumente für die Diagnostik mathematisch begabter Kinder,
– die Analyse und Klassifikation von Problemlösestilen bei mathematisch begabten Grundschulkindern,
– die Entwicklung methodischer Handreichungen für mathematische Arbeitsgemeinschaften u.Ä. sowie für den regulären Mathematikunterricht (wozu wir als ein wichtiges Ergebnis die Bände der Reihe „Mathe für kleine Asse“ zählen),
– die Entwicklung von Aufgabenmaterialien für verschiedene spezielle Fördermaßnahmen (wie z. B. von Kindern, die vorzeitig eingeschult wurden, die eine Klassenstufe übersprangen oder die sprachliche Defizite haben),
– die Untersuchung interdisziplinärer Themenfelder (Koedukation, kognitions- und neuropsychologische Aspekte mathematischer Frühbegabung, ...).

Im Ergebnis der Forschungsaktivitäten sind u. a. bisher fünf Promotionen erfolgreich abgeschlossen sowie mehr als zehn Buchtitel und ca. 50 Zeitschriften- und Buchbeiträge fertiggestellt worden. Hierzu gehören nicht zuletzt die vier „Mathe-Asse-Bände“ mit zahlreichen erprobten Aufgabenmaterialien für die verschiedenen Grundschulklassenstufen und für das fünfte und sechste Schuljahr.

Um die Projektziele realisieren zu können, bedarf es auch der Bereitschaft der Kinder und der Unterstützung ihrer Eltern. Unsere auf Vertrauen gerichtete Zusammenarbeit mit den Eltern umfasst
– eine Informationsveranstaltung zu Beginn eines Schuljahres, auf der wir alle Eltern über die wesentlichen Ziele, Inhalte und über die Organisation des Förderprojektes informieren und sie über Fragen des Datenschutzes aufklären,
– Hospitationsmöglichkeiten der Eltern in Förderstunden (die eher selten wahrgenommen werden),
– Informationen zu Literatur (Knobelbücher, Bände zur Hochbegabtenproblematik, Internetprojekte, ...),
– jährliche Einzelgespräche mit Eltern über die individuellen Leistungen und Leistungsmöglichkeiten ihrer Kinder (die von den Eltern gern und sehr zahlreich genutzt werden).

Von den jeweils im Frühjahr durchgeführten Einzelgesprächen mit den Eltern profitieren vielfach beide Seiten. Die ProjektmitarbeiterInnen erhalten oft sehr interessante Informationen zur sozialen Entwicklung der Kinder und vielfach ergänzen sich deren Diagnostikergebnisse mit Beobachtungen der Eltern wechselseitig, sodass Ursachen oder Zusammenhänge bzgl. besonderer Verhaltensweisen oder Leistungsqualitäten von Kindern deutlicher erkannt bzw. sogar erst aufgedeckt werden.

Die Zusammenarbeit mit den Münsteraner Schulen bezieht sich vor allem auf folgende Bereiche:
– Die Lehrkräfte der Grundschulen unterstützen beratend die Auswahl geeigneter Kinder für das Förderprojekt.
– Die ProjektmitarbeiterInnen berichten interessierten Lehrerinnen und Lehrern über ihre Erfahrungen im Förderprojekt und helfen den Schulen beratend bei der Entwicklung von Konzepten für eine Förderung mathematisch interessierter Kinder im regulären Schulunterricht sowie in Form besonderer Förderstunden oder schulischer Arbeitsgemeinschaften.
– Auf der Basis von Kooperationsverträgen werden an einigen Grundschulen gemeinsam Konzepte und Aufgabenmaterialien für spezielle Fördermaßnahmen entwickelt (z. B. bzgl.

der Kreativitätsförderung einer „Kunterbunt-Kindergruppe", der Förderung von Grundschulkindern im Rahmen des „Drehtür-Modells").
- Die ProjektmitarbeiterInnen bieten individuelle Gespräche über die Entwicklung einzelner Kinder innerhalb der Förderstunden an (worauf einige LehrerInnen auch gern zurückgreifen).
- Auf Wunsch können Lehrkräfte in Förderstunden hospitieren.

In der aufgezeigten enormen Vielschichtigkeit der Aktivitäten liegt sicher eine große Stärke des Projektes, die wiederum eine stetige Weiterentwicklung des Förderprojektes nach sich zieht. Dieses Kernmerkmal bewog auch die Jury des Polytechnik-Preises, das Projekt „Mathe für kleine Asse" 2016 als *„einen herausragenden außerschulischen Lernort"* (zitiert aus der Laudatio von A. Beutelspacher) auszuzeichnen.

Das Projekt „MaKosi"

Das Projekt „MaKosi" besteht seit dem Sommersemester 2014. Konzipiert ist es als Lehr-Lern-Labor in den Räumlichkeiten einer Schule, wobei die Grundschule Herrmannschule in Münster bis dato der wichtigste Kooperationspartner ist. „MaKosi" bietet ein ergänzendes ganzheitlich angelegtes Angebot, um Kinder im Aufbau langfristig tragfähiger Grundvorstellungen u. Ä. zu unterstützen. Gleichzeitig besteht eine wichtige Intention darin, Studierende frühzeitig fundiert im Themenkomplex „Lernschwierigkeiten in Mathematik", insbesondere zu Rechenproblemen, auszubilden. An den Förderstunden nehmen daher jeweils etwa 10 bis 15 Studierende und Kinder teil. Die Ziele des Projekts umfassen somit drei Dimensionen, die sich folgendermaßen zusammenfassen lassen:
- In Bezug auf die Kinder stehen die Unterstützung bei der Überwindung individueller Rechenprobleme sowie die Stärkung der gesamten Persönlichkeit, v. a. affektiver und motivationaler Faktoren gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik, im Vordergrund. Außerdem soll ihnen ein adäquates Bild von Mathematik und mathematischem Tätigsein vermittelt werden.
- Im Hinblick auf die Ausbildung Studierender bestehen Ziele in der frühzeitigen Vermittlung theoretischer und praktischer Kompetenzen im Diagnostizieren und Fördern, wobei die unmittelbare Arbeit mit Kindern hier ebenso günstig erscheint wie die aktive Teilnahme an wissenschaftlichen Projekten. Zum Ausbildungskonzept gehört die Belegung eines vorbereitenden Seminars über theoretische Grundlagen zu Lernschwierigkeiten in Mathematik, das zum Wahlpflichtbereich des Studiumcurriculums zählt.
- Forschungsziele fokussieren auch und gerade die angesprochene Entwicklung (und Evaluation) eines Konzepts zur Vermittlung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften zum Themenkomplex Lernschwierigkeiten bereits in der ersten Phase der Lehrerausbildung sowie davon ausgehend zur frühzeitigen Entfaltung günstiger, potenzialorientierter Haltungen gegenüber dem Umgang mit individuellen kindlichen Persönlichkeiten.

Die Struktur der wöchentlich an einem Nachmittag organisierten Förderstunden lässt sich grob wie folgt umreißen: Zunächst dient eine 15minütige Vorbesprechung dazu, z. B. den didaktischen Ablauf mit den Studierenden zu erörtern und besondere Beobachtungsschwerpunkte festzulegen. Daran schließt sich die eigentliche 90minütige Förderstunde an: Diese beginnt mit einem natürlich differenzierenden Lernangebot, das auf arithmetische Bezüge verzichtet (z. B. eine Knobelaufgabe wie „Wolf, Ziege und Kohlkopf"). Die Intention besteht hier zunächst darin, das mathematische Kompetenzerleben der Kinder zu stärken, ihre Freude an der Beschäftigung mit Mathematik zu fördern und ihnen ein vielfältiges Bild von Mathematik und den mit ihr verbundenen Tätigkeiten zu vermitteln. Es folgt eine etwa 60minütige Hauptphase, in der die Kinder und die Studierenden in festen Lerntandems arbeiten (in einer ersten Phase vor allem mit einer Diagnosekartei, in einer zweiten daran anknüpfend anhand geeigneter Förderaktivitäten, z. B. „schnelles Sehen am Rechenrahmen"). Die Förderstunden enden jeweils mit einem Spiel, das mitunter motorische oder visuelle Fähigkeiten fokussieren kann, vor allem aber dazu dient – gerade zum Ende einer jeden Sitzung hin – affektive Komponenten gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik zu stärken und gewährleisten soll, dass die Kinder die Förderstunden jeweils „mit einem guten Gefühl" verlassen.

Rund um das Projekt finden diverse wechselseitige Beratungen mit Lehrkräften und/oder mit Eltern statt. Die Studierenden reflektieren die Mitwirkung im Projekt, den Nutzen für die Kinder und die Gelegenheit, theoretisch und praktisch Kompetenzen im Themenfeld „Lernschwierigkeiten in Mathematik" zu erwerben, in der Regel sehr positiv. Im Rahmen von „MaKosi" sind zudem u. a. bereits 25 Masterarbeiten, meist in Form komplexer Fallstudien, entstanden, erste Publikationen erschienen und erste Lehrerfortbildungen an Schulen durchgeführt worden. Seit dem Beginn des Schuljahres 2015/2016 gibt es außerdem eine Projektgruppe für den fünften Jahrgang am Gymnasium Paulinum Münster.

Aktuelle Aktivitäten

Bereits parallel zur Planung der Tagung, aber auch inspiriert durch den fruchtbaren Austausch und den „Geist“ dieser Veranstaltung, haben wir unsere Bemühungen zum Komplex „Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion“ weiter intensiviert. Hierzu gehören insbesondere

- ein Buchprojekt mit dem Titel „Verschieden verschiedene Kinder“ (Käpnick, 2016), welches konzeptuelle Grundlegungen und vielfältige praktische Ideen zur Organisation inklusiven Mathematikunterrichts präsentiert, und
- die Entwicklung und Evaluation eines Lehrkonzepts zu einer universitären Seminarveranstaltung zum Thema „Inklusiver Mathematikunterricht“ sowie Überlegungen zur verbindlichen Implementierung in Studiencurricula.

Literatur

Benölken, R. & Käpnick, F. (Hrsg., 2016). Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion (Bd. 8 der Schriften zur mathematischen Begabungsforschung, hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM.

Käpnick, F. (Hrsg., 2011). Das Münsteraner Projekt „Mathe für kleine Asse“ – Perspektiven von Kindern, Studierenden und Wissenschaftlern (Bd. 2 der Schriften zur mathematischen Begabungsforschung, hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM.

Käpnick, F. (2014). Mathematische Talente erkennen und fördern. In M. Stamm (Hrsg.), Handbuch Talententwicklung. Theorien, Methoden und Praxis in Psychologie und Pädagogik (S. 537–548). Bern: Verlag Hans Huber.

Käpnick, F. (Hrsg., 2016). Verschieden verschiedene Kinder – Inklusives Fördern im Mathematikunterricht. Seelze-Velber: Klett/Kallmeyer

Käpnick, F. (Hrsg.) & Fuchs, M. (2009). Mathe für kleine Asse (Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler, Bd. 2). Berlin: Cornelsen.

Käpnick, F. & Fritzlar, T. (Hrsg., 2013). Mathematische Begabungen – Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven (Bd. 4 der Schriften zur mathematischen Begabungsforschung, hrsg. von F. Käpnick). Münster: WTM.

Friedhelm Käpnick und Ralf Benölken, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Email: kaepni@math.uni-muenster.de, rben@math.uni-muenster.de

“So many topics, so many cultures”

Internationale Frühjahrsschule zu Perspektiven der Mathematikdidaktik an der Universität Würzburg

Hans-Georg Weigand

Internationale Doktorand(inn)enschulen sind eine gute Möglichkeit, Nachwuchswissenschaftler(innen) aus verschiedenen Ländern und Kulturen zusammenzubringen, um in einer entspannten, aber doch belebenden Umgebung einerseits Anregungen und Hilfen für die eigene Arbeit, andererseits aber auch Einblicke in und Ausblicke auf aktuelle Fragestellungen in der Mathematikdidaktik zu erhalten. Eine internationale Frühjahrsschule an der Universität Würzburg hat sich dem Thema „Perspectives on Research in Mathematics Education in the next Decade“ gewidmet. Damit war der Anspruch verbunden, jungen Wissenschaftlern die Möglichkeit zu geben, ihre eigene Arbeit im Rahmen – von Experten so eingeschätzten – zukunftsorientierter Ziele zu diskutieren und einzuschätzen.

Sieben international erfahrene und anerkannte Experten aus vier Ländern und verschiedenen Bereichen der Didaktik der Mathematik sowie über 50 junge Nachwissenschaftler aus weltweit insgesamt 27 Ländern trafen sich vom 4. bis 9. April an der Universität Würzburg. In Hauptvorträgen, Sektionsvorträgen und Diskussionsrunden wurden zentrale und aktuelle Themen der Mathematikdidaktik intensiv diskutiert.

Celia Hoyles und Richard Noss (UCL Institute of Education, University College London, UK) stellten die Bedeutung des (zukünftigen) Einsatzes digitaler Technologien in den Mittelpunkt ihrer beiden Vorträge. Anhand des von ihnen seit einigen Jahren geleiteten Projects „Cornerstone Math“ zeigten sie Probleme und Schwierigkeiten auf, die eine größere Verbreitung dieses – in der Tat be-

Die Teilnehmer(innen) der „Spring School" vor dem Kulturspeicher der Stadt Würzburg

eindruckenden Projekts – behinderten. Die zentrale Botschaft dieser Vorträge war, dass es Strategien des „Scaling up" bedarf, um Projekten eine größere Akzeptanz in der Schulpraxis, aber auch bei Mathematikdidaktikern zu verschaffen. Ihr Fazit: Es liegt nicht am mangelnden didaktischen Wissen und nicht an der Qualität der durchgeführten Projekte, es liegt an der „Scaling-up"-Strategie, dass Ergebnisse aus Projekten häufig nicht den Weg in die Praxis finden.

Der Vortrag von Mogens Niss (University of Roskilde, Denmark) zeigte anhand der Entwicklung der Mathematikdidaktik in den letzten 50 Jahren Ideen auf, die auch heute noch aktuell bzw. die im Laufe der Zeit verschwunden sind. Auch er wendete sich dann der Frage zu, woran manche gute Ideen in der Vergangenheit gescheitert sind und gab seine Sichtweise wieder, wie er sich eine „research study" von Nachwuchswissenschaftlern vorstelle. Er stellte insbesondere heraus: „We need more new ideas, much more reflection, much more conceptual analysis, more and better DISTINCTIONS." Er erläuterte dann den Begriff "Distinctions", also Unterscheidungen, Festlegungen oder Urteile im Hinblick auf die Weiterentwicklung der Mathematikdidaktik, die klare Strukturen und Definitionen, Ziele und Prioritäten erfordert. Ein zukunftsträchtiger Begriff!

Auch Rita Borromeo Ferri (Universität Kassel) hat in Ihrem Vortrag „Modellieren in der Mathematikdidaktik" den Bogen von der Gegenwart in die Zukunft geschlagen. Dabei hat sie insbesondere die unterschiedlichen Sichtweisen von „Modellierung" in verschiedenen Ländern (USA, Südamerika, Europa) herausgestellt. Ihre These: Modellierung muss und kann theoriebasiert und praxisbezogen ein zentrales Element zum Erreichen der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts sein, sie muss vor allem in der Lehrerbildung etabliert werden und muss insbesondere den Bezug zu den landesspezifischen (aktuellen) Umweltsituationen herstellen.

Volker Ulm (Universität Bayreuth) zeigte auf, wie für Mathematik besonders begabte Kinder und Schüler erkannt und gefördert werden können. Anhand dieses Beispiels erläuterte er dann – gestützt auf seine Erfahrungen in zahlreichen europäischen Projekten – wie seiner Meinung nach die Implementierung innovativer Ideen in einem komplexen System (dem Mathematikunterricht oder gar dem Schulsystem) erfolgen könne. Dazu stellte er ein Stufenschema vor, in dessen Kern langfristige Lehreraus- und -fortbildung sowie innovative Unterrichtsentwicklung (Design Research) stehen.

Marta Menghini (Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Italy) wandte sich Beispielen aus der Geschichte der Geometrie zu und erläuterte, wie historische Problemstellungen und Entwicklungen bzw. deren kritische Hinterfragung für die aktuelle Situation und zur Verbesserung des Geometrieunterrichts fruchtbar gemacht werden können.

Der Vortrag von Lisa Hefendehl-Hebeker (Universität Duisburg-Essen) war der qualitativen Unterrichtsforschung gewidmet und zeigte zunächst anhand eines Beispiels die Schwierigkeiten und Möglichkeiten einer Interpretation dieses realen Unterrichtsmitschnitts auf. Anschließend gab sie einen – von allen Teilnehmern hochgeschätzten – Überblick über qualitative Forschungsmethoden.

Es war dann noch ein Vortrag zur quantitativen Unterrichtsforschung geplant, der dafür vorgesehene Referent, Stefan Krauss (Universität Regensburg), musste allerdings leider kurzfristig aufgrund von Krankheit absagen. Neben den zukunftsorientierten Perspektiven in den Hauptvorträgen wurde der intensive wissenschaftliche Austausch der Teilnehmer untereinander und der Teilnehmer mit den Experten in 40 Sektionsvorträge von 15 Minuten und 15 Minuten Diskussion und einer Posterausstellung durchgeführt. Der wissenschaftliche Teil wurde durch einen Vortrag über „300th anniversary of the death of the mathematician Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)" von Hans-Georg Weigand und einer Leibniz gewidmeten Ausstellung von Hans-Joachim Vollrath ergänzt.

Das Rahmenprogramm beinhaltet einen bayerischen Abend „Brezl and Beer", einen Besuch des Kulturspeichers der Stadt Würzburg mit einer Sammlung „Geometrischer Kunst", (natürlich) dem Besuch der Residenz und einer Weinprobe bei Kerzenlicht im Residenzkeller.

Ein persönliche Anmerkung zum Schluss: Es waren die unglaubliche Freundlichkeit, die große Dankbarkeit und die sehr häufig direkt ausgedrückte Zufriedenheit der Teilnehmer, die eine solche Veranstaltung zu einem für den Organisator besonders herausragenden Erlebnis in seiner sicherlich nicht erlebnisarmen Zeit in der Mathematikdidaktik werden ließ. Der Dank gilt allen Mitarbeitern in Würzburg, die sich so engagiert an der Durchführung dieser Frühjahrsschule beteiligt haben. Es bleibt der Eindruck, der vielleicht am Treffendsten von einer Teilnehmerin am Ende des Frühjahrsschule geäußert wurde und der Erstaunen, aber auch die Aufforderung zu einer zusammenführenden strukturierenden Beschäftigung mit Mathematikdidaktik der Vielfalt beinhaltet: "So many topics, so many cultures."

Die Veranstaltung wurde von der VolkswagenStiftung finanziell unterstützt und dadurch erst ermöglicht. Dafür sei herzlich gedankt.

www.mathematik.uni-wuerzburg.de/springschool2016/

Hans-Georg Weigand, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg, Hubland-Nord – Emil-Fischer-Straße 30, 97074 Würzburg,
Email: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

Hans Brügelmann: Vermessene Schulen – standardisierte Schüler

Rezensiert von Andreas Vohns

Hans Brügelmann, Autor des hier zu rezensierenden Titels, war von 1993–2012 Professor für Erziehungswissenschaft mit Schwerpunkt Grundschulpädagogik und -didaktik an der Universität Siegen, nahezu zeitgleich mit dem den Leser(inne)n der MGDM vermutlich vertrauteren Hans-Werner Heymann, der dort die Professur für Erziehungswissenschaft mit dem Schwerpunkt Schulpädagogik und Didaktik inne hatte[1]. Die beiden eint neben der gemeinsamen Arbeit am Projekt „LISA & KO – Lernbiographien im schulischen und außerschulischen Kontext" auch der Umstand, dass beide Erziehungswissenschaftler mit ausgeprägten fachdidaktischen Interessenbereichen sind – in Heymanns Fall bekanntlich in der Mathematikdidaktik, in Brügelmanns Fall in der Deutschdidaktik, genauer: im Bereich des Schriftspracherwerbs.

Seit Erscheinen von „Vermessene Schulen – standardisierte Schüler" eint die beiden zudem neben der 2012 erfolgten Emeritierung auch noch der Umstand, dass beide es geschafft haben, im Zusammenhang mit ihren Arbeiten äußerst prominent Eingang in die Schlagzeilen der Zeitung mit den vier großen Buchstaben gefunden zu haben. Brügelmann hat es dabei in die Sonntagsausgabe vom 13. 9. 2015 geschafft, mit der Schlagzeile „Schulnoten sind überflüssig!", die als Zusammenfassung seines Buches „Vermessene Schulen – standardisierte Schüler" allerdings noch stärker verkürzt, als es „Zu viel Mathe ist Quatsch!" für Heymanns „Allgemeinbildung und Mathematikunterricht" tat.

Der Untertitel des Buches: „Zu Risiken und Nebenwirkungen von PISA, Hattie, VerA und Co." gibt da schon treffender die Stoßrichtung vor: Brügelmann legt gewissermaßen einen „Beipackzettel" zur quantitativen empirischen Bildungsforschung vor, insbesondere zu jenen Spielarten, die sich als Evaluations- oder Wirkungsforschung mit dem Ziel der Generierung „harter" Evidenz für sogenannte „evidenzbasierte Bildungspolitik" gerieren. Brügelmann richtet sich mit seinem Buch zunächst an diejenigen, die man neudeutsch als „Stakeholder" einer solchen Forschung bezeichnen würde, also „Interessierte in Politik, Medien, in den Schulen und Familien" – auch und gerade mit dem Ziel, dass diese sich gegenüber unangemessenen Geltungsansprüchen „evidenzbasierter" Urteile emanzipieren mögen. Brügelmann hofft überdies, zur Selbstreflexion derjenigen seiner Kolleg(inn)en beizutragen, die in die empirische Bildungsforschung selbst als Akteur(inn)e(n) involviert sind.

Nach einem grundsätzlichen Problemaufriss „Über das Spiel mit Zahlen hinaus – Grundprobleme einer ‚Evidenzbasierung'" widmet sich Brügelmann in vier Hauptkapiteln nacheinander der Meta-Studie von Hattie, PISA bzw. allgemeiner internationalen Vergleichsstudien, VerA und (was überraschen mag, aber den BAMS-Aufmacher erklärt) dem Problem der Leistungserfassung, -rückmeldung und Notengebung (Brügelmann ist als vehementer Gegner von Schulnoten bekannt, insofern trifft die Schlagzeile, das Thema im engeren kommt aber im Buch allenfalls am Rande vor). Das Buch kulminiert in zehn abschließend formulierten Thesen zur kritischen Diskussion empirischer Bildungsforschung bzw. von Evaluation im pädagogischen Bereich. Abgerundet wird das Buch durch eine kommentierte Bibliographie mit Leseempfehlungen[2] und ein knapp gehaltenes statistisches Glossar.

Die vier Hauptkapitel des Buches verlagern jeweils den Blickwinkel in Richtung eines der bereits erwähnten „Stakeholder": Hatties Wert für die Bildungsforschung wird hinterfragt, PISAs möglicher Beitrag zur Steuerung von Bildungspolitik, VerAs konkreter Nutzen für die Schul- und Unterrichtsentwicklung vor Ort und schließlich die Frage angemessener Evidenzsammlung für die Rückmeldung des Lernfortschritts aus Sicht der Lernenden.

[1] Im Sinne der vollständigen Offenlegung: Der Rezensent selbst studierte von 1995–2002 an derselben Universität Lehramt und promovierte dort von 2000–2007.

[2] Ein Teil der empfohlenen Texte steht als Onlinematerial zur Verfügung unter: https://www.beltz.de/fachmedien/paedagogik/buecher/produkt_produktdetails/15130-vermessene_schulen_standardisierte_schueler.html

Brügelmann gibt an, die einzelnen Kapitel seien für sich genommen lesbar, diesen Eindruck kann ich bestätigen, hatte aber beim Lesen dennoch nicht den Eindruck, dass der Anspruch der getrennten Lesbarkeit der Abschnitte die Lektüre des Gesamtwerks aufgrund unvermeidbarer Redundanzen spröde werden lässt. Dem Buch ist kaum anzumerken, zumindest an keiner Stelle anzulasten, dass sich Brügelmann bei dessen Zusammenstellung einer Reihe eigener, kürzerer Texte aus dem Zeitraum von 1978 bis 2015 als Fundus bedient hat.

Dem Problemaufriss zur Evidenzbasierung vorangestellt hat Brügelmann gewissermaßen gleich zwei Einleitungen, zunächst ein „Vorspiel" in welchem er die Leser(innen) in das übergreifende Thema Evaluation im pädagogischen Bereich einführt. Er unterscheidet dabei zunächst drei Archetypen von Evaluatoren, denen er jeweils entsprechende Pendants aus dem Schul- und Bildungsbereich gegenüberstellt: den „Warentester im Bereich der Produktionskontrolle" (Pendant: „den technisch Messenden in den internationalen Leistungsstudien"), den „Kritiker in Kunst, Musik, Theater und Literatur" (Pendant: „Gutachter bei der Lehrmittelzulassung") und den „Richter im juristischen Prozess" (Pendant: den „Prüfer in Examina"). Brügelmanns Hauptbotschaft ist nun, dass das, was „für das Gelingen von Lernen wesentlich ist", sich gerade nicht auf dieselbe Art und Weise erfassen und beurteilen lässt, „wie man das Funktionieren technischer Geräte oder ökonomischen Erfolg misst" (S. 12). Für Brügelmann bedeutet das im Umkehrzug nicht, dass Schule und Lernen keiner Evaluation bedürften, er postuliert aber, dass Didaktik und Pädagogik „andere Formen der Untersuchung und Bewertung von Leistung benötigen". Brügelmann plädiert in seinem Vorspiel dann für eine *demokratische Evaluation*, die ihre Ziele und Kriterien weder allein der Bildungspolitik („bürokratische Evaluation") noch der akademischen Sphäre („autokratische Evaluation") verdankt, sondern zwischen den Interessen von Auftraggebern in der Bildungspolitik, Experten aus den einschlägigen Wissenschaften und den Betroffenen vermittelt und deren unterschiedliche Sichtweisen integriert. Ziel einer solchen Evaluation sei die Gewinnung „handlungsbedeutsamer Information". Wer sich ein wenig mit Aktionsforschung, insbesondere mit Donald A. Schön und dessen *Reflective Practitioner* auseinandergesetzt hat, wird hier viele Parallelen erkennen, obwohl Brügelmann diesen theoretischen Bezug nicht explizit herstellt.

Bevor es ans Eingemachte geht, bietet Brügelmann seinen Leser(inne)n mit „Wozu Evaluation? Inszenierte Kontroverse in verteilten Rollen" die zweite, spielerische Einführung in das Themenfeld des Buches: Hier kommen im fiktiven Dialog Arbeitgeber(innen), Lehrer(innen), Eltern, Schulaufsicht und Bildungsforschung zusammen und streiten über Sinn und Unsinn von PISA, VerA, Hattie, Notengebung und Co. Obwohl ich eigentlich kein großer Freund solcher Inszenierungen bin, muss ich einräumen, dass diese Seiten in derart beeindruckender Weise und mit allenfalls geringen Überzeichnungen einen Einstieg in das Thema liefern, dass man sich in jeder Einführung in die Fachdidaktik oder Pädagogik eigentlich die Zeit und Muße nehmen sollte, einen Teil dieser Inszenierung mit verteilten Rollen aufzuführen.

In „Grundprobleme einer ‚Evidenzbasierung'" stützt Brügelmann seine These einer notwendig nicht im Sinne technischer Rationalität umsetzbaren Evaluation schulischer Lern- und Bildungsprozesse argumentativ ab. Dreh- und Angelpunkt seiner Argumentation ist dabei, dass „Großstudien mit standardisierten Tests" aufgrund der ihnen eigenen Forschungslogik bei der Evaluation von Alternativen (Brügelmann nutzt als Beispiel verschiedene Methoden des Schriftspracherwerbs) immer nur den durchschnittlich größeren Erfolg einer Alternative gegenüber der anderen nachweisen können. Aber: Wenn im Durchschnitt z. B. die von Brügelmann favorisierte Methode „Lesen durch Schreiben" für den Schriftspracherwerb sich als weniger erfolgreich herausstellt, als eine andere Methode, inwiefern kann dieses Ergebnis dann die Erfahrungen und größeren Erfolge, die einzelne Lehrer(innen) mit dieser Methode erzielt haben, überhaupt grundsätzlich entwerten? Brügelmann bestreitet dies in wenigstens zweifacher Hinsicht:

– Zum einen problematisiert er die Instrumente der Evaluation (also standardisierte Tests).
– Zum anderen wirft er die Frage auf, inwiefern die vielen Fälle, die quantitative empirische Bildungsforschung zwangsläufig benötigt, überhaupt in sich hinreichend homogene Realisierungen der jeweiligen Alternativen darstellen, um aussagekräftige Mittelwertbildungen zu erlauben.

Kritische Einwürfe im Sinne des ersten Punktes hat es im Umfeld von TIMSS, PISA und VerA auch in der Mathematikdidaktik nicht wenige gegeben. Brügelmann fokussiert hier auf das Problem, das quantitative empirische Bildungsforschung ein Streben nach *Eindeutigkeit von Daten* mit sich bringt, dass in Widerspruch zum Wunsch nach *bedeutungsvoller Information* geraten kann. Er lässt dazu fünf fiktive Schüler das Wort KINO schreiben:

1. KINO
2. KINO
3. KINO
4. KINNO
5. KIENO

Im Sinne eines standardisierten Tests wird man drei richtige und zwei falsche Lösungen konstatieren. Brügelmann gibt dann allerdings fünf fiktive Lernbeobachtungen an, die den Schluss zulassen, dass sich hinter der vermeintlich korrekten Schreibweise ebenso wie hinter den falschen völlig unterschiedliche Leistungsstände im Schriftspracherwerb verbergen können, wobei auch Falschschreibungen für ein höheres Sprachverständnis stehen können, als die Richtigschreibung.

Der zweite Punkt, also die Frage, inwiefern Mittelwertbildungen über große Gruppen von nach unterschiedlichen pädagogischen Programmen unterrichteten Lernenden überhaupt aussagekräftig sind und konfligierende individuelle Evidenz entkräften können, motiviert Brügelmann zunächst durch eigene biographisch-episodische Evidenz: Seinem Eindruck nach lassen pädagogische Programme wie etwa „Lesen durch Schreiben", ja überhaupt alle curricularen Entwürfe bis hin zu in kleinsten Schritten ausgearbeiteten Lehrprogrammen, immer noch vergleichsweise große Handlungsspielräume für Lehrende und zeitigen in unterschiedlichen Kontexten multiple Wechselwirkungen mit nicht im Programm erfassten Aspekten der Lehr-Lernsituation. In der Folge kann in sich an ein und demselben Lehrprogramm orientierenden Schulklassen immer noch vollkommen unterschiedlicher Unterricht beobachtet werden. Bekanntlich werden nun in hinreichend großen Untersuchungsgruppen immer kleinere Leistungsmittelwertunterschiede signifikant und dann nicht selten bereits als bedeutsam interpretiert, ohne Leistungsstreuungen in den Gruppen zu berücksichtigen. Brügelmann hält den Übergang zu Effektstärken, die Überlappungen und Streuung der Leistungsdaten berücksichtigen (und in der Hattie-Studie zuhauf berichtet werden), für eine technokratische Scheinlösung, da auch bei ihnen nicht berücksichtigt wird, dass eben nicht nur die Leistungen streuen, sondern auch die praktischen Realisierungen der Programme als solche. Das stellt allerdings die Evaluierbarkeit von relativ breiten Konzepten wie „offener Unterricht" oder „Computereinsatz" (zumindest in Feld- und Metastudien) ganz grundsätzlich in Frage. Unterrichtsmethoden, so Brügelmanns Schlussfolgerung (in meinen eigenen Worten), lassen sich eben nicht unabhängig von den Menschen, die sie anwenden, und unabhängig von den Menschen, auf die sie angewendet werden, und unabhängig von den Kontexten evaluieren, in denen dies geschieht. Das setzt empirischer Bildungsforschung Grenzen in der Erzielung eindeutiger Information und lässt Meta-Studien im pädagogischen Bereich als grundsätzlich hinterfragenswert erscheinen.

Die Unterüberschrift „Warum wir PISA & Co brauchen, die Ergebnisse aber nur mit Vorsicht nutzen sollten" des PISA-Kapitels deutet bereits an, dass Brügelmann mit den internationalen Leistungsvergleichsstudien etwas weniger hart ins Gericht geht, als mit der Hattie-Studie. Brügelmann wirft hier die Fragen auf, inwiefern Fachleistungen einzelner Fächer schon ein Maßstab für die Qualität des Schulwesens als solches darstellen können, ob die Testaufgaben geeignet sind, Fachleistungen in angemessener Form zu erfassen, wie aussagekräftig und verständlich die gewählten Auswertungen der Daten sind und inwiefern Verbesserungen in den Testwerten unumwunden als Verbesserungen der zu Grunde liegenden Fachleistungen bzw. den Kreis schließend für die Qualität des Bildungssystems genommen werden sollten. In diesem Kapitel werden diejenigen, die sich mit der PISA-Kritik aus dem mathematikdidaktischen Bereich bereits intensiver beschäftigt haben, viele Argumentationslinien wiedererkennen. Brügelmann ist dabei ein durchgängig unaufgeregter, um sorgfältige Abwägung von Pro- und Contra-Argumenten bemühter Stil zu attestieren, dem es sehr deutlich um eine produktive Weiterentwicklung dieser Unternehmungen geht, nicht um deren grundsätzliche Verdammung. Was Brügelmann aber m. E. deutlich macht, ist, dass eine produktive Weiterentwicklung voraussetzt, dass die Proponenten dieser Art von Forschung zu einer deutlich bescheideneren Einschätzung bezüglich der Geltungsansprüche ihrer Ergebnisse gelangen. Ich würde Brügelmanns Überlegungen wie folgt zusammenfassen: Forscher(innen), die mit notwendigen Grenzen der mit ihren Untersuchungsmethoden erzielten bzw. erzielbaren Ergebnisse offen und ehrlich umgehen und andere Arten von Forschung als komplementäre Zugänge zu schätzen wissen, wären deutlich produktiver für Pädagogik und Didaktik, als solche, die eine Art Alleinvertretungsanspruch „echter" Forschung für ihre Untersuchungsmethoden proklamieren und in dem Glauben verharren, jedes Problem und jede Grenze des eigenen Zugangs sei nur dessen bisheriger mangelnder Entwicklung geschuldet, temporär und durch rein technokratische Optimierungen schon noch in den Griff zu bekommen.

Die letzten beiden Kapitel, die den Beitrag von VerA zur Unterrichtsentwicklung und die Frage des Beitrags unterschiedlicher Instrumente zur Lernstandserhebung und –rückmeldung für Schüler(innen) behandeln, richten sich noch deutlicher als die hier bereits besprochenen Abschnitte insbesondere an Schulpraktiker(innen) und sind nicht minder interessant und kenntnisreich geschrieben. Ich verzichte hier im Sinne der gebotenen Kürze auf eine eingehendere Darstellung.

Dieses Buch kann uneingeschränkt all jenen empfohlen werden, die bereit sind, sich (selbst-) kritisch mit Nutzen und Grenzen quantitativer empirischer Bildungsforschung auseinanderzusetzen, auch empathisch im Sinne der verschiedenen „Stakeholder". Es sei ganz besonders all denjenigen empfohlen, die (zu Recht oder Unrecht sei dahingestellt) bislang den Eindruck hatten, beim Pro-Kontra gäbe es in diesem Bereich nur Maximalpositionen, verhärtete Fronten, Eitelkeiten verschiedener Schulen und unproduktive Pauschal- und Fundamentalkritik. Diese wird man bei Brügelmann nicht finden und es wäre der Mathematikdidaktik sehr zu wünschen, wenn sie ähnlich multiperspektivisch, aufgeschlossen und mit klarem Blick auf die Schul- und Unterrichtsentwicklung die Möglichkeiten und Grenzen fachdidaktischer Wirkungsforschung im Sinne empirischer Bildungsforschung und die Bedeutung alternativer Forschungszugänge zum Lehren und Lernen von Mathematik auszuloten bereit wäre.

Hans Brügelmann: *Vermessene Schulen – standardisierte Schüler. Zu Risiken und Nebenwirkungen von PISA, Hattie, VerA und Co.* Weinheim und Basel: Beltz, 2015. Gedruckt: ISBN 978-3-407-25729-1, EUR 19,95, eBook: ISBN 978-3-407-29204-9, EUR 18,99.

Andreas Vohns, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt, Österreich, Email: andreas.vohns@aau.at

Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht: Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht

Rezensiert von Johanna Heitzer

Anlässlich des 65. Geburtstages von Hans-Jürgen Elschenbroich haben Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht ein Buch über Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht herausgegeben.

Der erste Eindruck fällt positiv aus: ein schlicht, aber schön gebundenes, kompaktes DIN-A5-Taschenbuch, auf angenehm glattem Papier übersichtlich gesetzt und voller Abbildungen unterschiedlichster Art.[1] Insgesamt 32 Autorinnen und Autoren kommen zu Wort, mindestens 20 Typen mathematischer Soft- und Hardware wurden benutzt und werden vorgestellt. Die Beteiligten kommen aus Schule und Hochschule, sind mit Unterricht, Lehre, Fortbildung, Wissenschaft und Technik vertraut und haben sich allesamt entwickelnd, erprobend oder forschend mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge bei der Mathematikvermittlung auseinander gesetzt.

Das Buch beginnt mit einem Foto des offenkundig fröhlich und wach gebliebenen Jubilars und endet mit einer komfortablen Zusammenstellung seiner über 22 Jahre verteilten Veröffentlichungen zum Thema. Ein Blick auf die Worte, die in Hans-Jürgen Elschenbroichs Beitragstiteln besonders häufig auftauchen, vermittelt einen guten Eindruck sowohl von dessen Leitgedanken als auch von dem, wozu man im vorliegenden Jubiläumsband Neues erwarten darf. Es sind die Substantive *Anschauung*, *Werkzeuge*, *Visualisierung*, *Kompetenzen*, *Geometrie* und *Funktionen*, die Adjektive *interaktiv*, *digital*, *dynamisch*, *intuitiv*, *kalkülfrei* und *elektronisch* und schließlich die Verben *entdecken* und *erkunden*.

Überblick

Einführend würdigt das Herausgeberteam Hans-Jürgen Elschenbroich für ebenso reflektierte wie praxiserprobte Beiträge zum Themengebiet sowie für seine Rolle im Rahmen der Kommunikation von Wissenschaft, Aus- und Weiterbildung,

[1] Dass die Abbildungen in Art, Qualität und Größe stark differieren, erzeugt eine gewissen Unruhe, die jedoch ebenso mit der Entstehungsgeschichte wie mit dem Gegenstand des Buches zusammenhängt und insofern auch positiv als Lebendigkeit wahrgenommen werden kann. (Ein Abbildungsverzeichnis mit Urhebern, benutzter Technik oder Quellen fehlt.)

Bildungsadministration und Schule. Als zentrale Schritte werden die Arbeiten zur Bedeutung von Geometriesystemen im Kontext visuellen Beweisens und die Entwicklung elektronischer Arbeitsblätter genannt.

Zu den großen Vorzügen des Buches gehört, dass fast alle Autorinnen und Autoren sich seit Jahren oder sogar Jahrzehnten mit dem Thema auseinandersetzen. Sie werden also auf der Basis vielfältiger eigener Erfahrungen sowohl mit den gewachsenen und immer wieder veränderten technischen Möglichkeiten als auch mit dem Stand der Veröffentlichungen und Austauschplattformen zu ihrem Bereich vertraut sein und diese reflektiert einordnen können. Entsprechend der Breite dieser Autorenschaft ist das Buch in vier Bereiche eingeteilt:

„Aus der Schule, für die Schule“ verspricht dem Herausgebertrio zufolge, das Potential digitaler Werkzeuge und insbesondere den Mehrwert für authentische, reflektierte Auseinandersetzungen aufzuzeigen. Mit acht Beiträgen auf insgesamt 130 Seiten macht dieser Abschnitt mehr als ein Drittel des Buches aus und ist in gewissem Sinne der abwechslungsreichste.

„Fachdidaktische Beiträge“ verspricht Einblicke in die aktuelle Entwicklungs- und Forschungsarbeit zum Thema und macht gut ein weiteres Drittel des Buches aus. Die Beiträge sind naturgemäß fast ausschließlich von Hochschulangehörigen geschrieben und sehr unterschiedlich lang.

„Fachmathematische Beiträge“ verspricht aufzuzeigen, dass digitale Werkzeuge sowohl als sinnstiftende als auch als kreativ-ästhetische Hilfsmittel für die Fachmathematik nutzbar sind. Auch diese Beiträge stammen überwiegend von Hochschulvertretern. Der Abschnitt ist mit vier Beiträgen und fünfzig Seiten relativ kurz, mag aber dennoch für manche Leser der attraktivste sein.

„Praxisbeiträge“ verspricht, unterrichtspraktische Einsatzbeispiele konkret vorzustellen und besteht aus sechs kurzen Artikeln auf insgesamt knapp 40 Seiten. Hier kommen Zugänge, Verständnisförderung, schöne Mathematik am Rande des Lehrplans und die Dokumentation unter Einsatz digitaler Werkzeuge erzielter Ergebnisse im Unterricht zur Sprache.

Zu ausgewählten Beiträgen

Aus offenkundigen Gründen kann in dieser Rezension nur auf ausgewählte Artikel eingegangen werden, und auch dies nur sehr knapp oder sogar nur schlaglichtartig. In meinem Fall beruht die Auswahl vor allem auf dem infolge Daumenprobe, Titel oder Autor bzw. Autorin für mich persönlich Vielversprechendsten. Zudem wurde berücksichtigt, wer dem Jubilar bzw. wem der Jubilar so wichtig ist, dass dies zu einem Vortrag auf der zugehörigen Festveranstaltung geführt hat. Außerdem habe ich natürlich versucht, die vier Abschnitte allesamt zu berücksichtigen und auch sonst die Breite der unterschiedlichen Beiträge ein wenig aufleuchten zu lassen.

Die so entstandene Auswahl ist kein Maß für Bedeutung oder Qualität der Beiträge im Einzelnen. Auch unter dem hier nicht explizit Erwähnten hat mir Manches ausnehmend gut gefallen. Ohnehin handelt es sich um ein Buch, aus dem die meisten Leser das für sie persönlich Interessanteste herauspicken und für sich Wertvolles finden werden.

Zum Abschnitt „Aus der Schule, für die Schule“ gehört ein Beitrag von Henning Körner über die Begriffe Bestand und Änderung und ein mit digitalen Werkzeugen unterstütztes Konzept zur Vermittlung der infinitesimalen Übergänge in der Sekundarstufe II. Körner beschreibt, an welchen Stellen im Unterricht grafikfähige Taschenrechner oder Funktionenplotter zum Einsatz kommen können, inwieweit sie an diesen Stellen hilfreich sind, welche Schülerfragen auftreten können, wo Gefahren lauern und wie man diese als Lehrer umgeht. Wie die Herausgeber des Bandes und viele weitere Autoren betont er, dass „Technik immer als Hilfe für Verstehen [...], aber nie als Selbstzweck“ dienen sollte. Insgesamt wird überzeugend dargestellt, wie Schülerinnen und Schüler durch die Arbeit mit digitalen Werkzeugen das Prinzip des „kontrollierten, bewusst gesteuerten Annäherns“ als eine Form der Grenzwertermittlung kennenlernen können.

Andreas Pallack wagt sich im gleichen Abschnitt an eine Einschätzung der näheren Zukunft des Medieneinsatzes und leitet daraus fünf Thesen über Verbreitung und Nutzung digitaler Medien in zehn Jahren ab. Die Thesen gründen unter anderem auf seiner Lesart einer niederländischen Studie von 2013, nach der die Lehrkraft-Haltung gegenüber dem Einsatz digitaler Werkzeuge sowie die Selbstwirksamkeit hinsichtlich der erfolgreichen Auseinandersetzung mit ihnen den mit Abstand größten Einfluss auf die gewinnbringende Nutzung im Unterricht haben. Zu den Thesen gehört das weitgehende Stagnieren der Entwicklung digitaler Werkzeuge selbst gegenüber deren noch lange wirkendem Einfluss auf die Weiterentwicklung von Mathematikunterricht. Schließlich werden drei Konsequenzen für Lehrerfortbildung und schuladministrative Entscheidungen gezogen, durch die der Einsatz digitaler Werkzeuge mit Sinn und Mehrwert gefördert werden könne.

Zu den „Fachdidaktischen Beiträgen“ gehört einer von Bärbel Barzel, in dem das „Arbeiten mit CAS aus fachdidaktischer Perspektive“ zusammengefasst wird. Anders als in Deutschland wird in einigen Ländern schon seit den 1980ern intensive Forschung zum Einsatz von Computeralgebrasystemen betrieben. Barzel erläutert die Erkenntnisse ausgewählter internationaler Studien zum Mehrwert von CAS und formuliert Thesen, die sich aus einer 2011 durchgeführten umfangreichen internationalen Literaturrecherche zum Stand der Forschung des CAS-Einsatzes ableiten lassen. Darüber hinaus geht Barzel auf die Bedeutung der Auswahl eines geeigneten Mediums ein, die von weit mehr als nur vom mathematischen Themenbereich gesteuert sein sollte.

Wie Barzel hat auch Colette Laborde aus Anlass des 65. Geburtstags vorgetragen. In ihrem von Rudolf Strässer übersetzten Beitrag wird – am Beispiel von Cabri – die Bedeutung der Interaktivität bei dynamischen, computergestützten Lernumgebungen herausgestellt. Laborde macht deutlich, wie der „Kreislauf der Interaktivität" zwischen Aufgabe und Lernendem durch das Hinzukommen geeigneter digitaler Werkzeuge bereichert werden kann. Auch weil hierbei didaktische Rückmeldungen durch die Software selbst und die den Prozess begleitende Lehrkraft zur Sprache kommen, bestärkt der Beitrag mich persönlich in der These, dass digitale Werkzeuge eine der hilfreichen Antworten auf die Herausforderungen von Heterogenität und sprachlichen Unterschieden bergen.

Ein Beitrag von Reinhard Oldenburg betrifft die dynamische Erkundung der Semantik der Algebra. Oldenburg schlägt für Gleichungen in zwei Unbekannten (x und y oder auch x und $f(x)$) das Programm FeliX1D als Vermittler zwischen der statischen Sicht der Logik (bestimmte Wertepaare machen die Aussageform zu einer wahren Aussage) und der dynamischen Sicht (Änderung eines der Werte bringt Änderung des anderen mit sich) vor. Hierbei können Variablen in einer Tabelle und auf einer Zahlengeraden abgelesen und verändert werden. In einer weiteren Tabelle sind Gleichungen oder Ungleichungen in den Variablen einzugeben. Ändert man nun den Wert einer Variable, muss sich auch der Wert einer anderen Variablen ändern, damit die Gleichung gültig bleibt.

Von Ulrich Kortenkamp und Jürgen Richter-Gebert stammt einer der „Fachmathematische Beiträge". Er behandelt eine Frage mit hoher Aussicht auf Schülerinteresse und auch in diesem Sommer wieder besonders hoher Aktualität: Wie lässt sich beim Fußball mit zwei Kameras, Cam Carpets und einem DGS feststellen, ob ein Ball im Tor war oder nicht? Ausgangspunkt ist eine konkrete Szene, bei der durch ein einzelnes Foto darüber keine Entscheidung getroffen werden kann. Die Positionen von Spielern, Ball und Kamera werden dann auf ein digitales Arbeitsblatt übertragen. Durch Einzeichnen einer zweiten Kamera sieht man, dass die Position des Balles (und der Spieler) bestimmt werden kann, wenn die Position der Kamera bekannt ist. Im Weiteren werden die Technik der Cam Carpets, der Zusammenhang mit Projektionen und ihr Nutzen für die Torlinientechnik besprochen.

Das ansprechende Umschlagbild des Buches stammt aus einer weltweiten Sammlung, die ebenfalls infolge der Arbeit von Richter-Gebert entstanden ist: Seine touch-basierte Mathematik-App iOrnament hat Nutzer so begeistert, dass ein Wettstreit um die schönsten und besten Anwendungen entstanden ist. Der Beitrag besticht durch den sehr breiten Blick auf Mensch, Maschine und Möglichkeiten, das sympatische Understatement bzgl. der hinter den Dingen steckenden Programmierkunst und den sehr ernst gemeinten Versuch, die Herausforderungen der Zukunft zu erkennen und anzunehmen.

Innerhalb der „Praxisbeiträge" stammen zwei lesenswerte Beiträge von Hans-Jürgen Elschenbroichs langjährigem Weggefährten Günter Seebach. Sie demonstrieren den Wert von GeoGebra bei Themen am Rande und in der Tiefe obligatorischer Lehrplaninhalte. Ebenfalls in diesem Abschnitt zeigt Heinz Klaus Strick, wie das Geburtstagsproblem als eines der klassisch erstaunlichen Ergebnisse aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter Einsatz digitaler Werkzeuge von den unterschiedlichsten Seiten (Simulation, Rechnung, Faustformel und andere Modellierungen) operativ durchdrungen werden kann. Dabei wird deutlich, wie die scheinbare Paradoxie sowohl intensiv kognitiv aktivierend eingesetzt als auch wieder aufgelöst und mit dem „gesunden Menschenverstand" vereinbar gemacht werden kann.

Fazit

In meinen Augen hat der Band Schwächen aus zwei mit Entstehungsgeschichte und Zuschnitt verbundenen Gründen: Zum einen haben verständlicherweise einige Autoren nicht eigens für diesen Band etwas konzipiert, sondern aus dem Vorhandenen geschöpft. Das führt vereinzelt zu Kombinationsartikeln aus wenig zusammenhängenden Teilen. Auch haben es sich in meinen Augen einzelne Autoren leichter gemacht, als es für einen Gewinn auf Leserseite nötig wäre.

Die zweite verständliche Schwäche, derer man sich als Leser bewusst sein sollte, liegt darin, dass es sich bei den Autorinnen und Autoren ausnahmslos um „in der Sache Begeisterte" handelt, die zwar konsequent und glaubhaft für einen reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge stehen, den potentiellen Nachteilen im Rahmen dieses Bandes aber aus offenkundigen Gründen wenig Platz eingeräumt haben. So werden zum vielbeschworenen Mehrwert des Einsatzes digitaler Werkzeuge nicht durch alle Beiträge mögliche Zweifel ausgeräumt. Die Chancen und Vorteile dominieren stark, die zugehörigen Thesen bleiben aufrichtigerweise in der „kann"-Form. So wird ein optimaler Einsatz unausgesprochen vorausgesetzt; aber nur in Ausnahmefällen darauf eingegangen, was dies wirklich heißt und wie es erreicht werden kann.

Man kann dies mit erneutem Bezug auf die Einleitung des Herausgeberteams auch so sagen: Dem Buch liegt die Überzeugung zugrunde, dass Unterricht zeitgemäß sein sollte – zeitgemäß und dabei dann gut, wohlgemerkt. Ob es Zeiten gibt, in denen Anpassung an das Aktuelle und Qualität schwer bis nicht vereinbar sind, und was dann gilt, darf in anderen Büchern stehen.

Dennoch leistet das Buch eine Menge. So wird unter anderem aufgezeigt, dass digitale Werkzeuge

- von konstitutiver Bedeutung für die Verstehensorientierung sein können (Körner),
- eine bequeme Fortsetzung elementarerer enaktiver Aneignungsformen mit Blick auf die Handlungsorientierung sein können (Heintz),
- die Erweiterung mathematischer Begriffe und Verfahren vom Zwei- ins Dreidimensionale schneller und nahtloser machen können (Lindner / Hohenwarter),
- didaktische Überzeugungen in neuer Weise umzusetzen erlauben (Rüsing, Schmidt),
- den „Kreislauf der Interaktivität" von Aufgabe und Lerner bereichern können (Laborde),
- neue Anwendungen und Umsetzungen didaktischer Theorien wie der Tätigkeitstheorie ermöglichen (Richter/Bruder),
- sowohl bei der täglichen Arbeit als auch bei Tests helfen können (Greefrath/Ries),
- mit der Werkzeugsprache neben dem Fachlichen und der Fachsprache eine bei richtiger Einführung bereichernde Komponente in den Lernprozess einbringen (Schacht),
- Visualisierungsmöglichkeiten mit sich bringen, die Anlass für die Thematisierung sonst schwer behandelbarer fundamentaler Sätze sein können (Henn/Müller),
- mit ihren Einsatzmöglichkeiten ein Beispiel geben, wo die Hochschullehre mit Gewinn etwas von der schulischen abzuschauen hätte (Köpf),
- hinsichtlich der Rolle von Beweisen in der Schule neue Motivation und neue Wege eröffnen können (Elschenbroich, wiedergegeben in der Einleitung) und
- der Lehrkraft neue Kapazitäten und Möglichkeiten für die Diagnose und individuelle Förderung geben können (Schacht, Laborde).

Es handelt sich naturgemäß weder um eine systematische Gesamtdarstellung noch um eine kritische Reflexion. Es handelt sich – zum Anlass passend – um einen Blumenstrauß, und zwar um einen attraktiven. Als Band mit eher „leichtem" Charakter übertrifft das Buch vieles ernster Angesetzte in der konstruktiven Auseinandersetzung mit einem Thema, das zu ignorieren oder durch die Überbetonung von Schwächen und Gefahren „auszubremsen" sich angesichts der Bedeutung elektronischer Hard- und Software sowohl im Alltag heutiger Schülerinnen und Schüler als auch in der heutigen Wissenschaft Mathematik schlicht verbietet.

Gaby Heintz, Guido Pinkernell und Florian Schacht: *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich*. Neuss: Klaus Seeberger, 2016. ISBN 978-3-940516-20-6, EUR 33€ (für MNU-Mitglieder 28€).

Das Buch kann im Buchhandel und unter www.mnu.de/bestellung-festschrift bestellt werden.

Johanna Heitzer, Lehr- und Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Email: johanna.heitzer@matha.rwth-aachen.de

Tobias Huhmann und Andreas Marx: Fachreferendariat Sekundarstufe I und II: Referendariat Mathematik – Kompaktwissen für Berufseinstieg und Examensvorbereitung

Rezensiert von Ekaterina Kaganova

Das Buch wendet sich an Referendare und damit an eine Gruppe, die vielfältigen Herausforderungen des Berufseinstiegs ausgesetzt ist. Die Referendare erleben häufig eine Kluft zwischen Universität und schulischer Praxis. So machen sie nicht selten die Erfahrung, dass viele Lehrer einen eher traditionellen Unterricht pflegen und die didaktischen Empfehlungen für unrealistisch und womöglich für unnötig halten: „Vergiss, was du an der Uni gelernt hast. In Wirklichkeit läuft es anders.“ Neben dieser Verunsicherung haben die Referendare häufig Schwierigkeiten, ihr vielfältiges im Studium erworbenes Wissen bei der Unterrichtsplanung und -durchführung anzuwenden. Von der Mathematikdidaktik wird die Gruppe der Berufseinsteiger mit ihren Sorgen größtenteils vernachlässigt. Während auf einer fächerübergreifenden Ebene vielfältige Bände existieren, die explizit Bedürfnisse von Referendaren aufgreifen, ist das vorliegende Buch im deutschsprachigen Raum das erste, das einen fachspezifischen Schwerpunkt hat. Es ist in einer Reihe des Cornelsen Verlags erschienen, in der ‚Kompaktwissen für Berufseinstieg und Examensvorbereitung‘ einzelner Fächer (bisher erschienen für Englisch, Latein, Musik, Geschichte und Deutsch) präsentiert wird. Jedes Buch der Reihe umfasst überschaubare 112 Seiten.

Es ist davon auszugehen, dass die Autoren vom Verlag vielfältige Vorgaben bekommen haben; neben der geringen Seitenzahl sind vermutlich auch bestimmte Themen (Unterrichtplanung, Benotung und die Rolle des Fachs außerhalb des Unterrichts) obligatorisch, denn alle Bücher der genannten Reihe weisen diesbezüglich Ähnlichkeiten auf. Neben diesen pragmatischen Vorgaben ist es wohl grundsätzlich eine große Herausforderung, einen Spagat zwischen der Komplexität des schulischen (Mathematik-)Lehrens und dem Bedürfnis vieler Referendare (und entsprechend des Verlags) nach möglichst eindeutigen und unmittelbar umsetzbaren Antworten auf ihre Probleme zu versuchen. Die nachfolgende Kritik ist auch vor dem Hintergrund dieses Spannungsfeldes und des beschnittenen Handlungsraumes der Autoren zu lesen.

Das Buch besteht neben der Einleitung aus vier Kapiteln, die jeweils einen unterschiedlichen Umfang aufweisen:

- Mathematiklehrer – Aufgaben, Pflichten und Möglichkeiten (3 Seiten)
- Die Planung von Unterricht (79 Seiten)
- Noten (12 Seiten)
- Mathematik und ihre schulische Rolle außerhalb des Mathematikunterrichts (3 Seiten)

Das Thema „Planung von Unterricht“ dominiert deutlich und beansprucht nahezu den gesamten Band. Entsprechend werden die anderen Themen äußerst allgemein und eher skizzenhaft behandelt. Im ersten Kapitel ‚Mathematiklehrer – Aufgaben, Pflichten und Möglichkeiten‘ wird der Leser sensibilisiert, sich ein „eigenes Bild vom Lehren und Lernen von Mathematik ins Bewusstsein [zu] rufen und auf dieser Grundlage gegebenenfalls Erweiterungen und Modifikationen vor[zu]nehmen“ (S. 10), indem er seine Erfahrungen mit Mathematiklernen in der eigenen Schulzeit und auf dem weiteren (universitären) Bildungsweg reflektiert. Es folgt ein eindringlicher Appell: „Lassen Sie die [universitären, E.K.] Theorien handlungswirksam werden. [. . .] Nehmen Sie sich die Zeit. Entwickeln sie [sic] Ihre eigene pädagogische Handschrift. Reflektieren Sie ihr [sic] Konzept und entwickeln Sie es bewusst aufgrund Ihrer konkreten Erfahrungen weiter“ (S. 11). Das Buch soll „auf diesem Weg helfen“ (ebd.). Das Kapitel endet mit einer Skizzierung des ‚Grundmodells des mathematischen Lehrens und Lernens‘, das in nachfolgenden Ausführungen aufgegriffen und vertieft wird. Dabei werden drei Ebenen aufgespannt, die beim Lernenden miteinander verknüpft werden (müssen): erstens „mathematische Theorie“, zweitens „Grundvorstellungen“ und drittens „real wahrnehmbare und gestaltbare Welt“ (S. 12). Abschließend werden „drei zentrale Anforderungsprofile für den Unterricht“ formuliert:

- „Entwicklung mathematischer Begriffe,
- Entwicklung mathematischer Sätze,
- Interaktion der Mathematik mit Nichtmathematik“ (ebd.).

Warum gerade diese drei Anforderungsprofile entstehen (zumindest der dritte Punkt verwundert, denn hier wäre wohl eher ‚Entwicklung mathematischer Verfahren' zu erwarten) und wie sie im Einzelnen mit dem skizzierten Lernmodell zusammenhängen, wird nicht weiter erläutert. Im dominierenden Kapitel zur ‚Planung von Unterricht' wird anfänglich unter der Teilüberschrift ‚Perspektiven auf den Unterricht' relativ ausführlich eine kognitiv-psychologisch orientierte Lehr- und Lerntheorie, die auf dem eingangs vorgestellten Grundmodell des Lehrens und Lernens aufbaut, präsentiert. Dabei werden die drei genannten ‚Anforderungsprofile' konkretisiert und „prototypische Lern- und Lehrsituationen" (S. 24) angegeben. So erfahren wir, dass die Entwicklung eines Begriffs folgende Prozesse umfasst (S. 25):

– Betrachtung von Einzelbeispielen
– Sortierung der Einzelbeispiele nach Merkmalen
– Beschreibung der Sortierhaufen

Dabei „entwickelt der Lernende einzelne, zunächst analog-bildhafte, nicht selten unabhängig voneinander existierende, Vorstellungen, die der Erfahrungswelt entstammen und mit Hilfe der mathematischen Sortierhilfen mehr und mehr durch propositionale Anteile angereichert und abstrahiert werden zu einem übergeordnetem [sic] System zusammenhängender Vorstellungen" (ebd.). Entsprechend der drei genannten Stufen ist auch der Lehrprozess bei Einführung neuer Begriffe zu gestalten, wobei als Methode ‚individuelle wie kooperative Arbeitsweisen' nahegelegt werden (vgl. S. 26–27). Alternative, in der Unterrichtspraxis verbreitete didaktisch-methodische Arbeitsweisen – insbesondere Lehrervortrag und Unterrichtsgespräch – werden nicht erwähnt (und dementsprechend nicht diskutiert). Dadurch erscheinen die vorgestellten Lern- und Lehrprozesse universal. Das anschließend skizzierte Lernen und Lehren mathematischer Sätze erscheint ebenfalls als allgemeingültig und beinhaltet folgende Stufen (S. 28):

– Zusammenhänge beobachten
– Verallgemeinernde Vermutungen formulieren
– Vermutungen beweisen

Hinsichtlich des dritten Anforderungsprofils ‚Interaktion der Mathematik mit Nichtmathematik' liefern die Autoren einige wenige Stichpunkte zum mathematischen Modellieren.

Insgesamt zeichnen sich die theoretischen Erläuterungen durch Überkomplexität auf der einen Seite und Unterkomplexität auf der anderen Seite aus. So sind die Beschreibungen kognitionspsychologischer Prozesse recht detailreich und abstrakt. Einige zentrale spezifische Begrifflichkeiten werden aber nicht näher erläutert, wodurch die dargestellte Theorie recht vage und zuweilen schwer zu verstehen ist. (Es ist zu bezweifeln, dass die meisten Referendare etwas mit dem spezifischen und mehrdeutigen Begriff ‚Proposition' anfangen können.) Auf der anderen Seite erscheint die dargestellte Lehr- und Lerntheorie als unterkomplex, weil sie als alternativlos, allgemeingültig und konsensual im Rahmen der Mathematikdidaktik dargestellt wird. Des Weiteren werden viele wesentliche Aspekte des Mathematikunterrichts (z. B. bildungstheoretische, kommunikative, semiotische, soziologische) entweder nicht oder lediglich beiläufig erwähnt. Solch eine stark verkürzte Darstellung des Lernens und Lehrens von Mathematik verzerrt nicht nur das Bild von Mathematikdidaktik als Wissenschaftsdisziplin, sondern – was noch folgenreicher ist – reduziert die Komplexität des schulischen Lernens und Lehrens auf ein kaum vertretbares Maß. Das Bestreben der Autoren, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren, den Berufsanfängern dadurch ‚Halt' zu geben und sie nicht zu verwirren, ist nachvollziehbar. Andererseits kann und sollte man Referendaren, die erfolgreich ein Lehramtsstudium abgeschlossen haben und Experten für die Lernprozesse von Schülern werden wollen bzw. sollen, divergentes und vielschichtiges Denken zumuten und zutrauen.

Schließlich werden zwei Unterrichtsreihen (5. Klasse und Oberstufe), sowie in diesem Rahmen zwei Unterrichtsstunden in bekannter Struktur (Lehrziele, Einbettung in die Unterrichtseinheit, Bezug zum Rahmenlehrplan, Verlaufsplan) präsentiert. Dabei werden die didaktisch-methodischen Entscheidungen auf der Grundlage der zuvor dargestellten Lerntheorie und des Rahmenplan-Kompetenzrasters/-modells fragmentarisch begründet. Alternative Herangehensweisen und ihre Diskussion fehlen auch an dieser Stelle. Des Weiteren dürfte ein Referendar, der bei der Planung einer Unterrichtsstunde Schwierigkeiten hat und womöglich gar keinen Anfang findet, insbesondere an der Genese der offerierten didaktisch-methodischen Ideen interessiert sein. Aussagen dazu gibt es jedoch kaum, die Stunden werden als ‚fertige' Konstrukte mitgeteilt. Hinsichtlich der Qualität der vorgestellten Stunden, die man natürlich diskutieren kann, erscheint ein Punkt zentral: Beide Stunden sind in kognitiver und methodischer Hinsicht für die Lehrkraft und die Schüler anspruchsvoll und voraussetzungsreich. Sie orientieren sich am – im Rahmen der Mathematikdidaktik hoch (womöglich zu hoch) gelobten – entdeckenden Lernen, wobei die Autoren diesen Terminus nicht verwenden. Die

Frage, welche Bedingungen für erwartete ‚Entdeckungen' und – allgemeiner – für das Gelingen des Unterrichtsvorhabens notwendig sind, wird jedoch kaum erörtert. Stattdessen wird suggeriert, dass der vorgestellte Unterricht in der alltäglichen Schulpraxis normalerweise ‚funktioniert'. Auf diese Weise wird einem Referendar, der versuchen sollte, die vorgeschlagene Stunde oder ähnliche Stunden unreflektiert zu unterrichten, übel mitgespielt, denn es besteht die Gefahr, dass sowohl er als auch seine Schüler aufgrund fehlender Kompetenzen und Kenntnisse scheitern.

Wie zuvor den adressierten Berufsanfängern die Komplexität mathematischer Lehr-Lern-Prozesse auf einer allgemeinen theoretischen Ebene verschwiegen wurde, fehlen nunmehr auch auf der handlungspragmatischen Ebene konkreter Unterrichtsplanungen Hinweise darauf, wie voraussetzungsreich der entworfene Unterricht sowohl für den Lehrenden als auch die Lernenden ist.

Das nachfolgende Kapitel ‚Noten' ist aufgrund seiner Kürze sehr fragmentarisch: Es beinhaltet neben einer kurzen kritischen Auseinandersetzung mit Benotung zahlreiche Empfehlungen, wie man den Lernstand bzw. das Wissen der Schüler diagnostizieren kann. Zunächst wird eindringlich appelliert, eine „Gesprächsatmosphäre zu erzeugen, die einem ‚offenen Gespräch unter Freunden' vergleichbar ist" (S. 96), wodurch „den Vorstellungen, den Gedanken, den Wegen der sich auf den [sic] Weg befindenden Lernenden Raum und Zeit" (S. 95) gegeben wird. Dass diese Forderung in der schulischen Unterrichtspraxis, in der eine Lehrkraft nicht selten gleichzeitig mit 30 Schülern ein „offenes Gespräch" gestalten soll, kaum umsetzbar ist und komplexes Können (u. a. Gesprächsführungskompetenzen) und Wissen (u. a. fundiertes fachdidaktisches Wissen) auf Lehrerseite erfordert, wird kaum thematisiert. Anschließend präsentieren die Autoren weitere diagnostische Instrumente; dabei verweisen sie im Wesentlichen auf die im Rahmen des Projekts PIK AS für den Grundschulunterricht entwickelten Instrumente und Methoden, wie beispielsweise ‚informative Aufgaben', ‚transparente und kontinuierliche Lernstands-Feststellung' und ‚Profi-Aufgaben'. Die Methoden werden lediglich grob umrissen, für eine Konkretisierung ist man auf die angegeben Internetseiten angewiesen. Das Thema ‚Noten' wird nicht wieder aufgegriffen. Die aufgrund der Kapitelüberschrift geweckten Erwartungen werden damit nicht erfüllt und ein Referendar, der sich von der Lektüre Unterstützung bei der Bewertung von Schülerleistungen erhofft, dürfte eher enttäuscht sein.

Das Buch endet mit einem kurzen Ausblick hinsichtlich der ‚schulischen Rolle von Mathematik außerhalb des Mathematikunterrichts'. Hier erfährt der Leser, dass „Mathematik [...] unsere moderne Gesellschaft in besonderem Maße in nahezu allen Bereichen [...] durchdringt" (S. 104). Deswegen wird empfohlen, sich mit Kolleginnen und Kollegen anderer Fächer zusammenzuschließen, um gemeinsame Projekte zu organisieren. Des Weiteren wird dem Referendar ans Herz gelegt, Schüler an Wettbewerben und Exkursionen teilnehmen zu lassen. Hierbei werden die Ausführungen kaum konkretisiert, so dass ein Berufsanfänger außer den ihm vermutlich schon bekannten (pauschalen) Aussagen und Appellen wenig Neues erfahren dürfte.

Insgesamt wird das Buch der Autorenintention, bei der Entwicklung einer ‚eigenen pädagogischen Handschrift' behilflich zu sein, kaum gerecht, denn es schreibt ein (didaktisch idealisiertes) Bild vom Lehren und Lernen von Mathematik (recht dogmatisch) vor, blendet die Probleme der realen Unterrichtspraxis größtenteils aus und vernachlässigt unterschiedliche Sichtweisen auf die Mathematik und mathematische Lehr–Lern-Prozesse. Des Weiteren dürfte ein Berufseinsteiger, der beim Unterrichten Schwierigkeiten hat und hilfesuchend zu dem Buch greift, kaum differenzierte Antworten auf seine konkreten Fragen bekommen. In diesem Sinne ist zu erwarten, dass die auf amazon.de veröffentliche Rezension unter der Überschrift „ziemlich ... Mau" keinen Einzelfall darstellt:

> Ich muss sagen ich hatte aufgrund des Titels und der Inhaltsübersicht hohe Erwartungen an dieses Heftchen, und bin deshalb wahrscheinlich ziemlich enttäuscht. Viel theoretisches Blabla, was man schon hundert mal (in anschaulicherer Art und Weise) in der Uni gehört hat. Hier werden viele wichtige Sachen angerissen, mehr aber auch nicht. Ganz nett sind zumindest die Beispiele zur Unterrichtsplanung.

Die Empfehlungen und Appelle der Autoren erscheinen vor dem Hintergrund typischer Probleme von Berufsanfängern teilweise idealistisch und auf der unterrichtspraktischen Ebene wenig handhabbar. Aufgrund der Verkürzungen und Unterschlagungen sowohl auf der theoretischen als auch der unterrichtspraktischen Ebene dürften Referendare beim Versuch der Umsetzung der unterbreiteten Vorschläge schnell in Schwierigkeiten geraten, auf die sie in der Lektüre dieses Buches kaum vorbereitet werden. Dies kann in der Folge dazu führen, dass sie sich von den normativ-universitären Vorstellungen abwenden und sich eher traditioneller Vermittlungsdidaktik bedienen. Damit würde die Kluft zwischen Universität und Praxis, zu deren

Verringerung dieses Buch ja eigentlich einen Beitrag leisten möchte, eher vergrößert.

Tobias Huhmann und Andreas Marx: *Fachreferendariat Sekundarstufe I und II: Referendariat Mathematik – Kompaktwissen für Berufseinstieg und Examensvorbereitung*. Berlin: Cornelsen, 2015. ISBN 978-3-589-16050-1, EUR 14,99.

Ekaterina Kaganova, Department für Lehrerbildung und fachdidaktische Forschung, Universität Potsdam, Karl-Liebknecht-Straße 24–25, 14476 Potsdam, Email: kaganova@uni-potsdam.de

Rezensiert! – Und nun?

Horst Hischer

„Rezensiert! – Und nun?“: Das wird sich manche Autorin oder mancher Autor eines Buches fragen, wenn nach den Mühen eines recherchereichen Entstehungsprozesses das endlich publizierte Werk nun sogar öffentlich besprochen wurde, was bei der Fülle an neuen Büchern keineswegs selbstverständlich ist und was also freudig zu konstatieren wäre. Und wohl nicht erst nach einer vorliegenden Rezension kommen Fragen wie etwa die folgenden hinzu: „Bin ich mit meinem Werk zufrieden? Hätte ich vielleicht irgendetwas besser oder anders formulieren können oder gar sollen?“

„Rezensiert! – Und nun?“: Diese Frage sollte sich aber auch der Rezensent oder die Rezensentin stellen, nachdem nun eine solche (hoffentlich sorgsam bedachte, abgewogen verfasste) „Rezension“ (= „Beurteilung“) verfasst worden ist. Und hinzu sollten sich die beiden weiteren o. g. Fragen gesellen, vor allem auch die folgende: „Habe ich mich vielleicht irgendwo – situativ möglicherweise zunächst nachvollziehbar – zu Polemik hinreißen lassen, bin ich unfair geworden und habe damit den redlichen Pfad der Wissenschaft leichtfertig verlassen?“ All diese Fragen sollten tunlichst vor Drucklegung der Rezension gestellt werden, um dann ggf. noch zu Konsequenzen führen zu können.

Bei solchen und ähnlichen selbst gestellten Fragen ist allerdings der Autor oder die Autorin eines Buches in einem gewissen Vorteil gegenüber der Rezensentin oder dem Rezensenten, weil objektiv vorliegende „Mängel“ in einer Folgeauflage des Buches korrigierbar sind. Dies gilt jedoch nicht für die rezensierende Person, der wegen der hier vorhandenen „Einmaligkeit“ ihrer Rezension eine besondere Verantwortung obliegt – nämlich ganz im Sinne von „Kritik als Kunst der Beurteilung“.

Erfreulicherweise gibt es in den „Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ seit geraumer Zeit ab und zu auch die Rubrik „Rezensionen“, die durchaus einen größeren und regelmäßigen Stellenwert bekommen dürfte oder gar sollte, denn Alternativen gibt es leider kaum, sieht man von den „Mathematischen Semesterberichten“ ab. Manche der bisherigen Rezensionen in den MGDM genügen jedoch nicht solchen gerade angedeuteten Ansprüchen, gelegentlich war sogar in Repliken von „Schmähkritik“ die Rede.

Hans-Joachim Vollrath zitiert in seinem Buch „Verborgene Ideen“ u. a. das 1786 erschienene Buch „Der selbstlernende Algebrist“ von Abel Bürja[1], das wohl eine Rezension erfahren hat, die Bürja in der ein Jahr später erschienenen ersten Auflage seines neuen Buches „Der selbstlernende Geometer“ kommentiert (in einer späteren Auflage von 1801 erschien es unter dem modifizierten Titel „Der selbstlehrende Geometer“). Am Ende seiner „Vorrede“ in dieser Ausgabe von 1787 schreibt Bürja (mit Dank an Vollrath für diesen Quellenverweis) unter anderem:

> *Es wird wohl selten heut zu Tage eine Vorrede geendigt, ohne ein Paar Worte mit den Herren Kritikern zu reden, es sey nun um ihre Gunst zu erstehen, oder um ihnen Trotz zu bieten. Ich thue keines von beyden. Guten Rath bin ich allemal willig anzunehmen, er mag entweder mit gebieterischem Rezensenten-Tone oder mit freundschaftlicher*

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Abel_Burja

Sanftmuth gegeben seyn. Denen die meine Algebra günstig beurtheilet haben, statte ich für ihre aufmunternde Nachsicht meinen schuldigen Dank ab. Denen die mir alle Kenntniß einer guten mathematischen Methode abgeleugnet haben, muß ich ohne Umschweif sagen, daß sie sich irren; da Männer, die in diesem Fach für die ersten gehalten werden, gerade das Gegenteil versichert haben.
Bey dieser Gelegenheit kann ich nicht umhin einige Regeln der guten Kritik anzuführen, die ein jeder bey der Beurtheilung eines Buches beobachten sollte. Man muß die Methode eines Verfassers an sich selbst und ihrem inneren Werthe nach beurteilen, ohne sich gar ängstig darum zu bekümmern, ob sie neu oder alt ist, ob der Verfasser darin seinen Vorgängern gefolget ist oder nicht; auch nicht verlangen, daß einer genau auf den Fußstapfen des andern gehen solle. Wird ein neuer Weg vorgeschlagen, so kann man ihn als einen Versuch ansehen, wovon die Erfahrung erst lehren muß, ob er besser oder schlechter ist als die gewöhnliche Bahn. [...]
Endlich ist es eine Hauptregel, daß man bey der Beurtheilung eines Buches nicht mit einem entscheidenden Tone spreche, als wäre man ein untrüglicher Richter oder ein Papst in der gelehrten Welt: man muß seine Kritik als das ausgeben, was sie allemal seyn soll, die bescheidene Meynung eines einzelnen Mannes, der wie andere Sterbliche irren kann. Man muß also nicht aus einem hohen Tone lauter Fragen aufwerfen: warum dieses? warum jenes? warum hat es der Verfasser nicht so gemacht? Auch muß man keine Beurtheilung mit spöttischen Wünschen beschließen, sondern fein ehrbar und bescheiden rezensiren.

Ganz in diesem Sinne werde ich weiterhin darauf verzichten, auf die in der Ausgabe 100 der MGDM erschienene Rezension meines Büchleins „Die drei klassischen Probleme der Antike“ näher einzugehen, das in engem Kontakt mit dem Grundlagenforscher Ulrich Felgner entstanden ist. Angemerkt sei aber meine Verwunderung darüber, dass der Rezensent nicht auf von mir herangezogene Literatur eingegangen ist, sondern stattdessen bemängelt, dass ich bestimmte andere, von ihm für wichtig erachtete Werke nicht einbezogen hätte (wobei das von mir zitierte Buch Ferdinand Rudios bereits drei Jahre vor dem vom Rezensenten eingeforderte Werk von Felix Klein erschienen ist). Und dass der Rezensent die – im rezensierten Büchlein ausführlich entfaltete – Bedeutung der Titelgraphik für die exakte Lösung des Delischen Problems durch Archytas von Tarent (sic!) nicht erkannt zu haben scheint, sei hier abschließend kommentarlos notiert.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de

Leserbrief

Legendenbildung?
Gerd Schubring hat mir in seiner Replik im letzten Heft der MDGM auf meinen Beitrag „Ein anderer historischer Blick auf die „Stoffdidaktik" Legendenbildung vorgeworfen, weil ich behauptet habe, Günter Pickert und Jürgen Kühl seien „aus Protest" aus dem Beirat des früheren IDM Bielefeld ausgetreten und das IDM habe sich aufgelöst.

Mir liegen handschriftliche Briefe von Pickert und Kühl vor, in denen meine Behauptung explizit bestätigt wird. Ich habe sie Herrn Schubring zur Kenntnis gegeben. Weiter ist es keine Legende, dass das IDM als unabhängiges Forschungsinstitut heute nicht mehr existiert (im Gegensatz zum IPN Kiel, das mit Mitteln der VW-Stiftung zeitgleich gegründet wurde).

Erich Ch. Wittmann, Dortmund,
Email: wittmann@math.tu-dortmund.de

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

▪ ***Vorstand**. 1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de
▪ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de
▪ *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg. Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de
▪ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at
▪ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
▪ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum
▪ Verleger: GDM ▪ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ▪ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ▪ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ▪ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.