Editorial: Reminiszenzen

Liebe Leser(innen),
um gleich mit einer Reminiszenz an die Popkultur zu beginnen: „The second album is the hardest one“ umschreibt die Angst der Musiker(innen) vor dem Nachfolger des Debutalbums, die mir mit Herausgabe meiner zweiten Mitteilungen ein gutes Stück nachvollziehbarer erscheint.

Versteht man Reminiszenzen in ihrem ursprünglichen Wortsinn als „Erinnerung an etwas Früheres“, so stellen diese im Magazinteil des aktuellen Hefts einen gewissen Schwerpunkt dar. Willi Dörfler erinnert sich und uns an die von ihm persönlich miterlebten (fast) vier Jahrzehnte Mathematikdidaktik im deutschsprachigen und internationalen Raum. Horst Hischer wirft einen Blick zurück auf die durch die Entstehung der Informatik bedingten/erhofften Auswirkungen auf den Mathematikunterricht, die er über rund 50 Jahre seit Beginn seines Studiums in Mathematik mitverfolgt hat.

Reminiszenz meint auch, das Vergangene im Heutigen wieder zu erkennen, das Gewordene als ein Ebensolches zu verstehen. Für die Mathematik ist immer wieder auf die Gefahren einer ahistorischen Betrachtungsweise der Disziplin hingewiesen worden, etwa in der Präambel der *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*[1]: „Studierende aller Lehrämter sollen der Mathematik als Kulturleistung und den für sie charakteristischen Wissensbildungsprozessen begegnen. Daher gehört zur Vermittlung mathematischer Inhalte grundsätzlich auch, [...] sie in der historischen Genese zu verorten.“ Gregor Nickel greift diesen Gedanken auf und erörtert, welcher Nutzen und welcher Nachteil Lehramtsstudierenden aus der Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik erwachsen kann.

Um beim Thema Lehramtsstudium zu bleiben: Dieses ist unter dem Schlagwort/Kampfbegriff ‚Einheitslehrer‘ aktuell wieder verstärkt ins öffentliche Interesse gerückt.[2] Im vorliegenden Heft finden Sie zu diesem Thema eine aktuelle Stellungnahme der Kommission Lehrerbildung sowie einen Artikel von Bikner-Asbahs, die über berufsbezogene Präferenzen der Studierenden vor und nach Umstellung auf ein Eintypsekundarstufenlehramt berichtet.

Rezensionen sind seit einigen Jahren fester Bestandteil der Mitteilungen der GDM. Es liegt in der Natur der Sache, dass Rezensionen nicht nur positiv aufgenommen werden – zumindest solche, die das rezensierte Werk selbst nicht nur positiv aufgenommen haben. Bezüglich des letzten Hefts hat es dabei die eine oder andere kritische Rückmeldung zu einzelnen Rezensionen gegeben. Als Herausgeber der Mitteilungen ist mir allgemein daran gelegen, der deutschsprachigen Mathematikdidaktik in ihrer ganzen Breite Raum zu bieten, auch in der Kontroversität der in ihr vertretenen Meinungen und Positionen. Die Mitteilungen sollen nicht nur Ort der Wiedergabe offiziell verlautbarten Konsens, sondern auch der (kontroversen) Diskussion sein. Rezensionen geben ebenso wenig wie die übrigen Beiträge in den Mitteilungen der GDM die Meinung des Herausgebers oder des Vorstands der GDM wieder. Dass Rezensionen immer aus einer bestimmten Position heraus erfolgen, insofern subjektiv gefärbt sind und vom Autor des rezensierten Werks u. U. als nicht nachvollziehbar empfunden werden, lässt sich prinzipiell nicht vermeiden, auch nicht durch editorische Eingriffe.[3]

Wenn Sie eine dezidiert andere Einschätzung zu einem der in den Mitteilungen der GDM angesprochenen Themen oder vorgestellten Büchern haben, dann bin ich sehr an Ihrer Meinung interessiert und würde mich freuen, diese in Form eines eigenen Diskussionsbeitrags, einer zweiten Rezension oder eines Leserbriefs drucken zu dürfen.

Zunächst aber wünsche ich Ihnen allen eine anregende Lektüre des aktuellen Hefts.

Andreas Vohns

[1] http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/standards-dmv-gdm-mnu.pdf

[2] Vgl. etwa: http://www.zeit.de/2013/17/einheitslehrer-baden-wuerttemberg-streitgespraech, http://www.faz.net/aktuell/beruf-chance/campus/fuer-alle-schulformen-der-einheitslehrer-ist-wieder-da-12200875.html

[3] Man vgl. zur Rezensionsproblematik allgemein: Bardelle, Frank: Formen der kritischen Auseinandersetzung oder: Wie man Urteile über wissenschaftliche Neuerscheinungen verhängt. In: Zeitschrift für Soziologie 18 (1989), Heft 1, Online unter: http://www.zfs-online.org/index.php/zfs/article/viewFile/2680/2217

ISSN 0722-7817

Inhalt

Bildnachweise der Umschlagseite:
Linke Spalte (von oben nach unten): Christian Dohrmann, Fritz Haselbeck, Christian Dohrmann, Michael Zaretski (CC-BY-NC-2.0)
Rechte Spalte (von oben nach unten): ERME/Inmice Hizmet Atölyesi, Erik Klein (CC-BY-NC 3.0), GDM

Vorwort des 1. Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,

das Jahr 2013 hat in unseren Verband bereits einige Bewegung gebracht und vieles liegt noch vor uns. Für mich sind es die ersten Monate als Vorsitzender, und ich möchte auch an dieser Stelle nochmals für Ihr durch die Wahl ausgesprochenes Vertrauen danken. Gleichzeitig möchte mich ich ganz herzlich bei meinem Vorgänger, Hans-Georg Weigand, bedanken, der mich in dieser Anfangszeit in allen neuen Arbeitsfeldern unterstützt und mir dadurch den Einstieg erleichtert hat. Heute möchte ich drei Punkte aufgreifen, die für die Entwicklung dieses Jahres bedeutsam bzw. interessant erscheinen: (1) Beitragserhöhungen und ihre Folgen, (2) Gesamtlage der GDM und (3) die Ideen zum Mathematikunterricht des Richard David Precht.

1 Holpriger Start

Es war nun doch ein nicht ganz unproblematischer Schritt und ein gewisses Wagnis: unsere Beitragserhöhung vom März 2013, die für die den regulären Mitgliedsbeitrag zahlenden Mitglieder zu einer wahrgenommenen Verdopplung des Mitgliedsbeitrags, für alle Mitglieder jedenfalls zu einer Erhöhung um mehr als 66 % führte.[1] Auf unserer Mitgliederversammlung wurde diese Beitragserhöhung – insbesondere im Hinblick auf eine weiterhin intensive Förderung des Nachwuchses und auf die Vorbereitung der kommenden ICME-Tagung in Hamburg – mit viel Verständnis akzeptiert. Die Entwicklung danach zeigte jedoch, dass nicht wenige Mitglieder dieser Erhöhung mit Unverständnis und Ablehnung gegenüberstehen. Dies blieb nicht ohne Folgen für den Mitgliederstand: In den Monaten März und April gab es eine Welle von Kündigungen, die sich im Mai abschwächte. Insgesamt handelt es sich bislang um ca. 75 Kündigungen, die nun rückläufige Tendenz lässt hoffen, dass sie insgesamt den zweistelligen Bereich nicht übersteigen werden.

Die meisten dieser nun ehemaligen GDM-Mitglieder gaben an, dass sie bereits seit längerem nicht mehr im aktiven Dienst sind und deshalb ohnehin vorhatten, die Verbandsmitgliedschaft zu beenden. Einige Ex-Mitglieder ließen jedoch auch erkennen, dass sie die Erhöhung für überzogen halten und nicht mehr bereit sind, unter diesen Bedingungen Mitglied der GDM zu bleiben. Dies bedauern wir natürlich sehr und hoffen, dass wir auch diese Kolleginnen und Kollegen in Zukunft wieder gewinnen können.

Positiv zu vermerken und sicherlich nicht selbstverständlich ist jedoch die Tatsache, dass die Erhöhung nicht nur von der Mehrheit der Mitgliederversammlung (anwesend waren etwa 250), sondern auch von der großen Mehrheit der Mitglieder (dies sind über 1000) getragen wird. Dies gilt insbesondere für die zahlreichen jungen Mitglieder, von denen uns kaum jemand verlassen hat.

Eine Beitragserhöhung im laufenden Geschäftsjahr mit dem damit verbundenen Sonderkündigungsrecht stellt auch für Schrift- und Kassenführung eine Herausforderung dar. Falls es hier in Einzelfällen zu kommunikativen Irritationen gekommen ist, möchte ich Sie im Namen des Vorstands herzlich um Entschuldigung bitten. Auch wenn ein ähnlicher Schritt in den nächsten Jahren sicher nicht nötig sein wird, möchte ich Sie zudem noch einmal ausdrücklich bitten, dass Sie Schrift- und Kassenführung soweit wie möglich unterstützen. Dazu gehört u. a., dass reduzierte und ermäßigte Beiträge, die Sie wegen Ihrer Stellensituation, Ihrer Mitgliedschaft in anderen Vereinen oder Ihrem Ruhestand zahlen möchten, rechtzeitig bei der Kassenführung beantragt werden, am Einfachsten direkt zu Anfang eines neuen Jahres. Es ist nicht weiter verwunderlich, dass im Falle einer Beitragserhöhung einigen Mitgliedern erst nach der Abbuchung aufgefallen ist, dass sie eigentlich ein Anrecht auf einen niedrigeren Beitrag hätten. Solche nachträglichen Änderungen sind satzungsgemäß eigentlich nicht vorgesehen, wenn wir sie trotzdem gewähren, geschieht das im Sinne der Kulanz und es sollte jedem klar sein, dass dies mit zusätzlicher Arbeit, auch mit zusätzlichen Kosten verbunden ist.

[1] Tatsächlich ist ein Teil der Erhöhung der den regulären Mitgliedsbeitrag zahlenden Mitglieder ein Sonderbeitrag zur Vorfinanzierung der ICME 13, der zeitlich befristet erhoben wird, vgl. den Beitrag im letzten Heft.

2 Gute Gesamtlage

Die allgemeine Lage der GDM zeigt sich – ungeachtet des holprigen Starts – in erfreulichem Licht. Wir sind nach wie vor ein mitgliedsstarker Verband, der allen Grund hat, positiv in die Zukunft zu blicken. Dabei können wir stolz sein auf die vielen jungen Nachwuchskräfte unseres Verbandes und auf das breite Angebot an regelmäßigen Fördermaßnahmen, die wir insbesondere für diese Gruppe in den letzten Jahren entwickelt haben.

Ein weiterer Pluspunkt ist unsere Vernetzung mit anderen Verbänden. Hier hat sich ganz besonders die Zusammenarbeit mit der DMV und der MNU bewährt. Unsere gemeinsamen Kommissionen haben erfolgreich dazu beigetragen, dass unsere Positionen die bildungspolitischen Handlungsträger erreichen und nicht nur zu Kenntnis genommen werden, sondern auch sichtbar in Entscheidungsprozesse hineinwirken.

Ein weiteres Merkmal für die insgesamt positive Lage der GDM ist die Einbettung in die internationale Community. Sichtbare Beweise hierfür sind die Tagungen der PME 2013 in Kiel, der YERME 2014 in Kassel und ganz besonders der ICME 2016 in Hamburg; sie ermöglichen uns, die Welt zu Gast zu haben, die internationale Zusammenarbeit zu intensivieren und neue Kontakte zu knüpfen.

Auch die Entwicklung der von der GDM betriebenen bzw. mit ihr verknüpften Zeitschriften ist erfreulich, das gilt insbesondere für das JMD und auch für das ZDM. Aber auch die Bemühungen, die Zeitschrift mathematica didactica, die MU und die Mathematischen Semesterberichte weiterzuentwickeln bzw. neue Orientierungspunkte zu suchen, zeugen nicht nur von einer Vielfalt, sondern auch von Energie und Engagement, wie sie in manchen vergleichbaren Verbänden kaum zu finden sind.

Hinzu kommt, dass die Stellung von Mathematik in der Gesellschaft und des Mathematikunterrichts in der Schule insgesamt positiv gesehen wird: Der Bildungswert des Faches wird allgemein akzeptiert, vielleicht auch deshalb, weil es in den letzten Jahren besser gelungen ist, breiteren Kreisen außerhalb von Schule und Universität zu vermitteln, dass Mathematik mehr ist als Rechnen, nämlich: ein allgemeinbildendes Fach mit prozessbezogenen Kompetenzen, wichtiger berufsqualifizierender Funktion und einem breiten Anwendungspotential. Oder nicht?

3 Ideen aus der Talkshow

Im April dieses Jahres avancierte die Zukunft des schulischen Bildungssystems wieder einmal zu einem der Top-Themen, die sich durch die deutsche Medien- und Presselandschaft zogen, bis hin in die abendlichen Talkshows. Es ging um die vermeintlich völlige Unzulänglichkeit des deutschen Schulsystems, das nicht mehr durch Reformen zu retten sei, notwendig und unausweichlich sei vielmehr eine Bildungsrevolution. Ganz besonders gelte dies für den Mathematikunterricht:

> Man sollte es einmal ganz klar und offen aussprechen und sich nicht weiter etwas anderes vormachen: Mathematik gehört nicht ins Klassenzimmer! Jedenfalls dann nicht, wenn wir von dem ausgehen, was wir kennen: einer Gruppe Gleichaltriger in einer Jahrgangsklasse.[2]

Diese Ideen zur Bildungsrevolution stammen von dem Philosophen und Bestsellerautor Richard David Precht. Präsentiert werden sie in seinem Buch „Anna, die Schule und der liebe Gott", das in wenigen Tagen nach Erscheinen die Spitze der Bestsellerlisten für Sachbücher erreichte. Precht fordert darin eine Umgestaltung des Schulsystems im Sinne individualisierten Lernens mit Projektunterricht in jahrgangsübergreifenden Lerngruppen. Dies gilt für Fächer, die man „vom Sinnhorizont[3]" her lernen muss. Mathematik zählt der Philosoph Precht nicht hierzu, denn:

> Spätestens mit dem siebten Schuljahr ist Mathematikunterricht, so wie wir ihn kennen, entweder unsinnig oder sinnlos. Unsinnig, weil er die Begabten unterfordert, und sinnlos weil er die Schwachen gar nicht mehr erreicht.[4]

Precht macht nicht den Versuch, sein Bild vom „Mathematikunterricht, wie wir ihn kennen" auf irgendeine seriöse Art zu konkretisieren oder Bezüge zu Praxis oder Theorie des heutigen Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen herzustellen. Für ihn scheint Mathematikunterricht ein Zerrbild eines Unterrichts zu sein, bei dem Rechenfähigkeit ohne Sinnzusammenhang gepaukt wird. Dieses Bild illustriert er mit Geschichten über unglückliche Schülerinnen und Schüler und ihre verzweifelten Eltern:

> Liebe Marie, erinnerst Du dich noch an den Tag, an dem wir das letzte Mal im Kino waren? An

[2] Precht, R. D. (2013): Anna, die Schule und der liebe Gott. Goldmann: München; S. 240
[3] Precht, R. D. am 5. Mai 2013 in: (ARD) Günter Jauch: „Notendruck, Sitzenbleiben – weg mit der alten Schule?"
[4] Precht, R. D. (2013): Anna, die Schule und der liebe Gott. Goldmann: München; S. 242

> diesen Tierfilm, den du so gerne sehen wolltest? Wie hieß der bloß noch? Ich glaube, *Tiger, Bären und Vulkane*, aber sicher bin ich mir nicht. Wir alle zusammen sind mit dem Auto in die Stadt gefahren: Mama, Henri, Du und ich. Es war Sonntag – und wir beide saßen mit Karteikarten auf der Rückbank und haben gelernt. Wie viel ist 17^2? Wie viel 5^6? Wie viel 2^8? Auf dem Weg nach Hause dann noch mal: $2^7 = 128$, $18^2 = 324$, $5^6 = 15625$. Und noch mal. Und zur Sicherheit gleich noch mal. Wir hätten so viel Sinnvolleres tun können auf unserem Heimweg. Den Bildern der Bären nachhängen oder Bonbons lutschen zum Beispiel. Im Zauber verweilen, den jeder kennt, der aus dem Kinodunkel ins Licht tritt – als laufe man erwachend durch einen Traum. Aber noch nicht einmal an einem Sonntag ist es mir gelungen, Dich das Kind sein zu lassen, das Du sein solltest mit zehn Jahren.[5]

Dieses Bild wird ergänzt durch dazu passende Vorurteile über die Mathematik unterrichtenden Lehrkräfte, selbst sie werden Opfer ihres Unterrichts, denn:

> wenn Mathe-Lehrer in höherem Maße als andere Lehrer zu Sarkasmus und Rigorosität neigen sollten, dann deswegen, weil der Mathe-Unterricht, so wie er an konventionellen Schulen stattfindet, einfach nicht funktionieren *kann*, – sodass es eben nicht allzu sehr verwundert, wenn Mathe-Lehrer mitunter dazu neigen, ihren Schülern Dummheit zu unterstellen.[6]

Und wie kann man Mathematik nach der Klasse 7 sinnvoll lernen? Die Lösung soll der Computer bringen:

> Es gibt großartige Lernsoftware, wo Nobelpreisträger Geometrie erklären – warum sagen wir nicht bei einem Fach wie Mathe: Jeder lernt individuell, mit seinem PC-Programm. Und da geht er dann – wie bei einem Computerspiel – vorwärts. Da hat er dann die verschiedenen Schwierigkeitsstufen, da kann er in der Geometrie die verschiedenen Abzweigungen nehmen; und wie lange er dafür braucht, den Mindeststandard in Mathe zu erreichen, ist seine Sache. Und derjenige, der besonders gut ist, der kann quasi sein ganzes Mathestudium schon in der Schule machen – d. h. wir haben Förderung der Schwachen und wir haben ein Fordern und Fördern der Begabten.[7]

Der Lehrer wird dabei zum Coach, „der den Schülern bei ihren Programmen freundlich unterstützend hilft."[8]

Das Niveau und die Naivität dieser Passagen sind typisch für das Buch. Es ist erstaunlich, welches Verständnis von Mathematik hier sichtbar wird: Trainieren eines Stoffes mit Lernprogrammen. Darstellen, Argumentieren, Kommunizieren, gemeinsam Ideen und Lösungen entwickeln, Präsentieren und Diskutieren, dies alles scheint keine Rolle zu spielen. Die Idee, die mathematische Ausbildung ab der Klasse 7 dem individuellen Lernen am Computer zu überlassen, erinnert ein wenig an die Zuversicht der siebziger Jahre, das Lernen von Sprachen ins Sprachlabor zu verlegen, wo jeder nach seinem individuellen Tempo arbeiten kann und sofort Feedback bekommt. Damals hat man die soziale Dimension und die Interaktion beim Lernen von Sprache völlig unterschätzt, was zum Scheitern der Sprachlabor-Ansätze führte. Dies scheint Precht nicht ganz unbekannt zu sein; an anderer Stelle erwähnt er das Sprachlabor als bildungspolitischen Irrweg. Aber vielleicht ist ja bei Mathematik die soziale Dimension irrelevant?

Man weiß nicht so recht, über was man sich mehr wundern soll, über die Naivität oder die Unkenntnis, mit der hier – unter pauschalen Hinweisen auf Ergebnisse der Hirnforschung – argumentiert wird. Eine ernsthafte Auseinandersetzung mit Prechts Ideen ist angesichts dieses Niveaus kaum lohnenswert; dort wo sie dennoch erfolgt, bleibt von seinen visionären Ideen nicht viel übrig.[9]

Wichtig und von Bedeutung für uns sind seine Ideen dennoch: Das Zerrbild von Mathematikunterricht, das er vermittelt, hat er nicht erfunden. Es reflektiert ein allgemein verbreitetes Bild von Mathematikunterricht, in dem viele ihre eigenen Erfahrungen oder die ihrer Kinder wiedererkennen oder wiederzuentdecken glauben, dies erklärt wohl auch die enorme Verbreitung seiner Ideen, die Verkaufszahlen seines Buches und die Präsenz in den abendlichen Talkshows.

Und hier sehe ich unseren eigentlichen Handlungsbedarf: Vieles von dem, was in den letzten Jahren und Jahrzehnten an didaktischen Innovatio-

5 Sußebach, H.: Liebe Marie!, in: Die Zeit vom 26. Mai 2011, Nr. 22. Zitiert nach Precht, R. D. (2013): Anna, die Schule und der liebe Gott. Goldmann: München; S. 98
6 Ebd. S. 241
7 Precht, R. D. am 5. Mai 2013 in: (ARD) Günter Jauch: „Notendruck, Sitzenbleiben - weg mit der alten Schule?"
8 Precht, R. D. (2013): Anna, die Schule und der liebe Gott. Goldmann: München; S. 243
9 Siehe etwa die Rezension von Jürgen Kaube in: FAZ vom 28. 4. 2013

nen und methodischen Konzepten entwickelt wurde, ist vielleicht in manchem Klassenzimmer, aber noch nicht im Bewusstsein einer breiten Öffentlichkeit angekommen. Natürlich gibt es in wichtigen Feldern weiterhin Bedarf an einer Verbesserung des Mathematikunterrichts im Sinne kompetenzorientierten und individualisierten Lernens. Aber nicht zuletzt sollten wir vielleicht auch mehr Energie darauf verwenden, nicht nur in Fachzeitschriften, sondern auch in Medien mit breiterer gesellschaftlicher Reichweite darzustellen, wie spannend, interessant und sinntragend produktiver Mathematikunterricht sein kann. Hierzu gehört auch die Kunst, ein Thema allgemeinverständlich, interessant und plakativ darzustellen. In diesem Punkt zumindest können wir viel von Richard David Precht lernen.

Mit freundlichen Grüßen

Rudolf vom Hofe
(1. Vorsitzender der GDM)

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

■ ***Vorstand***. *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de

■ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de

■ *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg. Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de

■ *Schriftführer:* Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at

■ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.

■ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeber: Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ■ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin (ceyrich@gmx.net) ■ Umschlagentwurf: Andreas Vohns ■ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin

Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

Impressionen aus (fast) vier Jahrzehnten Mathematikdidaktik

Willibald Dörfler

Dieser Essai ist ausgehend von einer Anregung durch Herrn Vohns die Ausarbeitung eines Vortrages am Fachdidaktik-Tag der IMST Tagung in Klagenfurt im Juni 2013 und er bedarf einiger Vorbemerkungen. Ich bezeichne den Beitrag als einen Essai über Impressionen, weil es hier vorwiegend um persönliche Eindrücke und Erinnerungen aus meiner Arbeit im Gebiet der Mathematik-Didaktik geht, die sukzessive nach meiner Berufung (als Professor für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik) an die Universität Klagenfurt (damals Hochschule für Bildungswissenschaften) im Jahre 1974 begann und sich nach vorsichtigen Anfängen zu meinem Hauptarbeitsgebiet entwickelte. Der Zeitpunkt ist gut gewählt, weil er mit meiner Emeritierung zusammenfällt, und sich ein solcher Einschnitt für Erinnerungen und Reflexionen anbietet. Mein Beitrag will nicht ein wissenschaftlicher Artikel über die Geschichte und Entwicklung der Mathematik-Didaktik in diesen Jahren sein. Dafür wären umfangreiche Quellenstudien und Analysen erforderlich, eine Aufgabe, die mir beim Vorbereiten des Vortrages immer wichtiger erschien. Das wäre ein hervorragendes Thema für eine (umfangreiche) Dissertation, oder darüber hinaus für ein Forschungsprojekt, wenn auch die internationale Entwicklung außerhalb des deutschen Sprachraumes miteinbezogen würden. Es würde mich freuen, wenn mein Essai das Bewusstsein für die Bedeutung einer solchen historischen Aufarbeitung schärfen würde. Ich glaube nämlich, dass nach Jahrzehnten einer komplexen Entwicklung die Mathematik-Didaktik nunmehr in eine im Kuhnschen Sinne „normale“ Phase übergegangen ist, und daher eine historische und soziologische Untersuchung der dahin führenden Prozesse innerhalb und außerhalb der Disziplin zu diesem Zeitpunkt sowohl besonders lohnend wie auch erforderlich ist. Der Zeitraum, auf den sich mein Essai bezieht ist also schon vorgegeben, und ich werde nur gelegentlich Rückblicke darüber hinaus anstellen. Entsprechend meinen persönlichen Erfahrungen werde ich auch internationale Aspekte und Einflüsse miteinbeziehen, aber wie gesagt alles eher unsystematisch und vor allem ohne substantielle Belege durch Quellen oder Zitate. Wie gesagt, wäre es toll, wenn das jemand nachtragen würde! Eine gewisse Legitimation für diesen Beitrag leite ich aus meiner Teilnahme am Entwicklungsprozess ab, die sich auf verschiedene Rollen und Funktionen bezieht (Tagungsorganisationen, Mitglied in Komitees für internationale Tagungen, darunter ICME und PME, Herausgeber bei JMD und ESM, Funktionen bei PME und in der GDM, Reviewertätigkeit bei mehreren internationalen Zeitschriften, u. a.).

Zur Einstimmung

Um die Entwicklungen in den letzten Jahrzehnten irgendwie einordnen und in ihrer Spezifität verstehen zu können, ist ein Blick (weit) zurück in die Vergangenheit wahrscheinlich nützlich. Erst dann kann man das Neue und eventuell Revolutionäre erkennen und bewerten. Das Lernen und Lehren von Mathematik (als Mathetik und Didaktik) war schon in der Antike aber auch in anderen Kulturen (Indien, China) ein philosophisches aber auch praktisches Thema und Problem. Darin spiegelt sich auch die Sonderstellung, die dem Mathematischen stets zu allen Zeiten sowohl epistemologisch wie auch ontologisch beigemessen wurde mit durchaus sehr unterschiedlichen Erklärungen für diese Spezifität (Rationalismus, Platonismus, Empirismus, Konstruktivismus, etc.) wider. Plato wies der Mathematik in seinem Dialog „Der Staat“ in der Erziehung der gesellschaftlichen Elite eine gewisse Rolle als Vorbereitung auf die Erkenntnis höchsten „Ideen“ wie etwa des „Guten“ zu. Im Menon-Dialog demonstriert Sokrates, wie durch geeignete Fragen die „Wiedererinnerung“ (Anamnese; hier eines Sklaven über die Verdopplung eines Quadrates) angeregt und gesteuert werden kann. Hier geht es auch um die Frage, wie überhaupt Neues und Unbekanntes gelernt oder erfahren werden kann. Babylonische und ägyptische mathematische Aufgabensammlungen haben teilweise die Zielsetzung, typische Methoden zur Lösung von Problemen zu demonstrieren und können so auch als Lehrtexte aufgefasst werden: Lernen durch paradigmatische Beispiele. Ähnliches gilt für die Aufgabensammlungen in vielen bekannten altchinesischen Mathematik-Lehrbüchern. Die Adressaten dieser Texte sind also nicht (nur) die Experten, sondern auch Praktiker aus anderen Disziplinen. Ob es dazu auch „Unterricht“ gab, ist nicht bekannt. Im europäischen Mittelalter ab ca. dem 12. Jh. wurden Mathematik und mathematische Disziplinen im Quadrivium an den Universitäten unterrichtet: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. Ein Standard-„Lehrbuch" waren die verschiedensten Bearbeitungen von Euklids „Elementen". Daneben gab es Rechenschulen der Rechenmeister für die mehr praktischen Aufgabenstellungen. Mathematikunterricht jeder Art richtete sich an eine elitäre Minderheit und war dadurch kein besonderes gesellschaftliches Problem, auch vielleicht deswegen, weil er in weiten Teilen in der Vermittlung von praktikablen „Rezepten" bestand.

Typus Arithmeticae aus Gregor Reischs Margarita Philosophica (1508)

Eine sehr grobe Beschreibung der Sozialform der Didaktik in dieser Zeit (wenn man diesen Terminus überhaupt darauf anwenden kann) gibt die These, dass sich Einzelpersonen im Rahmen ihrer Haupttätigkeit (als Philosoph, Mathematiker, Ingenieur, etc., wobei dies natürlich nicht im Sinne von etablierten Professionen zu verstehen ist) sich auch mit der Vermittlung von Mathematik beschäftigen, sei es theoretisch-programmatisch oder praktisch (etwa durch Lehrbücher). Diese Situation änderte sich grundsätzlich nicht bis ins 20.Jh., auch wenn die Inhalte, Fragestellungen und Zugänge großen Veränderungen unterworfen waren. Das soll nur ganz exemplarisch durch die Auflistung bekannter Namen von Personen illustriert werden, die sich aus sehr unterschiedlichen Motiven und Interessen zum Lernen oder Lehren von Mathematik geäußert haben oder durch ihre mathematischen Texte ihre diesbezüglichen Reflexionen konkretisiert haben. Letzteres trifft auf Mathematiker wie J. Bernoulli (Lehrbuch der Analysis), G. Monge (Geometrie) oder A. Cauchy (Analysis) zu. Hier wäre etwa die Rolle der Ecole Polytechnique in Paris als Institution zu erwähnen, an der die Lehre der Mathematik explizit thematisiert wurde. Immer wieder waren es Pädagogen, die über das Lernen von Mathematik reflektiert haben oder dieses sogar als paradigmatisches Beispiel für ihre allgemeinen Sichtweisen anboten: Comenius, Pestalozzi, Herbart, Montessori, Wagenschein oder Wittenberg, um nur einige zu erwähnen. Bei diesen Autoren stehen oft das Bemühen um Anschaulichkeit, Körperlichkeit und Lebensnähe, um Ganzheitlichkeit, elementares Verstehen durch unmittelbare Wahrnehmbarkeit und ähnliche Bestrebungen im Vordergrund als Gegengewicht gegen die notorische Abstraktheit und Unpersönlichkeit der Mathematik. Dabei ist der inhaltliche Bezugspunkt meist aber nur elementare Mathematik (Arithmetik und Geometrie) in der Grundschule. Die wichtige Rolle der Anschauung, auch im Gefolge der Philosophie von Kant und als Gegenströmung gegen die zunehmende Formalisierung der Mathematik, wird von Felix Klein stark betont, der sich als Mathematiker vehement um den Mathematikunterricht kümmerte (Schlagwort: Meraner Reform). Sonst sind mir bis ins 20. Jh. eigentlich keine relevanten Äußerungen von Mathematikern zum Lernen von Mathematik bekannt. Eine nicht unbeträchtliche und noch zu wenig untersuchte Rolle für die Entwicklung einer Mathematik-Didaktik spielen die zahlreichen Schulbuchautoren, denn Schulbücher waren (und sind) Texte, in denen sich didaktische Sichtweisen und Positionen konkretisieren. Neben den Personengruppen der Mathematiker, Pädagogen und Schulbuchautoren sind noch Psychologen (allen voran Piaget, der aber eigentlich Biologe war) und Philosophen zu erwähnen, die sich zumindest am Rande mit Fragen des Lernens befassen. Bei Psychologen geht es um Begriffsbildung, die vor allem auch empirisch untersucht wird, im Gegensatz zu den sonst eher normativen und präskriptiven Vorstellungen. Viele Philosophen haben sich mit Mathematik vor allem aus erkenntnistheoretischer Sicht befasst, was bei einigen auch zu Bemerkungen über das Lernen führte, so beispielsweise bei Peirce (Entwurf eines Schulbuches der Arithmetik) und notorisch bei Wittgenstein (Schlagwort: „Abrichtung"). Zumindest bei diesen beiden Autoren ist ein deutlicher Gegensatz zu den Ansichten etwa der Pädagogen festzustellen. So vertraut Wittgenstein auf das Erlernen von Kalkülen oder Sprach- und Zeichenspielen durch sukzessive Teilnahme und Mimesis, und Verständnis ist für ihn das Beherrschen der Regeln.

Bei all den genannten Personen und vielen anderen, die hier nicht erwähnt werden und die sich in diesen Zeiträumen zum Lernen von Mathematik geäußert haben, kann beobachtet werden, dass sie diese Äußerungen und Meinungen auf Basis eines pädagogischen Systems, einer spezifischen Sichtweise auf die Mathematik oder die Schulpraxis, eines Verständnisses davon, was der Mensch ist und wie er sich entwickelt, oder eines ähnlichen theoretischen Rahmens gemacht haben. Eine systematische empirische Fundierung der Thesen und Positionen gibt es nicht, mit Ausnahme der Psychologie. Innerhalb des jeweiligen Rahmens sind die entwickelten Konzepte durchaus plausibel, eine empirische Bewährung und Überprüfung durch Beobachtung des realen Unterrichts findet jedoch nicht statt (in der Entwicklungspsychologie werden ja artifizielle Situationen untersucht). Dieser sollte im Wesentlichen durch Schulbücher und Lehrpläne gesteuert werden, in denen sich teilweise die theoretischen Konzepte wiederspiegeln.

L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRECTEURS

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Répétiteur à l'École polytechnique
de Paris.

H. FEHR
Privat-docent à l'Université de Genève,
Professeur au Collège et à l'École professionnelle.

COMITÉ DE PATRONAGE

P. APPELL (Paris). — N. BOUGAIEV (Moscou). — Moritz CANTOR (Heidelberg).
L. CREMONA (Rome). — E. CZUBER (Vienne). — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
A.-G. GREENHILL (Woolwich). — F. KLEIN (Göttingen) — V. LIGUINE (Varsovie).
P. MANSION (Gand). — MITTAG-LEFFLER (Stockholm). — G. OLTRAMARE (Genève).
Julius PETERSEN (Copenhague). — E. PICARD (Paris). — H. POINCARÉ (Paris).
P.-H. SCHOUTE (Groningue). — C. STEPHANOS (Athènes). — F. Gomes TEIXEIRA (Porto).
A. VASSILIEF (Kasan). — A. ZIWET (Ann-arbor, Michigan, U. S. A.).

1re Année. 1899.

PARIS
Georges CARRÉ et C. NAUD, Éditeurs
3, rue Racine, 3

Erste Ausgabe der Zeitschrift „L'enseignement mathématique", 1899

Organisatorische Veränderungen

In der mathematischen wissenschaftlichen Gemeinschaft war gegen Ende des 19.Jh. auch durch den Einfluss von Felix Klein ein Bewusstsein für die Bedeutung des schulischen Lernens von Mathematik für die universitäre Mathematik entstanden. So setzte die IMU (International Mathematical Union) mehrere Schritte, um Einfluss auf den Mathematikunterricht zu gewinnen. Im Jahre 1899 wurde die Zeitschrift „L'enseignement mathématique" gegründet, die bis heute weitergeführt wird. Es folgte 1908 die Gründung von ICMI (International Commission for Mathematical Instruction) als Organ der IMU für den Mathematikunterricht, welches aber weitgehend unter Einfluss der Mathematiker blieb. So waren bis in die jüngste Zeit die Präsidenten von ICMI renommierte Mathematiker (über Klein, Hadamard, Stone, Thom, Freudenthal bis zu Bass), die sich sicher zum Teil sehr für den Mathematikunterricht und auch die Didaktik als Disziplin einsetzten (besonders: Hans Freudenthal). Erst die letzten zwei Präsidenten kamen aus der Didaktik: Michele Artigue und Bill Barton. Im Laufe der Zeit hat sich ICMI auch zu einem wichtigen Organisator und Motivator von didaktischer Forschung entwickelt (Stichwort: ICMI Studies). Besonders zu erwähnen ist auch die Durchführung der großen internationalen Kongresse (ICME, seit 1969). Wichtig für die Formierung der Mathematikdidaktik als Disziplin war auch die Gründung nationaler Vereinigungen, oft in der Form von Gesellschaften für Lehrer. In Deutschland war das vor schon mehr als 100 Jahren der Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU), der später dann auch eine Zeitschrift herausgab. Eine bis heute wichtige Rolle spielt NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) in den USA, sowie die analoge Organisation APMEP in Frankreich. Eher elitären und exklusiven Charakter haben internationale Vereinigungen, die auf der Mitgliedschaft angesehener Personen aufbauen. Typisch dafür ist CIEAEM (englischer Name: International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching), zu der so renommierte Wissenschaftler wie C. Gattegno, G. Choquet, J. Piaget oder A.S. Krygowska gehörten, und die 2012 ihre 64. Tagung veranstaltete. Über die tatsächliche und breitere Wirkung kann man geteilter Meinung sein. Es sei noch CIAEM erwähnt (gegründet 1961), die vorwiegend auf (Latein-) Amerika konzentriert ist. Alle diese Vereinigungen haben gut gestaltete Homepages, auf die ich die Leser für weitere Details verweisen möchte, und sie sind heute mit ICMI affiliiert. Der Stand der Dinge um die Mitte des letzten Jahrhunderts kann also ganz grob so beschrieben werden. Auf nationaler Ebene gibt es engagierte und praxisorientierte Lehrerorganisationen und international eher prestigeträchtige Vereinigungen mit einer starken Nähe zur Mathematik. In den wenigen Zeitschriften wird zum Mathematikunterricht geschrieben, jedoch ist mir diese Phase der ersten Hälfte des 20. Jh. viel zu wenig vertraut, um darüber inhaltliche Aussagen treffen zu können. Ich vermute aber, dass Vorschläge zur methodischen und inhaltlichen Gestaltung des MU dominiert haben (wieder abgesehen von Entwicklungs- und Lernpsychologie).

Der große Wandel

Die entscheidenden Veränderungen etwa ab 1960 bewirkten, dass sich Mathematikdidaktik von einer „Nebenbeschäftigung" interessierter Mathematiker, Pädagogen, Philosophen oder Psychologen zu einer institutionalisierten Disziplin entwickeln konnte. Wieder können in diesem Rahmen hier nur einzelne Indikatoren für diese Entwicklung angeführt werden, die dann in ihrer Summe zur Etablierung und Verselbstständigung der Mathematikdidaktik führten. Das war gewiss kein kontinuierlicher Prozess und auch nicht ohne Widerstände und Brüche. Widerstände und Schwierigkeiten gab es etwa von Seiten der bereits etablierten Disziplinen (wie Mathematik), die ohne ein genuines Interesse an den spezifischen Fragen und Methoden der Didaktik eine Art von Oberhoheit über das Thema Lehren und Lernen von Mathematik behalten wollten. Auch war Mathematikdidaktik mit Misstrauen und einer gewissen Missachtung (mangelnde Wissenschaftlichkeit als Vorwurf) konfrontiert. Dies mag mit ein Grund gewesen sein, dass im Verlaufe der Institutionalisierung innerhalb der sich entwickelnden Disziplin intensive Diskussionen und auch Auseinandersetzungen über Gegenstand, Inhalt, Methodik, Legitimation, zentrale Fragestellungen etc. einer Mathematikdidaktik geführt wurden, insbesondere in Deutschland. Es wäre höchst interessant und vielleicht lehrreich, diese Diskussion zu analysieren und mit dem heutigen status quo zu vergleichen. Mein Eindruck ist, dass Forschung in der Mathematikdidaktik heute in einem gewissen Sinne oft „bewusstloser" abläuft und der ursprüngliche Blick auf das Ganze der Problematik sich in sehr kleinräumigen und detaillierten (empirischen) Untersuchungen auflöst.

ICME 3, Karlsruhe 1976, Eröffnung. Vordere Sitzreihe von rechts: H. Kunle, Frau Kunle, Iyanaga, Frau Behnke, B. Christiansen, H. Christiansen, H.-G. Steiner und Frau, Greenhill (Quelle: Furinghetti, F.; Giacardi, L. (2008), The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008). The history of ICMI, http://www.icmihistory.unito.it/)

Doch zurück zu den äußeren Daten der Entwicklung, international und im deutschen Sprachraum. Gab es früher etwa bei Mathematiktagungen Sektionen (eher am Rande) für Didaktik (oft missverstanden als Elementarmathematik) oder Tagungen von Cliquen wie CIEAEM, so werden nun Tagungen für Mathematikdidaktik oder mathematics education organisiert. Die „Bundestagungen" gibt es in Deutschland seit 1966, der erste große internationale Kongress ICME I fand 1969 in Lyon statt und war 1976 zum ersten Mal in Deutschland (Karlsruhe). Ganz wichtig erscheint mir die Gründung von professionellen, wissenschaftsorientierten Zeitschriften, die sich nicht mehr primär an Lehrer wenden, sondern an eine sich entwickelnde scientific community, zu deren Professionalisierung sie wiederum entscheidend beitragen. Educational Studies in Mathematics (ESM) wurde 1968 von Hans Freudenthal gegründet, das Journal for Research in Mathematics Education (JRME, eine Zeitschrift der NCTM) folgte im Jahre 1970. In Deutschland wurden fast zeitgleich zwei Zeitschriften gegründet: mathematica didactica (1978) und das Journal für Mathematikdidaktik (JMD, 1979). Heute gibt es eine große Zahl von nationalen und internationalen Zeitschriften, wie ein Blick in den Reviewteil des ZDM (das übrigens auch schon 1969 gegründet wurde) oder in die Datenbank MathEduc zeigt. Große Verlage wie Springer oder Elsevier haben großes und auch ökonomisches Interesse, Zeitschriften aus dem Bereich der Mathematikdidaktik in ihrem Programm zu haben. In der Bildungsexpansion der 60er und 70er Jahre wurden auch zahlreiche Institutionen gegründet, an denen Mathematikdidaktik einen guten Platz für ihre Institutionalisierung fand. Das waren die Pädagogischen Hochschulen oder Didaktik-Institute an (zum Teil in dieser Zeit neu gegründeten) Universitäten. Auf die Probleme der Etablierung als gleichberechtigtes Fach

Otto Toeplitz und Heinrich Behnke in Oberwolfach (© Bildarchiv des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach)

(Promotionsrecht, Habilitationen) möchte ich hier nicht eingehen, auch deswegen weil wir in Österreich davon nicht oder kaum betroffen waren. In diesem Rahmen entstand eine community, die in den nun vorhandenen Zeitschriften publizierte, sich auf den Tagungen traf und so langsam aber sicher eine eigene Identität entwickeln konnte. Als Thema dominierte die sogenannte Stoffdidaktik, die zur inhaltlichen/didaktischen Abklärung (etwa von Fragen der Bruchrechnung oder der Analysis) sicher ganz wesentliche und unverzichtbare Beiträge lieferte, die heute vielleicht manchmal mit Vorteil bei der Konzeption von empirischen Lernstudien aller Art herangezogen werden könnten.

Eine besonders wirksame Entscheidung war die Gründung (1973) des Instituts für Didaktik der Mathematik (IDM) an der Universität Bielefeld, das trotz aller Friktionen wesentlich zur Didaktik als Wissenschaft beigetragen hat: es war das erste Forschungsinstitut der Mathematikdidaktik! Das IDM hatte zum Teil personelle Wurzeln im Heinrich Behnke Seminar für Didaktik der Mathematik in Münster (gegründet bereits 1951). Eine Aufarbeitung der Wirkungsgeschichte des IDM wäre eine sehr wichtige Aufgabe, denke ich. Dass es heute mehrere ähnliche Institute gibt, zeigt die Bedeutsamkeit derartiger Institute für eine wissenschaftliche Disziplin. Ein weiterer und folgenreicher Schritt war die Gründung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die sich von Anbeginn an als eine wissenschaftliche Vereinigung verstand, nicht im Gegensatz zu aber komplementär zu den existierenden Lehrervereinigungen. In die GDM war Österreich von Beginn an integriert.

In Österreich gab es wenn auch in viel kleinerem Umfang eine ähnliche Entwicklung, die mit der Berufung von Professoren (Dörfler, Fischer) für „Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik“ an der damaligen Hochschule für Bildungswissenschaften in Klagenfurt im Jahre 1974 begann. Der große Freiraum an einer neu gegründeten Universität gab die Möglichkeit für zahlreiche innovative Schritte, die zumindest in Klagenfurt zur Institutionalisierung der Mathematikdidaktik als selbständige Disziplin führten: Tagungen (Kärntner Symposien für Didaktik der Mathematik seit 1976; Visualisierungsworkshops; u. a.), Schriftenreihe(n), Projekte (wie EFQUIM über den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung), Einrichtung von Qualifizierungsstellen (Promotionen und Habilitationen; dazu einige Namen: Malle, Peschek, Krainer, Kadunz, Schneider, Borovcnik, und der leider kürzlich verstorbene Günther Ossimitz), Kooperation mit der GDM und Internationalisierung. In Klagenfurt blieb die Didaktik lange Zeit am Institut für Mathematik etabliert, später dann als Abteilung und letztlich dann als eigenes Institut (auch „IDM“) und Österreichisches Kompetenzzentrum (Leitung: Werner Peschek). Der Didaktik (teilweise) gewidmete Professuren wurden dann auch in Wien (Bürger, Reichel, Malle), Linz (Schlöglmann) und Salzburg (Erweiterung der Venia von Fritz Schweiger) eingerichtet, die alle an den Mathematikinstituten beheimatet waren und sind. Derzeit ist leider abgesehen von Klagenfurt eher eine Reduktion der Personalkapazität zu beobachten. Erwähnt werden sollen noch die Pädagogischen Akademien (heute: Hochschulen) für die Ausbildung der Pflichtschullehrer, an denen Didaktik der Primarstufe und Sekundarstufe I in der Lehre angesiedelt war. Aber diese waren (und sind) keine wissenschaftlichen Einrichtungen, wodurch in Österreich wissenschaftliche Didaktik etwa der Primarstufe bis heute nicht betrieben wird (mit singulären Ausnahmen).

Man kann somit für den deutschen Sprachraum (ähnliches gilt auch in vielen anderen Ländern und Kulturbereichen) feststellen, dass durch die genannten Maßnahmen und Prozesse Mathematikdidaktik heute nach wenigen Jahrzehnten zu einer etablierten Wissenschaftsdisziplin geworden ist mit allen erforderlichen Strukturen, mit Selbstbewusstsein, Autonomie und Emanzipation von Ursprungsfächern wie Mathematik und Pädagogik. Eine genauere Aufarbeitung dieser historischen und sozialen Prozesse, ihrer Bedingungen und Konsequenzen könnte mehr Licht auf diese „Erfolgsgeschichte“ werfen. Ganz grob möchte ich nochmals die Indikatoren auflisten, die ich als maßgeblich für die Etablierung einer Disziplin halte, und die für die Mathematikdidaktik im Laufe der letzten Jahrzehnte in zunehmendem Maße zutreffen:

- Einrichtung von selbständigen Lehr- und Forschungseinrichtungen
- Dedizierte Professorenstellen
- Qualifizierungsprogramme
- Spezifische und eigene Standards der Forschung
- Wissenschaftliche Gesellschaften
- Wissenschaftliche Zeitschriften, Reviewsysteme
- Wissenschaftliche Tagungen, Spezialtagungen
- Forschungsförderung (DFG, FWF)
- Relativ abgegrenzte und autonome Scientific Community
- Internationale Vernetzungen
- Forschungspreise (national und international)
- Spezifische Studienprogramme (noch wenig realisiert; Doktoratsstudien; sonst vorwiegend Mitwirkung in der Lehrerbildung)
- Expertenstatus (sicher noch verbesserungsbedürftig: Mathematikdidaktiker als die zuständigen Experten für Lernen und Lehren von Mathematik).

Bei vielen dieser Indikatoren gibt es sicher noch Entwicklungsbedarf und es wäre durchaus sinnvoll, wieder mehr grundsätzlich über die Perspektiven der Mathematikdidaktik als Wissenschaft nachzudenken, auf nationaler und auch internationaler Ebene. Ein dabei vorwiegend zu bedenkender Bereich ist sicher das Thema Forschung, dem ich mich abschließend zuwenden möchte.

Forschung: Inhalte, Methoden und Zwecke

In dem von mir überblickten Zeitraum fand auch eine drastische Veränderung der Forschung in der Mathematikdidaktik statt und zwar sowohl in quantitativer als auch qualitativer Hinsicht. Die Anzahl der Publikationen ist geradezu explodiert, was an der rasant zunehmenden Anzahl an Zeitschriften und Tagungs-Proceedings deutlich wird. Waren die Proceedings etwa der jährlichen PME (Psychology of Mathematics Education) Tagungen am Anfang (also um 1980) schmale Bändchen, so sind es jetzt mehrere Bände mit mehreren hundert Beiträgen. Dem entspricht die Anzahl der Teilnehmer, die von unter hundert auf 500 und mehr angewachsen ist. Die International Group PME innerhalb der ICMI ist somit ein gutes Spiegelbild der Entwicklungen in der Mathematikdidaktik, auch hinsichtlich der Anzahl und Struktur der (jungen) „researcher“. Auch andere Foschungsorganisationen wie ERME (European Research in Mathematics Education) veranstalten regelmäßige Tagungen (CERME) auf internationaler Ebene. Dass es auch große Tagungen in Asien, Australien, Südamerika gibt, liegt meist schon außerhalb des Blickfeldes eines Europäers. Neben den allgemeinen Tagungen und Kongressen gibt es zunehmend spezialisierte Tagungen (Anwendungsorientierung, Stochastik, Lehrerbildung, Hochschuldidaktik, etc.). Insgesamt geht mit dieser quantitativen Ausweitung eine ebenso radikale Einengung (positiv gesagt: Spezialisierung) der Arbeitsgebiete einher und dies hat viel mit einer ebenso radikalen Umorientierung bei den Forschungsthemen, Forschungsfragen und Forschungsmethoden zu tun. Am Beginn der Institutionalisierung der Mathematikdidaktik (im deutschen Sprachraum jedenfalls) waren in den Publikationen dominierend: Themen stoffdidaktischer Natur (didaktische Stoffanalysen und Stoffvorschläge, Begriffsanalysen, methodische Vorschläge, Veranschaulichungen; exemplarisch dazu: Freudenthal, Mathematik als pädagogische Aufgabe), Grundsatzfragen zur Didaktik, Einführungen in die Mathematikdidaktik und viele Schulbücher als praktische Realisierungen. Tendenziell waren die Publikationen damit theoretisch, normativ, präskriptiv und „opinionated“. Es gab kaum eine systematische Überprüfung der didaktischen Vorschläge und ihrer Realisierungen an der Schulpraxis und im Unterricht an den realen Schülerinnen. Maßgeblich waren (entsprechend auch den Ausgangspunkten einer Didaktik) mathematische, pädagogische, philosophische oder auch psychologische Ansichten und Positionen (beispielsweise die New Math Welle als eine eigenartige Mischung aus Bourbaki und Piaget). Einen Anstoß zu einer Trendwende haben vielleicht einige sehr ernüchternde empirische Belege für die zahlreichen und tiefgehenden Missverständnisse bei Lernenden (und Lehrenden) bewirkt, die wahrscheinlich vielen Lehrerinnen schon bekannt aber nicht öffentlich dokumentiert waren. Berühmt-berüchtigt sind das Studenten-Professoren Problem, die Rechenfehler des „Benny“ oder das Buch von Stella Baruk „Wie alt ist der Kapitän?“. Die Fehlerforschung etwa zur elementaren Algebra oder zur Bruchrechnung war ein Anfang hin zur heutigen Dominanz der empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik. Diese heute fast ausschließliche Orientierung zeigt schon ein flüchtiger Blick in die führenden Zeitschriften und Proceedings oder auf die Themen von geförderten Projekten (und das gilt eigentlich weltweit, wobei der deutsche Sprachraum eher mit einer Verzögerung auf den empirischen Zug aufgesprungen ist). Unter „research“ wird üblicherweise nur empirische Forschung verstanden. Auf die breite Palette an Methoden und Fragestellungen soll hier nicht eingegangen werden, denn sie reicht von klinischen Interviews mit einer Person über kleine Fallstudien, Unterrichtsforschung in der Klasse bis hin zu den großen internationalen Vergleichsstudien. Die Methoden sind sowohl qualitativ wie auch quantitativ-statistisch und verwenden verschiedene Aufzeichnungs- und Auswertungsverfahren. Frühe Vorläufer findet man in der ehemaligen Sowjetunion in den Untersuchungen von A.A. Davydov (aktuell in russischen Schulbüchern umgesetzt) und bei Krutetskij (die aber heute bei uns anscheinend vergessen sind) und auch in den USA (Robert Davis). In dieser Forschungslandschaft entsteht nun eine große Anzahl relativ isolierter und unverbundener Arbeiten mit einem jeweils sehr engen Fokus, der oft auch zufällig und ad hoc erscheint. Ganz deutlich sehe ich bei vielen dieser Arbeiten eine Art von Selbstzweck, es geht um die Forschung an sich (egal wie gut und fundiert sie ist) und nicht mehr um die Verwendung der Ergebnisse für den Unterricht (wie das beim Konzept der Didaktik als Ingenieurwissenschaft bei Erich Wittmann im Vordergrund steht). Demgegenüber würde ich heute Mathematikdidaktik als empirische Sozialwissenschaft einordnen, die weitgehend zumindest auf der akademischen Ebene der internationalen Forschung den konstruktiven Aspekt verloren hat (wieder dienen mir da die führenden Zeitschriften und PME als Paradigma). Ich möchte aber darauf hinweisen, dass es in Deutschland engagierte Forschungen gibt, die sehr nahe an der realen Praxis bleiben, wie dies auch im Umfeld des Freudenthal Institutes in Utrecht der Fall ist (RME – Realistic Mathematics Education).

Durch die breite Institutionalisierung der Mathematikdidaktik als akademische Disziplin an Universitäten, Hochschulen und Forschungsinstituten gibt es nun im Gegensatz zu früher die Möglichkeit und Chance einer beruflichen Laufbahn für junge Wissenschaftler in dieser Disziplin vom wissenschaftlichen Mitarbeiter bis zum Professor. Dafür ist jedoch der Nachweis der erfolgreichen wissenschaftlichen Arbeit erforderlich, der nach den heutigen Standards im Wesentlichen in einer Publikationstätigkeit besteht. Die überwiegende Mehrzahl der Publikationen dient heute genau diesem Zweck, ein für die Mathematikdidaktik neues Phänomen, das natürlich bei anderen Disziplinen seit langem der Normalfall ist. Es ist einsichtig, dass sich dadurch die Einstellung zum Publizieren verändert (publish or perish). Auch die starke Dominanz der empirischen Forschung ist dadurch teilweise erklärbar, denn dort lassen sich Untersuchungen von kleinerem oder mittlerem Umfang eigentlich ohne Grenzen multiplizieren und ausweiten. Anders gesagt, ohne den Paradigmenwechsel zur empirischen Forschung wäre die Expansion der letzten Jahrzehnte nicht möglich gewesen, und umgekehrt hat diese den Wandel massiv beschleunigt. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass es nicht schon lange einen genuinen Bedarf an empirischen Untersuchungen gab, worauf in den Grundsatzdiskussionen oft hingewiesen wurde. Der Wandel der Mathematikdidaktik von einer Geisteswissenschaft zu einer Humanwissenschaft ist jedenfalls positiv einzuordnen, es fehlen aber heute anscheinend oft die „großen“ Zielorientierungen. Eine ähnliche Kritik kann man aber auch bei der medizinischen Forschung anbringen.

Andere Aspekte der Veränderung sind noch die folgenden. Durch die Entwicklung der empirischen Forschung gibt es auch so etwas wie eine thematische Emanzipation, die sich in typischen Fragestellungen zeigt, wie sie in anderen Disziplinen nicht aufgenommen werden. Grob gesagt geht es vorwiegend um Lernprozesse in sehr vielen verschiedenen, teils sehr artifiziellen Kontexten von Einzelpersonen und Gruppen mit wieder sehr unterschiedlichen „Steuerungen“ und Lernumgebungen. Durch die etablierten Reviewprozesse werden auch spezifische Standards verfestigt. Das führt zu einer stabilen Identität der Forschergemeinschaft, die nicht mehr auf die Anerkennung durch andere Disziplinen angewiesen ist. Damit hängt auch zusammen, dass man heute in der Mathematikdidaktik als „researcher“ überwiegend für die Kollegen aus der Forschergemeinschaft schreibt, der Adressatenkreis sind also nicht mehr vorwiegend Lehrende an den Schulen. Natürlich gibt es auch weiterhin die intensive Beschäftigung mit Problemen der Praxis und der Lehrenden (in Österreich etwa die Projekte PFL oder IMST), zu denen es dann wieder eine Begleitforschung gibt, die den empirischen Standards entspricht.

Resümee

Durch glückliche Zufälle war es mir vergönnt, Beteiligter, Zeuge und Beobachter eines sozialen Prozesses zu sein, in dem sich in wenigen Jahrzehnten Mathematikdidaktik als wissenschaftliche und akademische Disziplin mit einer national und international organisierten scientific comunity etablieren konnte. Meine persönlichen Eindrücke und auch Bewertungen davon habe ich versucht hier zu schildern. Für das Selbstverständnis der Disziplin meine ich, dass es sehr wichtig wäre, diese historische Entwicklung systematisch zu untersuchen. Schon heute geraten viele wichtige Produkte mathematikdidaktischen Reflektierens in Vergessenheit und so manche aktuelle Forschungsprojekte sind sozusagen voraussetzungslos. Aber alles das müsste detailliert belegt und untersucht werden, was hoffentlich andere bald leisten werden.

Willibald Dörfler, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Institut für Mathematik, Universitätsstraße 65–67, 9020 Klagenfurt, Email: Willi.Doerfler@uni-klu.ac.at.

Zum Einfluss der Informatik auf die Mathematikdidaktik

Weiterhin nur Computereinsatz und noch immer keine Medienbildung?

Horst Hischer

Anlässe zum Nachdenken und zum Vordenken

Diese Vortragsausarbeitung[1] ist ein subjektiver, skizzenhafter Rückblick auf die durch die Entstehung der Informatik bedingten (oder auch erhofften) Auswirkungen auf den Mathematikunterricht in Verbindung mit einem Ausblick als Diskussionsbeitrag zur Mathematikdidaktik.

Subjektiv ist dieser Rückblick, weil er die rund 50 Jahre seit Beginn meines Studiums in Mathematik und Physik betrifft, die stets vom Computer in seiner jeweiligen Erscheinungsform als einem selbstverständlichen Werkzeug begleitet wurden. Und darüber hinaus habe ich in Schule, Schulverwaltung und Universität an diesbezüglichen, den Unterricht betreffenden Entwicklungen mitgewirkt, die nun zu einer von mir nicht beabsichtigten didaktischen Ausrichtung zu führen scheinen.

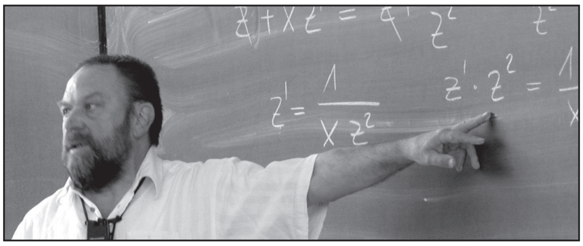
Nachfolgend betrachte ich vier exemplarisch ausgewählte Aspekte, die für mich Anlässe zum *Nachdenken* (im Sinne des Rückblicks) und zum *Vordenken* (im Sinne des Ausblicks) bezüglich der Bedeutung und der Rolle der Neuen Medien für den Mathematikunterricht im Rahmen von Allgemeinbildung sind:

1. *„Die Taschenrechner sind schuld“* – Bericht in der Tagespresse über angebliche Ursachen von Rechenfertigkeitsdefiziten bei Studienanfängern der Ingenieurwissenschaften.
2. *Einsatz graphikfähiger Taschenrechner* – Darstellung in einem aktuellen Schulbuch für den Einstieg in die Integralrechnung.
3. *Epistemologisches Dreieck* – zum möglichen negativen Einfluss auf die Entwicklung von Fertigkeiten und Fähigkeiten infolge zu starker Auslagerung individueller händischer Tätigkeiten auf Neue Medien.
4. *„Mathematikunterricht und Informatik“* – was hat das mit „Computereinsatz“ zu tun?

„Die Taschenrechner sind schuld“?

Unter der Schlagzeile *„Die Taschenrechner sind schuld“* berichtete im Juni 2007 die Braunschweiger Zeitung über Rechenfertigkeits-Defizite von Studienanfängern der Ingenieurwissenschaften an der Technischen Universität Braunschweig, wie sie Mathematik-Hochschullehrer festgestellt und beklagt hatten (Abb. 1). Ein Ausschnitt aus dieser Berichterstattung ist in Abb. 2 zu sehen.[2]

Mittlerweile gibt es ähnliche Klagen von weiteren Hochschulen und Institutionen.[3] Aber wäre es denn redlich, dem entgegenzuhalten, Defizite



Schock nach der Klausur: Mathe-Professor Karl-Joachim Wirths. Foto: TU

BRAUNSCHWEIG. Mathematik-Professor Karl-Joachim Wirths von der TU Braunschweig hat einen schlimmen Verdacht: Die modernen graphikfähigen Taschenrechner verderben den Mathe-Unterricht an den Gymnasien.

Abbildung 1. „Die Taschenrechner sind schuld“?

[1] Vortrag zum Thema „Die ich rief, die Geister, ... werd’ ich sie wieder los? – oder: nur Computereinsatz und noch immer keine Medienbildung?“ am 29. 9. 2012 bei der Tagung des GDM-Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“, mit ausgewählten Vortragsfolien als Abbildungen, vollständige Präsentation unter: http://www.math.uni-sb.de/ag/hischer/vortraege/soest-2012-akmui/

[2] Vgl. die Dokumentation in den *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, MGDM 84/2007, S. 56–57.

[3] Vgl. die Übersicht in [Pinkernell & Greefrath 2011]. Mancherorts „löst“ man das Problem durch ein „mathematisches Vorsemester“ (das aber nicht zu verwechseln ist mit dem Anfang der 1970er Jahre von der Universität Bielefeld initiierten länderübergreifenden gleichnamigen Projekt unter wissenschaftlicher Beratung von K. P. Grotemeyer, mit der ersten gedruckten Ausgabe von 1971 bei Springer, Library of Congress Card Number: 77-171871).

> Die Rechner waren auch in Niedersachsen flächendeckend für jeden Schüler eingeführt worden, um Mathe nach vorn zu bringen. „Das ist offenbar schrecklich gescheitert. Unsere Studenten können nicht mehr mit der Hand rechnen“, sagt Wirths.
> Kollege Thomas Sonar pflichtet ihm bei: „Mathematik wird an den Schulen nicht mehr vollständig unterrichtet. Es ist erschütternd.“ Sonar kritisiert heftig, dass ständige Reformen wichtige Mathe-Inhalte aus dem Unterricht entfernen. Elementare Fähigkeiten im Rechnen würden nicht mehr gelernt. Zur Frage der Taschenrechner meint Sonar nur: „Grauselig.“
>
> Dabei ist bemerkenswert, dass beide Mathematik-Professoren zu jenen Experten gehörten, die die Einführung der graphikfähigen Rechner vorangetrieben haben. Es ging ihnen auch darum, Spaß am oft ungeliebten Stoff zu vermitteln und die Schüler durch neue Möglichkeiten gleichsam zu den Wurzeln der Mathematik vorstoßen zu lassen. Offenbar mit frustrierendem Ergebnis: „Noch nie hatten wir so viele Studenten, deren mathematische Fähigkeiten für ein Studium einfach nicht ausreichen“, sagt Wirths.

Abbildung 2. Ausschnitt aus dem Pressebericht zu „Die Taschenrechner sind schuld!“

der Studienanfänger seien „schon immer“ beklagt worden – um dann zur Tagesordnung überzugehen, solche Klagen zu ignorieren und zu fordern, dass die Hochschulen sich doch bitte auf veränderte inhaltliche Strukturen des Mathematikunterrichts einstellen mögen? Oder sollte sich stattdessen die Schule als „Lieferant“ an Studieneingangsforderungen der Hochschule(n) orientieren? Und wie ist das Verhältnis zwischen *Allgemeinbildung und Studierfähigkeit zu* bestimmen?[4]

Weil mir die in den Abbildungen 1 und 2 skizzierte Reaktion der Kollegen damals zu kurz gegriffen erschien und die (aus meiner optimistischen Sicht) fundierten didaktischen Absichten zur Einbeziehung Neuer Medien in den Mathematikunterricht anscheinend nicht (hinreichend) gewürdigt wurden, initiierte ich eine Vortragsreihe zum Thema „*zur Rolle von Taschenrechnern bzw. Taschencomputern bezüglich Allgemeinbildung und Studierfähigkeit*,“ die auf großes öffentliches Interesse stieß.[5]

Allerdings wurden meine Erwartungen in Bezug auf diese Veranstaltungsreihe enttäuscht, war die mehrheitliche Resonanz des insbesondere aus Lehrkräften bestehenden Auditoriums doch eher „nicht auf meiner Seite“ – so wurde den Neuen Medien hier offenbar im Hinblick auf den Mathematikunterricht kein gutes Zeugnis ausgestellt, und zwar sowohl bezüglich der Unterrichtsziele als auch der Unterrichtsbefunde.

Nach der erstmaligen Publikation der o. g. Presseberichte beteiligte ich mich in der Tagespresse an einer „Pro & Contra-Diskussion“,[6] bei der ich in Bezug auf die „Taschenrechner-Schuld“ die Contra-Position einnahm. Mittlerweile neige ich zu einer anderen Beurteilung, die u. a. durch die „Schulbuchwirklichkeit“ bedingt ist, wie sie z. B. im zweitgenannten Anlass erscheint.

Das epistemologische Dreieck

Zunächst sei als dritter Anlass das *epistemologische Dreieck* betrachtet.[7] Das didaktisch Wesentliche dieses epistemologischen Dreiecks ist in Abb. 3 erkennbar, es sei nachfolgend vertieft.

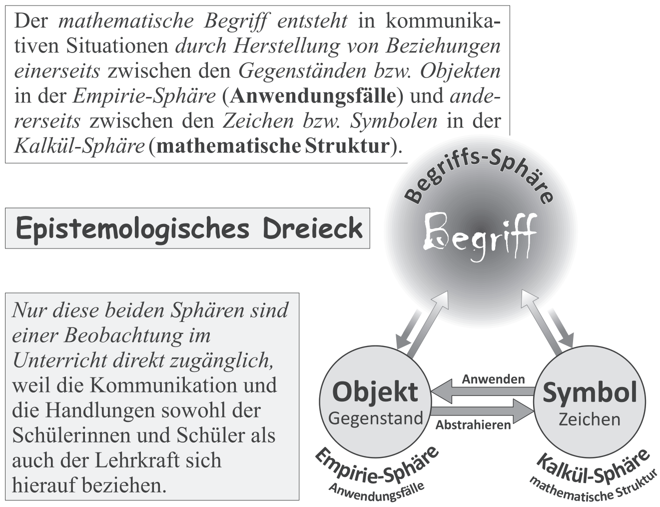


Abbildung 3. Epistemologisches Dreieck zur „Begriffs-Bildung“

Hier wird visualisierend angedeutet, dass ein mathematischer „Begriff “ nicht konkret fassbar ist, sondern dass dieser sich im *Wechselspiel* der sowohl individuellen als auch sozialen Handlungen

4 Hierzu gibt es eine gemeinsame Kommission von DMV, GDM und MNU: http://www.mathematik-schule-hochschule.de
5 Siehe: http://mathematikunterricht.hischer.de/NeuMed/diskussion/tr-bz/vortragsreihe-tu-bs.htm
6 Nachzulesen in den *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, MGDM 84/2007, S. 56, ferner unter http://mathematikunterricht.hischer.de/NeuMed/diskussion/tr-bz/
7 Vgl. hierzu die in [Hischer 1996] und [Hischer 2012a, 39 f.] zitierten und interpretierten empirisch-theoretischen Untersuchungen von Bromme, Seeger und Steinbring.

zwischen der (hier von mir so genannten) *Empirie-Sphäre* und der (hier so genannten) *Kalkül-Sphäre* – gewissermaßen „hintergründig“ und schemenhaft – entwickelt und dass er (daher) *nur einer indirekten Beobachtung zugänglich* ist.

In der *Empirie-Sphäre* „erfassen“ die Individuen konkrete materielle oder ideelle *Objekte*, sammeln mit ihnen Erfahrungen und klassifizieren und „begreifen“ sie schrittweise als *Beispiele* oder *Nichtbeispiele* für den zu *entwickelnden Begriff* im Sinne des *Begriffsumfangs*. Durch die damit verbundene zunehmende *symbolisierende Abstraktion* nähern sich die Individuen in der *Kalkül-Sphäre* der Beschreibung einer gemeinsamen **mathematischen Struktur** dieser Objekte und damit einem (oder „dem“?) mathematischen *Begriffsinhalt*. Die bei diesem Abstraktionsprozess mögliche Verwendung von *Symbolen* als *bedeutungstragenden Zeichen* dient der Kommunikation zwischen den Beteiligten und bedarf eines Regelsystems, das auf einem (zu entwickelnden) *Kalkül* unter Einschluss der mathematischen Logik beruht.

Die auf diese Weise erarbeitete formale bzw. verbale (vorläufige) „Definition“ wird auf die vorhandenen und weitere Objekte der *Empirie-Sphäre* „rückwirkend“ angewendet, wobei diese nun in neuer Sicht als **Anwendungsfälle** erscheinen, gefolgt von einem erneuten Wechsel in die *Kalkül-Sphäre*, in der man „kalkuliert“ (in Verbalisierung des Umgehens mit einem Kalkül). Wegen der erwähnten Kommunikation zwischen den „Beteiligten“ findet diese *ontogenetische Begriffsbildung nicht nur subjektiv* statt, *sondern auch intersubjektiv*.

Für den Begriffsbildungs-Prozess ist dieser (sich wiederholende!) *Sphärenwechsel* typisch, und das im Unterricht teils beobachtbare Verharren in der Kalkül-Sphäre wird einer fundierten Begriffs-Bildung nicht dienen können. Beispielsweise wird kein adäquates Bruchverständnis entwickelt werden können, wenn lediglich Bruchrechenregeln „gelernt“ und angewendet werden, und es wird kein Verständnis für infinitesimale Prozesse entwickelt werden können, wenn etwa nur Grenzwert- und Ableitungsregeln „gelernt“ und angewendet werden: Damit wird die Empirie-Sphäre vernachlässigt und die Kalkül-Sphäre überbetont.

Umgekehrt wird man der Frage nachgehen müssen, wie es z. B. um die Begriffsentwicklung bei dominantem Computereinsatz bestellt ist. So wies ich 1995 mit Bezug auf das epistemologische Dreieck und mit Blick auf den sich damals bereits

Didaktisches Trägheitsprinzip

(Hanisch 1992, im AK-MU&I-Tagungsband 1991)

Reaktion der österreichischen Unterrichtsverwaltung und der Mathematiklehrer(innen) auf den TR:
Dieser wurde
- zuerst totgeschwiegen (**Stufe 1**),
- dann verboten (**Stufe 2**),
- mit Widerwillen erlaubt (wenn … und aber …) (**Stufe 3**)

und
- schließlich verpflichtend eingeführt (1991 in Österreich) (**Stufe 4**).

Analog ist es beim programmierbaren Taschenrechner.

Abbildung 4. Didaktisches Trägheitsprinzip

abzeichnenden zunehmenden Einsatz von CAS im Unterricht besorgt auf mögliche damit verbundene negative Folgen für den Prozess der Begriffs-Bildung hin, die zu bedenken seien: Software enthält Algorithmen und Kalküle, die nicht mehr individuell beherrscht werden müssen, so dass dadurch die Kalkül-Sphäre vernachlässigt zu werden droht – denn hierbei wird „Denkfähigkeit“ partiell auf den Computer *ausgelagert* (vgl. Hischer 1996; 2002, S. 68 f.; 2012a, S. 40).

Die so begründete Sorge wiegt nunmehr umso schwerer, weil mittlerweile tatsächlich Stufe 4 des 1991 von Günter Hanisch formulierten „Didaktischen Trägheitsprinzips“ sinngemäß erreicht worden ist (Abb. 4). Diese Stufe war damals mitnichten als anzustrebender Segen gemeint und ist aus meiner Sicht auch heute nicht so einzuordnen.[8]

GTR-Einsatz bei der Integraleinführung

Damit komme ich mit Abb. 5 zum zweiten oben erwähnten Anlass, symbolisiert durch zwei Abbildungen und einen erläuternden Text aus einem aktuellen Schulbuch für die gymnasiale Oberstufe.

Ich beschränke mich hier auf den Anfang des dem Thema „Integral“ gewidmeten Kapitels dieses Schulbuchs. In diesem Kapitel*anfang* vermag ich keinen Weg zur Entwicklung mathematischen Denkens und Arbeitens, geschweige denn zum entdeckenden Lernen zu erkennen: Die ersten drei Seiten dienen zunächst dazu, auf außermathematischem Wege eine Motivation zur Entwicklung eines Begriffs für „bestimmtes Integral“ aufzubauen. (Das ist zwar m. E. fachlich weder sinnvoll noch angemessen – doch ist das hier nicht Gegenstand der Betrachtung.)

[8] Hans Schupp ergänzte hierzu mir gegenüber treffend, dass dieses Trägheitsprinzip manchmal noch weiter reichen würde, so beispielsweise früher bei der „New Math“: Man denke an deren durchgehende administrative Absetzung nach Tadel von Schülern, Lehrern und Eltern, gepaart mit Kritik aller seinerzeitigen Befürworter an der fehlerhaften Durchführung mit dazu entsprechenden Eigenzitaten.

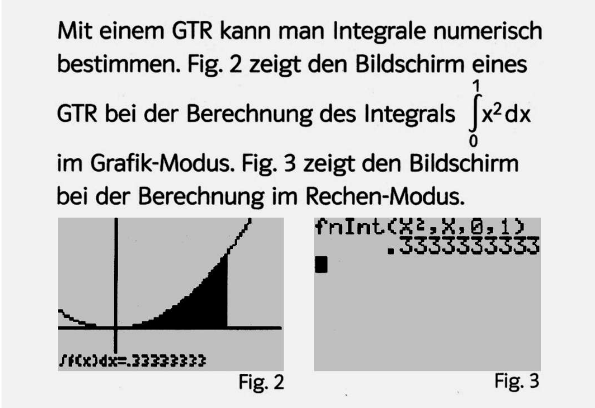

Mit einem GTR kann man Integrale numerisch bestimmen. Fig. 2 zeigt den Bildschirm eines GTR bei der Berechnung des Integrals $\int_0^1 x^2\,dx$ im Grafik-Modus. Fig. 3 zeigt den Bildschirm bei der Berechnung im Rechen-Modus.

Fig. 2 Fig. 3

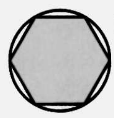
Abbildung 5. Aus einem aktuellen Schulbuch für die gymnasiale Oberstufe – Einsatz graphikfähiger Taschenrechner (GTR)

Der dann folgende Teilabschnitt „Integral“ beginnt mit dem Satz:

> Mit der nebenstehenden Formel kann man aus dem Umfang U_6 des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks nacheinander den Umfang eines einbeschriebenen regelmäßigen 12-Ecks, eines 24-Ecks usw. berechnen.

Und daneben befindet sich die nachfolgende Darstellung (Abb. 6), die gemäß Layout offenbar einem anderen Buch entnommen wurde.

$$U_{2n} = \frac{2 \cdot U_n}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - \left(\frac{U_n}{n}\right)^2}}}$$



Radius r = 0,5

Abbildung 6. „Einstieg“ in die Integralrechnung?

Abb. 6 ist zwar mathematisch korrekt, und es wird sogar die Nullkatastrophe vermieden. Aber woher kommt diese Formel? Sie ist keineswegs trivial, sie muss vielmehr *erarbeitet* und darf *nicht nur mitgeteilt* werden, auch ist sie eigenständig *auszuwerten!* Zwar steht am Buchrand der Hinweis *„Berechnung einer krummlinigen Fläche“* (mit einem Symbol für „CAS“). Doch soll damit nun *nur* die nicht erarbeitete (und damit unverstandene) Formel numerisch „überprüft“ werden? Welchen Lernzuwachs oder welchen Erkenntnisgewinn soll eine solche Vorgehensweise bringen?

Anschließend geht es auf derselben Seite ähnlich weiter, was nur angedeutet sei: Zur Berechnung des Flächeninhalts unter einer Normalparabel mittels äquidistanter Streifen (in nicht korrekter Beschreibung) wird die Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen *lediglich mitgeteilt*, um damit dann den „Grenzwert“ bilden zu können – also *Mathematik als Formel- und Rezeptsammlung?*

Nach diesen Vorbereitungen wird bereits auf der nächsten Seite (sic!) eine „Definition“ für das (so nicht genannte „bestimmte“) Integral präsentiert, wobei es rätselhaft ist, weshalb in der Voraussetzung plötzlich ohne Erörterung die *Stetigkeit* der betrachteten Funktion verlangt wird. Das ist fachlich abstoßend und didaktisch verwerflich.

Nun mag man einwenden, dass so etwas doch in einem gymnasialen Schulbuch nicht en detail ausgeführt werden muss, weil es ja im Unterricht erarbeitet würde, jedoch steht dem entgegen, dass in diesem Buch laut Buchrücken *„das abschließende mathematische Schulwissen“* bereitgestellt würde, dass ferner das Buch *„alle für das Abitur relevanten Inhalte“* aus der Analysis enthalte und es für die *„eigenständige Abiturvorbereitung“* ausgelegt sei. – Soll es damit etwa beim Abitur nur (noch) darauf ankommen, bestimmte Formeln zu *kennen* und z. B. *nur abrufbar zu „wissen“*, dass das (bestimmte) Integral für stetige Funktionen erklärt ist?

In einem sich anschließenden „Info“ erfährt man, dass die Schreibweise für das (bestimmte) Integral von Leibniz eingeführt worden sei (was historisch falsch ist), dass „dx [. . .] für immer kleiner werdende Intervallbreiten Δx [steht]“ und dass das x in dx die „Integrationsvariable“ sei (was beides nicht unproblematisch ist).

Doch nun kommt der „Höhepunkt“, nämlich die in Abb. 5 zu sehende Zusammenstellung: Tatsächlich wird hier also unter Umgehung des wichtigen und langwierigen Weges zur Entwicklung eines „Begriffs“ von „Integral“ (vgl. Abb. 3 nebst anschließenden Erläuterungen) und den dazu unverzichtbaren infinitesimalen Betrachtungen ein „Schnellweg“ mittels „Tastendruck“ präsentiert und mit nachfolgenden Übungsaufgaben auch „legitimiert“. Hier wurde offenbar die vor über zwanzig Jahren in der Mathematikdidaktik angesichts des Erscheinens von Computeralgebrasystemen (CAS) berechtigt gestellte und nachdenklich gemeinte Frage *„Wie viel Termumformung braucht der Mensch?“* (vgl. Hischer 1993) damit beantwortet, dass nunmehr wohl auf sehr viele klassische „händische Aktivitäten“ verzichtet werden könne. Doch ist das jetzt schon durch Langzeituntersuchungen belegbar? Eher scheint das mühsame Sammeln händischer Erfahrungen für den *Erwerb von Fertigkeiten* als einem *erwerbbaren Vermögen* wesentlich zu sein für die *Fähigkeit* zum Erkennen struktureller Zusammenhänge und für einen „verständigen“ Softwareeinsatz. – Hier liegen Vergleiche zu *Musik und dem Erlernen eines Musikinstruments* nahe . . .

Auf diese Weise wird nun ein früher im Unterricht zu beobachtender, wenn auch mathematikdidaktisch nicht gewollter methodischer Fehler durch einen neuen ersetzt: Gemäß den Erläuterungen zu Abb. 4 kann kein Verständnis für infinitesimale Prozesse entwickelt werden, wenn nur Grenzwert- und Ableitungsregeln „gelernt“ und angewendet werden, weil dann die *Kalkülsphäre überbetont* und die *Empiriesphäre vernachlässigt* wird (ein Kennzeichen schlechten, „kalkülbetonten“ Unterrichts). Doch beim hier skizzierten Weg des vordergründigen Einsatzes von GTR und CAS besteht die Gefahr einer anderen Überbetonung:

Hier werden nämlich Algorithmen und Kalküle angewendet, die in der Software implementiert sind und die man nicht mehr selber im Sinne von Fertigkeiten „beherrschen“ muss (denn sie wurden „ausgelagert“), womit die *Kalkülsphäre vernachlässigt* wird – und auch das lässt negative Folgen für die „Begriffs-Bildung“ erwarten: Für den Prozess der Begriffs-Bildung wird nämlich das epistemologische Dreieck *ausgewogen bezüglich Empirie- und Kalkülsphäre* zu berücksichtigen sein!

Und worin mag der didaktische Sinn einer wie gemäß Abb. 5 zu vermutenden Vorgehensweise liegen, wird hier doch nur der numerische Wert des betreffenden Integrals ausgeworfen – überdies mit einer nicht zufriedenstellenden (nicht „glatten“) Graphik und einem nur angenäherten numerischen Wert? Zwei mögliche didaktische Ziele könnten bei dieser Schulbuchkonzeption Pate gestanden haben: 1. die situative Einübung in den „technischen Umgang“ mit dem GTR; 2. eine schnelle Bereitstellung von „Erfolgserlebnissen“.

Die darauf folgenden Beispiele und Aufgaben erhärten diesen Verdacht, denn sie dienen nur der *numerischen Berechnung bestimmter Integrale* einiger rationaler und algebraischer Funktionen und (sic!) sogar transzendenter Funktionen wie exp und sin – und das an dieser Stelle nur mittels GTR *vor* einer fundierten Begriffs-Entwicklung für „bestimmtes Integral“. Und natürlich werden sich etliche Schüler(innen) freuen, wie „einfach“ doch Mathematik sein kann. Das Fatale hierbei ist aber:

Mathematik wird auf diese Weise zu einem „spielerischen Knöpfchendrücken“ degradiert![9] Dann aber sollte man Analysis lieber komplett aus dem Inhaltskanon des Unterrichts streichen – denn kritisches Denken und Erkennen kann so nicht gefördert werden. Wo bleiben denn hierbei die eindringlichen Appelle von Martin Wagenschein: *„Rettet die Phänomene!“* und von Hans-Joachim Vollrath: *„Rettet die Ideen!“*? Waren diese Appelle etwa vergeblich, und haben sie tatsächlich keine nachhaltigen Spuren hinterlassen?

Nun mag man vielleicht einwenden, dass der Zeitdruck in der Oberstufe doch so groß sei und man deshalb gezwungen sei, so vorzugehen. Aber diese Ergebenheit gegenüber einem u. a. durch „G8“ und das „Turbo-Abitur“ gekennzeichneten bildungspolitischen Vorgehen ist weder nachvollziehbar noch entschuldbar, haben doch Fachleute aus Schule und Hochschule an dem mitgewirkt, was dann Legislative und Exekutive in Gesetze, Verordnungen und Erlasse gegossen haben.

Vertiefend und ergänzend und zugleich ganz in meinem Sinn schrieb mir mein verehrter Vorgänger im Amt, Hans Schupp, hierzu:

> Das nicht wegzudiskutierende Absinken des Unterrichtsniveaus auf allen Stufen unseres Schulsystems – verbunden mit immer besseren Beurteilungen und Qualifizierungen – dem Rechner bzw. Computer zuzuschreiben, ist zu kurz gegriffen. Schuld daran ist eine Bildungspolitik, die unter dem wählerwerbenden Signum der Gerechtigkeit (ein Begriff, der im Grundgesetz nicht vorkommt) – diese noch einmal reduziert auf Gleichheit – das Leistungsprinzip und damit die individuelle Förderung seit Jahren unterhöhlt.

Mathematikunterricht und Informatik – Skizze der Entwicklung aus der Sicht eines Zeitzeugen

Die folgenden Folien und textlichen Erläuterungen betreffen den vierten o. g. Anlass und deuten das *Verhältnis von Mathematikunterricht und Informatik* in seiner historischen Entwicklung an.

Die mathematisch bedeutsamen ersten beiden elektronischen Digitalrechner, die „Zuse Z22“ (mit Röhren-Flipflops, die im Prozess durchaus ausfallen konnten[10]) und der röhrenfreie Rechner „Electrologica X1“ (eine niederländische Entwicklung), lernte ich 1964 in der ersten Hälfte meines Studiums als wissenschaftliche Hilfskraft am Rechenzentrum der Technischen Hochschule Braunschweig kennen, und zwar in Verbindung mit Algol 60 (Algorithmic Language), einer damals revolutionären, von Mathematikern entwickelten Sprache für strukturierte Programmierung (einem Vorläufer von Pascal aus den 1970ern).

Der in Abb. 8 unten erwähnte, 1969 durchgeführte EDV-Kurs bestand aus einem theoretischen Teil (an Tafel und Schreibtisch in der Schule), kombiniert mit nächtlichen „realen“ Übungen der volljährigen Schüler im Rechenzentrum der TU. Diese „entschleunigte“ Methode war für die hoch motivierten Schüler effektiv und nachhaltig.

[9] Aber: Die oft mit „spielerisch“ verbundene abfällige Konnotation darf nicht mit dem philosophisch anspruchsvollen Aspekt von „Mathematik als Spiel des Geistes“ identifiziert werden (vgl. dazu den übernächsten Abschnitt)!

[10] Informationen unter: http://pl.attitu.de/zuse/special/Welcome.html

Abbildung 7. Deutscher Röhrenrechner Zuse Z22

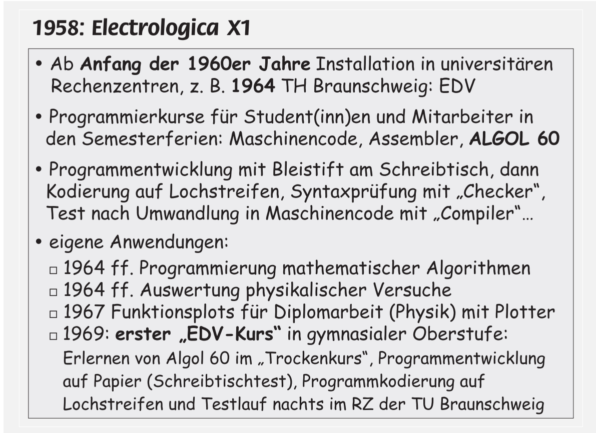


Abbildung 8. Meine Anfänge der Rechnernutzung in den 1960ern

Die 1970er und 1980er Jahre sind durch zunehmendes Eindringen von elektronischen Taschenrechnern und dann auch von Tischcomputern in den Mathematikunterricht gekennzeichnet (vgl. ausführlicher Hischer 2013).

- ab Anfang der 1970er Jahre: Einrichtung erster Informatik-Professuren an deutschen Hochschulen; elektronische Taschenrechner (TR) im Mathematikunterricht; didaktische Thematisierung von TR; vereinzelt Einsatz erster neuartiger Tischcomputer (TC) im MU (wie z. B. Wang).
- 1975: 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Saarbrücken, Gründung der GDM, bereits Vorträge zum Einsatz von TR und TC im MU.
- 1978: 12. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Münster, Tagungsschwerpunkt: Fragen des Informatik-Unterrichts; Gründung eines Arbeitskreises „Informatik".
- 1979: 13. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Freiburg; Sitzung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" (AK MU&I) mit Thesen von *Gunzenhäuser* (Informatik als eigenständiges Fach) und *Löthe* (unverzichtbare informatische Inhalte im MU).
- Ende 1970er: Bildschirm-TC im MU (1977: Apple II und Commodore PET, 1980: Commodore 8032)
- 1980: 2. Arbeitstagung des AK MU&I in Bottrop.
  (1) Formulierung einer Zielsetzung des AK MU&I: *Untersuchung von Auswirkungen der Informatik auf den Mathematikunterricht, die erkennbar sind und in Zukunft noch stärker in Erscheinung treten werden. Letzteres gilt unabhängig davon, in welchem Umfang Informatik selbst zum Unterrichtsgegenstand in unseren Schulen wird, da im Mathematikunterricht die methodischen und anwendungsorientierten Aspekte der Informatik gegenüber den inhaltlichen den Vorrang haben.*
  (2) Erarbeitung von *„Empfehlungen zur Einbeziehung informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I"* und von *„Empfehlungen zur Einbeziehung informatischer Inhalte in die Hochschulausbildung von Mathematiklehrern der Sekundarstufe I"*, (1981 als „Bottroper Empfehlungen" der GDM).
- 1983: Fächerübergreifende Grundsatztagung *„Neue Technologien und Schule"* (Ev. Akademie Loccum).
- 1984: *„Rahmenkonzept für die informationstechnische Bildung in Schule und Ausbildung"* (BLK).
- 1985: 6. Arbeitstagung des AK MU&I in der Reinhardswaldschule (Fuldatal bei Kassel) zum Thema: *„Informationstechnische Bildung als Ziel des Mathematikunterrichts"*; dort Kontroverse: „Mathematik als Leitfach" versus „fachübergreifender Ansatz".
- 1987: *„Gesamtkonzept für die Informationstechnische Bildung"* der BLK (inkl. *Medienerziehung*).
- 1989: *„Informations- und kommunikationstechnologische Bildung"* als Projekt-Veröffentlichung Niedersachsens zum BLK-Konzept von 1984: *„integrativer Ansatz"* als *fächerübergreifende Realisierung*, ähnlich auch in NRW.

Es sei angemerkt, dass zu Beginn der Entwicklung die unerbittlich strenge Syntax bei der Benutzung eines TR und von Programmiersprachen vielfach zur Erwartung positiver Auswirkungen auf ggf. unzureichende syntaktische Einsichten und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler geführt hatte.

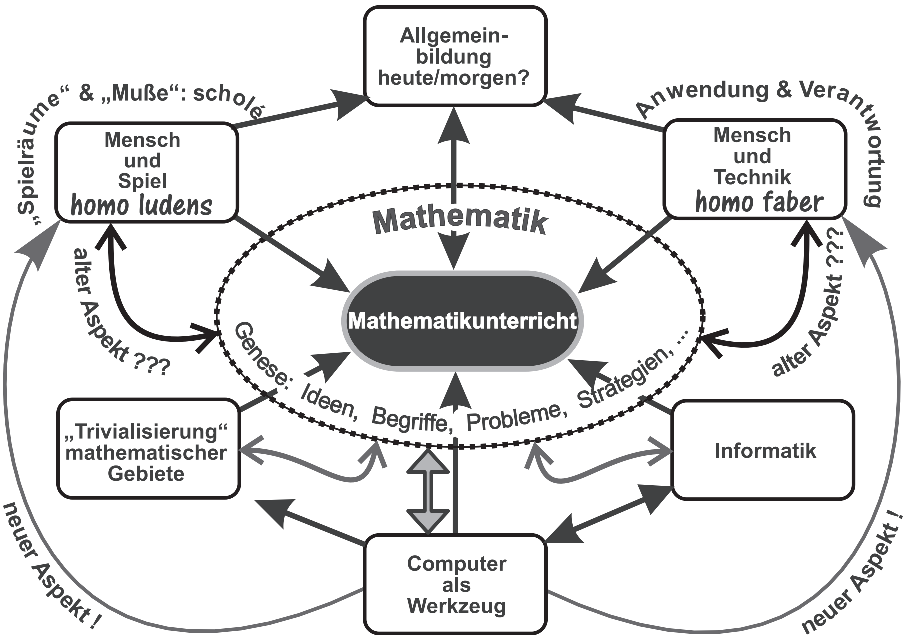


Abbildung 9. Herausforderungen an den Mathematikunterricht seit den 1990ern (vgl. Hischer 2002)

Die 1990er Jahre: Mathematikunterricht im Spannungsfeld diverser Herausforderungen

Abb. 9 zeigt vielfältige Herausforderungen, denen sich der Mathematikunterricht seit den 1990er Jahren ausgesetzt sah und sieht.

Traditionell dient der Mathematikunterricht der *Vermittlung eines gültigen Bildes der Mathematik*, wozu die Genese von Ideen, Begriffen, Problemen und Strategien gehört, aber er muss sich sowohl in ein aktuelles Konzept von *Allgemeinbildung* einfügen als auch dieses mit prägen. Ferner ist zu berücksichtigen, dass Mathematik einerseits angewendet wurde und wird und andererseits ihren Bildungswert auch ohne Blick auf *Anwendung* und *Nützlichkeit* hat, nämlich im Sinne von *„Spiel“*, wie es Horst Ruprecht 1989 betont hat:[11]

> Mathematik ist ein grandioses Spiel des Geistes, und als solche müsste sie in den Schulen erscheinen.

Bereits Schiller schreibt zum „Spiel“:[11]

> Der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.

Zum Spiel gehört „Muße“, griechisch „schole“, worauf „Schule“ zurückgeht. Die Ausführungen im Anschluss an Abb. 5 signalisieren aber, dass Schule wohl derzeit kein (H)Ort der „Muße“ ist.

Unter dem Aspekt von *„Anwendung“* gesellt sich die Mathematik zur *Technik*, gepaart mit verantwortungsethischem Bedenken eigenen Tuns.

So ruft Goethes „Zauberlehrling“ zum Schluss:

> Die ich rief, die Geister, werd ich nun nicht los.

Doch nicht immer ist dann ein rettender Meister zur Stelle, der dann erfolgreich eingreifen kann:

> In die Ecke, Besen! Besen! Seids gewesen!
> Denn als Geister ruft euch nur, zu seinem Zwecke,
> Erst hervor der alte Meister.

Und gemäß Karl Löwith geht es schon längst nicht mehr darum, *dass wir nicht alles dürfen, was wir können*, sondern darum, *ob wir können, was wir müssen*, worauf Bernd Guggenberger in seinem Buch „Das Menschenrecht auf Irrtum“ hinweist.[12]

Die anderen in Abb. 9 dargestellten Einflussfelder betreffen den Computer und die Informatik in ihrer Wechselwirkung mit Mathematik und mit dem Mathematikunterricht, wie sie beispielsweise im AK MU&I insbesondere seit Anfang der 1990er Jahre erörtert worden sind.

Doch wie wurde und wird seitens der Didaktik der Mathematik und seitens der Bildungspoli-

[11] Zitiert bei [Hischer 2012a, 5].
[12] Zitiert bei [Hischer 2002, 62 f.].

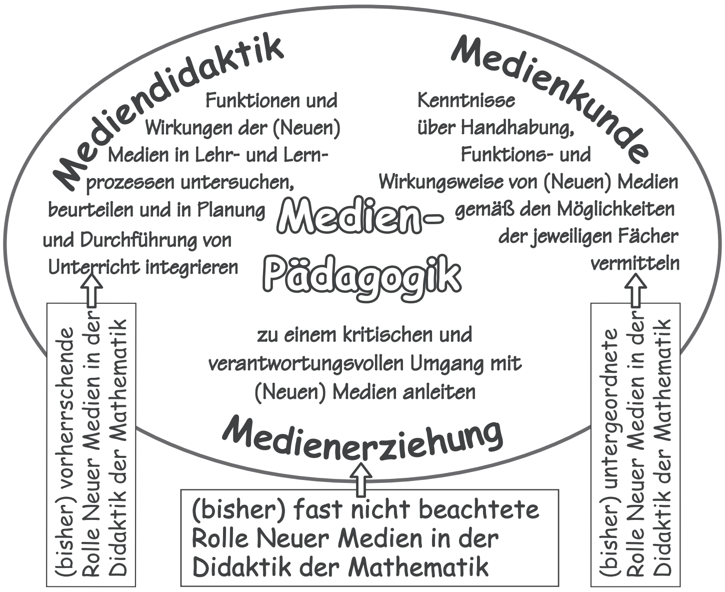


Abbildung 10. Medienbildung als Integrative Medienpädagogik (vgl. Hischer 2012b, 2013)

tik auf die vielfältigen in Abb. 9 dargestellten Herausforderungen reagiert? – Bezüglich *homo ludens* ist schon wegen G8 und Turbo-Abitur Fehlanzeige zu vermelden. Bezüglich *homo faber* ist lediglich zu konstatieren, dass „Anwendungen“ unter den Aspekten „Modellierung“ und „Realitätsbezug“ (allzu sehr) betont werden und dass dabei der Aspekt „Verantwortung“ (wohl ebenfalls wegen G8 und Turbo-Abitur?) noch auf der Strecke bleibt.

Im Hinblick auf das Einflussfeld „Informatik“ in Abb. 9 ist *nicht* erkennbar, wie und ob sich die 1980 formulierte Zielsetzung des AK MU&I in der Didaktik der Mathematik oder gar im Mathematikunterricht „flächendeckend“ niedergeschlagen hat – es sei denn, man würde den „Computer als Werkzeug“ im nächsten Einflussfeld dazu zählen. Das wäre aber Etikettenschwindel, denn Informatik ist nicht auf „Computereinsatz“ reduzierbar. Und das Einflussfeld „Trivialisierung“ (Buchberger) scheint in Verkennung des damit Gemeinten (vgl. Hischer 1992; 2002, 102 ff.) dazu zu führen, kritisches Denken durch Tastendruck ersetzen zu lassen, was mich zum Vortragshaupttitel

> Die ich rief, die Geister,
> ... werd' ich sie wieder los?

veranlasst hat.

Was wäre denn wichtig? Das kündigt sich bereits im auf Seite 20 unter „1989“ erwähnten „integrativen Ansatz“ (vgl. hierzu Hischer 2012b und 2013) an: So kann es nicht *nur um den Computereinsatz im Mathematikunterricht* gehen, sondern die Neuen Medien müssen darüber hinaus auch zum *Unterrichtsgegenstand* werden!

Medienbildung als Integrative Medienpädagogik

Die mit der Forderung nach Neuen Medien als *Unterrichtsgegenstand* verbundene bildungstheoretische Botschaft geht auf die Loccumer Tagung „Neue Technologien und Schule“ von 1983 zurück. Wesentliche Charakteristika dieses fächerübergreifenden Bildungskonzepts, das zur *Integrativen Medienpädagogik* führte, sind in Abb. 10 erkennbar und seien hier knapp erläutert:

Integrative Medienpädagogik ist ein normatives didaktisches Konzept, bei dem „integrativ“ eine *zweifache Qualität* aufweist (vgl. auch Hischer 2002, 55–56):

(1) Alle drei Teilbereiche der Medienpädagogik (Mediendidaktik, Medienkunde und Medienerziehung) sind bei der Planung, der Durchführung und der Evaluation von Unterricht in ihrer Gesamtheit (also „integrativ“) und nicht losgelöst voneinander und auch nicht für sich isoliert zu berücksichtigen.
(2) Eine so verstandene Medienpädagogik kann nicht von einem einzelnen Unterrichtsfach allein übernommen werden, vielmehr sind im Prinzip alle Unterrichtsfächer gemeinsam (also „integrativ“) mit je spezifischen Ansätzen gefordert.

Die erste Forderung verdeutlicht, dass Medien (und damit auch Neue Medien) im pädagogisch-didaktischen Kontext nicht nur als methodisches Unterrichtsmittel auftreten dürfen, sondern dass sie in ihrer Vielfalt auch zum Unterrichtsgegenstand werden müssen.

Die zweite Forderung entstand in den 1980er Jahren im Zusammenhang mit dem *integrativen Ansatz*, verbunden mit einer Absage an das z. T. propagierte „Leitfachprinzip“, für das damals von manchen Bundesländern die Mathematik (oder teilweise sogar die Informatik) favorisiert wurde – denn: Kein einzelnes Fach ist in der Lage, ein solch quer zu den Fachdisziplinen liegendes und transdisziplinäres Thema wie „Neue Medien“ aus sich heraus angemessen zu behandeln.[13]

Das mit „Integrative Medienpädagogik“ intendierte didaktische Programm lässt sich heute kurz als „Medienbildung“ beschreiben, wie es bereits in [Hischer 2012b] angedeutet ist und ausführlicher in [Hischer 2013] als Beitrag im fächerübergreifenden Band [Pirner et al. 2013] dargestellt wird.

Der Aspekt der *Medienerziehung* (siehe Abb. 10: *kritischer und verantwortungsvoller Umgang* . . .) hat derzeit durch das raketenhafte Auftauchen von Tablet-PCs nebst „Familienangehörigen“ in Verbindung mit „Apps“ gegenüber dem ursprünglichen medienerzieherischen Anliegen dramatisch an Bedeutung zugenommen, dem sich auch der künftige Mathematikunterricht wird stellen müssen. Dazu gehört auch, wie man sich in Bezug auf ständige medial verfügbare Versuchungen wappnen kann: vorschnelles und unkritisches *googeln* und blindes Vertrauen auf diverse *wikis* vermeiden lernen, suchthaften Verlockungen zum „nur Spielen“ mit den Geräten zu widerstehen lernen.

Fazit

Die in diesem Rahmen nur knapp möglichen Betrachtungen seien thesenartig zusammengefasst:

- Der Computer ist ein Produkt der Mathematik und der aus ihr hervorgegangenen Informatik, und er ist ein neues leistungsfähiges Werkzeug für die Mathematik und ihre Anwendungen.
- Es ist naheliegend, im Unterricht in mediendidaktisch begründeten (!) Situationen den Computer und ggf. andere Neue Medien als zeitgemäße Werkzeuge einzusetzen, wenn dadurch kritisches Nachdenken nicht ersetzt wird.
- Eine Computereinsatzmöglichkeitensuche kann im Unterricht unter mediendidaktischen Aspekten (in pädagogischer Hinsicht sowieso) keinen Platz haben.
- Wohl aber wird es im Mathematikunterricht im Rahmen eines Beitrags zu einer Medienbildung sinnvolle Einsatzmöglichkeiten Neuer Medien geben, und zwar sowohl in medienkundlicher als auch in medienerzieherischer Sicht.
- Die „aufklärende“ Behandlung Neuer Medien im Sinne von Medienkunde und Medienerziehung erfordert aber nicht immer deren Unterrichtseinsatz.
- Es ist (gemäß Klafki: „epochaltypisch“) diskursiv zu klären, was allgemeinbildungsrelevante „informatische Aspekte“ sein sollen und welche darunter den Mathematikunterricht betreffen (sollen/können).
- Die möglicherweise negativen Folgen bei übermäßiger „Auslagerung“ individueller Tätigkeiten auf den Computer sind mit Blick auf das epistemologische Dreieck zu untersuchen und zu beachten.

Das sei um folgende verschärfende These ergänzt:

- Ohne hinreichend gefestigte händische Erfahrung im Umgang mit Termen (deren Erkennen und gezieltes Umformen) *vor* Einsatz eines CAS wird in aller Regel kein Verständnis für formal beschriebene mathematische Zusammenhänge zu erwarten sein.

Daraus resultiert ein umfangreiches Programm für Forschung und Entwicklung zum Bereich *Mathematikunterricht und Medienbildung*.

Ich danke Prof. Dr. Hans Schupp, Universität des Saarlandes, für hilfreiche Anmerkungen.

Zitierte und vertiefende Literatur

Hanisch, Günter [1992]: Die Auswirkungen der Computeralgebra auf den Mathematikunterricht. In: [Hischer 1992, 14–20].

Hischer, Horst [1992] (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Tagungsband 1991. Hildesheim: Franzbecker.

— [1993]: Wieviel Termumformung braucht der Mensch? In: Hischer (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Fragen zu Zielen und Inhalten eines künftigen Mathematikunterrichts angesichts der Verfügbarkeit informatischer Methoden. Tagungsband 1992. Hildesheim: Franzbecker, 1993, S. 8—9.

— [1996]: Begriffs-Bilden und Kalkulieren vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. In: Hischer (Hrsg.): Rechenfertigkeit und Begriffsbildung. Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Tagungsband 1995. Hildesheim: Franzbecker 1996, S. 8—19. Siehe auch: http://www.horst.hischer.de/publikationen/buch-beitraege/1996-AKMUI/Hischer-AKMUI-1995-Begriffsbildung.pdf

— [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim: Franzbecker (3., durchgesehene, korrigierte und aktualisierte Auflage 2005).

— [2012a]: Grundlegende Begriffe der Mathematik – Entstehung und Entwicklung. Struktur, Funktion, Zahl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

— [2012b]: Medienbildung versus Computereinsatz? In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 93/2012,

[13] Vgl. die Zeitübersicht zu den 1980er Jahren.

23–28. Siehe auch: http://didaktik-der-mathematik.de/pdf/gdm-mitteilungen-93.pdf
— [2013]: Mathematikunterricht und Medienbildung. In: [Pirner et al. 2013, 339–362].
Pinkernell, Guido & Greefrath, Gilbert [2011]: Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **64**(2011)2, 109–113.
Pirner, Manfred L. & Pfeiffer, Wolfgang & Uphues, Rainer (Hrsg.) [2013]: Medienbildung in schulischen Kontexten. Erziehungswissenschaftliche und fachdidaktische Perspektiven. München: kopaed.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de

Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium

Gregor Nickel

Auch wenn der Titel dieses Aufsatzes[1] auf Friedrich Nietzsches bekannte, zweite unzeitgemäße Betrachtung (vgl. [16, pp. 209]) anspielt, möchte ich einer sinngemäßen Übertragung seiner Diagnose, das Leben der Zeitgenossen leide an einem *Übermaß* an historischem Sinn, gerade nicht zustimmen. Bei der derzeitigen Situation im schulischen Mathematikunterricht wie auch im mathematischen Lehramtsstudium kann sicherlich kaum von einem solchen Übermaß die Rede sein – im Gegenteil: Mathematik wird in aller Regel fast vollständig ahistorisch vermittelt. Dies liegt vermutlich nicht zuletzt an dem merkwürdig überzeitlichen Charakter des Fachs selbst. Wenn es den Anschein hat, als seien alle (historisch kontingenten) Hervorbringungen der Mathematik eigentlich nur (bessere oder schlechtere) Abbilder Ewiger Formen, einer *mathematica perennis*[2], so spielen die vergangenen Gestalten und die historische Entwicklung keine Rolle; sie werden u. U. sogar als störend empfunden. In der Tat gelingt es der Mathematik offenbar wie kaum einer anderen Wissenschaft kumulativ voranzuschreiten. Ältere Erkenntnisse werden in eine aktuelle sprachliche und formale Darstellung transformiert, dabei in der Regel vereinfacht, z. T. sogar trivialisiert, während die konkrete historische Gestalt und der präformale Kontext einschließlich Motivationen und intendierter Anwendungen vergessen werden (dürfen). In diesem Sinne scheint Nietzsches Überzeugung, es sei „ganz und gar unmöglich, ohne Vergessen überhaupt zu *leben*“ ([16, p. 213]), in der Mathematik nicht nur mit Bezug auf das radikale Ausblenden störender, konkreter Details beim jeweiligen Abstraktionsprozess (vgl. hierzu [3, pp. 41]), sondern eben auch in Bezug auf die eigene Geschichte zum Programm zu werden. Der *mathematische Gehalt* scheint dabei verlustlos bestehen zu bleiben bzw. in Verallgemeinerungen aufgehoben zu werden. Zudem liegen genügend Schwierigkeiten in der Sache selbst. Die Darstellung historischer Aspekte wirkt dann wie eine zusätzliche Belastung, auf die schon aus Zeitgründen verzichtet wird.

Dass Geschichte und Philosophie einer wissenschaftlichen Disziplin jedoch untrennbar zu ebendieser Disziplin gehören, auch wenn die Reflexions- und Orientierungsdisziplinen methodisch teilweise ganz anders arbeiten, soll hier nur kurz vermerkt, aber nicht weiter vertieft werden. Schon von daher besteht Veranlassung, philosophische und historische Reflexionen als Bestandteile in ein umfassendes Studium des Fachs Mathematik zu integrieren. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns jedoch nur auf einen kleinen Ausschnitt dieser umfassenden Thematik

[1] Der vorliegende Aufsatz ist eine Kurzfassung des Beitrages [15]. Für hilfreiche Kommentare danke ich Andreas Vohns und Gabriele Wickel!

[2] Diese Haltung kommt besonders hübsch in dem Mythos vom „Buch der Beweise“ zum Ausdruck, vgl. das Vorwort in M. Aigner, G. M. Ziegler: Das Buch der Beweise. Springer-Verlag, Berlin 2002.

konzentrieren, nämlich den Bereich der *Hochschulbildung für das Lehramt*. Für die Rolle der Mathematikgeschichte ergeben sich in Bezug auf das Lehramtsstudium natürlich Spezifika gegenüber dem reinen Fachstudium, insofern ein Studium für das Lehramt auf den speziellen Beruf der MathematikpädagogInnen vorbereiten soll; dies gilt insbesondere mit Blick auf die später zu leistenden Aufgaben für die Elementar- und Allgemeinbildung. Unter Elementarbildung kann hier in etwa das verstanden werden, was Hans Werner Heymann unter der Überschrift „Lebensvorbereitung" diskutiert (vgl. [7, pp. 134]). Durchaus im Sinne Nietzsches soll im Folgenden zunächst eine 'lebensdienliche' Funktion der Mathematikgeschichte diskutiert werden; sie wird hierbei also als *hochschuldidaktisches Hilfsmittel* betracht (vgl. 1). Anschließend werden die Gefahren eines ‚Zuviel' bzw. einer falsch verstandenen Integration der Geschichte skizziert: *Mathematikgeschichte als Hindernis* oder als schlechte *Karikatur* (vgl. 2). Im Bereich einer umfassenderen mathematischen Allgemeinbildung geht es – erneut mit Heymann gesprochen – auch um die Rolle der Mathematik für die „Stiftung kultureller Kohärenz", für „Weltorientierung" und „kritischen Vernunftgebrauch" (vgl. [7, pp. 154]); in Bezug auf diese Aspekte wird die Mathematikgeschichte über eine unterstützende Funktion hinaus auch zu einem Lehrgegenstand eigenen Rechts (vgl. 3).

Wenn im Folgenden verschiedene Verwendungsweisen der Mathematikgeschichte voneinander unterschieden werden, so soll dies nicht so verstanden werden, als ließen sich diese säuberlich voneinander trennen und jeweils gesondert aufrufen; sie stellen eine Art von Idealtypen (im Sinne Max Webers) dar. In der konkreten Situation werden in der Regel mehrere Verwendungsweisen gleichzeitig und in jeweils unterschiedlichem Ausmaß zum Tragen kommen.

1 Mathematikgeschichte als (hochschul)didaktisches Hilfsmittel

Eine Integration historischer Elemente kann die Lehre der fachlichen Inhalte in vielfältiger Weise unterstützen. Diese inzwischen nahezu unstrittige Überzeugung soll im Folgenden etwas differenzierter entfaltet werden. Das Augenmerk soll also bewusst auf eine Indienstnahme der Mathematikgeschichte zum Zwecke einer besseren, fachlich angemessenen, ein tiefergehendes Verstehen der mathematischen Inhalte befördernden Lehre gerichtet sein. Eine solche – wohletablierte und akzeptierte – Funktionalisierung für die Zwecke anderer Fächer ist der Mathematik selbst ohnehin nicht fremd, leistet sie doch für sämtliche Natur- und Ingenieurwissenschaften wie auch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften als ‚Grundlagenfach' einen unverzichtbaren ‚*Service*'. Dies entspricht einer der charakteristischen Formen des Verhältnisses innerhalb der universitären Disziplinenvielfalt, indem nämlich eine Disziplin der anderen als ‚Hilfswissenschaft' dient, wobei für die Mathematik sicherlich die Bandbreite der Anwendungsfächer besonders groß ist. Dabei dürfen (und müssen!) zumindest für die Lehre die eigenen wissenschaftlichen Standards weitgehend verleugnet werden, um den jeweiligen Bedürfnissen der Anwendungsfächer Rechnung zu tragen (die Theoreme werden etwa ohne Beweise vorgetragen und lediglich durch Beispiele plausibilisiert). Die Mathematik wird allerdings bei diesem Unternehmen die eigene Wissenschaftlichkeit von ihrer rezeptartigen Anwenderform klar abgrenzen. Analog 'darf' die Mathematikgeschichte – wenn es ihr im Rahmen der Lehre vor allem um ein besseres Verstehen der mathematischen Inhalte geht – historische Standards einigermaßen lax handhaben. Zugleich sollte jedoch die Mathematikgeschichte als Disziplin von ihrer funktionalisierten Gestalt deutlich unterschieden werden. Und überdies darf nicht übersehen werden, dass eine mathematikhistorisch differenzierte Darstellung – zumindest exemplarisch – ein unverzichtbarer Bestandteil des Lehramtsstudiums ist (eine Diskussion dieses Aspektes folgt erst im Abschnitt 3).

Der anekdotische und der tröstende Gebrauch. Der vermutlich häufigste Gebrauch der Mathematikgeschichte ist anekdotisch: Der als allzu trocken empfundene Stoff wird gelegentlich durch kleine Geschichten aus der Geschichte gewürzt. Das Anekdotische lebt vom Kontrast zur ‚normalen' Präsentation: So liegt etwa die Betonung hier auf dem biographisch Persönlichen oder dem originellen Einzelfall, die sonst gar keine Rolle spielen. Typisches Beispiel für eine solche Anekdote ist die ‚Geschichte vom kleinen Gauß', der als Elementarschüler seinen Lehrer durch die genialeinfache Lösung einer mühseligen Fleißaufgabe überrascht.[3] Die populärwissenschaftliche Literatur enthält hier natürlich eine große Zahl von wei-

[3] Daniel Kehlmann gewinnt dieser eigentlich etwas abgestandenen Anekdote auf überraschende Weise eine existentielle Tiefe ab, indem er die Situation des zum fachlichen und pädagogischen Offenbarungseid genötigten Mathematiklehrers ins Zentrum der Betrachtung rückt (vgl. [9, p. 55]).

teren Beispielen. Auch wenn es sich hier sicherlich um eine eher defizitäre Form des Historischen handeln mag, sollte die Möglichkeit einer produktiven Rolle des Anekdotischen nicht allzu gering geachtet werden. Wie bei jeder Aufführung, müssen dazu jedoch die Pointen gekonnt gesetzt werden.

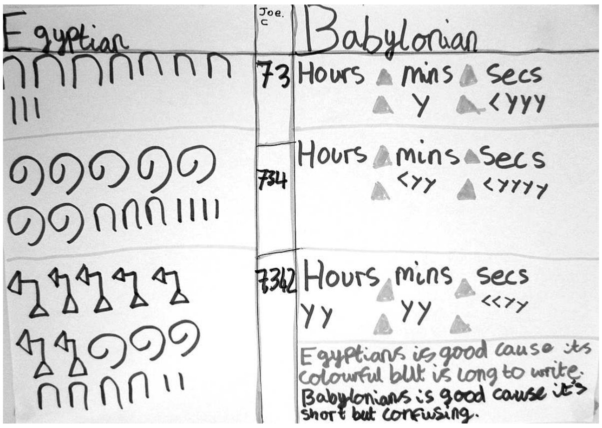
Eine spezielle Variante des anekdotischen Gebrauchs ist der tröstende. Am Beispiel historischer Persönlichkeiten und langjähriger Entwicklungen wird verdeutlicht, dass die beim Studierenden – in aller Regel – auftauchenden, hartnäckigen Verständnisprobleme nicht nur herablassend oder gütig tolerierbar, sondern sogar ‚ganz natürlich' sind. Wenn sogar die größten Mathematiker ihrer Zeit über Jahrzehnte an der Lösung eines Problems haben arbeiten müssen, wenn es Jahrhunderte währender Forschung bedurfte, um zentrale mathematische Begriffe herauszuarbeiten, dann sollte der Studienanfänger nicht daran verzweifeln, dass er sich über Monate damit plagt die vorgelegte Lösung nachzuvollziehen. Als Beispiel sei nur an den mühevollen Weg erinnert, bis das Konzept der komplexen Zahlen volle Akzeptanz gefunden hatte (vgl. [2, pp. 45]).

Der genetische Gebrauch. Einen deutlich höheren Anspruch erhebt der genetische Gebrauch. Dabei stellt der historisch-genetische Zugang nur *eine* Facette eines umfassenderen Konzepts[4] dar, das sich vor allem gegen eine 'deduktivistische' bzw. 'formalistische' Vermittlung der Mathematik wendet. Im Kontrast zu einem Vorgehen, das zu Beginn eines mathematischen Themas eine bereits (seit Ewigkeit her) fertige Axiomatik, bzw. die allgemein(st)e Struktur präsentiert, die allenfalls später konkretere Beispiele abwirft, sollen bei einem genetischen Zugang die abstrakteren Begriffe schrittweise aus den konkreteren entwickelt werden. Von Beispielen und Gegenbeispielen geleitet wird also quasi empirisch das mathematische Terrain erkundet, bis schließlich erst am Ende des (Lern)Prozesses die allgemeinen Begriffe und Theoreme erreicht sind. Ausgehend von einer Analogie von historischer (Phylo)Genese und lernbiographischer (Onto)Genese wird die historische Entwicklung eines mathematischen Begriffs als didaktische Hilfe zum (besseren) Verstehen eingesetzt. In der Tat lässt sich mit guten Gründen der Verlauf der Mathematikgeschichte so lesen, als konzentrierten die mathematischen Begriffe (etwa der Begriff der Stetigkeit) eine lange Erfahrungsgeschichte, in der ein mathematisches *Phänomen* auf den *(axiomatischen) Begriff* gebracht wird.[5] Ohne die genaue Kenntnis etwa von Beispielen und Gegenbeispielen, von verworfenen Alternativen, von intendierten Anwendungen etc. ist ein umfassendes Verstehen eines solchen Begriffs kaum denkbar. Allerdings stellt die Kenntnis der historischen Genese in diesem Sinne ein extrem anspruchsvolles Ziel dar, das deutlich über das Verstehen der resultierenden Begriffe hinausgeht. Hier ist also genau darauf zu achten, ob die Geschichte tatsächlich auf eine unterstützenden Funktion beschränkt bleiben soll, oder aber als Thema eigenen Rechts betrachtet wird (siehe Sektion 3). In diesem Sinne stimme ich den kurzgefassten Thesen Lutz Führers zu, wenn er einerseits feststellt, dass „das historisch-genetische Prinzip [. . .] Beispiele zu denkbaren Erschließungsprozessen" liefert, andererseits jedoch nicht verabsolutiert werden darf, „weil der 'historische Weg' [. . .] sich in all seinen Erkenntnismotiven und Mühseligkeiten nicht ohne Verkürzungen vergegenwärtigen läßt, [. . .] weil es möglicherweise inzwischen leichtere, kürzere, einleuchtendere oder übertragbarere Wege zum jeweils angestrebten Wissen gibt" ([4, p. 53]).

Innerhalb des genetischen Gebrauchs möchte ich zwei Varianten unterscheiden. Ein implizit historisch-genetisches Verfahren baut zwar bei der Organisation der Lehre auf einer Kenntnis historischer Prozesse auf, wird diese jedoch u. U. gar nicht explizit darstellen. So können etwa die Konzepte der mehrdimensionalen Analysis zunächst ausschließlich für den Spezialfall $\mathbb{R}^3$ entwickelt werden, der schließlich über Jahrhunderte hinweg dominierte. Erst später können die 'konkreten' Resultate dann auf den Fall eines beliebigen endlichdimensionalen $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden. Dies wird sicherlich aus einer strukturellen Sicht als unnötig kompliziert erscheinen. Dennoch kann es für den Lernenden erheblich einfacher sein, die neuen analytischen Begriffe zunächst mit einer vertrauten ‚räumlichen Anschauung' zu verbinden, und erst dann, wenn diese eine gewisse Festigkeit gewonnen haben, die Abstraktion des Raumbegriffs zu vollziehen. Ein explizit historisch-genetisches Vorgehen entwickelt schließlich die Inhalte parallel zu einer mehr oder weniger ausführlichen Darstellung ihrer historischen Genese; hier stellt [6] den ausgesprochen lesenswerten Versuch dar, die

4 Eine ausführliche (historische) Studie zu diesem gerade für die Mathematikdidaktik wichtigen Begriff legt G. Schubring in [17] vor.

5 Man vergleiche hierzu die für die Mathematikgeschichte (und -philosophie) bahnbrechenden Arbeiten von Imre Lakatos (1922–1974), etwa [11]. Sicherlich nicht ganz zufällig präsentiert Lakatos seine historische Rekonstruktion des Verfahrens von „Beweisen und Widerlegungen" am Beispiel des Eulerschen Polyedersatzes in einem fiktiven Klassenzimmer.



Ägyptische und Babylonische Zahlzeichensysteme im Schüler(innen)urteil (http://www.gfsmaths.com)

Themen der Analysis entlang ihrer Geschichte zu entfalten.

Der verfremdende Gebrauch. Ein spezifisch auf das spätere Berufsfeld Schule bezogener Gebrauch des Historischen ist verfremdend. Gerade beim Lehramt für den Primarbereich liegt der eigene schulische Lernprozess zeitlich weit zurück, und somit entfällt sehr oft eine lebhafte Erinnerung an eigene Schwierigkeiten – beispielsweise beim Erlernen der elementaren Arithmetik. Hier kann der historische Kontext die elementare Mathematik soweit verfremden, dass Studierende erneut die Erfahrung eigenen Lernens machen können bzw. müssen. Auch öffnet der Blick auf historisch realisierte Alternativen die Augen dafür, dass es keineswegs selbstverständlich und einfach ist, dass ‚man' so notiert und rechnet, wie es heute üblich ist. Zudem kann der Wert einer (für den jeweiligen Zweck) gut geeigneten Notation überhaupt erst gewürdigt werden, wenn Erfahrungen mit Alternativen gemacht werden. Zwei Beispiele mögen dies illustrieren.

Von elementarer Bedeutung für jede Kultur sind sicherlich das System und die Notation der Zahlen. Hier sind das additive Dezimalsystem Ägyptens und das sexagesimale Stellenwert-System Babylons (und eher aus Gründen der historischen Orientierung auch das Römische System) Lehrinhalte, die sicherlich zum Kanon eines jeden Lehramtsstudiums für den Primarbereich zählen sollten.[6] Die häufig gewählte axiomatische Einführung der reellen Zahlen verdeckt leicht die enormen Schwierigkeiten, die in einer formalen Operationalisierung des Kontinuums liegen. Aber auch ein technisch aufwendigerer, konstruktiverer Zugang – etwa über Äquivalenzklassen rationaler Cauchyfolgen – wird den tatsächlichen systematischen Problemen nicht gerecht. So könnte eine Präsentation des klassisch griechischen Umgangs mit dem Phänomen der Inkommensurabilität – ahistorisch gesprochen: die antike Theorie irrationaler Zahlen (besser Größenverhältnisse) – zumindest einen Eindruck der grundlegenden Schwierigkeiten vermitteln (vgl. [1, pp. 61]).

Der exemplarische Gebrauch. Schließlich erlaubt ein exemplarischer Umgang mit der Mathematikgeschichte eine ‚Erfahrung Mathematik' im – zwar nicht aktuellen, aber doch authentischen – Forschungskontext. Gerade für das gymnasiale Lehramt sollten solche Erfahrungen mit ‚echter' Mathematik ermöglicht werden, ohne dass dies auf das schlichte Erleben vollständigen Nichtverstehens hinausläuft. Hierbei ist zu beachten, dass zwar einerseits mit zunehmendem Alter der Quelle die mathematischen Schwierigkeiten tendenziell abnehmen, dass jedoch andererseits die historische Fremdartigkeit (etwa der Sprache, des kulturellen Kontexts, des mathematischen Stils) deutlich zunehmen kann. In der Regel wird man beim exemplarischen Umgang bzgl. der historischen Präzision Abstriche machen müssen, etwa Übersetzungen verwenden, oder sogar Sekundärautoren konsultieren, die die primäre Quelle überhaupt erst erschließen (für eine Vielzahl von Themen in dieser Richtung vgl. [1, pp. 58]).

2 Mathematikgeschichte als Hindernis oder Karikatur

Von Nietzsche sensibilisiert soll nicht verschwiegen werden, dass ein schlichtes Übermaß an Mathematikgeschichte zumindest für das Lehramtsstudium (aber auch für den Schulunterricht) nicht wünschenswert ist, selbst wenn die aktuelle Situation davon noch weit entfernt sein mag. Das Fach Mathematik soll also keinesfalls durch das Fach Mathematikgeschichte ersetzt werden. Allerdings scheint mir derzeit weniger ein schlichtes ‚Zuviel' als vielmehr ein wenig adäquater Gebrauch der Stolperstein zu sein, bei dem sowohl das systematische wie auch das historische Verständnis für Mathematik behindert werden kann. Auch hierzu werden nun einige Idealtypen skizziert.

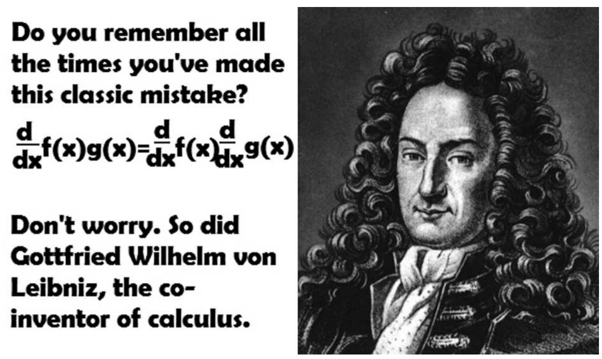
Die antiquarische Karikatur. Eine schon von Nietzsche heftig kritisierte Variante des Historischen, die im wesentlichen ein Übermaß an rein

[6] Eine nützliche Einführung in die historische Entwicklung verschiedener Zahlkonzepte und -darstellungen geben etwa [5], [8], [18].

positivistischer Historie bedeutet, ist sein antiquarischer Gebrauch. Hier sammelt und hortet der unreflektierte und unkontrollierte historische Sinn längst verstaubte Kuriositäten, schließt sich mit diesen in einem Museum ein und schließt gleichzeitig die Anfragen und Bedürfnisse der Gegenwart aus. Übertragen auf unser Thema würde dies heißen, dass die Arbeit am mathematischen Inhalt durch die rein referierende Präsentation der Werke historischer Autoren ersetzt wird. So würde etwa eine Lehrveranstaltung über (elementare) Arithmetik in einer Sammlung von Rechenmeistern des 14. und 15. Jahrhunderts aufgehen. Im antiquarischen Umgang gehen allerdings sowohl der mathematische als auch der historische Gehalt unter bzw. werden beide unterkomplex vermittelt.

Die monumentalische und die joviale Karikatur. Zwei hinderliche Varianten des Anekdotischen sollen an dieser Stelle benannt werden. Zum einen können die historischen Bemerkungen als rein monumentalische Präsentation der großen Heroen der Mathematikgeschichte erfolgen. Mathematik wäre dann gemacht von geistig unerreichbaren Giganten, in deren Schlagschatten an eigene Produktivität gar nicht zu denken wäre, ja nicht einmal eine sinnvolle Antwort auf die Frage „Wie kommt man darauf?“ wäre zu erwarten.

Die Kehrseite der monumentalischen (und ein Zerrbild der tröstenden) Variante ist der joviale Umgang mit der Geschichte; was wusste der große *XY* schon von dem, was ‘wir heute wissen‘. Dabei wird zugunsten der propagierten Fortschrittsideologie von allem historischen Kontext abstrahiert. *XY* ‚wollte‘ also nichts anderes, als die Begriffe und Theoreme zu entdecken, als deren Vorläufer wir heute seine Resultate ansehen. Selbst wenn dieser Bezug auf die Mathematikgeschichte dem systematischen Ziel neutral gegenüber stehen mag, so vermittelt er doch in aller Regel ein völlig unzutreffendes Bild der historischen Situation.



Motivational Leibniz (http://math-fail.com)

Geschichte als Verstehenshindernis. Nicht zu unterschätzen sind auch die mit einem unkontrollierten bzw. allzu genauen historisch-genetischen Gebrauch verbundenen Probleme. Die Komplexität der Mathematikgeschichte, zu der ja ganz wesentlich auch Irrwege und Umwege (aus heutiger Sicht!) zählen, kann – gerade für Studierende, die sich noch keinen festen Stand in Bezug auf mathematische Konzepte erarbeitet haben und damit auch keinen beweglichen Umgang mit diesen – durchaus verwirrend wirken. Insofern kann das Genetische nicht selten die deduktive Form, die das Resultat eines langen historischen Prozesses sein mag, geradezu konterkarieren. Die Funktionalisierung der Mathematikgeschichte geht somit leicht in die – durchaus legitime! – Präsentation eines Lehrgegenstands eigenen Rechts über, der im Kontrast zum Fachinhalt nochmals einen ganz eigenen Reiz, aber auch eigene Schwierigkeiten bietet.

3 Mathematikgeschichte als Lehrinhalt eigenen Rechts

Es ist kaum zu bestreiten, dass Geschichte (im Sinne der Geschichtsschreibung) im allgemeinen wie auch die Geschichte der Mathematik im speziellen eine zentrale Orientierungsleistung unserer Kultur darstellt. Nur ein Denken in geschichtlichen Zusammenhängen ermöglicht ein Kontingenz-Bewusstsein, das Bestehendes als Resultat zwar nicht zufälliger, aber durchaus kontingenter Entscheidungen zu bestimmen und damit zu beurteilen, zu rechtfertigen, aber auch zu kritisieren vermag. Geschichte wird daher quasi automatisch zum Pflichtinhalt eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts und zumindest mittelbar auch eines jeden Lehramtsstudiums. Dabei spielt die Mathematik jedoch nicht nur für die *Wissenschafts*geschichte eine zentrale Rolle, sondern gerade auch für die *Sozial-* und *Kultur*geschichte. Dieser letztere Aspekt wird viel zu häufig kaum wahrgenommen bzw. dramatisch unterschätzt.[7] Moderne Gesellschaften werden jedoch durch Mathematik – indirekt via Technik, aber auch direkt durch mathematisch kodifizierte soziale Regeln (etwa demokratischer Wahlsysteme, der Sozialversicherungs- und Rentensysteme, der Unterstützung oder gar Determination von Entscheidungen durch Statistiken) – in extremer Weise geprägt. Diese Prägung und deren historische Genese gilt es wenigstens exemplarisch bzw. in Bezug auf einzelne Aspekte in den Blick zu nehmen.

[7] Vgl. hierzu [13], [14].

Proof (http://xkcd.com/1153, Copyright CC BY-NC 2.5)

Mathematik als Element der Kulturgeschichte. Ein kulturhistorisch orientierter Zugang zur Mathematik müsste also die – durchaus auch ambivalente – Rolle der Mathematik für die Kulturgeschichte der Menschheit präsentieren und diskutieren. Dies kann sicherlich nicht umfassend gelingen, ein an einzelnen Beispielen geschultes Grundverständnis stellt aber eine essentielle Anforderung für die Bildung zur (gesellschaftlichen) Urteilsfähigkeit dar. Zudem liefert ein historischer Zugang wesentliche Aspekte für eine Antwort auf die normative Frage nach Inhalten und Umfang des mathematischen Kanons für die allgemeinbildende Schule, die sich keineswegs nur aus dem allgemeinen Anwendungsbezug und der speziellen Wissenschaftspropädeutik beantworten lässt. Im Folgenden werden drei Themen skizziert, die in exemplarischer Weise Bezüge zwischen Mathematik- und Kulturgeschichte repräsentieren.

Eine für die Mathematik- wie auch die allgemeine Kulturgeschichte entscheidende Weichenstellung findet um das 5. Jahrhundert vor Christus im Antiken Griechenland statt; erstmals werden hier allgemeingültige Sätze formuliert und bewiesen. In der Mathematik werden Aussagen von absoluter Genauigkeit über besondere Gegenstände formuliert, jenseits aller Möglichkeit einer empirischen Überprüfung. Zugleich mit einer Emanzipation der Philosophie von Mythos und Religion macht sich die Mathematik von Anwendungszwecken frei, wird zu einer ‚reinen' Wissenschaft. Neben den Anfängen dieser Denkbewegung (etwa bei Thales und Pythagoras) sollte die für Jahrhunderte Vorbild gebende axiomatisch-deduktive Gestalt bei Euklid, aber auch – als komplementäre Figur – der sich an einzelnen Problemen abarbeitende, unbekümmert Mathematik und Mechanik mischende Archimedes dargestellt werden.

Mit den Namen Galileo Galilei und Isaac Newton verbindet sich zurecht der Wandel zur (wissenschaftlich-technischen) Moderne; Mathematik wird seitdem als konstitutive Theoriesprache einer jeden Naturwissenschaft angesehen. Zur mathematischen Grundbildung gehört sicherlich ein Einblick in den doppelten Paradigmenwechsel von der ptolemäischen zur kopernikanischen Kosmologie und von der aristotelischen zur modernen Physik.[8]

Georg Cantor kann mit Recht als Begründer der ‚modernen Mathematik' (vgl. [12]) bezeichnet werden. Mit seiner transfiniten Mengenlehre beginnt ein dramatischer Themen- und Stilwechsel in der Mathematik, ebenso prägend wie die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Die Genese des von Beginn des mathematischen Fachstudiums an verwendeten Grundkonzepts sollte auf jeden Fall diskutiert werden. Ein historisch genauerer Blick zeigt dabei, dass die noch häufig als ‚naiv' (ab)qualifizierte Konzeption Cantors gerade begrifflich alles andere als naiv ist. Gegenüber dem formalistischen Zugang eines ‚leeren', rein axiomatischen Mengenbegriffs liefert seine (auch anschauliche) Begriffsbildung und deren argumentative Verteidigung ein viel reichhaltigeres Feld der intellektuellen Auseinandersetzung und zeigt, dass Motivation und Rechtfertigung für mathematische Forschung durchaus metaphysischer Art sein können (vgl. [1, pp. 83]).

Mathematikgeschichte und historische Urteilsfähigkeit. Schließlich präsentiert ein kritischer Zugang die Geschichte der Mathematik als einen Lehrgegenstand eigenen Rechts; er zeigt, dass und inwiefern Mathematikgeschichte ganz anders verläuft als die kanonisch gelehrte, formalisierte Version der mathematischen Themen unter Umständen erwarten ließe. Hier wird mit der Unterscheidung von Genese und resultierender Gestalt die enorme Leistung der axiomatisch-deduktiven

[8] Alexandre Koyré diskutiert hierbei besonders die sich auf Platon berufende neue Argumentation für eine zentrale Rolle der Mathematik in der Naturbeschreibung, vgl. [10]; zum Phänomen einer umfassenden Mathematisierung der Wissenschaften vgl. [13].

Kondensation überhaupt erst erkennbar. Zudem kann die innermathematische Frage nach Motivation und Heuristik nicht ohne eine historische Einbettung angemessen thematisiert werden. Die einigermaßen adäquate Präsentation eines mathematikhistorischen Themas kann sicherlich nicht nebenbei in einer kurzen Bemerkung erfolgen, sondern benötigt Zeit und Aufmerksamkeit sowie ein solides Vorwissen der entsprechenden mathematischen Zusammenhänge. Sie ist in diesem Falle auch eher nicht als didaktisches Hilfsmittel zu verwenden, sondern stellt einen äußerst anspruchsvollen Lehrinhalt eigenen Rechts dar.

Als Beispiel sei hier auf den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz und dessen Abgrenzung von der punktweisen Konvergenz hingewiesen; er geht als zentrales Kapitel höherer Analysis sicherlich deutlich über den Schulstoff eines Gymnasiums hinaus; gleichwohl ist der Begriff für ein tieferes Verständnis des Phänomens der Konvergenz und für einen Übergang zu Fragestellungen etwa der Funktionalanalysis oder Integrationstheorie unverzichtbar. Die verwickelte Geschichte der Genese des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz ist ein faszinierendes, zeitlich relativ dichtes Kapitel der Mathematikgeschichte im engeren Sinne, in dem drei analytische Schlüsselbegriffe *Funktion*, *$\epsilon - \delta$-Stetigkeit* und *gleichmäßige Konvergenz* gleichzeitig herausgebildet beziehungsweise präzisiert werden. Die Genese unterscheidet sich grundlegend von der systematischen Architektonik der Begriffe. Sorgfältig vermittelt und gut verstanden eröffnet sie ein tiefes Verständnis sowohl für einen der analytischen Grundbegriffe als auch für mathematische Forschungsprozesse und mathematische Begriffsbildung überhaupt.[9]

Das Studium der Mathematik mit dem Berufsziel des Lehramts an einer allgemeinbildenden Schule muss eine immense Spannbreite an fachlichen und didaktischen Kompetenzen vermitteln. Hierzu kann – wie ich hoffe überzeugend dargestellt zu haben – die Mathematikgeschichte einen wichtigen Beitrag leisten. Je nach Anspruch muss dazu auf Seiten des Dozenten eine mehr oder minder professionelle mathematikhistorische Bildung vorausgesetzt werden. Ich möchte allerdings gerade auch mathematikhistorische Laien ausdrücklich dazu ermutigen, historische Elemente in Fach- und Fachdidaktikveranstaltungen zu integrieren; zumal wenn dies in erster Linie um einer besseren Vermittlung der Fachinhalte willen erfolgt. Da eine solche Integration passend zum jeweiligen mathematischen Thema *und* zum historischen Bildungshintergrund des Dozenten gewählt werden muss, wurde hier bewusst auf direkt verwendbare ‚Lehrstücke' verzichtet.

Zugleich soll jedoch auch daran erinnert werden, dass ohne eine wissenschaftlich professionelle Mathematikgeschichte die im dritten Abschnitt skizzierten Bildungsaufgaben, aber auch die Aufbereitung des historischen Materials für deren unterstützende Aufgaben, gar nicht zu leisten sind. So mag die unzeitgemäße Erinnerung an die variationsreiche, lebensdienliche Funktion des Historischen für die mathematische Bildung zugleich auch als fachpolitisches Plädoyer verstanden werden.

Literatur

[1] Albrecht Beutelspacher, Rainer Danckwerts, Gregor Nickel, Susanne Spies, and Gabriele Wickel. *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Vieweg+Teubner, 2011.

[2] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, Max Koecher, Klaus Mainzer, Jürgen Neukirch, Alexander Prestel, and Reinhold Remmert. *Zahlen*. Springer, 1983.

[3] Roland Fischer. *Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik*. Profil, 2006.

[4] Lutz Führer. *Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen.* Vieweg, 1997.

[5] Helmuth Gericke. *Mathematik in Antike und Orient*. Springer, 1984.

[6] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Analysis in historischer Entwicklung*. Springer, 2010.

[7] Hans Werner Heymann. *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz, 1996.

[8] Georges Ifrah. *Universalgeschichte der Zahlen*. Campus, 1986.

[9] Daniel Kehlmann. *Die Vermessung der Welt.* Rowohlt, 2005.

[10] Alexandre Koyré. *Galilei. Die Anfänge der neuzeitlichen Wissenschaft.* Wagenbach, 1988.

[11] Imre Lakatos. *Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen.* Vieweg, 1979.

[12] Herbert Mehrtens. *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Surkamp, 1990.

[13] Gregor Nickel. Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften – Ethische Erwägungen. In J. Berendes, Hg., *Autonomie durch Verantwortung. Impulse für die Ethik in den Wissenschaften.*, 319–346. Mentis, 2007.

[14] Gregor Nickel. Mathematik – die (un)heimliche Macht des Unverstandenen. In M. Rathgeb, M. Helmerich, K. Lengnink, and G. Nickel, Hg., *Mathematik Verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven.*, 47–58. Vieweg + Teubner, 2011.

[15] Gregor Nickel. Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns, and G. Wickel, Hg., *Mathematik verständlich unterrichten – Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*, 253–266. Springer Spektrum, 2013.

[9] Eine Skizze dieser Genese ist in [1, pp. 74] zu finden und natürlich bei Imre Lakatos, [11, pp. 119].

[16] Friedrich Nietzsche. *Werke. Band I (Hrsg. R. Schlechta).* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1997.
[17] Gert Schubring. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik.* Klett-Cotta, 1978.
[18] Hans Wussing. *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise.* Springer, 2009.

Gregor Nickel, Universität Siegen, Emmy-Noether-Campus, Walter-Flex-Str. 3, 57068 Siegen, Email: nickel@mathematik.uni-siegen.de

Grading mathematics education research journals

Günter Törner and Ferdinando Arzarello

Presentation of the project and initial motives[1]

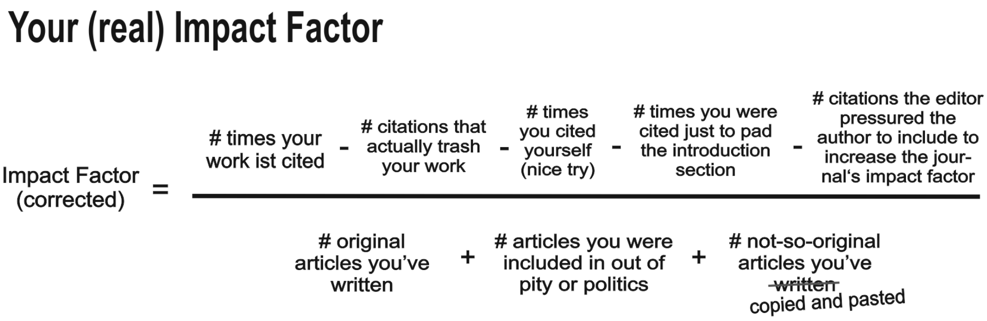
Nowadays, all researchers are aware of the increasing importance accorded to the ranking and grading of scientific journals; it is now difficult to escape their influence. The systems that currently exist are often based on crude statistical analyses that have little to do with scientific quality (see e.g. Arnold & Fowler 2011). For these reasons, the Education Committee of the European Mathematical Society (EMS), together with the Executive Committee of the European Society for Research in Mathematics Education (ERME), and supported by the International Commission for Mathematical Instruction (ICMI), decided in 2011 to organize a consultation in order to propose a grading of research journals in mathematics education based on expert judgment. A similar project has already been carried out for Chemical education and Science education journals (Towns & Kraft, 2011).

The approach adopted was to initiate a process which will need further elaboration and regular updating. For this reason, amongst many possible choices of method, we always opted for what appeared to be the most straightforward. We present below our methods and the results obtained.

Organization of grading by experts

A working group, bringing together members of the ERME board, and members of EMS educational committee, was formed to take charge of the whole process. We (the members of this group) first prepared a long list comprising 49 journals. We graded the journals, and compared our grades with the European Reference Index for the Humanities 2011 lists (https://www2.esf.org/asp/ERIH/Foreword/search.asp; all the mathematics education research journals mentioned as interna-

[1] Zuerst veröffentlicht in: Newsletter oft the European Mathematical Society, Issue 86 (2012), pp. 52–54, http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2012-12-86.pdf . Wiederabdruck mit Genehmigung der Autoren.



Jorge Cham: Piled Higher and Deeper (www.phdcomics.com) tional on the ERIH list have been kept). This led us to retain a short list of 28 journals.

At the same time we constituted a panel of 91 experts in the field, representing the 42 countries members of EMS and/or of ERME. Each country was represented by a number of experts ranging from 1 to 7, according to the size of the mathematics education research community in this country.

These experts were contacted, and asked to grade the journals, using the scale presented below. They were also invited to formulate any comments they wished to make on the process, and to suggest other journal titles, if they considered that important journals were missing from the list.

Criteria

The experts were invited to grade the journals on a four-point scale: A*, A, B or C, or to declare that they did not know the journal and code it with an X. The scale was defined according to four dimensions, characterizing each rank: recognition; review process and quality standards; editors and editorial board; citations. For example, the ranks A and B are described as:

A

- *Recognition:* The journal is recognised amongst researchers around the world as a strong one in the field of mathematics education.
- *Review process and quality standards:* Through a systematic process of peer review the journal maintains high standards with a view to publishing research that displays the intellectual rigour, originality and significance that will be recognised as making a valuable contribution to the field.
- *Editor(s) and editorial board:* The editor(s) and the members of the editorial board of the journal are themselves highly regarded researchers, many already recognised as international leaders in the field of mathematics education.
- *Citations:* The journal is regularly cited in other journals, and many high quality research publications in mathematics education make some reference to work published in it.

B

- *Recognition:* The journal is recognised by researchers around the world as an estimable one in the field of mathematics education.
- *Review process and quality standards:* Through a process of peer review the journal sets standards of rigour, originality and significance that command international respect within the field.
- *Editor(s) and editorial board:* The editor(s) and the members of the editorial board of the journal are themselves well regarded researchers in the field of mathematics education.

Answers and statistical choices

We received answers from 75 experts, representing 32 countries. In some answers, certain responses were missing; we replaced these by "X". A few experts proposed letters such as "D"; we replaced these with "C".
We decided to:

- Confirm a grade A* for all the journals rated A* by 50 experts or more (at least two thirds of the experts)
- Confirm a grade A (, B, C) to all the journals rated A (, B, C) or better by 50 experts or more (at least two thirds of the experts)
- Withdraw from the list all the journals that have more than 25 codes X (more than a third of the experts declare that they do not know the journal).

Some experts proposed additional titles. Nevertheless, no title was proposed by more than 8 experts; we decided thus not to add titles to the list.

Results

Following these principles, 2 journals received a grade A*; 5 journals, a grade A; 5 journals, a grade B; 5 journals, a grade C. 11 journals were removed from the initial list of 28, because more than 25 experts declared that they did not know these journals.

The following table presents the final results of the grading process.

Grade	Title
A*	Educational Studies in Mathematics Journal for Research in Mathematics Education
A	For the Learning of Mathematics Journal of Mathematical Behavior (The) Journal of Mathematics Teacher Education Mathematical Thinking and Learning ZDM: The International Journal on Mathematics Education
B	International Journal of Mathematical Education in Science and Technology International Journal of Science and Mathematics Education Mathematics Education Research Journal Recherches en Didactique des Mathématiques Research in Mathematics Education
C	Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education Journal für Mathematik-Didaktik Nordisk matematikkdidaktikk / Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD Technology, Knowledge and Learning (formerly: International Journal of Computers for Mathematical Learning) The Montana Math Enthusiast

Grading Mathematics Education Research Journals – eine Initiative des Committee of Education der European Mathematical Society (EMS) und der European Society for Research in Mathematics Education (ERME)

Publikation ist nicht gleich Publikation, doch damit fängt das Problem bekanntlich an: *Wie vergleichen wir das wissenschaftliche Gewicht von Publikationen?* Für Mathematiker/innen ist es eine Selbstverständlichkeit, dass Ordnungen sich nicht nur linear realisieren lassen, das mag gut klingen, doch lassen sich daraus Konsequenzen ziehen? Wir fürchten nein, ‚Skalen' sind gefragt.

Hinlänglich bekannt ist, dass nicht wenige Wissenschaftsbereiche bei der Bewertung den Impact Faktor[a] einer Zeitschrift heranziehen. Näheres über die Berechnungsmodalitäten findet man bei wikipedia. Es ist bekannt, dass die Objektivität dieses Maßes vielfach in Zweifel gezogen wurde, ja, dass diese Parameter manipuliert werden können. Was nicht gut ist, muss man besser machen, so könnte man meinen, und daher beschäftigt sich seit 2010 eine Arbeitsgruppe[b] der International Mathematical Union (IMU) und der ICIAM mit der Frage eines (für mathematische (!)) Zeitschriften besseren Rankings als der Impact-Faktor (vgl. den ersten Report (2011)[c]. Mittlerweile stellt sich heraus, dass die Aufgabe erheblich komplexer als angenommen ist, und dass jede Bewertung durchaus auch wissenschaftspolitische Konsequenzen haben könnte; insofern steht man auch vor einer Entscheidung, ob in der Community genug Konsens für diese Maßnahme vorhanden ist. Mit anderen Worten: Von Seiten unserer Nachbarwissenschaft können wir bis auf weiteres keine ‚Hilfe' erwarten.

An das Committee of Education[d] der European Mathematical Society (EMS) sind vor rund anderthalb Jahre Bitten von Mathematikdidaktiker/innen aus Belgien und Italien herangetragen worden, sie in ihrer Arbeit beim Herausstellen von wissenschaftlichen Publikationen zu helfen. Sehr oft sind unsere Kolleg/innen in erziehungswissenschaftlichen Fakultäten angesiedelt; ihre Forschungspublikationen werden vor dem Hintergrund des Social Sciences Citation Index (SSCI) bewertet, der ganze drei mathematikdidaktische Zeitschriften enthält. Auch die ERIH Initial List: Pedagogical and Educational Research (2007) der European Science Foundation definiert ein Ranking; letzter enthält 7 mathematikdidaktische Zeitschriften in einer B-Kategorie und 2 in einer C-Kategorie, mit anderen Worten: Keiner Zeitschrift wird Status A zugesprochen.

Die Erfahrungen im Bereich der Mathematik zeigen, dass wir uns verheben würden, wären wir bemüht, das Problem gründlich und umfassend anzugehen. Letztlich bleibt jede Bewertung subjektiv und geht nicht selten von – oft nicht offengelegten – Voraussetzungen aus. Insofern hatte unser EMS-Committee of Education in Absprache mit der ERME beschlossen, wie weiter unten näher beschrieben, sich des Problems anzunehmen.

Soviel sollte man uns zugute halten: Es ist ein erster Versuch, sich mit dieser Frage auseinanderzusetzen und – wie die Diskussion auf der CERME im Februar 2013 deutlich gemacht hat – ein Update in 1–2 Jahren mit einer größeren ‚Expert/innenzahl' und unter Berücksichtigung von mehr Zeitschriften, z. B. auch aus dem statistischen Bereich scheint angeraten. Der erforderliche Arbeitsaufwand ist allerdings nicht trivial. Ferner liegt es an dem/der einzelnen Wissenschaftler/in, inwieweit er/sie diese Ranking-Liste einsetzen will. Möglicherweise lässt sich ein/e (nicht mathematikdidaktisch affine/r) Dekan/in überzeugen, dass die Publikationsergebnisse einer Person in unserer Community aufgrund des Publikationsortes hohe Wertschätzung genießen; es mag aber auch Fälle geben, in welchem auch unser Ranking nicht weiter hilft.

Günter Törner

a. http://de.wikipedia.org/wiki/Impact_Factor#Kritik b. http://www.mathunion.org/fileadmin/CEIC/bestpractice/bpfinal.pdf c. http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Report/WG_JRP_Report_01.pdf d. http://www.euro-math-soc.eu/comm-education2.html

Limitations of the grading process and need for further studies

Naturally, this process has a number of limitations. We note, here, some that we discussed during our work, and which were also expressed by some experts in their comments.

- A grading produced by European experts risks being Europe-centered.
- Only journals overtly focused on mathematics education have been included. Journals about education at large are also very important for the researcher in the field, and are not mentioned in the list.
- The list contains mainly journals written in English.
- Journals about more specific topics, such as statistics education in particular, are unknown to many experts, but may be of high scientific quality.

All these remarks correspond to real limitations of our study. They evidence the need for further studies: ICMI could decide a similar grading at a world-wide level; equally, more local initiatives could better recognize journals in languages other than English, or with specific foci. The scientific quality of journals is always evolving anyway; a change in the reviewing process, for example, can lead to an improvement of a journal. Thus any grading should keep the possibility of updating and evolution; the grading proposed here is presented as our best attempt at assessing the current situation.

References

Arnold, D. N., & Fowler, K.K. (2011). Nefarious numbers. *Notices of the AMS* 58 (3), 434–437.

Towns, M.H., & Kraft, A. (2011). The 2010 Rankings of Chemical Education and Science Education Journals by Faculty Engaged in Chemical Education Research. *Journal of Chemical Education*, 2012, 89 (1), 16–20

Günter Törner, Universität Duisburg-Essen. Fakultät Mathematik, 47048 Duisburg, Email: guenter.toerner@uni-due.de

Ferdinando Arzarello, Dipartimento di Matematica, Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino, Italy, Email: ferdinando.arzarello@unito.it

Die Schülerinnen und Schüler können ...

Ein nicht ganz ernst gemeinter Beitrag zur Optimierung von (Mathematik-)Lehrplänen

Beat Jaggi

Heutige Lehrpläne sind kompetenzorientiert. Fast jeder Satz beginnt mit „Die Schülerinnen und Schüler können...“. Damit unsere Schülerinnen und Schüler auch in Zukunft vieles können und bei der nächsten PISA-Studie gut abschneiden, gilt es, einerseits möglichst viele solcher Kompetenzen oder ‚Candos‘ (von „can do“) aufzulisten. Anderseits sollte ein Lehrplan aber auch nicht die Seitenzahl einer Enzyklopädie erreichen. Diese beiden sich im Kern widersprechenden Anforderungen machen deutlich, dass es sich eigentlich um ein Optimierungsproblem handelt; und da hat die Mathematik doch einige Lösungsansätze anzubieten.

Zunächst ist festzuhalten, dass es gerade in der Mathematik im Prinzip einfach ist, mit wenigen Worten unendlich viele Candos zu formulieren. Betrachten wir zwei (frei erfundene) Beispiele:

Beispiel 1. Die Schülerinnen und Schüler können für jede natürliche Zahl n die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *berechnen.*

Da die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist, sind mit obigem Satz auch unendlich viele Candos formuliert.

Bemerkung: Es käme hier natürlich noch darauf an, in welcher Zeit und mit welchen Mitteln die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe lösen können. Der Legende nach hat der berühmte Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1707–1777) die Antwort für $n = 100$ schon als Grundschüler in wenigen Minuten gefunden:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Das ist natürlich besser als wenn man selbst bei Verwendung eines Supercomputers Tage braucht, um die Antwort zu finden.

Beispiel 2. „Die Schülerinnen und Schüler können jede reelle Zahl ins Quadrat setzen.“

Da die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist, sind im Beispiel 2 mit lediglich 11 Wörtern im Prinzip überabzählbar viele Candos formuliert.

Im Folgenden wollen wir uns auf endliche Mengen von Anforderungen beschränken und unser Hauptaugenmerk auf ein Prinzip richten, das in (Entwürfen von) Lehrplänen und Bildungsstandards ansatzweise schon umgesetzt ist. Die Beispiele stammen alle aus dem Fachbereich Mathematik, das Prinzip aber lässt sich auf andere Fächer übertragen.

Beispiel 3. „Die Schülerinnen und Schüler können Formeln zur Berechnung des Oberflächeninhalts und des Volumens von Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel verstehen und einsetzen.“
(Quelle: [1], Klasse 10, Leitidee Messen)

Beispiel 4. „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken, Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Kugeln, Würfel ordnen und beschreiben.“
(Quelle: [2])

Zum Beispiel 4 seien an dieser Stelle zwei Bemerkungen resp. Fragen erlaubt:

1. Eines der Candos lautet: „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken beschreiben.“ Wie könnte eine solche Beschreibung lauten? „Eine Strecke ist länglich und eher schmal.“ Es soll hier daran erinnert werden, dass schon ganz andere Leute daran gescheitert sind. So hat Euklid etwa 300 Jahre vor unserer Zeitrechnung in seinem Werk „Die Elemente“ [3] versucht, geometrische Objekte zu beschreiben:
   „Was keine Teile hat, ist ein Punkt.“
   „Eine Länge ohne Breite ist eine Linie.“
   „Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.“
   Heute (genauer nach der Entdeckung nichteuklidischer Geometrien in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts) wissen wir, dass solche Definitionen zu großen Schwierigkeiten führen. Die moderne Mathematik beschränkt sich deshalb oft darauf, Eigenschaften von Objekten anzugeben, ohne die Objekte selber zu beschreiben.
2. Ein weiteres Cando ist: „Die Schülerinnen und Schüler können Kreise ordnen.“ Auch hier sei die Frage erlaubt, was erwartet wird. Ordnen von Kreisen nach der Größe, nach der Farbe?

Vergleichen wir nun die Beispiele 3 und 4 und führen dazu die sogenannte Produktregel-Schreibweise ein:

Beispiel 3.

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können Formeln zur Berechnung des}$$
$$\left\{\begin{matrix}\textit{Oberflächeninhaltes}\\ \textit{Volumens}\end{matrix}\right\}\textit{von}\left\{\begin{matrix}\textit{Pyramide}\\ \textit{Zylinder}\\ \textit{Kegel}\\ \textit{Kugel}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\textit{verstehen}\\ \textit{einsetzen}\end{matrix}\right\}.$$

Beispiel 4.

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können}\left\{\begin{matrix}\textit{Strecken}\\ \textit{Kreise}\\ \textit{Dreiecke}\\ \textit{Quadrate}\\ \textit{Rechtecke}\\ \textit{Kugeln}\\ \textit{Würfel}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\textit{ordnen}\\ \textit{beschreiben}\end{matrix}\right\}.$$

Im Beispiel 3 sind mit 18 Wörtern $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ Candos formuliert. Im Beispiel 4 stehen sieben Substantiven (Strecken, Kreise, Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Kugeln, Würfel) nur zwei Verben (ordnen, beschreiben) gegenüber, was $7 \cdot 2 = 14$ Candos ergibt. Diese Asymmetrie ist nicht optimal. Schon das Ersetzen zweier Substantive durch zwei Verben erhöhte die Anzahl auf $5 \cdot 4 = 20$ Candos. Ersetzt man dann noch weitere zwei Substantive und ein Verb durch drei Adverben, dann kann die Anzahl der formulierten Candos auf 27 erhöht, also fast verdoppelt werden!

Diese Erhöhung der Candos könnte zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können}\left\{\begin{matrix}\textit{Strecken}\\ \textit{Kreise}\\ \textit{Dreiecke}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\textit{ohne nachzudenken}\\ \textit{ohne Luft zu holen}\\ \textit{schon am frühen Morgen}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\textit{ordnen}\\ \textit{beschreiben}\\ \textit{zeichnen}\end{matrix}\right\}.$$

Als Satz würde dies wie folgt lauten: „Die Schülerinnen und Schüler können Strecken, Kreise und Dreiecke ohne nachzudenken, ohne Luft zu holen und schon am frühen Morgen ordnen, beschreiben und zeichnen.“
Wir wenden uns nun der Frage zu, wie mit dem oben beschriebenen „Produktregel-Prinzip“ eine möglichst grosse Zahl von Candos formuliert werden kann. Dazu erinnern wir uns an eine sehr schöne und bekannte Mathematikaufgabe (siehe zum Beispiel [4], Seite 90).

Zerlege eine natürliche Zahl derart in natürliche Summanden, dass das Produkt der Summanden möglichst gross ist.

Beispiel: Zwei Zerlegungen der Zahl 99 sind:

$$99 = 33 + 33 + 33 \longrightarrow 33 \cdot 33 \cdot 33 = 35937$$
$$99 = 11 + 11 + 11 + 22 + 22 + 22$$
$$\longrightarrow 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 22 \cdot 22 = 14'172'488$$

Für welche Zerlegung von 99 in eine Summe wird das Produkt all der Summanden maximal?

Die Antwort lautet (siehe [4]):

$$99 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{33 \text{ Summanden}}$$

Das größtmögliche Produkt ist dann

$$3^{33} \approx 5.559 \cdot 10^{15}$$

also rund 5.6 Billiarden!

Bemerkungen:

1. Ist n ein Vielfaches von 3, so liefert stets $n = 3 + 3 + \cdots + 3$ die optimale Zerlegung.
   Ist die Zahl n kein Vielfaches von 3, dann sieht die optimale Zerlegung in eine Summe etwas anders aus:
   Für $n = 3k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $n = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{k-1 \text{ Summanden}} + 2 + 2$ optimal.
   Für $n = 3k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist $n = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{k \text{ Summanden}} + 2$ optimal.
2. Lässt man als Summanden auch Brüche zu, kann die Aufgabe mit Differentialrechnung gelöst werden: Man überzeugt sich zuerst, dass alle Summanden gleich groß sein müssen (das liegt eigentlich an den binomischen Formeln) und sucht dann das Maximum der (reellen) Funktion
   $$f(x) = \left(\frac{n}{x}\right)^x.$$
   Das lokale Maximum von f wird bei $x = \frac{n}{e}$ angenommen und beträgt $e^{\frac{n}{e}}$. Dabei ist $e \approx 2.718$ die berühmte Eulersche Zahl.
   Für $n = 99$ ist $\frac{99}{e} \approx 36.42$. Die Zahl n muss also entweder in 36 oder 37 gleich große Summanden zerlegt werden. Eine Vergleich zeigt: Das maximale Produkt wird mit der Zerlegung
   $$99 = \underbrace{\frac{99}{36} + \frac{99}{36} + \cdots + \frac{99}{36}}_{36 \text{ Summenden}} \text{ erzielt}$$
   und beträgt $\left(\frac{99}{36}\right)^{36} \approx 6.546 \cdot 10^{15}$.
   Das ist doch noch um fast 18% grösser als 3^{33} (siehe oben).
3. Die Eulersche Zahl $e \approx 2.718$ liegt relativ nahe bei 3. Das erklärt noch einmal, weshalb man im ‚natürlichen Fall‘ 3 als Summanden nehmen muss.

Vorläufiges Fazit: Es gilt, beim Formulieren der Candos möglichst viele Blöcke mit je genau 3 Begriffen einzubauen!

Beispiel:

$$\textit{Die Schülerinnen und Schüler können} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Modelle} \\ \textit{Texte} \\ \textit{Situationen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textit{sinnvoll} \\ \textit{zielgerichtet} \\ \textit{angemessen} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \textit{interpretieren} \\ \textit{verarbeiten} \\ \textit{strukturieren} \end{array} \right\}.$$

Der entsprechende Satz lautet dann: „Die Schülerinnen und Schüler können Modelle, Texte und Situationen sinnvoll, zielgerichtet und angemessen interpretieren, verarbeiten und strukturieren.“ Einzeln ausgeschrieben lauten diese Candos nun so:

1. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll interpretieren.
2. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll verarbeiten.
3. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle sinnvoll strukturieren.
4. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet interpretieren.
5. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet verarbeiten.
6. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle zielgerichtet strukturieren.
7. Die Schülerinnen und Schüler können Mo-

delle angemessen interpretieren.
8. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle angemessen verarbeiten.
9. Die Schülerinnen und Schüler können Modelle angemessen strukturieren.
10. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll interpretieren.
11. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll verarbeiten.
12. Die Schülerinnen und Schüler können Texte sinnvoll strukturieren.
13. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet interpretieren.
14. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet verarbeiten.
15. Die Schülerinnen und Schüler können Texte zielgerichtet strukturieren.
16. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen interpretieren.
17. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen verarbeiten.
18. Die Schülerinnen und Schüler können Texte angemessen strukturieren.
19. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll interpretieren.
20. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll verarbeiten.
21. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen sinnvoll strukturieren.
22. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet interpretieren.
23. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet verarbeiten.
24. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen zielgerichtet strukturieren.
25. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen interpretieren.
26. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen verarbeiten.
27. Die Schülerinnen und Schüler können Situationen angemessen strukturieren.

Wir haben mit 16 Wörtern tatsächlich $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Anforderungen formuliert! (Der Übersicht wegen haben wir noch drei Bindewörter eingefügt, die aber gut auch weggelassen werden können.)

Das oben beschriebene Produkteregel-Prinzip ist in bestehenden Lehrplänen oder Entwürfen ansatzweise schon relativ gut umgesetzt, wie folgende Beispiele zeigen: „Die Schülerinnen und Schüler können lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum in Termen, Zahlenfolgen und Graphen erkennen und Unterschiede beschreiben.“ (Quelle: [2])

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{lineares}\\ \textit{quadratisches}\\ \textit{exponentielles}\end{array}\right\}\textit{Wachstum}\left\{\begin{array}{c}\textit{in Termen}\\ \textit{in Zahlenfolgen}\\ \textit{in Graphen}\end{array}\right\}\textit{erkennen und Unterschiede beschreiben.}$$

Mit 19 Wörtern sind doch schon $3 \cdot 3 = 9$ Anforderungen beschrieben. Nicht schlecht! Mit weiteren Verben oder noch anderen Wortarten (z. B. beschreiben, interpretieren, ...) könnte man diese Anzahl aber noch beträchtlich steigern.

Beispiel:

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{lineares}\\ \textit{quadratisches}\\ \textit{exponentielles}\end{array}\right\}\textit{Wachstum}\left\{\begin{array}{c}\textit{in Termen}\\ \textit{in Zahlenfolgen}\\ \textit{in Graphen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{in kuzer Zeit}\\ \textit{zielgerichtet}\\ \textit{konsequent}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{erkennen}\\ \textit{verarbeiten}\\ \textit{interpretieren}\end{array}\right\}.$$

Als Satz: „Die Schülerinnen und Schüler können lineares, quadratisches und exponentielles Wachstum in Termen, Zahlenfolgen und Graphen in kurzer Zeit, zielgerichtet und konsequent erkennen, verarbeiten und interpretieren.“ Das ergeben nun sogar $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Anforderungen.

Jetzt gehen langsam die Wortarten aus. Wir versuchen es trotzdem:

Die Schülerinnen und Schüler können

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Zahlen}\\ \textit{Variablen}\\ \textit{Funktionen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{selbstbewusst}\\ \textit{ohne zu zögern}\\ \textit{mit vollem Magen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{schriftlich}\\ \textit{mündlich}\\ \textit{mit dem TR}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{sinnvoll}\\ \textit{zielgerichtet}\\ \textit{angemessen}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\textit{untersuchen}\\ \textit{interpretieren}\\ \textit{strukturieren}\end{array}\right\}.$$

Wieder als ein Satz formuliert, lautet dies nun: „Die Schüler können Zahlen, Variablen und Funktionen selbstbewusst, ohne zu zögern und mit vollem Magen schriftlich, mündlich und mit dem Taschenrechner sinnvoll, zielgerichtet und angemessen untersuchen, interpretieren und strukturieren.“ Dieser Satz alleine enthält $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ Candos! Mehr geht nicht!

Fazit

Bei konsequenter Anwendung des Produktregel-Prinzips müssten bestehende Lehrpläne eigentlich auf einem Bruchteil der bis jetzt beanspruchten Seitenzahl Platz haben. Die grosse Herausforderung besteht darin, die Candos alle in Blöcken von je drei Begriffen anzuordnen.

Literatur

[1] Bildungsstandards für Mathematik, Realschule, Klassen 8, 9, 10, Baden-Württemberg.
[2] Entwurf zum Schweizerischen Lehrplan 21 für die Volksschule, April 2012.
[3] Euklid, *Die Elemente*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Verlag Harri, Deutsch, 2003.
[4] Peter Gallin, *101 Mathematikaufgaben*, sabe, 1997.

Beat Jaggi, Heideweg 24, 2503 Biel, Schweiz, Email: Beat.Jaggi@phbern.ch

Einblick in ein „Eintypsekundarstufenlehramt“

Berufsbezogene Präferenzen der ersten beiden Kohorten des Lehramts für Gymnasien und Oberschulen am Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Bremen

Angelika Bikner-Ahsbahs

1 Ausgangslage

Im Wintersemester 2011/2012 hat die Universität Bremen ihre Lehramtsstruktur umgestellt. Aus dem Lehramt für Sekundarschule (Klasse 5 bis 10) und dem Lehramt für Gymnasien und Gesamtschulen wurde ein Lehramt für Gymnasien und Oberschulen. Die Absolventinnen und Absolventen dieses Lehramts sollen nun im späteren Lehrerberuf in den Klasse 5 bis 13 sowohl fachlich tief bis zum Abitur eingesetzt werden können als auch angemessen in stark heterogenen Klassen inklusiven Oberschulunterrichts der Klasse 5 bis 10 bestehen können. Letzteres wird von Universitätsseite dadurch unterstützt, dass Studierende in den Schlüsselqualifikationen einen Ausbildungsstrang zum Umgang mit Heterogenität absolvieren.

Für die Mathematikausbildung ergab sich durch diese Zusammenlegung eine besondere Herausforderung für die Fach- und Fachdidaktikausbildung. Das Sekundarschulenlehramt erhielt zuvor eine gesonderte professionsbezogene Fachausbildung, wohingegen das gymnasiale Lehramt zahlreiche Veranstaltungen zusammen mit dem Vollfach belegte. Da die Fachinhalte für das gymnasiale Lehramt durch die Fachanforderungen der KMK festgelegt sind, wurde das neue Lehramt Mathematik gymnasial ausgerichtet mit einem differenzierenden fachdidaktischen Angebot. Um einer Erhöhung der Dropoutquote im gymnasialen Lehramt vorzubeugen, die gerade durch zahlreiche Maßnahmen auf etwas über 40 % im ersten Studienjahr gesenkt werden konnte, wurden drei Maßnahmen ergriffen:

1. Durch eine Vertiefungsveranstaltung zur Linearen Algebra 1 nur für das Lehramt wurden konsequent Schulbezüge von Beginn an in das Studium aufgenommen. Entsprechendes ist für die Analysis 1 vorgesehen.
2. Ein Mitglied des Lehrköpers am Fachbereich ist für die Belange des Lehramts zuständig, liest selbst fachbezogene Lehrveranstaltungen für das Lehramt und bietet auch Tutorien in Linearer Algebra und Analysis an.
3. Lineare Algebra 2 und aktuell auch Analysis 2 werden getrennt vom Vollfach nur für das Lehramt angeboten.

2 Motivation für die Erhebung berufsbezogener Präferenzen

Oft fordern Studierende des Lehramts Berufsbezüge in der Lehre ein, z. B. indem sie die Frage stellen, wozu sie diese Form der Mathematik überhaupt im späteren Beruf beherrschen müssen. Fragen dieser Art zur Mathematik werden zum Teil in den Vertiefungsveranstaltungen zur linearen Algebra und zur Analysis geklärt. Ähnliche Fragen betreffen aber auch die mathematikdidaktischen Veranstaltungen ab dem dritten Semester, wenn es beispielsweise um Aufgabenbespiele für unterschiedliche Schul- und Leistungsstufen geht oder wenn es um die Entwicklung von Kompetenzen zur Diagnose und Förderung von Lernschwierigkeiten bei Risikoschülerinnen und-schüler einerseits und mathematisch interessierten und begabten Schülerinnen und Schüler andererseits geht. Um Berufsbezüge studierendengerecht herstellen zu können, ist es wichtig zu wissen, mit welchen berufsbezogenen Präferenzen die Studierenden ins Studium kommen und wie diese sich weiter entwickeln. Wie viele Studierende möchten z. B. am liebsten in einer Oberstufe unterrichten? Wie viele in der Mittelstufe? Sind die Studierenden vielleicht sogar offen für jegliche Form von Schulmathematik – gleichgültig in welcher Schulform oder -stufe? Wie groß ist der vergleichbare Anteil Studierender mit Präferenz für das ehemalige Sekundarschulenlehramt? Gibt es Präferenzen, die im ersten Studienjahr ausselektiert werden? Um Fragen dieser Art beantworten zu können, wurden die berufsbezogenen Präferenzen zu Beginn des Studiums in der zweiten Kohorte der neuen Lehramtsstruktur erhoben. Die Ergebnisse waren so interessant, dass wir die gleiche Erhebung auch für die erste Kohorte durchführten, die sich nun bereits im vierten Semester befand.

Als berufsbezogene Präferenz wird die *aktuelle Vorliebe für einen späteren Arbeitsbereich als Mathematiklehrkraft in der Schule* aufgefasst. Das heißt, dass nicht unbedingt davon ausgegangen wird, dass diese Präferenzen über das Studium hinweg oder darüber hinaus stabil bleiben. Denkbar wäre z. B., dass nach den schulpraktischen Erfahrungen im fünften Bachelor-Semester und im zweiten Mastersemester Veränderungen auftreten. Auch können Veranstaltungen im Ausbildungsgang zum Umgang mit heterogenen Gruppen die Ausprägung berufsbezogener Präferenzen beeinflussen.

3 Methodische Überlegungen

Die vorliegende Erhebung ist rein deskriptiver Natur. Sie kennzeichnet einen Ist-Zustand, ohne nach Gründen oder Erklärungen zu fragen. Die Population besteht aus Studierenden des Studiengangs „Mathematik für das Lehramt an Gymnasien und Oberschulen“ an der Universität Bremen:

Studienanfänger
65 Studierende des o.g. Studiengangs nahmen zu Beginn ihres Studiums an der Erhebung teil (1. Fachsemester, 2. Vorlesungswoche, Erhebung im Oktober 2012, zweite Kohorte)
Fortgeschrittene 49 Studierende des o.g. Studiengangs im 4. Fachsemester (2. Vorlesungswoche, Erhebung im April 2013, erste Kohorte) nahmen an der Erhebung teil.

Die Items (Tabelle 1) sind als Vorlieben für eine spätere Berufstätigkeit als Mathematiklehrkraft in einem bestimmten Schulumfeld mit einer sechsstufigen Likertskala formuliert. Sie orientieren sich an Schularten und Schulstufen. Da Oberschulen bei den Studierenden nicht unbedingt eine bekannte Schulform darstellen, wurde zur Bezeichnung Oberschule die Bezeichnung Gesamtschule hinzugefügt, auch wenn mit der Bezeichnung Oberschule in Bremen ein spezielles Schulkonzept verbunden ist, das nicht genauso für eine Gesamtschule zutreffen muss.

Um Anteile mit vorausgegangenen Kohorten vergleichen zu können, wurde in Kohorte 2 ergänzend die folgende Frage mit den Antwortmöglichkeiten ja und nein gestellt:

> *Nehmen Sie an, es wäre in Bremen möglich gewesen, ein Lehramt für das Fach Mathematik nur für die Klassenstufen 5 bis 10 zu studieren. Hätten Sie sich dafür entschieden?*

4 Auswertung

Vor der Auswertung wurde eine Typisierung vorgenommen, die die zu erwartenden Präferenzen bündelt. Dabei wurden zunächst je zwei Berufsbereiche zu Bereichspräferenzen zusammengefasst

Tabelle 1. Items zur berufsbezogenen Präferenz

	Stellen Sie sich bitte vor, dass Sie Ihr Studium erfolgreich abgeschlossen haben. Wie stehen Sie zu folgenden Aussagen? Bitte machen Sie in jeder Zeile *ein* Kreuz!	Stärke des Zutreffens							
		Trifft überhaupt nicht zu	0	1	2	3	4	5	Trifft voll und ganz zu
a)	Ich würde Mathematik gern am Gymnasium in den Klassenstufen 10 bis 12 unterrichten.		○	○	○	○	○	○	
b)	Ich würde Mathematik gern am Gymnasium in den Klassenstufen 5 bis 9 unterrichten.		○	○	○	○	○	○	
c)	Ich würde Mathematik gern an einer Oberschule oder Gesamtschule in den Klassenstufen 10 bis 12 unterrichten.		○	○	○	○	○	○	
d)	Ich würde Mathematik gern an einer Oberschule oder Gesamtschule in den Klassenstufen 5 bis 10 unterrichten.		○	○	○	○	○	○	

Tabelle 2. Typenbildung zu Bereichspräferenzen

Gymnasiallehrkraft
Sie gibt den Items a) und b) höhere Scores als den Items c) und d), d. h. $\min\{a), b)\} > \max\{c), d)\}$.

Oberstufenlehrkraft
Sie gibt den Items a) und c) höhere Scores als den Items b) und d), d. h. $\min\{a), c)\} > \max\{b), d)\}$.

Unter- und Mittelstufenlehrkraft
Sie gibt den Items b) und d) höhere Scores als den Items a) und c), d. h. $\min\{b), d)\} > \max\{a), c)\}$.

Oberschullehrkraft
Sie gibt den Items c) und d) höhere Scores als den Items a) und b), d. h. $\min\{c), d)\} > \max\{a), b)\}$.

Tabelle 3. Typenbildung zu Punktpräferenzen

Lehrkraft für die gymnasiale Oberstufe
Sie gibt dem Item a) einen höheren Score als den Items b), c) und d), d. h. $a) > \max\{b), c), d)\}$.

Lehrkraft für die gymnasiale Mittelstufe
Sie gibt dem Item b) einen höheren Score als den Items a), c) und d), d. h. $b) > \max\{a), c), d)\}$.

Lehrkraft für die Oberschule Oberstufe
Sie gibt dem Item c) einen höheren Score als den Items a), b) und d), d. h. $c) > \max\{a), b), d)\}$.

Lehrkraft für die Oberschule Mittelstufe
Sie gibt dem Item d) einen höheren Score als den Items a), b) und c), d. h. $d) > \max\{a), b), c)\}$.

Tabelle 4. Weitere Typenbildung

Mathematiklehrkraft, die überall unterrichten will
Sie gibt allen Items denselben (hohen) Score, d. h. $a) = b) = c) = d)$

Mathematiklehrkraft, die in der Oberschule Mittelstufe nicht so gern unterrichten will
Sie gibt den Items a), b), c) einen höheren Score als Item d), also $\min\{a), b), c)\} < d)$

und derart sprachlich gedeutet, dass man später beruflich als Gymnasiallehrkraft tätig sein möchte oder als Oberstufenlehrkraft, als Unter- und Mittelstufenlehrkraft oder als Oberschullehrkraft.

Die Bildung der Typen berufsbezogener Präferenzen erfolgte wie in Tabelle 2 gezeigt. Die sich ergebende Restkategorie kann zweierlei Züge aufweisen: Sie kann klare definierte Einzelpräferenzen aufweisen oder größere Bereiche umfassen.

Klar definierte Einzelpräferenzen werden als Punktpräferenzen bezeichnet und sind wie in Tabelle 3 gezeigt festgelegt. Wer auch in dieses Kategoriensystem noch nicht eingeordnet werden konnte, wurde gesondert untersucht. Dabei entstanden zwei neue Kategorien (Tabelle 4).

4.1 *Ergebnisse*

Das Antwortverhalten wurde gemäß der obigen Festlungen für Studienanfänger und Fortgeschrittene auch in der angegebenen Reihenfolge vorgenommen. Die so gewonnenen Typen sind paarweise disjunkt. Die relativen Häufigkeiten, mit denen sie in den jeweiligen Populationen vorkamen, sind in den Tabellen 5, 6, 7 und 8 dargestellt.

Studienanfänger

Zunächst einmal ist festzustellen, dass etwa ein Drittel der Studierenden das alte Sekundarschullehramt als Studium gewählt hätte. Das entspricht etwa den Zahlenverhältnissen, die wir aus den vorausgegangenen Studierendenkohorten kennen. Auffällig ist ferner, dass es bei den Studienanfängern nur Studierende gibt, deren höchste Präferenz bei mindestens 4 liegt. Das heißt, dass alle Studienanfänger dieser Kohorte Mathematik unterrichten wollen und nicht etwa noch zögerlich sind, was man bei Werten wie 3 oder 2 denken könnte. Die berufsbezogenen Präferenzen differenzieren sich dann aber in sehr viele unterschiedliche Ausprägungen aus. Wir können also aus der

Tabelle 5. Ergebnisse zur Befragung der Kohorte 2 der Studienanfänger

Anfänger		Bereichskategorien				
Gruppe von Studierenden	Typ/ (Profil)	Gymnasial-lehrkraft (+, +, −, −)	Oberstufen-lehrkraft (+, −, +, −)	Unter- und Mittelstufen-lehrkraft (−, +, −, +)	Oberschul-lehrkraft (−, −, +, +)	Nicht kategorisiert
alle	65 100,0%	22 33,8%	20 30,8%	6 9,2%	2 3,1%	15 23,1 %
männl. Studierende	21 100,0%	7 33,3%	8 38,1%	0 0,0%	0 0,0%	6 28,6 %
weibl. Studierende	44 100,0%	15 34,1%	12 27,3%	6 13,6%	2 4,5%	9 20,5 %
Studiengang nur für 5 bis 10? Ja.	23 100,0%	4 17,4%	5 21,7%	6 26,1%	2 8,7%	6 26,1 %
Studieng. nur für 5 bis 10? Nein.	41 100,0%	17 41,5%	15 36,6%	0 0,0%	0 0,0%	9 22,0 %

Tabelle 6. Aufschlüsselung der Ergebnisse aus der nichtkategorisierten Bereichskategorie

Anfänger	Punktkategorien				Zusätzliche Kategorien	
Gruppe von Studierenden	Lehrkraft für die gymnasiale Oberstufe (+, −, −, −)	Lehrkraft für die gymnasiale Mittelstufe (−, +, −, −)	Lehrkraft für die Oberschule Oberstufe (−, −, +, −)	Lehrkraft für die Oberschule Mittelstufe (−, −, −, +)	Lehrkraft, die alles unterrichten will (+, +, +, +)	Lehrkraft, die Oberschule Mittelstufe nicht so gern unterrichten will (+, +, +, −)
alle	4 6,2%	3 4,6%	4 6,2%	0 0,0%	2 3,1%	0 0 %
männl. Studierende	3 14,3%	0 0,0%	2 9,5%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%
weibl. Studierende	1 2,3%	3 6,8%	2 4,5%	0 0,0%	2 4,5%	0 0,0%
Studiengang nur für 5 bis 10? Ja.	0 0,0%	3 13,0%	2 8,7%	0 0,0%	0 0,0%	0 0,0%
Studiengang nur für 5 bis 10? Nein.	4 9,8%	0 0,0%	2 4,9%	0 0,0%	2 4,9%	0 0,0%

Sicht der berufsbezogenen Präferenzen nicht von einem einheitlichen Bild sprechen. Etwa ein Drittel der Studierenden möchte Mathematik als Gymnasiallehrkraft unterrichten, das zweite Drittel ist eher fachlich auf Oberstufenunterricht ausgerichtet. Mit einem relativ geringen Anteil von ca. 9 % liegen Präferenzen für die Unter- und Mittelstufe vor und mit ca. 3 % Präferenzen für die Oberschule. Die Präferenzen für Unter- und Mittelstufe und für Oberschule werden nur von denjenigen benannt, die sich für den alten Studiengang mit Schwerpunkt Sekundarschule entschieden hätten, und das sind alles Frauen. Eine derart klare Genderausrichtung gibt es bei den anderen beiden Präferenzen nicht.

23 % sind hier nicht einzuordnen. Diese verteilen sich in etwa zu gleichen Teilen mit je zwei bis vier Studierenden auf die Punktpräferenzen gymnasiale Oberstufe, gymnasiale Mittelstufe und Oberschule Oberstufe und auf Alles-unterrichten. Eine Präferenz für die Oberschule Mittelstufe kam nicht vor. Nur zwei Studierende insgesamt wollen Mathematiklehrkraft werden, gleichgültig in welchem Bereich.

Fortgeschrittene

In dieser ersten Kohorte des neuen Lehramts gibt es nur zwei etwas unsichere Studierende, deren höchste Bewertung bei 3 lag. Alle andere geben mindestens 4 als höchsten Wert an. Auch hier lie-

Tabelle 7. Ergebnisse zur Befragung der Kohorte 1 der Fortgeschrittenen

Fortgeschrittene		Bereichskategorien				
Gruppe von Studierenden	Typ/ (Profil)	Gymnasial-lehrkraft (+, +, −, −)	Oberstufen-lehrkraft (+, −, +, −)	Unter- und Mittelstufen-lehrkraft (−, +, −, +)	Oberschul-lehrkraft (−, −, +, +)	Nicht kategorisiert
alle	49	12	13	5	1	18
	100,0%	24,5%	26,5%	10,2%	2,0%	36,7 %
männl. Studierende	15	3	5	1	1	5
	100,0%	20,0%	33,3%	6,7%	6,7%	33,3 %
weibl. Studierende	23	6	4	3	0	10
	100,0%	26,1%	17,4%	13,0%	0,0%	43,5 %

Tabelle 8. Aufschlüsselung der Ergebnisse aus der nichtkategorisierten Bereichskategorie

Fortgeschrittene	Punktkategorien				Zusätzliche Kategorien	
Gruppe von Studierenden	Lehrkraft für die gymnasiale Oberstufe (+, −, −, −)	Lehrkraft für die gymnasiale Mittelstufe (−, +, −, −)	Lehrkraft für die Oberschule Oberstufe (−, −, +, −)	Lehrkraft für die Oberschule Mittelstufe (−, −, −, +)	Lehrkraft die alles unterrichten will (+, +, +, +)	Lehrkraft, die Oberschule Mittelstufe nicht so gern unterrichten will (+, +, +, −)
alle	8	3	1	0	3	3
	16,3%	6,1%	2,0%	0,0%	16,1 %	16,1 %
männl. Studierende	2	0	1	0	0	2
	13,3%	0,0%	6,7%	0,0%	0,0 %	13,3 %
weibl. Studierende	4	2	0	0	3	1
	17,4%	8,7%	0,0%	0,0%	13,0 %	4,3 %

gen also klare Präferenzen vor, Mathematiklehrkraft zu werden.

Darüber hinaus finden sich die Ausprägungen der Anfängerkohorte auch bei den Fortgeschrittenen wieder, nur schärfer ausgeprägt.

Zu je ungefähr 25 % verteilen sich die Präferenzen auf die Lehrkraft an Gymnasien bzw. an Oberstufen. Präferenzen für Unter- und Mittelstufe bzw. Oberschule sind mit 10 % bzw. 2 % ähnlich ausgeprägt wie in der Studienanfängerkohorte. Allerdings können fast 37 % der Studierenden den vier Bereichspräferenzen nicht zugeordnet werden. Ein genauerer Blick in diese Gruppe zeigt spezifischere Präferenzausprägungen. Die meisten (ca. 16 %) wollen in der gymnasialen Oberstufe unterrichten. Dann wollen zu gleichen Teilen, das sind jeweils 3 mit ca. 6 %, vorzugsweise in der gymnasialen Unter- und Mittelstufe unterrichten, überall gern unterrichten oder genau in der Mittelstufe von Oberschulen *nicht* unterrichten. Es bleibt eine Person mit einer Punktpräferenz für Oberschule Oberstufe.

Vergleicht man die Präferenzen weiblicher und männlicher Studierender insgesamt, dann gibt es keine sehr deutlich ausgeprägten Präferenzunterschiede. Es gibt allenfalls eine leichte Tendenz: Etwas mehr weibliche als männliche Studierende würden gern Mathematik in Unter- und Mittelstufen unterrichten.

5 Nachdenklicher Rückblick

Auch wenn wir über Gründe für diese berufsbezogenen Präferenzen nichts aussagen können und nicht wissen, wie sich die Präferenzen der Studierenden weiter entwickeln und von den schulpraktischen Studien möglicherweise beeinflusst werden, deuten sich vor allem fünf Ergebnisse an:

1. Unsere Studierenden wollen später Mathematik unterrichten. Unsicherheiten sind kaum vorhanden. Das ist ein äußerst positiver Befund.
2. Das Spektrum der Präferenzen ist ausgesprochen differenziert und in beiden Kohorten ähn-

lich ausgeprägt. Die Studierenden scheinen doch eine recht klare Berufsorientierung zu haben, selbst wenn man erwarten darf, dass sich einiges noch ändern wird.

3. Es gibt nur wenige Studierende mit übergeordneten berufsbezogenen Präferenzen, die vor allem Mathematik unterrichten wollen, ohne eine spezifische Ausrichtung. Mit 5 von insgesamt 114 Studierenden sind das weniger als 5 %. Allerdings ist der Stichprobenumfang, trotz Vollerhebung, relativ klein.
4. Die Präferenzen für das Gymnasium und für die Oberstufen sind in beiden Kohorten mit jeweils über 80 % am stärksten vertreten.
5. Der Anteil der Präferenzen für den Unter- und Mittelstufenunterricht erscheint bei diesen beiden Kohorten mit ca. 10 % äußerst gering. Eine Präferenz für den Oberschulunterricht ist mit ca. 2–3 % verschwindend gering vertreten, eine Punktpräferenz für die nichtgymnasiale Unter- und Mittelstufe ist in beiden Kohorten kaum vorhanden.

Wie sind diese Befunde abschließend zu bewerten? Derzeit wird auf allen Ebenen – auf politischer Ebene wie auch auf wissenschaftlicher Ebene – um eine Antwort auf die Frage gerungen, wie eigentlich eine fundierte und nachhaltige erste Phase der Mathematiklehrerausbildung aussehen sollte, so dass alle Schülerinnen und Schülern optimal schulisch ausgebildet werden können. Dabei wird das Eintypsekundarschulenlehramt als vielversprechende neue Option angesehen, die vor allem auf die Ausbildung fachlicher Kompetenz setzt, ein Aspekt, der inzwischen insgesamt als zentrale Komponente für eine gute Lehrerausbildung angesehen wird. Die Entfaltung von Kompetenzen im Beruf gestaltet sich dann günstig und nachhaltig fruchtbar, wenn Berufsumwelt, Interessenlage und Expertise zusammenpassen. Nun sind die Kompetenzanforderungen je nach schulischem Bereich äußerst unterschiedlich. Oberstufen bereiten auf ein Studium vor und müssen deshalb wissenschaftspropädeutisch arbeiten. Das erfordert gänzlich andere Lehrerkompetenzen als in Unter- und Mittelstufen von Oberschulen oder Gesamtschulen, die einen hohen Anteil an Risikoschülerinnen und -schüler oder auch Inklusionsschülerinnen und -schüler haben. Für letztere ist eine fundierte Expertise in der Diagnose und Förderung von Lernschwierigkeiten unabdingbar, die eine spezifische fachliche und fachdidaktische Ausbildung benötigt.

Die vorliegende Erhebung versucht berufsbezogene Präferenzen früh im Studium zu erfassen, um zu erschließen, auf welche Berufsumwelten hin Studierende im Eintypsekundarschulenlehramt studieren. Denn davon hängt ab, was, wie und mit welcher Tiefe studiert wird und wie viele Studierende am Ende genügend Expertise für die unterschiedlichen Schulumwelten mitbringen. Die Befunde der vorliegenden Erhebung werfen diesbezüglich die Frage auf, ob im Eintypsekundarschulenlehramt gemessen am Bedarf genügend Absolventinnen und Absolventen mit klarer Präferenz und entsprechender Expertise für das Unterrichten von Mathematik in nichtgymnasialen Unter- und Mittelstufen ausgebildet werden. Die Gemeinsame Kommission von DMV, GDM und MNU weist außerdem in ihrer Resolution auf ein Problem hin, das mit einem Eintypsekundarschulenlehramt unweigerlich verbunden ist. Wenn ein solches Lehramt nachhaltig und fundiert auf den Mathematikunterricht an Gymnasien und Oberstufen ausbildet, gibt es dann noch genügend Spielraum für die Entwicklung fundierter fachlicher und fachdidaktischer Kompetenzen für die Diagnose und Förderung bei Lernschwierigkeiten von z. B. Risikoschülerinnen und -schülern?

Angelika Bikner-Ahsbahs, Universität Bremen, Fachbereich 3, Bibliothekstraße 1, 29359 Bremen, Email: bikner@math.uni-bremen.de

Wider die Nivellierung des gymnasialen und nicht-gymnasialen Sekundarschullehramts

Stellungnahme der Gemeinsamen Kommission der DMV, GDM und MNU zur Lehrerbildung

Die Gemeinsame Kommission Lehrerbildung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. (MNU) begrüßt die aktuellen bildungspolitischen Entwicklungen in der deutschen Lehrerbildungslandschaft, die Studiengänge für alle Schulformen, vom Gymnasium über die nicht-gymnasialen Schulformen bis hin zur Grundschule, zu vollwertigen zehnsemestrigen Studiengängen aufzuwerten. Dies wird einer alten Forderung gerecht, dass alle Schülerinnen und Schüler wissenschaftlich ausgebildete Lehrkräfte auf hohem Ausbildungsniveau brauchen.

Mit großer Sorge betrachtet die Kommission jedoch die Entscheidung des Bundeslandes Bremen und die Diskussionen in Berlin und Baden-Württemberg, die Ausbildung nur noch in zwei Schulstufen zu differenzieren und damit das ehemalige Haupt- und Realschullehramt mit dem Gymnasiallehramt (bzw. das ehemalige Sekundarstufen I Lehramt mit dem Sekundarstufen I/II Lehramt) zu verschmelzen. Als Gründe für eine solche Verschmelzung werden angeführt:

- die flexiblere Einsetzbarkeit der universell ausgebildeten Sekundarschullehrkräfte,
- die bildungspolitische Vision eines einheitlichen Schulsystems für die Sekundarstufe,
- die Notwendigkeit einer höheren fachinhaltlichen Kompetenz als bei den Haupt- und Realschullehrkräfte bislang empirisch festgestellt.

Die Verschmelzung der Studiengänge birgt allerdings die kaum zu vermeidende Gefahr, den spezifischen Anforderungen einer professionellen Expertise für unterschiedliche Schülergruppen in Zukunft nicht gerecht zu werden. Es sind hier zwei Pole innerhalb der sehr heterogenen Schülerschaft zu denken:

- An dem einen Pol bringt der (über mathematische Alltagsbewältigung hinausgehende) wissenschaftspropädeutische Anspruch der gymnasialen Oberstufe die Notwendigkeit mit sich, dass Lehrkräfte sich eigenständig mit der wissenschaftlichen Disziplin und ihren spezifischen Argumentations- und Denkweisen auseinandergesetzt haben müssen, um die Schülerinnen und Schüler auf ein zukünftiges Studium vorzubereiten. Ein solches an der Wissenschaft Mathematik orientiertes fachinhaltliches Profil erfordert eine stärkere fachlich-professionelle Sozialisierung.
- An dem anderen Pol dagegen befinden sich u. a. diejenigen Risikoschülerinnen und -schüler, die nur bei großer didaktischer Expertise der Lehrkräfte einen Schulabschluss und die Berufsfähigkeit erreichen. Die spezifischen Anforderungen dieser Schülergruppe kann nur bedienen, wer ein fundiertes mathematikdidaktisches Wissen über typische Schwierigkeiten und Förderansätze sowie eine tiefgreifende diagnostische Kompetenz erworben hat.

Diese Ausbildungsbedarfe sind selbstredend nicht disjunkt, aber dennoch von sehr unterschiedlicher Priorisierung geprägt. Daher lassen sie sich unter den Rahmenbedingungen eines Zwei-Fach-Studiums mit 70 bis 100 Leistungspunkten für das Fach Mathematik kaum für alle Lehramtsstudierenden des Sekundarstufenlehramts gleichzeitig realisieren, will man eine gefährliche Verflachung der fachinhaltlichen Ausbildung für die gymnasiale Oberstufe einerseits oder eine Vernachlässigung der notwendigen fachdidaktischen Ausbildungsbedarfe für besonders heterogene Schülergruppen andererseits vermeiden. Daher müssen, selbst wenn das gesamte Sekundarstufenlehramt unter *ein* organisatorisches Dach gestellt wird, starke Differenzierungen vorgesehen werden, die nicht nur die Verhältnisse der fachinhaltlichen und fachdidaktischen Ausbildungsanteile, sondern auch ihre thematische Ausrichtung betreffen: Lehrkräfte für die nicht-gymnasiale Schülergruppe brauchen statt Spezialkenntnissen in Analysis und Linearer Algebra mehr fachlich fundiertes Wissen in Arithmetik, Elementarer Algebra und Geometrie.

Differenzierungen für das Sekundarstufenlehramt können entweder nach Schülergruppen oder nach Klassenstufen erfolgen (z. B. Jahrgang 5–10 und Jahrgang 8–13), eine Vereinheitlichung der Lehramtsstudiengänge und damit auch Nivellierung der sich aus den professionellen Anforderungen an die zukünftigen Lehrkräfte ergebenden Differenzierungen in der Ausbildung würden jedoch zu zentralen Qualitätsverlusten im Mathematikunterricht führen und damit in internationalen Vergleichsstudien gerade erreichte positive Signale zunichte machen.

Informationen zum Förderpreis der GDM

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vergibt alle zwei Jahre den Förderpreis der GDM für eine herausragende Dissertation an eine Mathematikdidaktikerin oder einen Mathematikdidaktiker. Die bisherigen Preisträgerinnen und Preisträger der GDM waren:

- 1989 Martin Stein
- 1991 Horst Struve
- 1994 Manfred Borovcnik
- 1996 Reinhard Hölzl
- 1998 Petra Scherer
- 2002 Katja Krüger
- 2004 Stephan Hußmann
- 2006 Andreas Eichler
- 2008 Marei Fetzer und Elke Söbbecke
- 2010 Sebastian Rezat
- 2012 Florian Schacht

Im Herbst 2013 wird die Jury wieder eine herausragende Dissertation auswählen und fordert daher alle Mitglieder der GDM auf, potentielle Kandidatinnen und Kandidaten zu benennen. Dabei ist zu beachten, dass die Verteidigung der Dissertation nicht länger als vier Jahre zurückliegen darf. Vorschläge sollen zusammen mit einer ca. zweiseitigen Begründung und fünf Exemplaren oder Kopien der Arbeit *bis zum 15. August 2013* an die Jury-Vorsitzende eingereicht werden. Es wird gebeten parallel dazu auch eine elektronische Version der Arbeit an die Jury-Vorsitzende zu senden.

Die Entscheidung der Jury wird auf der GDM-Tagung in Koblenz-Landau im März 2014 bekannt gegeben werden.

Die Jury:

- Regina Bruder, Darmstadt
- Tommy Dreyfus, Tel Aviv
- Jens Holger Lorenz, Heidelberg
- Edith Schneider, Klagenfurt (Vorsitz)
- Heinz Steinbring, Essen

Edith Schneider, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich, Email: edith.schneider@uni-klu.ac.at

Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 7. 3. 2013 in Münster

Zeit: 16–19 Uhr
Ort: Universität Münster

Hans-Georg Weigand begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an die in jüngerer Zeit verstorbenen Mitglieder:

- Garnik Tonojan (2010, erst 2012 bekannt geworden),
- Heinz Kunle (2012),
- Wolfgang Kroll (2012),
- Günther Ossimitz (2013).

TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Die in Heft 93 der Mitteilungen veröffentlichte Tagesordnung wird ebenso wie das Protokoll der Mitgliederversammlung vom 08. 3. 2012 in Weingarten ohne Änderungswünsche angenommen.

TOP 2: Bericht des Vorstands

1 *Wahrgenommene Termine im Rahmen der Vorstandstätigkeit (wahrnehmende Personen jeweils in Klammern)*

- 01.04. MNU-Tagung in Freiburg: Treffen der befreundeten Verbände (Andreas Eichler)
- 13.04. Geburtstag Gabriele Kaiser (H.-G. Weigand, S. Ruwisch – eig. Kosten)
- 03./04.05. GFD-MV in Berlin (Th. Jahnke)
- 01.06. Kolloquium Verabschiedung Michèle Artigue in Paris (H.-G. Weigand – eig. Kosten)
- 07.06. Treffen der KMathF in Gießen (R. Greiner)
- 05.07. 120 Jahre Bildungsforschung München – Geburtstag von Kristina Reiss und Manfred Prenzel) (H.-G. Weigand – eig. Kosten)
- 30.07. Vorstandssitzung in Hannover (H.-G. Weigand, S. Ruwisch, Chr. Bescherer, A. Vohns)
- 07.09. Auftaktveranstaltung der KMK zur Implementierung der Bildungsstandards in Hamburg (S. Ruwisch – eig. Kosten)
- 05.10. Vorstands- und Beiratssitzung in Frankfurt (Vorstand und Beirat)
- 14.10. Verabschiedung von R. Danckwerts in Siegen (H.-G. Weigand)
- 20.10. Emeritierung von Willibald Dörfler in Klagenfurt (A. Vohns – keine Kosten)
- 05.–06.11. GFD-Tagung in Berlin (H.-G. Weigand)
- 19.11. 10 Jahre Mathematikum in Gießen (H.-G. Weigand)
- 28.2.–01.03. Tagung „Strukturen, Kulturen und Spielregeln. Faktoren erfolgreicher Berufsverläufe von Frauen und Männern in MINT“ in Berlin (L. Martignon)

2 *Vernetzung in fachdidaktischen Gesellschaften*

GFD (Deutschland): Vorsitzender ist derzeit Martin Rothgangel (Religionspädagoge, Wien). Die GFD-Fachtagung wird in diesem Jahr zum Thema „Lernaufgaben entwickeln, bearbeiten und überprüfen – Ergebnisse und Perspektiven der fachdidaktischen Forschung“ am 06. bis 08.10.2013 in Dortmund stattfinden. Für 2014 ist die Einrichtung einer Online-Zeitschrift „Research in Subject Didactics” geplant, nähere Informationen: http://www.fachdidaktik.org

ÖGFD (Österreich): In Klagenfurt ist im September 2012 die Österreichische Gesellschaft für Fachdidaktik (ÖGFD) gegründet worden. Die GDM ist dieser Gesellschaft als Mitglied beigetreten, sie entsendet Edith Schneider und Susanne Eisner (1./2. Vorsitzende des GDM-AK „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“) als Delegierte, nähere Informationen: http://oegfd.univie.ac.at/

3 *Nachwuchsförderung*

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Münster* geht Dank an Julia Cramer, Imke Knievel, Alexander Meyer, Meike Plath, Christine Plicht, Stefanie Rach, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Florian Schacht und Maike Vollstedt.

Für den am 11./12. Mai 2012 gemeinsam von GDM und GDCP getragenen *Workshop zur Beratung von DFG-Anträgen* (Universität Hannover) geht Dank an die Organisatoren (Sascha Schanze (GDCP), Andreas Eichler (GDM)) und die Expert(inn)en (M. Gläser-Zikuda, C. von Aufschnaiter, R. Sträßer).

Stephanie Schuler berichtet über die *Summerschool 2012* in Freiburg (17.–21.09.). Dank geht an die Organisator(inn)en (Andreas Eichler, Stephanie Schuler, Timo Leuders) und die Expert(inn)en (M. Martens, J.H. Lorenz, D. Leutner, A. Renkl, A. Schulz, A. Wirtz, Ch. Pauli, S. Prediger, E. Moser-Opitz).

Christian Dohrmann berichtet über das *Doktorand(innen)kolloquium 2012* in Wildbad bei Karlsruhe. Dank geht an die Organisatoren (Ulli Kortenkamp, Sebastian Wartha) und die Expert(inn)en (R. Bruder, K. Reiss, A. S. Steinweg, R. vom Hofe).

Franz Picher lädt zur *Summerschool 2013 „Ansätze und Perspektiven mathematikdidaktischer Forschung“* vom 16.–20.09.2013 an den Ossiacher See (Kärnten, Österreich) ein, nähere Informationen: http://gdm-summerschool.aau.at/

Stefan Ufer lädt zum *Doktorand(inn)enkolloquium* vom 26.–28.09.2013 nach München (Kerchensteiner-Kolleg im Deutschen Museum) ein, nähere Informationen: www.ed.math.lmu.de/DK2013

4 *Gemeinsame Kommissionen*

Kommission für Lehrerbildung. Susanne Prediger berichtet: Derzeit betrachtet die Kommission Entwicklungen im Bereich des Sekundarstufenlehramts skeptisch, die ein Aufgehen der Studiengänge für Haupt- und Realschulen im Gymnasiallehramt forcieren. Susanne Prediger arbeitet derzeit ein Positionspapier zu dieser Thematik aus (s. Beitrag „Wider die Nivellierung des gymnasialen und nicht-gymnasialen Sekundarschullehramts“ in diesem Heft). Themen der nächsten Fachtagungen sind „Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung“ (24./25.05.2013, Erfurt, Leitung: Regina Möller) und „Praxissemester – vorgezogener Praxisschock oder Theorieerprobung?“ (29./30.11.2013, Freiburg, Leitung: Timo Leuders, Katja Krüger, Hans-Dieter Sill und Henning Körner). Der Tagungsband zur Fachtagung 2011 („Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung“) ist erschienen.

Kommission „Übergang Schule Hochschule“. Gilbert Greefrath berichtet: Die Kommission hat Stellungnahmen und Empfehlungen zu den Bildungsstandards für die Sekundarstufe II ausgearbeitet (siehe http://www.mathematik-schule-hochschule.de), sie war ferner auf der KHDM-Tagung (20.–23.02.2013) in Paderborn vertreten. Es werden Kontakte zur COSH-Gruppe (Baden-Württemberg, s. http://lehrerfortbildung-bw.de/bs/bsa/bk/bk_mathe/cosh_neu/) gepflegt. Die nächste Fachtagung „Abiturstandards Mathematik konkretisieren“ findet vom 7.-9.10.2013 in Münster statt. Im Beirat ist eine Satzungsänderung beschlossen worden, zudem sind für den Zeitraum von zwei Jahren Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath als GDM-Delegierte, ebenso wie Regina Bruder, Katja Lengnink und Thomas Jahnke als beratende Mitglieder wiedergewählt worden.

5 *Internetangebote der GDM*

Ulli Kortenkamp berichtet über Stand und Entwicklung der Internetangebote der GDM:

- Homepage (http://www.didaktik-der-mathematik.de): Man findet dort nun auch die Protokolle sämtlicher Mitgliederversammlungen seit Gründung der GDM (vom IDM der Universität Klagenfurt auf eigene Kosten digitalisiert).
- Mitglieder-Datenbank (http://mitglieder.didaktik-der-mathematik.de): Aktuelle Daten sind wichtig, da der Versand von MGDM und JMD aus dem Adressbestand erfolgt. Jeder kann (und sollte) seine eigenen Daten dort selbst aktuell halten. Die derzeit noch enthaltenen Lebensläufe werden im Sinne der Datenbereinigung künftig entfallen, sie sollten in Madipedia eingepflegt werden.
- Facebook (http://www.facebook.com/mathematikdidaktik): Ist derzeit keine ernsthaft betriebene Angelegenheit, immerhin 93 Fans, kann auch ohne eigenen Account bei Facebook eingesehen werden.
- Madipedia (http://www.madipedia.de): Derzeit sind 350 Personen, 167 Dissertationen und 50 Enzyklopädieeinträge vorhanden. Der Aufbau wird z. T. vom DZLM unterstützt, es ist aber auch die Mitarbeit der Mitglieder nötig.

6 *Kommende Tagungen*

Die nächsten Jahrestagungen der GDM finden in
2014: Koblenz-Landau 10.–14.03.2014
2015: Basel-Solothurn 09.–13.02.2015
2016: Heidelberg statt.

Aiso Heinze berichtet über die *Jahrestagung der International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 37)*, die in Kiel vom 28.07–02.08.2013 stattfinden wird. Beinahe 700 registrierte Personen (davon ca. 100 aus Deutschland, Österreich und der Schweiz) haben fast 400 Vorträge eingereicht, am 8. 4. wird über die Annahme der Vorträge entschieden worden sein, nähere Informationen unter http://www.pme2013.de

Gabriele Kaiser berichtet über den *International Congress on Mathematical Education (ICME-13)*, der von der GDM als Veranstalter getragen und vom 24.–31.07.2016 in Hamburg stattfinden wird. Die GDM ist damit die erste Fachgesellschaft, die den ICME ein zweites Mal austragen darf. Zur Vorbereitung des ICME-13 ist ein eigener gemeinnütziger Verein als formaler Träger der Tagung gegründet worden. Gabriele Kaiser geht sodann näher auf den Tagungsort, die Tagung wissenschaftlich und organisatorisch begleitende Komitees und die geplante inhaltliche Ausrichtung des ICME-13 als europäisch ausgerichtetem Kongress mit klarem Bezug zu deutschsprachigen Wurzeln ein. Gabriele

Kaiser weist abschließend darauf hin, dass die Planung und Durchführung des ICME-13 ohne die (auch finanzielle) Unterstützung der GDM nicht denkbar ist und bittet die Mitglieder, der im weiteren Verlauf der Tagungsordnung vorgesehenen Beitragserhöhung zuzustimmen. Nähere Informationen zu ICME-13 unter: http://icme13.org/

Rita Borromeo-Ferri berichtet über die *Young European Researchers Summer School in Mathematics Education (YESS-7)*, die vom 4.8.–11.8.2014 in Kassel stattfinden wird.

7 Bericht der Schriftführung
Andreas Vohns berichtet: Mit Stand 26.02.2013 hatte die GDM 1127 Mitglieder, 900 davon aus Deutschland, 53 aus Österreich und 124 aus der Schweiz. 686 Mitglieder waren männlich, 441 weiblich, wobei das Geschlecht nach Altersklassen sehr unterschiedlich verteilt ist (relativ viele jüngere weibliche und relativ viele ältere männliche Mitglieder). Zum 01.01.2012 sind 93 Mitglieder in die GDM eingetreten, zum 01.01.2013 bereits 42. Bislang haben 7 Mitglieder aufgrund der geplanten Beitragserhöhung vorsorglich ihren Austritt erklärt, in 2012 sind insgesamt 28 Mitglieder aus der GDM ausgetreten. Der Schriftführer wird derzeit durch das Sekretariat des IDM in Klagenfurt (auf Kosten des IDM) unterstützt, dadurch waren umfassendere Korrekturen am Mitgliederdatenbestand und die Retrodigitalisierung sämtlicher Protokolle der Mitgliederversammlungen sowie der Beirats- und Vorstandsprotokolle ab 1993 möglich. Der Redaktionsschluss des nächsten Heftes der GDM-Mitteilungen wird der 15.05.2013 sein, die Mitglieder sind zur Beteiligung aufgerufen.

TOP 3: Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

Bericht der Kassenführerin
Christine Bescherer berichtet: Die Rücklagen der GDM, die zwischenzeitlich aufgrund ihrer Höhe einen Verlust der Gemeinnützigkeit hätten nach sich ziehen können, sind mittlerweile vollständig abgebaut worden. Im letzten Geschäftsjahr standen Ausgaben in Höhe von 102.735,55 EUR Einnahmen in Höhe von 61.067,08 EUR gegenüber, der entstandene Differenzbetrag konnte aus Rücklagen gedeckt werden. In 2012 lagen bereits die Kosten für Zeitschriften (53.045,47 EUR), Nachwuchsförderung (16.874,52 EUR) und Kommissionsarbeit (3.256,66 EUR) zusammengenommen über den Jahreseinnahmen. Hinzu kamen Kosten in Höhe von 20.232,50 EUR für die Vorbereitung des ICME-13.

Auf Rückfrage erläutert die Kassenführerin, dass das für die Vorbereitung des ICME-13 ausgegebene Geld als Ausfallbürgschaft verstanden werden muss, d. h. die Mittel fließen nur dann im vollen Umfang an die GDM zurück, wenn der ICME-13 einen entsprechend hohen Überschuss erwirtschaftet, frühestens aber im Jahr 2016.

Bericht des Kassenprüfers
Fritz Hasselbeck berichtet: Die Kasse wurde eingehend geprüft. Gegenstand der Prüfung waren der Anfangsbestand aus dem Jahr 2011, Einnahmen- und Ausgabenbelege mit den dazu gehörigen Rechnungen sowie der Jahresabschluss 2012. Das datumsgemäß geordnete Kassenjournal, die Kontoauszüge der Bank und die Rechnungsbelege stimmen in Termindaten und aufgeführten Euro-Beträgen voll überein. Buchungstexte und Wertstellungen sind im Kassenjournal exakt dokumentiert.

Die Rechnungsbeträge sind im Konto-Korrent vom 01.01.–31.12.2012 sachlich korrekt verbucht. Die Nachweise für Einnahmen und Ausgaben liegen vollständig vor, ebenso belegt ist der Transfer eines aufgelösten Kontos auf das Bestandskonto. Hervorzuheben ist die gewissenhafte Bearbeitung des GDM-Kontos, die saubere Kassenübersicht und die klar strukturierte Anlage des Kontodepots von Frau Bescherer zum Rechnungsjahr 2012.

Fritz Hasselbeck empfiehlt daher der Mitgliederversammlung die Entlastung des Vorstands.

TOP 4: Entlastung des Vorstands

Thomas Jahnke empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei fünf Enthaltungen zugestimmt.

TOP 5: Beitragsfestsetzung

Hans-Georg Weigand begründet noch einmal in freier Rede die Beitragserhöhung, folgt dabei i. W. der Argumentation der in den letzten Mitteilungen abgedruckten Beitragserhöhungsbegründung. Er stellt den unten angegebenen, bereits in Heft 94 der Mitteilungen abgedruckten Vorschlag zur Diskussion.

Peter Bender führt aus, dass er gefühlte zehnmal Beitragserhöhung im Rahmen von Mitgliederversammlungen widersprochen hat. Aufgrund des Berichts der Kassenführerin und des Ersten Vorsitzenden hält er die Beitragserhöhung zum derzeitigen Zeitpunkt allerdings für angemessen, er schlägt der Mitgliederversammlung vor, der Erhöhung auf 100 EUR als regulärem Betrag zuzustimmen, aber keinen ICME-Zuschlag zu erheben.

Vorschlag für den zukünftigen Mitgliederbeitrag in €

Beitragsgruppen	Alter Beitrag	Neuer Beitrag	ICME-Zuschlag	Neu (Gesamt)
Regulär	60	100	20	120
Reduziert (Pensioniert, Parallelmitgliedschaft in MNU oder DMV)	54	90	18	108
Ermäßigt (Vollzeitstudium, Referendariat, maximal halbe Stelle als wissensch. Mitarbeiter/in)	30	50	0	50
Osteuropa	15	25	0	25

Der ICME-Zuschlag wird befristet auf die Jahre 2013–2016. Die Beitragserhöhung erwirkt bei Inkrafttreten ein zum Jahresbeginn rückwirkendes Sonderkündigungsrecht bis zum 31.03.2013.

Hans-Georg Weigand begründet noch einmal, warum aus seiner Sicht die Erhöhung auf 100 EUR sinnvoll ist und ein zusätzlicher ICME-Zuschlag erforderlich.

Thomas Jahnke fragt nach, ob Vorstand und Beirat einen Finanzplan ausgearbeitet haben, seinem Eindruck nach werden mehr oder minder nur derzeitige Ausgaben in die Zukunft fortgeschrieben.

Rudolf Sträßer erläutert daraufhin die grobe Kalkulation, die hinter den Erhöhungen der Beiträge und dem ICME-Zuschlag stehen.

Angelika Bikner-Asbahs spricht für die Beitragserhöhung, ihrer Ansicht nach sind 100 EUR Mitgliedsbeitrag den Leistungen der Gesellschaft angemessen.

Bernd Wollring spricht für die Beitragserhöhung, die ihm insbesondere mit Blick auf die Konsolidierung der Nachwuchsförderungsmaßnahmen sinnvoll erscheint. Er regt an zu prüfen, inwiefern die GDM ein Hilfswerk einrichten könnte, falls die für die Finanzierung des ICME zu bildenden Rücklagen die für gemeinnützige Vereine zulässige Höhe übersteige.

Wolfram Meyerhöfer appelliert an die Mitglieder, die Kosten für Nachwuchsförderung durch die GDM im Bereich der individuellen Reisekostenzuschüsse dadurch zu reduzieren, dass man zunächst Finanzierungsmöglichkeiten am jeweiligen Standort prüfe, bevor überhaupt Gelder der GDM in Anspruch genommen werden.

Für die Nachwuchsvertretung unterstützt Stephanie Rach die Beitragserhöhung, die mit Blick auf die Nachwuchsförderung im Interesse des Nachwuchses sei.

Es wird sodann abgestimmt. Die Beitragserhöhung wird in offener Abstimmung bei fünf Gegenstimmen und 16 Enthaltungen angenommen. Vorstand und Beirat werden ferner für die kommenden Jahre auf den Mitgliederversammlungen einen Finanzplan vorstellen.

TOP 6: Wahlen

Erster Vorsitz

Rudolf vom Hofe wird als erster Vorsitzender zur Wahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge (Ja-Stimmen 125, Nein-Stimmen 9, Enthaltungen 14, Ungültige Stimmen 4). Rudolf vom Hofe nimmt die Wahl an.

Kassenführung

Christine Bescherer wird vorgeschlagen (Ja-Stimmen 138, Nein-Stimmen 2, Enthaltungen 5, Ungültige Stimmen 3). Christine Bescherer nimmt die Wahl an.

Beirat

Es scheiden aus: Bärbel Barzel, Andreas Eichler, Rudolf Sträßer, Maike Vollstedt.

Es kandidieren: Bärbel Barzel, Andreas Eichler, Stefanie Rach, Rudolf Sträßer, Maike Vollstedt, Hans-Georg Weigand.

Gewählt werden: Hans-Georg Weigand (120 Stimmen), Andreas Eichler (84 Stimmen), Stefanie Rach (84 Stimmen) und Maike Vollstedt (76 Stimmen). Rudolf Sträßer (73 Stimmen) und Bärbel Barzel (57 Stimmen) werden nicht gewählt.

TOP 7: Nachwuchsförderung

Edith Schneider weist auf die Ausschreibung des Förderpreises der GDM hin (s. Beitrag in diesem Heft), der Rest des TOP ist bereits im Bericht des Vorstands behandelt worden.

TOP 8: MathEDUC

Der Editor-in-Chief, Thomas Jahnke, stellt Grit Malik vor, die seit August 2012 neue Fachredakteurin bei MathEduc ist und in dieser Position Nachfolgerin von Beate Ruffer-Henn. Nach wie vor werden für die Aufnahme neuer Veröffentlichungen in die Datenbank Rezensent(inn)en gesucht, insbesondere für den Primarbereich. Interessent(inn)en wenden sich bitte direkt an Frau Malik (Grit.Malik@zentralblatt-math.org).

TOP 9: Zeitschriften

Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)
Rolf Biehler berichtet zunächst über die (positive) Entwicklung der Online-Zugriffszahlen und die Einbindung des JMD in Abstract- und Zitationsdatenbanken. Die Manuskriptlage ist derzeit vorsichtig als zufriedenstellend zu bezeichnen. In 2014 wird ein Themenheft zur Kompetenzmessung erscheinen. Derzeit gibt es 15 frei eingereichte Artikel. Es werden weiterhin Mitherausgeber(innen) für Themenschwerpunkte gesucht, wobei maximal ein Themenschwerpunkt im Jahr vorgesehen ist. Einreichungen beim JMD sind in Zukunft über den für den Springer-Verlag typischen „Editorial-Manager" (Online-Einreichungssystem) möglich, nähere Informationen unter: http://www.springer.com/mathematics/journal/13138

Die Retrodigitalisierung soll bis Ende des Jahres 2013 erfolgen. Grundsätzlich behalten Autor(inn)en ihre Rechte an den Artikeln, Springer werden nicht-exklusive Verwertungsrechte eingeräumt. Mit der Retrodigitalisierung wird begonnen, wenn Vorlagen für alle Hefte vorhanden sind. Mitglieder, die über eine vollständige Sammlung der Hefte verfügen, mögen sich bei Rolf Biehler melden, da noch einige Lücken bestehen.

Rudolf Sträßer ist als Herausgeber zurückgetreten. Im Beirat wurde Stephan Hußmann als sein Nachfolger gewählt, als Ersatzmitglied für Stephan Hußmann im Beratungskomitee wurde Rudolf Sträßer gewählt. Auch die regulär ausscheidenden Mitglieder des Beratungskomitees Elisabeth Moser-Opitz, Andrea Peter-Koop und Alexander Renkl wurden wiedergewählt.

ZDM
Gabriele Kaiser informiert über Erscheinungsweise (7 Hefte pro Jahr), Inhalte und HerausgeberInnen der kommenden Hefte und weist auf die sehr positive Wertung des Journals im EMS-Journal-Ranking hin (vgl. den Beitrag in diesem Heft).

Mathematica Didactica
Andreas Eichler informiert: Mathematica Didactica ist eine Online-Zeitschrift für empirische und theoretische Beiträge aus der Mathematikdidaktik aller Schulformen und Ausbildungsphasen. Er selbst ist Schriftleiter, dem Herausgeberteam gehören zudem Wilfried Herget, Friedhelm Käpnick, Katja Krüger, Anselm Lambert, Silke Ruwisch, Markus Vogel und Gerald Wittmann an. Mathematica Didactica will in Zukunft stärker auf Themenhefte setzen, in 2013 werden zwei solche Hefte (Mathematische Begabung im Grundschulalter, Geometrie in der Grundschule) erscheinen, für 2014 ist ein weiteres (Mathematikunterricht und Neue Medien) geplant. Vorschläge/Mitherausgeber(innen) für weitere Hefte werden gesucht, nähere Informationen unter: http://mathdid.ph-freiburg.de

Mathematische Semesterberichte
Andreas Filler informiert: Die Zeitschrift berichtet aus der mathematischen Forschung, über interessante neue Entwicklungen in der Mathematik und ihren Anwendungen; andererseits behandeln die Semesterberichte grundlegende didaktische Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik an Schule und Hochschule. Geschäftsführende Herausgeber sind derzeit Jörn Steuding (Mathematik) und Klaus Volkert (Mathematikdidaktik), nähere Informationen unter: http://www.springer.com/mathematics/journal/591

Der Mathematikunterricht (MU)
Stefan Deschauer informiert: Herausgeber sind neben ihm selbst Henning Körner und Jörg Meyer, die Rubrik betreut Gerhard König. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zum Unterricht und hat traditionell eine gymnasiale Ausrichtung.

TOP 10: Verschiedenes

Angelika Bikner-Asbahs hebt noch einmal die Dringlichkeit der von Susanne Prediger angesprochenen Problematik der „Einheitslehrer" für Sekundarstufen hervor (vgl. auch ihren Beitrag in diesem Heft).

Wolfgang Zillmer stellt die Jahrestagung 2014 in Koblenz vor; ein kurzer Film (http://youtu.be/USNIWLcFggk) wird vorgeführt.

Der Vorstand bedankt sich bei den Mitgliedern für die gute Zusammenarbeit.

Protokoll: Andreas Vohns

Arbeitskreis Vernetzungen im Mathematikunterricht Darmstadt, 3.–4. 5. 2013

Astrid Brinkmann und Thomas Borys

Die 5. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ fand an der Technischen Universität Darmstadt am 3. und 4. Mai 2013 statt und wurde von Regina Bruder organisiert.

Das Programm gliederte sich wie bereits in den vorangegangenen Jahren in einen Lehrerbildungstag und einen arbeitskreisinternen Teil am zweiten Tag.

Besonders gefreut hat uns das große Interesse an unserem Lehrerfortbildungsprogramm, zu dem wir ca. 60 Lehrer/-innen begrüßen durften. Wir haben zwei Vortragsschienen geboten, unterbrochen von ausgedehnten Diskussionspausen mit Kaffee, Kuchen und Brötchen, in denen auch eine Posterausstellung von Doktoranden der TU Darmstadt besichtigt werden konnte.

In den Vorträgen im arbeitskreisinternen Teil hat Ana Todorova ihr Dissertationsprojekt vorgestellt und Martin Ziegler hat über Erfahrungen aus einer Vorlesung „Mathematik für Chemiker“ in Team-Teaching berichtet. Regina Bruder regte mit einem Inputreferat eine Diskussion über Vernetzungen in der Oberstufe und Vernetzungen in den Abi-Standards an, die in künftigen Treffen des AK und auch via Mail-Austausch weitergeführt werden soll.

Die Vorträge mit Abstracts des Tagungsprogramms waren:

Freitag, 3. Mai (im Rahmen der Lehrerfortbildung)

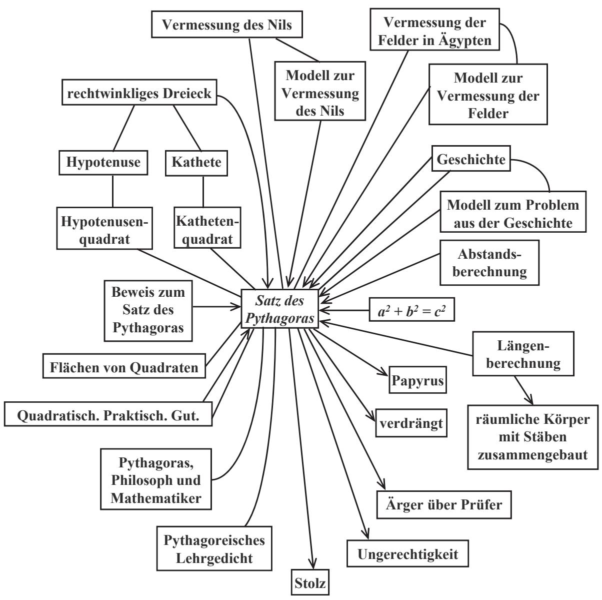
Thomas Borys (Karlsruhe): Verschlüsseln im Mathematikunterricht

Kryptologie ist eine sehr alte Wissenschaft und bis vor wenigen Jahrzehnten war es eine Wissenschaft für Regierungen, Geheimdienste und Spione. Heute ist die Kryptologie fast überall in unserem Leben, weil viele Anwendungen im Bereich des Computers sich kryptologischer Techniken bedienen, beispielsweise beim Login auf das E-Mail-Account, Arbeiten auf https- Seiten, Online-Banking und Telefonieren mit dem Handy.

Wegen dieser Bedeutung im Leben des modernen Menschen sollten kryptologische Themen im allgemeinbildenden Unterricht angesprochen werden. Dafür bietet sich das Fach Mathematik, wegen seinen vielfältigen Vernetzungen zur Kryptologie, an. So werden an verschiedenen Verschlüsselungsverfahren die inhaltlichen Vernetzungen der Kryptologie zu den Inhalten des Mathematikunterrichts dargelegt. Insbesondere werden dabei auch praktische unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Astrid Brinkmann (Münster) und Thomas Borys (Karlsruhe): Mit Maps vernetzend Lernen und Lehren

Graphische Darstellungen von Vernetzungen wie MindMaps, ConceptMaps und hiervon abgewandelte Map-Formen eignen sich in besonderer Weise zum strukturierten Lehren und Lernen im Mathematikunterricht. Lässt man Schüler/innen auf klassische Weise Maps zu einem Thema erstellen, können individuell sehr unterschiedliche Darstellungen entstehen. In Unterrichtsprozessen kann es aber der Lehrperson darauf ankommen, dass ganz bestimmte Inhalte mit ihren Vernetzungen betrachtet werden sollen. Für solch eine inhaltliche Eingrenzung stellen wir verschiedene methodische Vorgehensweisen vor und geben Beispiele für den Unterricht an. Des Weiteren eignen sich einige der hier vorgestellten methodischen Vorgehensweisen auch dazu, dass die Schüler/innen in das Arbeiten mit Maps im Mathematikunterricht eingeführt werden.



Concept-Map zum Satz der Pythagoras (Brinkmann/Borys)

Michael Bürker (Freiburg): Vernetzende Überlegungen zu den Begriffen Regression – Rekursion – Funktion an Hand ausgewählter Beispiele

Die Schülerinnen und Schüler lernen im Zusammenhang mit Daten und Funktionen und deren Anwendungen den Begriff der Regression kennen, wobei der Computer oder grafische Taschenrechner die Hauptarbeit bei der Umsetzung von Daten zu Funktionen leistet. Die Schülerinnen und Schüler benutzen dabei das entsprechende Regressions-Menü für die verschiedensten Funktionen als Black Box, lernen aber kaum den mathematischen Hintergrund kennen (Methode der kleinsten Quadrate). Dieser soll an einem einfachen Beispiel der linearen Regression unter die Lupe genommen werden. Zur Vernetzung von Rekursion und Funktion soll am Beispiel einer Folge mit linearer Rekursionsgleichung die explizite Darstellung durch eine Funktion der Form $x \to c \cdot a^x + d$ sowie einige der entsprechenden Anwendungen vor allem bei Spar- und Tilgungsprozessen gezeigt werden. Alle genannten Überlegungen können ohne Differentialrechnung durchgeführt werden; daher ist deren Umsetzung im Unterricht am Ende der Mittelstufe möglich, wenngleich Bezüge zu Differentialgleichungen am Rande mit einfließen.

Martin Kiehl (Darmstadt): Modellieren mit Funktionen

Das vorgestellte Konzept sieht vor, bei der Einführung jeder neuen Funktionsklasse die qualitativen Eigenschaften im Rahmen von Parameterstudien kennenzulernen und dabei die Parameter in den verschiedenen Darstellungen zu identifizieren. Mit dieser Kenntnis können für vorliegende Daten geeignete Parameterformen ausgewählt werden und die Parameterwerte zunächst geschätzt werden. Danach folgt eine Anpassung durch Variation der Parameter über Bildlaufleisten in Excel und eine Feinkorrektur durch die kleinste Fehlerquadratsumme.

Am Ende gibt es reale Daten und den Auftrag, aus den bislang kennengelernten Funktionsklassen die geeignete auszuwählen und anzupassen, wobei auch alte Funktionsklassen wiederholt werden. Daten, die mit keiner bisher bekannten Funktionsklasse sinnvoll beschrieben werden können, führen dann zur Einführung der nächsten.

Modellieren lässt sich so in die Einführung neuer Funktionsklassen im Rahmen der Curriculumsspirale mit wenig Aufwand integrieren.

Jürgen Maaß (Linz): Zur Vernetzung von Philosophie und Mathematik durch realitätsnähere Modellierung

Philosophie und Mathematik werden im Mathematikunterricht selten thematisiert. Wenn ihre Beziehungen und Vernetzungen tatsächlich behandelt werden, dann meist im Zusammenhang mit Logik und Grundlagenfragen. Bisher viel zu wenig werden die Zusammenhänge von Mathematik und Philosophie behandelt, wenn realitätsbezogen Mathematik unterrichtet wird. Wichtige Fragen bleiben hier oft unerwähnt, die für die tatsächliche Anwendung von Mathematik in der realen Welt aber zentral sind: Welcher Aspekt der realen, sozialen oder natürlichen Umwelt soll weshalb und mit welcher Zielsetzung optimiert werden? Wie wird „Realität“ erkannt und modelliert? Was ist eigentlich „Realität“? Wer gibt den Auftrag, wer setzt die Ziele, wer entscheidet über die Akzeptanz von Ergebnissen? Werden ethische Konsequenzen der Veränderung der Realität aufgrund der erzielten Ergebnisse berücksichtigt? Kurz: Wer trägt die Verantwortung?

Sind solche Fragen ein böser Angriff auf die Mathematik und den Unterricht? Nein, im Gegenteil: Wenn im Mathematikunterricht solche Fragen mit behandelt werden, können allgemeine Bildungsziele des Mathematikunterrichts und insbesondere ein tieferes Verständnis von Mathematik selbst besser erreicht werden.

Martin Ziegler (Darmstadt): Logik: Mathematische Introspektion und Informatik

Spätestens seit „Gödel, Escher, Bach“ ist der Unvollständigkeitssatz populärmathematisches Allgemeingut. Aber wie erlaubt es Logik, mit *inner*mathematischen Methoden Aussagen *über* die Mathematik zu machen?

Die grundlegenden Konzepte eines einheitlichen Blicks auf so unterschiedliche Gebiete wie Mengenlehre, Zahlentheorie, Analysis und Lineare Algebra – Syntax und Semantik – finden sich in der Informatik wieder: Lernen Sie Ihr Fach mit ganz neuen Augen betrachten!

Samstag, 4. Mai

Ana Todorova (Berlin): A Concept Map of Determinants as a Foundation for Design Research in a Dynamic Geometry Environment

This article reports on a creation of a concept map about determinants which are used as a ‘rich medium’ for connecting internal and external concepts in linear algebra and analytic geometry at the upper secondary education. It discusses on multiple representations of determinants and conceptual changes from determinants being treated as real numbers at the upper secondary level to the determinants representing functions of squared matrices at the university level. The concept map serves as a framework upon a research design has been undertaken in a Dynamic Geometry Environment.

Martin Ziegler und Gerd Buntkowsky (Darmstadt): Team Teaching Mathematik für Chemiker – Erfahrungen und Empfehlungen für Vernetzung in der Hochschullehre
An einer Technischen Universität angesiedelt, hat unser Fachbereich große Erfahrung in der Mathematikausbildung von bspw. Ingenieuren. Über die hier zu vermittelnden Inhalte bestehen teils unterschiedliche, nachvollziehbare Vorstellungen. Die Veranstaltung „Mathematik für Chemiker" wurde im Winter 2010/11 als Experiment völlig neu gestaltet – in zweifacher Hinsicht:
(a) durch konsequenten Verzicht auf Definitionen, Theoreme und Beweise zugunsten von Rechentechniken und Lösungsverfahren für diejenigen Aufgabentypen, die im Chemiestudium auftreten;
(b) durch die inhaltliche Verbindung jedes mathematischen Themas mit beispielhaften Anwendungen aus der (physikalischen) Chemie, vermittelt durch einen Dozenten dieses Fachbereichs („Team Teaching").

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Informelles bzw. Organisatorisches

- Tief betroffen hat uns die Mitteilung über den Tod von Günther Ossimitz, dem ein langes schweres Leiden vorausging. Günther Ossimitz war eines der ersten Mitglieder unseres AK Vernetzungen im Mathematikunterricht. Die Diskussionen mit ihm auf der ersten AK-Tagung waren überaus lebhaft und anregend; für die Schriftenreihe „Mathe vernetzt" hat er wertvolle Beiträge geliefert.
- Planung der nächsten Tagung: Thomas Borys übernimmt die Organisation der 6. Tagung des Arbeitskreises, die im Mai 2014 an der PH Karlsruhe stattfinden soll. Es wird wieder ein Lehrerfortbildungsprogramm geboten werden. Nähere Infos unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html
- Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht" des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann:
    - In 2013 sind Band 3 (Herausgeber: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Michael Bürker) und der Materialband zu Band 1–3 (Herausgeber: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß) bei Aulis erschienen, siehe auch: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html
    - Band 4 ist in Arbeit und wird von Thomas Borys, Matthias Brandl und Astrid Brinkmann herausgegeben. In diesem Band sollen zu den Artikeln auch Schüler-Arbeitsblätter und Kopiervorlagen direkt mit veröffentlicht werden.
    - Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html
- Rückblick auf die Tagung: Das Besondere an dieser Tagung war die sehr hohe Beteiligung von Lehrer/innen am Lehrertag und die damit verbundenen vielfältigen Rückmeldungen aus der Praxis. Ein ganz besonderer Dank gilt Regina Bruder, der dieses Kunststück dank ihrer sehr guten Verbindungen zur den Lehrenden gelungen ist.

Das gesamte Tagungsprogramm und weitere Informationen zu Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht" findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html. Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin des Arbeitskreises: Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de

Astrid Brinkmann, Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstrasse 21, 48149 Münster, Email: astrid.brinkmann@math-edu.de
Thomas Borys, Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Bismarckstr. 10, 76133 Karlsruhe, Email: borys@ph-karlsruhe.de

Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden der GDM zur Jahrestagung in Münster am 4. 3. 2013

Hans-Georg Weigand

Liebe Kolleginnen und Kollegen von der Universität Münster, liebe Kolleginnen und Kollegen von fern und nah, meine sehr geehrten Damen und Herren,
nach 1978 findet die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik zum zweiten Mal hier in Münster statt. Münster hat in Deutschland eine besondere Tradition in der Didaktik der Mathematik, die insbesondere mit dem Namen *Heinrich Behnke* verbunden ist. Der international anerkannte Mathematiker Heinrich Behnke erhielt 1927 eine Professur für Funktionentheorie an der Universität Münster. Das zusammen mit Friedrich Sommer herausgegebene Standardwerk zur Funktionentheorie, der „Behnke/Sommer" war – vor vielen Jahren – einmal mein mehrjähriger Begleiter während meines Studiums.

1951 wurde das Seminar für Didaktik der Mathematik, das spätere Heinrich-Behnke-Seminar hier in Münster gegründet, heute würde man eher von einer Abteilung für Didaktik der Mathematik sprechen, der ersten ihrer Art an einer deutschen Universität. Zum 40-jährigen Bestehen dieses Münsteraner Seminars schrieb der damalige 1. Vorsitzende der GDM, Heinrich Bürger: „Die Institutionalisierung der Didaktik der Mathematik durch einen Mathematiker vom Range Heinrich Behnkes bedeutete eine Aufwertung und Anerkennung ihrer Wichtigkeit." Das war damals von unschätzbarem Wert. Viele in der Mathematikdidaktik bekannte Namen sind mit diesem Seminar verbunden, u. a. Heinz Griesel, Norbert Knoche, Herbert Kütting oder Hans-Georg Steiner. Wir sind hier in Münster also an einem traditionsreichen Ort der Geschichte der Mathematikdidaktik in Deutschland.

Der Dank der GDM für die Organisation und Vorbereitung dieser Tagung gilt allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern und studentischen Hilfskräften hier in Münster. Ganz besonders bedanke ich mich bei den – nennen wir sie – Hauptorganisatoren Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick und Martin Stein, sowie bei Frau Gerhold und Herrn Reuschel von der Firma SkyPremotion, die die Organisation dieser Tagung übernommen hat.

Die Eröffnung einer Jahrestagung bietet dem 1. Vorsitzenden stets auch die Chance, einmal das zu sagen, was ihn im vergangenen Jahr besonders bewegt hat. Heute werde ich nur auf zwei Ereignisse eingehen. Das erste Ereignis fand in Seoul, das zweite in London statt.

Die Eröffnung der Jahrestagung durch den 1. Vorsitzenden

Zum 1. Ereignis.

Wir werden im Jahre 2016 die ICME 13 in Hamburg haben. Deshalb haben wir die ICME 12 im letzten Jahr in Seoul natürlich mit besonderem Interesse verfolgt. Ich möchte hier keine Gesamtwürdigung dieser interessanten und gut organisierten Veranstaltung geben, sondern nur auf *eine* dortige Veranstaltung eingehen, die mich in besonderer Weise nachdenklich gestimmt hat.

Dies war eine Podiumsdiskussion am Freitag, 13. Juli 2012, zum Thema „Mathematics Education in East Asia" – übersetzen wir das mit „Mathematische Bildung im Fernen Osten" – mit Vertretern aus Hong-Kong, Korea, Japan und China.

Als verbindendes zentrales Element der ostasiatischen Bildungssysteme wurde dabei die Orientierung an den *Ideen von Konfuzius* herausgestellt. Darauf basiere zum Ersten das *hohe Ansehen von Bildung und Erziehung in der Gesellschaft* und zum Zweiten die Höherbewertung einer *sozialgemeinschaftlichen, uniformen Erziehung* gegenüber einer *individuellen Orientierung des Einzelnen*. Mit großem Stolz wurde – natürlich – die Spitzenposition der asiatischen Bildung in der PISA-Rangliste herausgestellt. Die Botschaft von diesem Podium war klar und eindeutig: Wir sind die PISA-Spitzenreiter, wir wissen wie es geht und wir sagen *euch* wie es richtig ist. Mit „*euch*" waren vor allem die USA gemeint. Eingespielte Videoaufnahmen von Klassenräumen in Asien und den USA kontrastierten die *zielorientierte disziplinierte Atmosphäre* in Asien mit einem – nennen wir es – *lernergebnisoffenen Unterricht* in den USA, bei dem es die Schülerinnen und Schüler zudem notwendig hatten, ihre Gesichter bei den Filmaufnahmen hinter einer Verpixelung zu verbergen, was im überwiegend asiatischen Auditorium mit Heiterkeit zur Kenntnis genommen wurde.

Europa kam in dieser Podiumsdiskussion nicht vor. Mir, als im Auditorium sitzender Europäer, wurde vom Podium aus genau *das* Gefühl vermittelt, das David Cameron (britischer Premierminister und Noch-Europäer) ein halbes Jahr später mit folgenden Worten ausdrückte: „Europa ist auf dem absteigenden Ast. Es ist abgehängt bzgl. Wettbewerbsfähigkeit und Innovation." Also zusammengefasst: Das augenblickliche Europa hat keine Überlebenschance in der Welt.

Pausenatmosphäre

Zum 2. Ereignis

Lassen Sie mich nun zum zweiten Ereignis wechseln, das scheinbar mit dieser Podiumsdiskussion nichts zu tun hat, aber natürlich nur scheinbar. Wir wechseln nach London, 1. August 2012, Olympische Spiele. An diesem Tag wurden acht asiatische Badmintonspielerinnen – wem Badminton nichts sagt, der kann auch Federball sagen – also wurden acht Federballspielerinnen aus Süd-Korea, China und Indonesien von den Olympischen Spielen ausgeschlossen. Erstmals schaffte es mit dieser Nachricht der Badmintonsport in die deutsche Tagesschau!

Was war geschehen? Im letzten Gruppenspiel des Badmintonturniers traf am 31. Juli 2012 das chinesische Damen-Doppel Wang Xiaoli und Yu Yang auf das süd-koreanische Doppel Jung Kyung-Eun und Kim Ha-Na. 3000 Zuschauer warteten erwartungsvoll in der ausverkauften Halle.

Beide Damendoppel waren bereits für das Viertelfinale qualifiziert und die Chinesinnen erhofften sich durch eine *Niederlage* eine bessere Ausgangsposition im nächsten Spiel. Also schlugen sie ihren ersten Aufschlag ins Netz, das ist im Badminton die sicherste Methode einen Fehler zu begehen. Es gibt einen Aufschlagwechsel. Also Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. 1 : 1. Aufschlagwechsel, Aufschlag China. Aufschlag ins Netz, 2 : 1. Aufschlagwechsel. Ungläubiges Herumschauen der vier Spielerinnen. Aufschlag ins Netz. Aufschlagwechsel. So ging das eine Zeitlang. Unter den Zuschauern breitete sich Unmut aus. Pfiffe. Buhrufe. Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. Der Schiedsrichter unterbricht das Spiel, ermahnt die Spielerinnen, spricht etwas von olympischer Idee. Die Spielerinnen hören wortlos zu und schauen verlegen. Aufschlag China. Aufschlag ins Netz. Gejohle und Proteste in der Halle. Buhrufe. Der Schiedsrichter disqualifierte die vier Spielerinnen, nimmt dies aber nach Protesten der Trainer wieder zurück. Aufschlag Korea. Aufschlag ins Netz. Blicke der Spielerinnen zu den Trainern, die Trainer blicken zu den Offiziellen, die schauen gerade aus. Aufschlag China. Aufschlag ins Netz. So ging das weiter, bis zwei Sätze vorbei waren und die Unglücklicheren gewannen. Buhrufe in der Halle.

Eine Stunde später, spielt das zweite Damendoppel von Süd-Korea gegen das Damendoppel von Indonesien. Gleiche Situation wie vorher. Beide Doppel waren bereits für das Viertelfinale qualifiziert. Das Spiel beginnt. Aufschlag Korea, Aufschlag ins Netz, Aufschlagwechsel, Aufschlag ins Netz, Aufschlagwechsel. ... Wie es weitergeht, wissen Sie. Alle acht Spielerinnen wurden am nächsten Tag von den Olympischen Spielen ausgeschlossen.

Warum erzähle ich das? Hier waren acht junge asiatische Frauen, mindestens acht Trainer, mehrere Offizielle, die alle das asiatische Bildungssystem durchlaufen hatten, die wahrscheinlich – darauf wird heute weltweit im Spitzensport sehr geachtet – bei den Nationalen Tests zumindest nicht schlecht abgeschnitten haben.

Keine der acht Spielerinnen und keiner der Trainer oder offiziellen Begleiter dieser asiatischen Mannschaften war aber an jenem 31. Juli in der Lage oder hatte den Mut dazu, in einer nicht vorhergesehenen Situation einen sicherlich von oben vorgegeben Befehl zu ignorieren und individuell angemessen auf eine neue Situation zu reagieren. Alle acht Spielerinnen befanden sich in einer Situation, die – retrospektiv betrachtet – psychisch eigentlich nicht zu ertragen ist. Aber keine hat darauf reagiert.

Gesellschaftsabend

Ist es nicht gerade das, was wir von *Bildung*, von einem *gebildeten Menschen* verlangen: eigenverantwortlich angemessene Entscheidungen zu treffen – auch oder gerade – in unerwartet auftretenden Situationen. Das erfordert Mut und – um es in den Worten unseres Bundespräsidenten auszudrücken – *Zivilcourage*, deren zentrale Bedeutung für unsere Gesellschaft und das Zusammenleben der Menschen Joachim Gauck kürzlich, am 30. Januar 2013 – einem für Deutschland höchst schmerzhaften Jahrestag – nochmals deutlich herausgestellt hat.

Hier in London, am 31. Juli 2012 – 3 Wochen nach der Podiumsdiskussion in Seoul – wäre sie gefordert gewesen, die Zivilcourage. Doch nichts ist auf dem Badmintonfeld in London in dieser Richtung passiert. Der Ausschluss der Spielerinnen war die notwendige Konsequenz. Für mich zeigt dieses Ereignis – oder besser das „Nicht-Ereignis" – in London das Scheitern eines Bildungskonzepts, jedenfalls eines Konzepts, das das Wort „Bildung" ernst nimmt. Natürlich verbietet es sich, von Einzelfällen auf die Gesamtheit zu schließen, und doch war für mich dieser 31. Juli 2012 ein Schlüsselerlebnis, das mir das Bildungssystem in Ostasien und damit auch unser Bildungssystem in einer veränderten Perspektive zeigt, das die Bedeutung von Kompetenzen – wieder einmal – im Hinblick auf ein *Bildungskonzept* hinterfragt. Das aber wäre ein eigener Vortrag.

Damit komme ich zum Schluss. Ich wünsche Ihnen allen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, und wir am Ende der Woche mit neuen Perspektiven für die Didaktik der Mathematik, für die Bildung und den zukünftigen Mathematikunterricht nach Hause fahren.

Die Tagung ist damit offiziell eröffnet.

Hans-Georg Weigand
1. Vorsitzender der GDM (2007–2013)

Hans-Georg Weigand, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg, Hubland-Nord, Emil-Fischer-Straße 30, 97074 Würzburg, Email: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

Tagungsbericht zur CERME8 in Antalya

Jenny Cramer und Susanne Schnell

Vom 6.–10. Februar 2013 fand der 8. Kongress der ERME (European Society for Research in Mathematics Education), CERME 8, in der Türkei statt.

Das Organisationsteam vor Ort, unter der Leitung von Behiye Ubuz, organisierte die Tagung im Starlight Convention Center Thalasso & Spa Hotel in Manavgat.

Neben Meerblick und der Aussicht auf schneebedeckte Berge trugen Angebote wie Pool oder Hamam zu einer angenehmen Atmosphäre auch nach den Arbeitssitzungen bei. Die ungefähr 500 Teilnehmenden stammten aus 50 Ländern, darunter auch Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus Nordafrika oder Amerika.

Ausflugsprogramm (Foto: ERME, Inmice Hizmet Atölyesi)

Communication, Cooperation und Collaboration bei der CERME

Den Kern der CERME, die im Rhythmus von zwei Jahren stattfindet, stellt gemäß dem ERME Leitbild von Communication, Cooperation und Collaboration das gemeinsame Arbeiten in thematischen Working Groups dar. In diesem Jahr wurden davon 17 angeboten; dazu gehören unter anderem inhaltsspezifische Ausrichtungen wie Algebraic Thinking, Geometrical Thinking oder Stochastic Thinking; aber auch andere Forschungsschwerpunkte wie Applications and Modelling, Argumentation and Proof, Affect and Mathematical Thinking oder Cultural Diversity and Mathematics Education. Zur Vorbereitung der intensiven Zusammenarbeit werden im Vorfeld der Tagung Paper eingereicht und begutachtet. Dabei wird von der ERME besonderer Wert darauf gelegt, dass die Peer Reviews fachlich fundiert und vor allem konstruktiv gestaltet werden, so dass auch jungen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern eine Qualitätssteigerung des Papers bzw. möglicherweise des Forschungsansatzes durch die Teilnahme an der Konferenz ermöglicht werden kann. International zusammengesetzte Teams von Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern, die sich mit den jeweiligen Themenbereich beschäftigen, übernehmen die Vorbereitung und Organisation der Working Groups.

Die Paper wurden von allen Teilnehmenden der Working Group vorbereitet, um in den Gruppen Diskussionen direkt auf einem gehobenen Niveau zu ermöglichen. In den Kaffeepausen ergänzten Posterpräsentationen das wissenschaftliche Programm.

Weiterhin bot das Programm drei Hauptvorträge, in denen international renommierte Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler Einblicke in verschiedene Forschungsschwerpunkte gaben: Paolo Boero (Italien) referierte zum aktuellen internationalen Stand der Mathematikdidaktik und verschiedenen Forschungsdesideraten, Alain Kuzniak (Frankreich) über die Beforschung des Lehren und Lernen von Geometrie und Candia Morgan (Großbritannien) zum Forschungsfeld ‚Mathematik und Sprache' und seinen vielfältigen Erscheinungsbildern.

1 Nachwuchsförderung: Ein besonderes Anliegen der ERME

Neben der Förderung des gegenseitigen wissenschaftlichen Austausch ist eines der zentralen Anliegen der ERME die Förderung von Nachwuchswissenschaftlerinnen und –wissenschaftlern (genannt YERME – Young Researchers in ERME). Dazu zählt beispielsweise die zweijährlich abgehaltene Summer School, bei der junge Forscherinnen und Forscher aus Europa begleitet von internationalen Expertinnen und Experten miteinander in einen wissenschaftlichen Diskurs über ihre Projekte

Eröffnung (Foto: ERME, Inmice Hizmet Atölyesi)

treten. Die nächste Summer School findet 2014 in Kassel statt.

Im Rahmen der CERME wird am Vortag der Tagung der YERME-Day veranstaltet, bei dem verschiedene Arbeits- und Diskussionsgruppen angeboten werden. In diesem Jahr konnten sich die Teilnehmenden mit inhaltlichen Themen wie 'Design of a research study: what are the component parts, how are they related to each other and how might they be discussed in a thesis?' oder 'The role of theory for empirical research', aber auch methodischen Schwerpunkten wie 'Literature search' und 'Reading and writing of reports and papers' auseinandersetzen. Auch in diesen Arbeitssitzungen wird besonderer Wert auf ein kooperatives, konstruktives Arbeitsklima gelegt, um fruchtbare Diskussionen zu begünstigen. Weiterhin hatten die Nachwuchswissenschaftlerinnen und –wissenschaftler diesmal die Gelegenheit, in einer Session mit dem Titel ‚ERME meet Young Researchers' mit Mitgliedern des ERME Boards ins Gespräch zu kommen und sich mit diesen über Fragen, Vorstellungen und Wünsche auszutauschen. In der Sitzung „Current and Future activities of YERME" wurden Anregungen und Wünsche der jungen Mathematikdidaktikerinnen und –didaktiker gesammelt: so soll beispielsweise eine bessere Vernetzung des internationalen wissenschaftlichen Nachwuchses über eine Mailinglist und eine verstärkte Nutzung der YERME-Website (siehe unten) gefördert werden.

Wahlen des ERME Boards und Stärkung des wissenschaftlichen Nachwuchses

Im Rahmen des General Meetings der CERME8 wurden eine neue Präsidentin sowie Mitglieder des Boards der ERME gewählt:

Die Französin Viviane Durand-Guerrier wurde Nachfolgerin von Ferdinando Arzarello (Italien), der aufgrund seiner Ernennung zum Präsident der ICMI als Präsident der ERME zurückgetreten war. Susanne Prediger (Deutschland) wurde vom Board zur Vizepräsidentin ernannt. Weiterhin wurden als Boardmitglieder gewählt:

- Therese Dooley (Irland),
- Carl Winslow (Dänemark),
- Cristina Sabena (Italien),
- Uffe Jankvist (Dänemark).

Eine wichtige politische Innovation betraf eine Änderung der Satzung der ERME, nach der nun zwei „Young Researchers" Mitglieder des ERME-Boards sind und die Interessen des wissenschaftlichen Nachwuchs vertreten. Hier wurden gewählt:

- Susanne Schnell (Deutschland) für 4 Jahre,
- Miguel Ribeiro (Portugal) für 2 Jahre.

Eindrücke einer wichtigen Konferenz

Die CERME8 ist eine der großen Konferenzen der Mathematikdidaktik in Europa und darüber hinaus. In den Arbeitsgruppen wird intensiv an Ideen gearbeitet, welche die Forschungsrichtung in den nächsten Jahren mit prägen werden. Vorherrschender und bleibender Eindruck dieser besonderen Konferenz ist jedoch die dort herrschende Atmosphäre; die „drei Cs", Communication, Cooperation, Collaboration, sind nicht nur ein Grundgedanke, der bereits bei der Gründung der ERME und der ersten Konferenz in Osnabrück in 1998 gefasst wurde, sondern bestimmen bei der Tagung konsequent das gemeinsame Arbeiten und den konstruktiven Umgang mit kulturell-unterschiedlich geprägten Auffassungen von mathematikdidaktischer Forschung.

Insgesamt war die CERME8 ein bedeutsamer Kongress für die Entwicklung mathematikdidaktischer Forschung in Europa. Erste Ergebnisse des Einflusses dieser Konferenz werden sich sicherlich bereits auf der CERME9 zeigen, welche im Februar 2015 unter Vorsitz von Nad'a Vondrová in Prag stattfinden wird.

Website der ERME und YERME, auf der auch die Proceedings veröffentlich werden: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme

Jenny Cramer, Universität Bremen, Fachbereich 3, Bibliothekstraße 1, 29359 Bremen, Email: cramerj@informatik.uni-bremen.de
Susanne Schnell, Technische Universität Dortmund, Fakultät Mathematik, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, 44221 Dortmund, Email: Susanne.Schnell@math.tu-dortmund.de

Tagungseinladungen

Symposium „(Mathematische) Probleme lösen lernen" an der TU Braunschweig

Am 27. und 28.9.2013 findet in Kooperation mit dem Kompetenzzentrum Lehrerfortbildung Braunschweig am Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik der Technischen Universität Braunschweig ein Symposium statt, das die Förderung der Problemlösefähigkeit zum Inhalt hat. Namhafte Mathematikdidaktiker aus dem In- und Ausland werden zu dieser Thematik vortragen und sich der Diskussion im Plenum stellen. Die Ausführungen beziehen sich insbesondere auf den Altersbereich der Sekundarstufe I.

Interessenten sind herzlich zur Teilnahme eingeladen. Nähere Informationen zu dieser Tagung einschließlich der Anmeldemodalitäten (Anmeldung ist bis zum 2. 8. 2013 möglich, dabei aber bitte Teilnehmerbegrenzung beachten) finden sich unter https://www.tu-braunschweig.de/idm/symposium.

Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik: Herbsttagung Leithema: Diskrete Mathematik

27.–29. September, Universität des Saarlandes, Saarbrücken. Zum 31. Mal findet im Herbst die traditionelle Arbeitstagung des AK MU&I in der GDM statt. Die Tagung dient denjenigen (auch nicht GDM-Mitgliedern), die sich mit der Rolle der Informatik für dem Mathematikunterricht und speziell dem Einsatz des Computers im Mathematikunterricht sowie den methodischen, didaktischen, mathematischen und politischen Konsequenzen daraus befassen, als Forum, Diskussionsort und Quelle der Inspiration.

Das Thema der Tagung wurde der guten Tradition folgend auf der AK-Sitzung im Rahmen der Jahrestagung der GDM in Münster beschlossen. Es lautet: „Diskrete Mathematik".

Leitgedanken und Leitfragen zum Tagungsthema
Wikipedia sagt (Stand 27. 5. 2013):

> Die diskrete Mathematik als Teilgebiet der Mathematik befasst sich mit mathematischen Operationen über endlichen oder zumindest abzählbar unendlichen Mengen. Im Gegensatz zu anderen Gebieten wie der Analysis, die sich mit kontinuierlichen Funktionen oder Kurven auf nicht abzählbaren, unendlichen Mengen beschäftigt, hat für die in der diskreten Mathematik behandelten Folgen die Eigenschaft der Stetigkeit keine Bedeutung. Die in der diskreten Mathematik vertretenen Gebiete (wie etwa die Zahlentheorie oder die Graphentheorie) sind zum Teil schon recht alt, aber die diskrete Mathematik stand lange im Schatten der ‚kontinuierlichen' Mathematik, die seit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch ihre vielfältigen Anwendungen in den Naturwissenschaften (insbesondere der Physik) in den Mittelpunkt des Interesses getreten ist. Erst im 20. Jahrhundert entstand durch die Möglichkeit der raschen digitalen Datenverarbeitung durch Computer (die naturbedingt mit diskreten Zuständen arbeiten) eine Vielzahl von neuen Anwendungen der diskreten Mathematik.
> Gleichzeitig gab es eine rasante Entwicklung der diskreten Mathematik, die in großem Maße durch Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Computer (Algorithmen, theoretische Informatik usw.) vorangetrieben wurde. Ein Beispiel für ein Gebiet, das am Schnittpunkt von Analysis und diskreter Mathematik liegt, ist die numerische Mathematik, die sich mit der Approximation von kontinuierlichen durch diskrete Größen beschäftigt sowie mit der Abschätzung (und Minimierung) dabei auftretender Fehler. Zu den Kerngebieten der diskreten Mathematik zählen: Kombinatorik, Zahlentheorie, Kodierungstheorie, Graphentheorie, Spieltheorie, Kryptographie, Informationstheorie sowie Statistik.

Das lassen wir als „Leitgedanken" zunächst mal unverbessert und unkommentiert stehen und schwenken unseren Fokus auf die Schule. Es ist mit einem Blick in die Lehrplanlandschaft leicht festzustellen, dass die genannten Kerngebiete der diskreten Mathematik im Unterricht mit deutlich unterschiedlichem Umfang und Gewicht vertreten sind. Dies führt uns u. a. zu den folgenden Fragen, die wir auf der Tagung gemeinsam diskutieren können und zu beantworten suchen:

- Warum kommen einige Gebiete der diskreten Mathematik – wie z. B. Graphentheorie – nicht oder nur sehr selten in der Schule vor? Aus Gewohnheit oder aus mangelnder Relevanz für die Allgemeinbildung – obwohl aus Sicht der Mathematik in diesem Bereich so manche Klassiker zu finden sind?

- Möchten wir von dem ein oder anderen Teilgebiet der diskreten Mathematik in Zukunft – oder am besten jetzt sofort? – in der Schule mehr? Wenn ja, warum? Und worauf sollten wir lieber verzichten, vom Alten – z. B. weg mit der Differential- und Integralrechnung? – bzw. beim möglichen Neuen?
- Warum steht die diskrete Mathematik in der Schule im Schatten der „kontinuierlichen"? Oder ist das gar nicht so? Haben wir bereits genug diskrete Mathematik in der Schule?
- Welchen Beitrag kann diskrete Mathematik leisten als Brücke zur Informatik?
- Wo sollte diskrete Mathematik in der Schule verortet werden? Im Mathematikunterricht, im Informatikunterricht oder gar in einem neuen, Kontinuierliches und Diskretes versöhnendem Fach „Mathematik und Informatik"?
- Welche Aufgabe und welchen Stellenwert sollte der Computer unter Berücksichtigung diskreter Fragestellungen im Unterricht haben?
- Welche Rolle werden die Schnittstellengebiete zwischen kontinuierlicher und diskreter Mathematik – wie z. B. Numerik – zukünftig spielen?
- Und nicht zuletzt: Wie weit folgen wir als AK der Beschreibung von „diskrete Mathematik" in Wikipedia, wie sollte der alternative Eintrag in Madipedia lauten?

Ulrich Kortenkamp und Anselm Lambert

Hauptvorträge

Wir freuen uns sehr Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Kurt Mehlhorn (Direktor des MPI für Informatik) für einen der drei geplanten Hauptvorträge gewonnen zu haben – zum Thema „Ideen der Informatik". Die weiteren Hauptvorträge, sowie zu gegebener Zeit das Tagungsprogramm findet sich unter http://didaktik-der-mathematik.de/ak/mui/13.

Organisatorisches

Das Tagungsprogramm beginnt freitags mittags. Mittagessen gibt es davor für dafür angemeldete Teilnehmende. Das Tagungsprogramm endet sonntags mittags. Danach gibt es noch Mittagessen für dafür angemeldete Teilnehmende. Für den Freitagabend ist ein gemütliches Zusammensein geplant, bei dem wir bzgl. der Getränke von der Nähe zu Frankreich profitieren. Für den Samstagabend haben wir hinreichend Plätze in einem Saarbrücker Lokal reserviert. Die (Vor-)Anmeldung zur Tagung erfolgt (ggf. mit Vortragstitel und -abstract; bevorzugt zum Tagungsthema, aber traditionell auch off topic möglich) per Email an Karin Mißler unter akmui@math.uni-sb.de. Die Tagungsgebühr beträgt mit Übernachtung und Verpflegung 160 EUR; darin sind u. a. die Mahlzeiten und zwei Übernachtungen in der Landessportschule enthalten, sowie die Getränke und Knabbereien beim gemütlichen Zusammensein am Freitagabend. Die Anmeldung wird verbindlich durch Überweisung der Tagungsgebühr bis Anfang August auf das Konto des AK (Kontoinhaber: Ulrich Kortenkamp; Konto-Nr. 1003742861; Deutsche Kreditbank AG, BLZ 12030000). Die Tagungsleitung haben Ulrich Kortenkamp und Anselm Lambert.

Herbsttagungen weiterer Arbeitskreise

Arbeitskreis Frauen und Mathematik

Jahrestagung 18.–20.10., Friedrich-Schiller-Universität Jena. Anfragen über renate.tobies@uni-jena.de. Das Programm wird auf der Homepage http://www.math.uni-augsburg.de/projekte/ak_frau_math/ bekannt gegeben.

Arbeitskreises Grundschule

Jahrestagung vom 8.–10. November 2013 in Tabarz (Thüringen). Diesjähriges Thema: Mathematik vernetzt. Das Programm wird auf der Homepage http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/ bekannt gegeben.

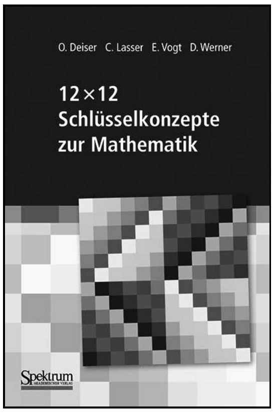
Arbeitskreis Mathematik und Bildung

Herbsttagung 15.–17.11., Universität Gießen. Anfragen über helmerich@mathematik.uni-siegen.de oder andreas.vohns@aau.at. Das Programm wird auf der Homepage http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Mathematik_und_Bildung bekannt gegeben.

Editorischer Hinweis: Wir haben alle Arbeitskreisleitungen um Einladungen zu Herbsttagungen/Nennung der Termine gebeten. Für die Arbeitskreistermine weiterer Arbeitskreise konsultieren Sie bitte ggf. http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreise_der_GDM.

Oliver Deiser, Caroline Lasser, Elmar Vogt und Dirk Werner: 12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik

Rezensiert von Wilhelm Huisinga



Ein Begleiter fürs Studium – und danach: In kompakter und verständlicher Form wird ein Überblick über zentrale Themengebiete der Mathematik gegeben: Analysis (elementare und höhere), Algebra, diskrete Mathematik, lineare Algebra, Mengenlehre/Logik, Numerik, Stochastik, Topologie/Geometrie und Zahlentheorie. Vervollständigt wird das Themenspektrum durch zwei einführende Grundlagenkapitel, in denen unter anderem die Sprache der Mathematik sowie verschiedene Beweistechniken vorgestellt und das Zahlensystem eingeführt wird. Jedes der insgesamt zwölf Kapitel gliedert sich in zwölf Unterkapitel, denen ein einführender Text vorangestellt ist.

Ziel des Buches ist es, wichtige mathematische Begriffsbildungen, Methoden, Ideen und Resultate vorzustellen, zu motivieren und in einen größeren Zusammenhang zu stellen. Schwerpunktmäßig geht es dabei um die zentralen Konzepte, weniger um eine erschöpfende Darstellung. Jedem Unterkapitel stehen dafür lediglich zwei Seiten zur Verfügung, was einerseits einen informellen Charakter der Darstellung nach sich sieht (ohne jedoch auf mathematische Genauigkeit zu verzichten), andererseits die Schlüsselkonzepte deutlich hervorhebt, ohne sich ins Detail zu verlieren. Hier liegt meiner Meinung nach auch die Stärke des Buches: Überblick, Orientierung und Hilfestellung für diejenigen zu geben, die einen ersten Einblick in ein neues Themengebiet gewinnen oder zentrale Konzepte eines bekannten Themengebietes wiederholen wollen. Dieses Anliegen ist den Autoren, wie ich finde, hervorragend gelungen.

Aufgrund der Platzbeschränkung von zwei Seiten muss es inhaltlich notgedrungen zu Kompromissen kommen, sei es in der Tiefe der Darstellung oder bei der Auswahl der Themen. So sind z. B. weder die Funktionalanalysis noch die dynamischen Systeme oder die partiellen Differentialgleichungen explizit mit einem Kapitel vertreten. Doch die Kürze der Darstellung macht die Qualität des Buches aus; ausführlichere Abhandlungen zu den Themengebieten des Buches gibt es ja bekanntermaßen genügend.

Nicht nur für Studierenden der Mathematik, sondern auch für ihre Lehrenden kann das Buch interessant sein. Ich habe die 12 × 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik in der Grundvorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie“ im WS 2012/12 eingesetzt. Für die ersten Vorlesungen hat insbesondere das einführende Grundlagenkapitel sehr gute Dienste geleistet. Nicht allen Erstsemestlern/innen ist aus der Schule bekannt, was eigentlich die Mathematik und ihre Sprache auszeichnet. In den 12 × 12 Schlüsselkonzepten wird das Trio Definition-Satz-Beweis an erster Stelle genannt, es werden Varianten (Theorem, Lemma, Proposition etc) erklärt und auch der Anschauung ihre wichtige Rolle zuerkannt. Während man Abschnitte über Aussagen, Junktoren und Quantoren in den meisten einführenden Büchern zum Thema finden dürfte, erscheint ein Abschnitt über die verschiedenen Beweistechniken, wie in dem vorliegenden Buch, eher die Ausnahme. Sehr dienlich war auch das Kapitel über Mengenlehre/Logik, welches den Rahmen für die Zermelo-Fraenkel-Axiomatik gab und die Gödelschen Unvollständigkeitssätze in einer Art und Weise erklärt, welche auch Erstsemestlern/innen ihre Bedeutung erahnen lässt.

Um einen besseren Eindruck vom Aufbau eines Kapitels zu bekommen seien nachfolgend die zwölf Unterkapitel zur Linearen Algebra aufgeführt: (i) Vektorräume, (ii) Lineare Unabhängigkeit und Dimension, (iii) lineare Abbildungen und Matrizen, (iv) lineare Gleichungssysteme, (v) Determinanten, (vi) Euklidische und unitäre Vektorräume, (vii) normierte Vektorräume, (viii) Orthogonalität, (ix) Dualität, (x) Eigenwerte und Eigenvektoren, (xi) Diagonalisierung, (xii) Singulärwertzerlegung und Jordansche Normalform. Für den eigentlichen inhaltlichen Teil der Vorlesung habe ich zwar auf ein ausführliches Lehrbuch zurückgegriffen (G. Stroth „Lineare Algebra“), werde aber gerade mit Blick auf die anstehende Abschussprüfung auch wieder auf das entsprechende Kapitel in den 12 × 12 Schlüsselkonzepten verweisen (siehe oben: zentralen Konzepte eines bekannten Themengebietes wiederholen).

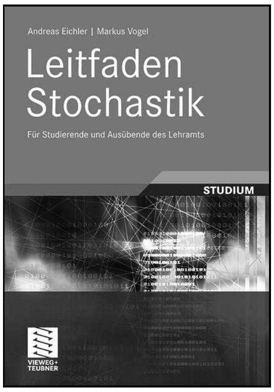
Abschließend sei angemerkt, dass das Buch einen erfrischenden Aufforderungscharakter hat, mal einen Blick in Themengebiete zu werfen, die nicht im Fokus der eigenen Arbeiten liegen.

Deiser, Oliver; Lasser, Caroline; Vogt, Elmar & Werner, Dirk: 12 × 12 *Schlüsselkonzepte zur Mathematik*. Spektrum Akadem. Verlag, Heidelberg 2011, ISBN 978-3-82742297-2, EUR 19,95

Wilhelm Huisinga, Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 11469 Potsdam, Email: huisinga@uni-potsdam.de

Andreas Eichler und Markus Vogel: Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts

Rezensiert von Norbert Henze



Dieses Buch versteht sich als fachlich orientierte Betrachtung der Leitidee Daten und Zufall für den Unterricht der Sekundarstufe I, wobei aber auch Lehramtsstudierende und Lehrende der Primarstufe angesprochen werden sollen. Im Vorwort betonen die Autoren, dass sie Wert auf einen datenorientierten Zugang zur Stochastik legen, bei dem auch elementare datenanalytische Methoden breiten Raum einnehmen. Zudem wird der Unterschied zwischen Daten und Modellen hervorgehoben. Fast jedes Kapitel beginnt mit einem Beispiel, an dem sich die Entwicklung der Methoden jeweils orientiert.

Das Werk gliedert sich in die neun Kapitel 1. *Erhebung statistischer Daten* (12 Seiten), 2. *Analyse statistischer Daten zu einem Merkmal* (35 Seiten), 2. *Analyse statistischer Daten zu zwei Merkmalen* (42 Seiten), 4. *Datenanalyse: Rückschau* (2 Seiten), 5. *Elementare Wahrscheinlichkeitsanalyse* (18 Seiten), 6. *Mehrstufige zufällige Vorgänge* (26 Seiten), 7. *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* (35 Seiten), 8. *Daten beurteilen und Simulationen* (15 Seiten) und 9. *Daten- und Wahrscheinlichkeitsanalyse: Rückschau* (2 Seiten). Die jeweiligen Seitenumfänge verdeutlichen, dass die beschreibende Statistik (Kapitel 1–4) breiten Raum einnimmt, zumal auch datenanalytische Aspekte in anderen Kapiteln stark vertreten sind. In Kapitel 1 erfährt man unter anderem etwas über Probleme im Zusammenhang mit der Erhebung von Daten und wird für Fragen der Repräsentativität von Stichproben sensibilisiert. Kapitel 2 stellt alle gängigen Maßzahlen und grafischen Darstellungmittel für eindimensionale empirische Häufigkeitsverteilungen vor. Kapitel 3 behandelt die deskriptive Statistik zweidimensionaler Daten. Hier lernt man unter anderem neben der klassischen Pearson-Korrelation noch drei weitere Korrelationskoeffizienten kennen. Nach einer kurzen Rückschau auf die ersten drei Kapitel stellen die Autoren in Kapitel 5 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnismenge, Ergebnis, Ereignis, Zufallsgröße, Verteilung einer Zufallsgröße) bereit und nähern sich dem Kolmogorovschen Axiomensystem sowohl über das Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeits-Modell als auch über das empirische Gesetz der großen Zahlen. Kapitel 6 behandelt die (paarweise) stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsgrößen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Baumdiagramme, Pfadregeln, den Satz von Bayes und kombinatorische Grundformeln. In Kapitel 7 werden die Gleichverteilung, die Binomialverteilung und die hypergeometrische Verteilung vorgestellt und die Begriffe Erwartungswert, Varianz und Schiefe einer Verteilung behandelt. Über die Tschebyscheff-Ungleichung gelangt man dann zum Bernoullischen Gesetz der großen Zahlen. Mit der Multinomialverteilung und der mehrdimensionalen hypergeometrischen Verteilung erwähnen die Autoren noch kurz zwei multivariate Verteilungen. Kapitel 8 spricht aus datenanalytischer Sicht Probleme des Schätzens und Testens an, wobei auch Permutationstests und ein einfaches Bootstrap-Verfahren thematisiert werden und Simulationsverfahren zum Einsatz kommen. Das Buch schließt mit einer kurzen Rückschau, in der die Autoren noch einmal ihre grundsätzliche Vorgehensweise betonen, die Stochastik durchweg aus der Perspektive der Daten zu betrachten.

Laut Vorwort der Autoren soll das Buch weder eine Sammlung statistischer Methoden noch eine umfassende Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, wie sie für Studierende der Mathematik oder der Stochastik anwendenden Wissenschaften vorgesehen ist. Das Werk erhebt nichtsdestotrotz den Anspruch, eine fachlich orientierte Betrachtung der *Leitidee Daten und Zufall* für den Unterricht der Sekundarstufe I in *Stochastik*, d. h. innerhalb des *Mathematik*unterrichts, zu sein. Einem solchen Anspruch wird es in den rein beschreibenden datenanalytischen Teilen mit gewissen Abstrichen gerecht. Was den zweiten Teil der Leitidee und damit das Verinnerlichen elementarer Grundbegriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeits*rechnung* betrifft, bleibt das Buch vielfach nebulös und schwammig, und es enthält zahlreiche Ungereimtheiten sowie unwahre Behauptungen. So wird man als Leser bereits auf Seite 4 verwirrt, wo ein Merkmal zunächst als eine mit dem Buchstaben Ω bezeichnete *Eigenschaft* eines Subjekts oder Objekts eingeführt wird. Auf der gleichen Seite erfährt man aber auch, dass Ω als *Menge von Merkmalsausprägungen* angesehen wird. Zwei Seiten später werden Merkmale, deren Ausprägungen reelle Zahlen sind, mit dem üblicherweise für Zufallsvariablen vorgesehenen Symbol X geschrieben und als *Abbildungen* auf der wieder mit Ω bezeichneten Menge aller Merkmalsausprägungen betrachtet. Hier wäre es ungleich klarer und üblich, von Anfang an – wie dann auf Seite 98 geschehen – den Buchstaben Ω für die Menge der Ergebnisse eines stochastischen Vorgangs zu reservieren und bei Merkmalen auch in der Notation die Analogie zu den auf Seite 99 als Funktionen auf Ω eingeführten Zufallsgrößen herzustellen.

Auf Seite 98 führen die Autoren Ereignisse als Teilmengen der Grundmenge Ω ein. Hat man also als Studierender diese Definition verinnerlicht, so wird man auf Seite 116 mit einem „Ereignis $A|B$“ konfrontiert. Dieses sollte eine Teilmenge von Ω sein; eine derartige, von den Autoren als „Ereignis A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B zutrifft“ bezeichnete Teilmenge existiert jedoch nicht. Diesem mathematischen Fauxpax schließt sich direkt ein weiterer, grundlegender Fehler an. So liest man auf Seite 117, wie die stochastische Unabhängigkeit *zweier* Ereignisse definiert ist. Auf Seite 122 wird dann quasi „en passant“ die *paarweise stochastische Unabhängigkeit* von mehr als zwei Ereignissen eingeführt, jedoch nie die $2^n - n - 1$ Gleichungen benötigende Unabhängigkeit von n Ereignissen. Ein Fehlschluss ist, dass aus der paarweisen Unabhängigkeit dreier Ereignisse A, B und C die Gleichung $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ folgen würde (Seite 117 oben). Im Gefolge ist die Definition auf Seite 145, nach der eine Bernoulli-Kette der Länge n die „n-malige, *paarweise* stochastisch unabhängige Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes“ sei, schlichtweg falsch! Hieraus kann die Gestalt der Binomialverteilung nicht mathematisch hergeleitet werden. Zumindest verwirrend ist die auch Seite 144 aufgestellte Behauptung, jeder stochastische Vorgang ließe sich als Bernoulli-Experiment modellieren. Ein mehrfacher Würfelwurf, bei dem man sich für das gemeinsame stochastische Verhalten aller Augenzahlen interessiert und dann mit der Multinomialverteilung konfrontiert wird, ist ein simples Gegenbeispiel. Verwirrend ist auch das mehrfach verwendete Adjektiv *zukünftig* im Zusammenhang mit (theoretischen) Verteilungen, so etwa auf Seite 142 oben.

Auf Seite 151 wird der Erwartungswert plakativ als *Zentrum* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben. Diese Deutung trifft zwar für symmetrische Verteilungen zu, ist aber irreführend. Warum interpretiert man nicht – wie es üblich ist – den Erwartungswert als physikalischen Schwerpunkt, den man auch ganz anschaulich mit Hilfe einer Mobile-Konstruktion beschreiben kann? Hiermit erfährt der Erwartungswert auch seine eigentliche Bedeutung als Prognosewert für arithmetische Mittel in langen Versuchsserien (Gesetz großer Zahlen). Mathematische Fehler sind das *mehrfache* – und darum nicht als Druckfehler entschuldbare – Auftreten von ω's in Satz 14 und dem sich anschließenden Beweis auf Seite 152 sowie die in der Fußnote auf Seite 154 gemachte Bemerkung, man müsse den Erwartungswert einer Binomialverteilung mit Hilfe der Darstellungsformel ausrechnen, weil man ja diese Verteilung nicht nur mit Hilfe von Indikatorsummen aus einer Bernoulli-Kette heraus erzeugen könne. Unrichtig ist auch die Bemerkung auf Seite 157, nach der für die Additivität der Varianzbildung die stochastische Unabhängigkeit der beteiligten Zufallsvariablen *bestehen muss*. Da ja auf Seite 159 kurz die Kovarianz angesprochen wird, wäre ein simples Beispiel für unkorrelierte, aber nicht unabhängige Zufallsvariablen (wie etwa Summe und Differenz der Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf) angebracht gewesen. Ärgerlich ist der Fehler auf Seite 159 unten, wonach bei stochastisch *un*abhängigen Zufallsvariablen Kovarianzen auftreten, sowie die durchweg durch „$\leq$“ zu ersetzenden Größer-Gleich-Zeichen im Beispiel auf Seite 163. Nicht minder ärgerlich sind die im Nachweis der Markov-Ungleichung auf Seite 165 stehenden Ausdrücke $P(Y(\omega))$, die sämtlich durch $P(\{\omega\})$ zu ersetzen sind. Falsch ist die auf Seite 188 aufgestellte Behauptung, die aufgeführte

Welch-Testgröße sei unter der Annahme identischer Normalverteilungen t-verteilt. Gemeint ist der Zwei-Stichproben-t-Test. Dieser besitzt jedoch eine andere Testgröße. Verwirrend sind auch Ausführungen zu Schätzfunktionen auf Seite 189, wonach „mit Hilfe einer Stichprobe ein *Schätzwert* $\hat{u}$ mittels einer Schätzfunktion $\hat{U}$ *geschätzt* wird: $\hat{U}(x_1, \ldots, x_n) = \hat{u}$." Was man erhält, ist natürlich ein Schätzwert für einen *unbekannten Parameter* wie etwa die Erfolgswahrscheinlichkeit p der Binomialverteilung. Auch die zwei Zeilen später aufgestellte Behauptung, ein Wert der Zufallsvariablen $\hat{U}(X_1, \ldots, X_n)$ sei der unbekannte Parameter u, ist absurd, wenn man bedenkt, dass das unbekannte p der Binomialverteilung eine irrationale Zahl sein kann. Die sich anschließende Diskussion über Konfidenzbereiche würde Missverständnissen vorbeugen, wenn man den unbekannten Parameter, dessen Spezifizierung erst Wahrscheinlichkeitsberechnungen ermöglicht, als Index an P anfügt, also P_u bzw. auf Seite 190 oben P_p schreibt. So sollte die Wahrscheinlichkeitsaussage $P(a \leq u \leq b) \geq 0.95$ (Seite 189 Mitte) in dieser Form nicht auftreten, sondern durch $P_u(a(X_1, \ldots, X_n) \leq u \leq b(X_1, \ldots, X_n)) \geq 0.95$ (für jedes unbekannte u) ersetzt werden. Die hier aufgeführten zum Teil erheblichen Mängel könnten noch durch Kritikpunkte im rein beschreibenden Teil ergänzt werden. So wundert man sich, weshalb das arithmetische Mittel nur bei eingipfligen Häufigkeitsverteilungen *aussagekräftig* (wofür?) sein soll (Seite 31), und dass das geometrische Mittel ein *Lageparameter* sei. So wird an keiner Stelle thematisiert, dass sich ein Lageparameter von Daten $x_1, \ldots, x_n$ bei Verschiebung eines jeden x_j um den Wert a um diesen gleichen Wert mitverschiebt, und dass ein gemeinsames Kennzeichen der Streuparameter deren Invarianz gegenüber derartigen Verschiebungen ist.

Die Autoren schreiben zu Beginn ihres Vorwortes, dieses Buch sei dem didaktisch motivierten Zitat *Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind* [...], *Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer* [...] von H. Schupp verpflichtet. Schülerinnen und Schüler sollten in der Tat lernen, dass sich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Hinblick auf Anwendungen gegenseitig bedingen. Die Prämisse für die erste Hälfte des Zitats ist jedoch, dass der Mathematikunterricht ein Grundgerüst an fundierter, mathematisch exakter Wahrscheinlichkeitsrechnung bereitstellt. Angesichts der obigen Ausführungen kann das vorliegende Werk in dieser Hinsicht als „Leitfaden Stochastik" nicht empfohlen werden.

Eichler, Andreas & Vogel, Markus: *Leitfaden Stochastik. Für Studierende und Ausübende des Lehramts.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011, ISBN 978-3-83481402-9, EUR 19,95

Norbert Henze, Institut für Stochastik, Karlsruher Institut für Technologie, Kaiserstraße 89–93, 76313 Karlsruhe,
Email: henze@kit.edu

Gilbert Greefrath und Martin Stein (Hrsg.): Problemlöse- und Modellierungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern

Rezensiert von Jürgen Maaß

Empirische Studien sind ein immer wichtigerer Bestandteil der Didaktik der Mathematik. Für eine tatsächliche Verbesserung des Mathematikunterrichts reicht es nicht aus, gute Ideen zu Inhalt und Methode zu publizieren. Nur eine gründliche Empirie kann überprüfen, ob gut gemeinte Vorschläge auch tatsächlich gut für das Lehren und Lernen von Mathematik sind. Deshalb ist es erfreulich, dass mit dem Neudruck einige – lesenswerte! – Beiträge zu empirischen Forschungen zum Bereich Problemlösen und Modellierung besser zugänglich sind.

- Christina Collet, Regina Bruder und Evelyn Komorek berichten über „Self-Monitoring durch Stundenberichte zur Unterstützung der Implementation eines Unterrichtskonzepts (S. 1–17). Wer sich diese Mühe macht und bei der Analyse solcher Berichte kompetente GesprächspartnerInnen findet, wird durch steigenden Lernerfolg belohnt.
- Gilbert Greefrath bestätigt mit seiner „Untersuchung zu Aufgaben mit unterschiedlich hohem Modellierungsanteil" (S. 18–29) eine vielfache Erfahrung aus realitätsbezogenem Ma-

thematikunterricht: Die Hauptprobleme liegen im Modellieren, nicht im Rechnen.

- Herbert Henning und Thomas Kubitza fragen (S. 30–43): „Wie kann man „Modellieren“ lernen?“ Ganz einfach: Indem man es selber macht (und reflektiert, wie und weshalb es gut oder schlecht gelingt).
- Christian Möwes, Gudrun Möwes-Butschko, Henning Schade und Martin Stein stellen im Beitrag „Der MatheZoo“ (S. 44–51) eine CD-ROM vor, die einen virtuellen Besuch im Münsteraner Allwetter-Zoo ermöglicht. Eingebettet in diesen Besuch sind Aufgaben aus dem Zooalltag wie die Erneuerung einer Hängematte für einen Gorilla: Wie viel Seil braucht man dazu?
- Gudrun Möwes-Butschko liefert die Empirie dazu: „Offene Aufgaben aus der Lebensumwelt Zoo – erste Ergebnisse einer Untersuchung der Problemlöse- und Modellierungsprozesse von Grundschülerinnen und Grundschülern bei der Bearbeitung offener, realitätsbezogener Aufgaben.“ (52–61). Die Grundschulkinder bearbeiten die „Aufgaben auf individuelle Weise und nicht nach einem vorgegebenen Schema“ (S. 61).

Gilbert Greefrath & Martin Stein (Hrsg.): Problemlöse- und Modellierungsprozesse bei Schülerinnen und Schülern; Neudruck des Bandes zum Minisymposium auf der 41. Jahrestagung des GDM in Berlin 2007, WTM Verlag Münster 2012, ISBN 978-3-942197-26-7, 63 Seiten, Euro 14,90

Juergen Maaß, Universitaet Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich, Email: Juergen.Maasz@jku.at

Michael Hellus: Lineare Algebra nicht-vertieft

Rezensiert von Joachim Gräter

Das Buch *Lineare Algebra nicht-vertieft* von Michael Hellus ist aus einer Reihe von Lehrveranstaltungen entstanden, die der Autor an der Universität Regensburg für Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt- und Realschulen angeboten hat. Inhaltlich orientiert es sich dabei an den sogenannten Kerncurricula des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus, wie man gleich dem Vorwort entnehmen kann. Das Buch behandelt somit im Einzelnen das Lösen linearer Gleichungssysteme, Vektorräume und Basen, lineare Abbildungen und Matrizen, Determinanten, Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit, Längen und Winkel in Euklidischen Vektorräumen, Diagonalisierbarkeit reeller symmetrischer Matrizen, affine Räume, Kegelschnitte und ihre Normalformen sowie Vielecke und Polyeder. Die Vektorräume sind stets endlich-dimensional, aber über beliebigen Körpern, natürlich mit Ausnahme der Euklidischen Vektorräume, die Beispiele sind stets reell und bei den Kegelschnitten 2-dimensional. Neben der Linearen Algebra selbst, die auf den ersten 200 Seiten in Form von Definitionen, Sätzen, Bemerkungen, Beweisen und Beispielen präsentiert wird, gibt es einen Abschnitt mit über 100 Übungsaufgaben, gefolgt von einem Block von etwa 80 Seiten mit den zugehörigen Lösungen. Jeder, der einmal Lehrveranstaltungen über Algebra, Lineare Algebra oder Geometrie für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen abgehalten hat, wird sicherlich sehr von der Stofffülle überrascht sein und davon, in welcher Allgemeinheit diese dann auch behandelt wird. Insofern ist der Zusatz *nicht-vertieft* im Titel des Buches etwas überraschend, aber dazu später mehr. Ich würde sogar so weit gehen und behaupten, dass es ein großes Glück wäre, würde jeder Gymnasiallehrer und jede Gymnasiallehrerin im Bereich Lineare Algebra so viel Wissen vorweisen können, wie hier dargestellt ist.

Unter den oben genannten Aspekten macht das vorliegende Buch einen recht guten Eindruck und es ist sicherlich jedem zu empfehlen, der sich in einem Lehramtsstudiengang auf eine Klausur vorbereiten muss oder der im späteren Schuldienst sein Wissen über Lineare Algebra auffrischen möchte oder an weiterführenden Aufgaben interessiert ist. Bei genauerem Lesen treten dann aber doch eine Reihe von Eigentümlichkeiten auf, die den

Gesamteindruck trüben. Diese beziehen sich überwiegend auf die durchaus anzuerkennenden Bemühungen des Autors, die Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- und Realschulen mit zu vielen mathematischen Formalismen und allgemeinen grundlegenden Überlegungen zu verschonen. So ist zunächst positiv zu bemerken, dass Definitionen und Betrachtungen, die außerhalb der Linearen Algebra liegen, erst dann eingeschoben werden, wenn dies auch tatsächlich notwendig ist, zum Beispiel der Einschub über vollständige Induktion im Zusammenhang mit dem Austauschsatz von Steinitz. Dieses Prinzip wird jedoch nicht immer konsequent verfolgt oder sinnvoll umgesetzt. So werden zum Beispiel Abbildungen erst auf Seite 71 definiert, aber schon auf Seite 39 benutzt sowie der Begriff der Gruppe erst auf Seite 93 eingeführt, obwohl auf Seite 32 Körper und auf Seite 39 Vektorrräume vorgestellt werden. Kleinere gruppentheoretische Aussagen werden dann notgedrungen jeweils für die additive und die multiplikative Gruppe eines Körpers bewiesen und zu allem Überfluss auch noch für die additive Gruppe eines Vektorraums. Bei den invertierbaren Matrizen wird schließlich auf Seite 68 darauf verzichtet, in diesem Zusammenhang noch einmal zu zeigen, dass das inverse Element, also die inverse Matrix eindeutig bestimmt ist. Dazu wird innerhalb der Definition auf die Eindeutigkeit verwiesen und erwähnt, dass ähnliche Aussagen schon zuvor bewiesen wurden und die Beweise sinngemäß übernommen werden können. Eine solche Vermischung von Definitionen, Erklärungen und Bemerkungen kommt häufig vor und darf nach meiner Meinung gerade in einem Buch für Lehramtsstudierende nicht auftreten. Auch ist es im Sinne der Studierenden gut gemeint, lineare Gleichungssysteme gleich zu Beginn des Buches zusammen mit dem Gauß-Algorithmus zu behandeln und dabei mehr auf Anschauung und Verständnis und weniger auf Abstraktion Wert zu legen. Unglücklich ist dabei allerdings, dass überhaupt nicht erklärt wird, aus welchem Bereich die *Zahlen* stammen, die verwendet werden und die die Lösungen bilden sollen. Erst auf Seite 37 nach Einführung der Körper wird bemerkt: *Alles, was wir in Kapitel 1 gemacht haben, funktioniert über jedem Körper*. Und so kommen wir gleich zum nächsten Schwachpunkt, nämlich die für meinen Geschmack manchmal zu saloppe Sprache: „..., so hat das Ding keine Trapezgestalt“, „Jede lineare Abbildung ... kommt von einer Matrix ... her“, „Man will verstehen, was A macht“ und „Ein affiner Raum besteht aus drei Dingen ... “ sind nur einige Beispiele. Ich meine, dass man sehr genau zwischen der gesprochenen und der geschriebenen Sprache unterscheiden muss. In Lehrveranstaltungen ist es für das Verständnis sicherlich hilfreich, Sachverhalte auch umgangssprachlich zu formulieren. Dabei ist das gesprochene Wort aber oft nur flüchtig und für den Augenblick. Länger wirkt meistens das geschriebene Wort. Dieses prägt sich auf Dauer ein und beeinflußt auch die eigene Sprache. Eine weitere Besonderheit dieses Buches ist die Degradierung vieler wichtiger Resultate zu Bemerkungen, die üblicherweise Sätze sind und hier auch bewiesen werden. Nach welchen Kriterien in diesem Buche Sätze plötzlich nur noch Bemerkungen sind, hat sich mir nicht erschlossen, wird sich möglicherweise den Studierenden auch nicht erschließen und damit ein falsches Bild hinterlassen.

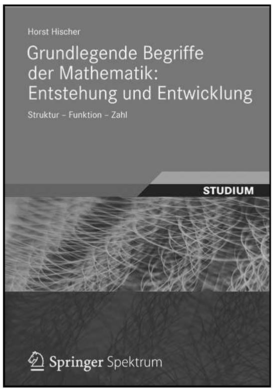
Zusammenfassend habe ich den Eindruck, dass das vorliegende Werk kein Lehrbuch im üblichen Sinne ist, sondern vielmehr ein Skript in Buchform zu einer bestimmten Lehrveranstaltung, das als Begleittext benutzt werden kann. Dieser Eindruck wird dadurch verstärkt, dass es keinen Index gibt und keine Hinweise auf andere Literatur. Wer sich auf das Bayerische Staatsexamen in Mathematik vorbereiten möchte, ist hier vermutlich recht gut bedient. Vertiefte Einsichten in das mathematische Argumentieren und die mathematische Sprache werden nur eingeschränkt geboten, aber davor warnt ja auch schon der Titel des Buches.

Hellus, Michael: *Lineare Algebra nicht-vertieft*. Logos Verlag, Berlin 2012, ISBN 978-3-83253110-2, EUR 29,80

Joachim Gräter, Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 11469 Potsdam, Email: graeter@rz.uni-potsdam.de

Horst Hischer: Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung

Rezensiert von Joachim Gräter



Dieses Buch wendet sich an alle, die sich beruflich mit Mathematikunterricht beschäftigen, also an (angehende) Lehrer und Lehrerinnen sowie an alle, die diese in Studienseminaren oder Hochschulen ausbilden. Thematisch beschäftigt es sich überwiegend mit grundlegenden Aspekten der Mathematik zum Beispiel aus den Gebieten Geometrie, Algebra, Mengenlehre und Logik. Dabei geht es weniger um die Präsentation möglichst vieler Einzelresultate sondern um das Grundverständnis, also um fundamentales Verstehen. Begriffe wie Struktur, Funktion und Zahlen sowie deren Beziehung werden in vielfältiger Weise von unterschiedlichen Standpunkten aus untersucht und beleuchtet, aber immer mit Blick auf die jeweilige Bildungsbedeutsamkeit. Nur der, der viel weiß und der vor allem viel verstanden hat, kann Wissen auch weitergeben. Das erscheint einleuchtend. Aber mathematisches Wissen und Verständnis alleine reichen eben noch nicht aus, um einen ertragreichen Unterricht zu gestalten. Und so berücksichtigt der Autor in seinem Buche neben mathematischen, mathematik-geschichtlichen und pädagogischen Aspekten auch immer wieder solche der Psychologie, der Soziologie und der Philosophie. Das klingt sehr anspruchsvoll, macht neugierig und weckt hohe Erwartungen. Diesen wird der Autor zweifelsohne aber auch gerecht. Hier schreibt ganz offenbar jemand, der in allen eben angesprochenen Gebieten nicht nur bewandert und gebildet ist, sondern ohne Mühe aus dem Vollen schöpfen kann. Das ist allerdings auch nicht sehr verwunderlich, denn das vorliegende Buch stellt, so kann man es im Vorwort schon lesen, die Ernte aus zahlreichen Vorlesungen und Seminaren dar, die der Autor seit 1971 im Rahmen der Ausbildung von angehenden Lehrern und Lehrerinnen konzipiert und durchgeführt hat.

Ein Versuch, mit nur wenigen Worten zu erklären, welche Themen das vorliegende Buch im Einzelnen behandelt und welche Rolle dabei die eben erwähnten unterschiedlichen Aspekte spielen, wird kaum gelingen. Auf über 360 Seiten stellt der Autor in über 180 Unterabschnitten sein Wissen in komprimierter Form dar. Jeder Satz und jede Formulierung wirken gut durchdacht. Keine Bemerkung ist zu viel, nichts ist nachlässig oder ungenau bearbeitet. Der gesamte Text wirkt dicht und intensiv und man hat auch den Eindruck, als würde der Autor nur einen kleinen Teil von dem darbieten, womit er sich innerhalb der letzten 40 Jahre beschäftigt hat. Die folgende Auflistung gibt aber doch grob wieder, wovon das Buch handelt: Mathematik zwischen Anwendung und Spiel, Mathematik im kulturhistorischen Kontext, Begriffe und Begriffsbildung in der Mathematik, Algebra zwischen Verfahren und Struktur, Logik und Mengenlehre, Kulturgeschichte des Funktionsbegriffs, Strukturierung durch Relationen und Funktionen, Zahlbegriffe in der Antike, Axiome der natürlichen Zahlen, Brüche und Bruchentwicklung, archimedisch angeordnete Körper und ihre Vervollständigung. Das alles sind zweifelsohne fundamentale Themen innerhalb der Mathematik, mit denen sich (angehende) Lehrer und Lehrerinnen einmal auseinandergesetzt haben sollten, bevor sie versuchen, einen mathematisch fundierten und ertragreichen Unterricht zu gestalten. Aber wann wird den heutigen Studierenden hierfür die notwendige Zeit eingeräumt? In immer kürzeren Abständen werden die Lehramtsstudiengänge reformiert und mit jeder Reform wird den mathematischen Lehrveranstaltungen eher weniger als mehr Platz gewährt. So ist wohl jeder Einzelne dazu aufgerufen, sich selbst im Laufe seiner Ausbildung oder später während der Zeit als Lehrer oder als Lehrerin mit geeigneter Literatur das fehlende Wissen zumindest teilweise anzueignen. Ob ein Buch wie dieses hierfür gerne zur Hand genommen wird, hängt natürlich auch davon ab, wie leicht und angenehm es zu lesen ist. Grundsätzlich muss man sich dabei aber im Klaren sein, dass das Lesen mathematischer Texte mit abstrakten Definitionen und formalen Beweisen immer als recht mühsam empfunden wird. Dem Autor gelingt es jedoch gerade in der ersten Hälfte des Buches und im Zusammenhang mit Brüchen und der Bruchentwicklung durch das geschickte Einbringen von Aspekten zum Beispiel aus der Geschichte der Mathematik, der Psychologie, der Soziologie oder der Philosophie das Lesen aufzulockern. Insbesondere die historischen Bemerkungen sind durchgehend sehr interessant und werden den Lesern und Leserinnen über gewisse Durststrecken hinweghelfen. Gekonnt versteht es der Autor, auch durch viele Zitate oder persönliche Bemerkungen die Aufmerksamkeit der Leser und Leserinnen immer wieder auf das jeweilige Thema zu lenken. Manchmal gerät er dabei sogar ins Plaudern, wenn er Anekdoten aus seiner eigenen Studentenzeit erzählt oder sich als nachdenklicher und verständnisvoller Großvater im Gespräch mit seinem Enkel präsentiert. Dabei darf jedoch nicht vergessen werden, dass sich das vorliegende Buch ernsthaft mit Mathematik auseinandersetzt und in großen Bereichen gerade den (angehenden) Lehrern und Lehrerinnen viel abverlangt. Wer hier nicht ein Mindestmaß an mathematischer Vorbildung mitbringt und für entsprechende Fragestellungen bereits sensibilisiert ist, wird es schwer haben. So werden nicht nur die Anfänge der Mengenlehre und mathematischen Logik in aller Ausführlichkeit präsentiert, sondern auch Axiomensysteme auf Unabhängigkeit und Vollständigkeit im Zusammenhang mit konkreten Beispielen diskutiert. Wer hier zum ersten Male vom Wohlordnungssatz oder Auswahlaxiom hört oder mit den Fragen konfrontiert wird, ob es eine leere Menge gibt und ob sie im Falle der Existenz sogar eindeutig bestimmt ist, ob unendliche Mengen existieren und was eine Paarmenge ist und wie sie exakt definiert werden kann, der wird eine Weile brauchen, bis er alles im Selbststudium verstanden hat. Das ist sicherlich nicht dem Buch anzulasten, sondern liegt gewissermaßen in der Natur der Sache. Mein persönlicher Eindruck ist, dass man in den Lehrveranstaltungen der Lehramtsstudiengänge häufig schon mit den Homomorphiesätzen für Gruppen und Ringe an die Grenzen des Abstraktionsvermögens der Studierenden stößt und dass nur wenige diese abstrakten Resultate selbstständig auf konkrete Beispiele anwenden können. Hier ist das Buch doch ziemlich locker und unbefangen. Wie selbstverständlich wird der Monomorphiesatz für Dedekind-Peano-Algebren formuliert und bewiesen, um dann später Zahlenfolgen im Zusammenhang mit Bruchentwicklungen recht allgemein als Funktionen aufzufassen, deren Definitionsmenge die Trägermenge einer Dedekind-Peano-Algebra ist. Wer Mathematik so noch nie erlebt hat, dem wird Mathematik in einem neuen Licht erscheinen, hoffentlich positiv überrascht oder sogar fasziniert. Am Institut für Mathematik der Universität Potsdam sind die Gebiete Mengenlehre und mathematische Logik zurzeit noch durch eine Professur vertreten. Die entsprechenden Lehrveranstaltungen werden gerne von Lehramtsstudierenden besucht und immer wieder werden hier auch Themen für Bachelor- oder Masterarbeiten in den Lehramtsstudiengängen vergeben. Aber schon bald wird das nicht mehr möglich sein und insgesamt ist zu beobachten, wie ganz allgemein die hier behandelten Themen der Mathematik allmählich aus den Lehramtsstudiengängen verschwinden. Eine Entwicklung, die sehr bedauerlich aber vermutlich nicht aufzuhalten ist. Das vorliegende Buch hat sicherlich das Format und die Qualität, für die Zukunft das zu bewahren, was zumindest in großen Teilen zum Standardwissen einer qualifizierten Lehrkraft in Mathematik gehören sollte.

Allen, die sich beruflich mit Mathematikunterricht beschäftigen, kann ich das vorliegende Werk nicht nur mit gutem Gewissen empfehlen, sondern ich möchte ihnen sogar nahelegen, es sich als gedrucktes Exemplar zu beschaffen, es sich griffbereit in unmittelbare Nähe ihres Schreibtisches zu stellen und es sorgfälltig zu studieren oder einfach nur bei jeder sich bietenden Gelegenheit in ihm herumzustöbern.

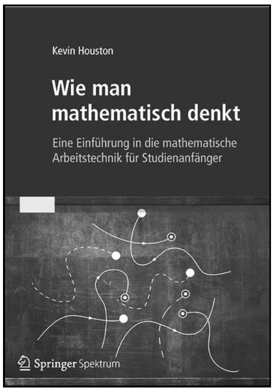
Hischer, Horst: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*. Springer Spektrum, Wiesbaden 2012, ISBN 978-3-83481888-1, EUR 34,95

Joachim Gräter, Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 11469 Potsdam, Email: graeter@rz.uni-potsdam.de

Kevin Houston: Wie man mathematisch denkt.

Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger

Rezensiert von Horst Hischer



Rezensionen sind zwar einer objektiven Sichtweise verpflichtet, gleichwohl sind sie nicht frei von subjektiven Einschätzungen und Vorlieben. Das gilt auch für die Rezension dieses Buchs, bei dem auf den ersten Blick der Titel verblüfft: Wie soll sich wohl das hier genannte Anliegen für den Adressatenkreis in einem Buch adäquat darstellen lassen? Und ferner: Gibt es eigentlich *das* mathematische Denken? Beim zweiten Blick macht auch das Inhaltsverzeichnis stutzig: Sollte es hier etwa um „Stricken ohne Wolle“ gehen? Denn nur wenige Kapitel scheinen inhaltlich konkret(er) zu werden, und so scheint es abwegig zu sein, Studienanfängern „mathematische Arbeitstechniken“ ohne konkreten inhaltlichen Bezug vermitteln zu wollen.

Die sorgfältige Lektüre der ersten beiden Kapitel bestätigte meinen Anfangsverdacht und führte bei mir dazu, dieses XII+323 Seiten umfassende Buch an die Seite zu legen. Nachdem ich das Buch zwei Wochen später eher zufällig und lustlos mittendrin aufschlug, blieb mein Blick erstaunt hängen, und fortan konnte ich mich bis zum Ende des Buchs nicht mehr lösen: Nach dem spontanen negativen Vorurteil erweist es sich nunmehr als ein Werk, das trotz einiger (wenn auch leicht behebbarer und per saldo meist marginal erscheinender) Mängel dem Adressatenkreis empfohlen sei und das durchaus auch methodisch befruchtend auf viele Vorlesungen und Seminare wirken mag. Im vorliegenden Rahmen seien aus Platzgründen nachfolgend nur einige wesentliche Mängel und Vorzüge exemplarisch herausgegriffen, beginnend mit einigen grundsätzlichen Anmerkungen.

Das Eingangszitat *„Frage: Wie viele Monate haben 28 Tage? Die Antwort des Mathematikers: Alle.“* soll wohl zeigen, dass Mathematiker anders denken als „normale“ Menschen – und so ist der Rezensent gespannt, zu erfahren, ob und wie es dem Autor gelingen mag, sein Anliegen zu realisieren. Die dann vom Autor gegebenen Antworten auf seine Frage *„Warum sollte jemand den Wunsch verspüren, Mathematiker zu werden?“* mit *„[...] mächtiges Werkzeug“* und *„Berufe, in denen Mathematik benutzt wird, sind oft gut bezahlt [...]“* führen zwar – aus meiner Sicht: leider – in eine utilitaristische Richtung, doch erfreulicherweise wird diese Einseitigkeit an späterer Stelle positiv aufgehoben. Der Autor will wohl mit diesem Hinweis die Adressaten nur dort abholen, wo sie aus seiner Sicht vermutlich stehen.

Die im Vorwort zu lesende Erklärung *„Ich will Ihnen beibringen, wie ein Mathematiker zu denken* [...]“ passt zum englischen Originalbuchtitel „How to Think Like a Mathematician“, aber gemäß Felix Klein, Jacques Hadamard und Leone Burton gibt es recht unterschiedliche Denkstile der Mathematiker (vgl. den Preprint Nr. 77 von Anselm Lambert in http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/). So kann es hier also nur darum gehen, dass der Autor (als Zahlentheoretiker) *seine* Denkweise bzw. *seinen* Denkstil vorstellt, wobei zugleich kritisch zu fragen ist, ob man so etwas „jemandem beibringen“ kann bzw. ob sich das nicht jeder selber erarbeiten muss. Wertfrei sei an dieser Stelle ergänzt, dass der Autor seinen Adressaten diese von ihm propagierte mathematische Denkweise in einer starken Betonung verbalisierter mathematischer Formulierungen und einer damit verbundenen zurückhaltenden Verwendung formal-symbolischer Darstellungen vorstellt – und das vermutlich in voller methodischer Absicht.

Das Buch ist in sechs Teile gegliedert: *I Grundtechniken für Mathematik-Studierende* (Kapitel 1–5), *II Logisch Denken* (Kapitel 6–13), *III Definitionen, Sätze, Beweise* (Kapitel 14–19), *IV Beweistechniken* (Kapitel 20–26), *V Mathematik, die jeder gute Mathematiker braucht* (Kapitel 27–31) und *VI Abschließende Bemerkungen* (Kapitel 32–35), dazu noch drei nützliche Anhänge *(A: Das griechische Alphabet, B: Häufig benutzte Symbole und Bezeichnungen, C: Wie man beweist, dass ...)*.

In den ersten beiden Teilen geht es um den technischen Umgang mit Mengen, Funktionen und logischen Grundstrukturen. Gleich im ersten Kapitel – *„Mengen und Funktionen“* – ist an einigen Stellen Einspruch zu erheben: So folgt auf die Mitteilung, dass *„Die Menge* [...] *das grundlegende Objekt der Mathematik“* sei und dass *„Die Mathematiker* [...] *eine Menge [nehmen] und* [...] *wunderbare Dinge damit]“* anstellen würden, unmittelbar „Definition 1.1", in der *„Menge"* als *„wohldefinierte Sammlung von Objekten"* tatsächlich „definiert" wird – ohne übrigens zu erörtern, was denn „wohldefiniert" bedeutet und wann denn etwas „nicht wohldefiniert" sei. So werden hier die Adressaten gleich zu Beginn nicht gut präpariert, was noch verstärkt wird, indem der Autor in einer Fußnote darauf hinweist, dass die *„korrekte mathematische Definition einer Menge"* wesentlich komplizierter sei. Dieser Lapsus ist jedoch leicht behebbar, indem „Definition" z. B. durch „Verabredung" und eine passende Anmerkung ersetzt wird. Sieht man von diesem bedauerlichen grundlegenden Fehler ab, so ist die gewählte „intuitive Vorgehensweise" inklusive der folgenden Beispiele allerdings sinnvoll.

Als *„grundlegendste Menge in der Mathematik"* wird die „leere Menge" als *„Menge ohne Elemente"* definiert, ohne zu begründen oder zu motivieren, warum es sinnvoll ist, eine solche einzuführen. Der Hinweis, dass *„doch tatsächlich* [...] *die leere Menge unverzichtbar für die Grundlagen der Mathematik"* sei, kann wohl kaum zu kritischem Denken und zum Fragen erziehen bzw. anleiten, wie es etwa der vierte gute „Ratschlag" auf S. XI fordert: *„Stellen Sie alles infrage – Seien Sie skeptisch gegenüber allen Ergebnissen, die Ihnen präsentiert werden."* Darf erwartet werden, dass die Adressaten das hier befolgen (können)? Und was sollen sie mit dem Hinweis anfangen, dass man mit Hilfe der leeren Menge *„eine Theorie des Zählens aufbauen"* kann, wenn das nirgendwo später aufgegriffen wird? Unvermittelt wird dann eine „Definition" für Mengengleichheit mittels *„Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben"* präsentiert („genau dann" fehlt hier noch). Zwar wird nicht erörtert, weshalb die Mengengleichheit überhaupt einer Definition bedarf, vor allem ist *diese* „Definition" nicht scharf, sondern eher intuitiv, denn was soll *„wenn sie dieselben Elemente haben"* bedeuten? Auch an den folgenden Beispielen wird das nicht geklärt, was aber möglich wäre. Gleichwohl erfährt diese Vorgehensweise in der Rückschau des gesamten Buchs ihren Sinn, wird doch später all dies vertiefend (inkl. „genau dann, wenn") aufgegriffen und auf diese Weise zu Beginn die Verständnisbarriere niedrig gehalten.

Anschließend wird *„endliche Menge"* als Menge, die *„aus endlich vielen Elementen besteht"* definiert. Hier wird natürlich der Teufel mit dem Beelzebub ausgetrieben, und in einem „normalen" Lehrbuch wäre eine solche Vorgehensweise verfehlt: Man würde eine derartige Formulierung vielleicht noch durchgehen lassen, wenn sie nicht in den Rang einer „Definition" gehoben würde. Vor allem braucht „endlich" doch den Kontrast zu „unendlich", um nicht inhaltsleer zu sein. Ferner: Die Elementanzahl einer endlichen Menge in derselben Definition mit „Kardinalität" zu bezeichnen, heißt mit Kanonen nach Spatzen schießen, denn der mit „Kardinalität" (oder „Mächtigkeit") bezeichnete Begriff entfaltet doch seine Bedeutung erst bei unendlichen Mengen. Auch die anschließende Bemerkung *„Wenn X unendlich viele Elemente hat, dann wird es schwierig, ihre Kardinalität zu definieren"* ist an dieser Stelle wohl kaum hilfreich. So wäre es in diesem Einführungskapitel sowohl redlich als auch ausreichend, nur naiv von „endlichen und unendlichen Mengen" zu sprechen. Immerhin wird auf Kapitel 30 verwiesen, wo dann tatsächlich im Zusammenhang mit Abzählbarkeit auf das Endliche und sogar auf verschiedene Arten des Unendlichseins eingegangen wird. So ist auch dieser Teil des ersten Kapitels erst in der Gesamtschau des Buchs zu rechtfertigen.

Die anschließende Behandlung von „Teilmenge" und „echte Teilmenge" ist als gelungen anzusehen, sowohl bezüglich der Definition als auch der Beispiele und der vertiefenden Betrachtungen. Zwar fragt man sich an dieser Stelle, warum der Autor zuvor die Definition der Mengengleichheit nicht analog zur Teilmengenbeziehung gewählt hat. Aber auch hier gilt, dass dieses an späterer Stelle des Buchs hinreichend ausführlich geschieht, so dass wiederum eine methodische Absicht vorliegen mag, in einer „spiraligen" Vorgehensweise anfangs behutsam vorzugehen. Erfreulich ist die Verwendung der Symbole $\subseteq$ bzw. $\subset$ für „Teilmenge von" bzw. „echte Teilmenge von" und die Begründung des Vorzugs dieser Symbolik gegenüber den in der Mathematik (leider!) häufig anzutreffenden Symbolen $\subset$ bzw. $\subsetneq$. Schön ist ferner die Erörterung von $\not\subset$ und von *„wenn $X \subseteq Y$, dann $|X| \leq |Y|$"*. Allerdings ist das Beispiel *„wenn $X \neq \emptyset$, dann ist $\emptyset \subset X$"* zwar richtig, aber wie sollen die Adressaten das an dieser Stelle aufgrund des Vorangegangen verstehen? Liegt hier vielleicht eine unausgesprochene methodische herausfordernde Absicht vor?

Es folgt eine sprachlich aufwendige „Definition" von „Funktion" (synonym „Abbildung") als „Zuordnung", dazu „Wert", „Definitionsmenge" (synonym „Definitionsbereich") und „Zielmenge". Die „Zielmenge" synonym auch „Bildbereich" zu nennen, mag angehen, aber „Wertebereich" mit „Zielmenge" zu identifizieren, ist nicht akzeptabel: „Mathematisches Denken" wird so nicht gefördert. Auch liegt ein innerer Widerspruch vor, wenn in einem späteren Beispiel eine Funktion f angegeben wird, bei der *„nicht jedes Element der Zielmenge ein Wert von f ist"*. Ergänzend soll eine Graphik Typisches solcher „Zuordnungen" visualisieren, und dazu findet man den verblüffenden Hinweis: *„Beachten Sie, dass jedem Element aus X eines in Y zugeordnet sein muss* [...]." Hier fehlt der wesentliche

Zusatz „genau", insbesondere, wenn es doch darum gehen soll, wie man „mathematisch denkt".

In einem anderen Beispiel werden Polynome als *„spezielle mathematische Objekte"* vorgestellt, die man als *„Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen"* kann, *„wenn wir $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ für $x \in \mathbb{R}$ definieren, wobei $a_0, \ldots, a_n$ feste reelle Zahlen sind"*. Das mag noch angehen, obgleich es unschön und formal „unsauber" ist, das Polynom $f(x)$ (also hier den Funktionsterm!) als Funktion anzusehen. Jedoch wird dann in einem weiteren Beispiel die Feststellung getroffen: *„Falls $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziert werden kann (beispielsweise, wenn es ein Polynom ist), dann ist die Ableitung, bezeichnet mit f', eine Funktion."* Hier ist mehreres zu beanstanden: Zunächst kann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht „differenziert" werden, sondern allenfalls f, denn f ist eine Funktion, während $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doch gerade besagt, dass f eine Funktion ist (und so wurde es zuvor auch definiert!). Weiterhin versteht man diese Darstellung nur, wenn bereits Grundkenntnisse der Analysis vorhanden sind, aber dann kann man doch gleich „falls f differenzierbar ist" sagen. Ferner ist f' nicht die „Ableitung", sondern die „Ableitungsfunktion". Doch dann ist der gesamte Text eine Trivialität, der keinen Erkenntnisgewinn bringt, wie z. B. folgende knappe alternative Banalformulierung zeigen würde: „Ist f differenzierbar, so ist auch f' eine Funktion."

Bei der Übungsaufgabe *„Bestimmen Sie den größten Definitionsbereich, für den $f(x) = x/(x^2 - 5x + 3)$ eine Funktion ist"* fehlt einerseits die Angabe einer Grundmenge, aus der man den „größten Definitionsbereich" aussondern kann, und formal ist zu beanstanden, dass weder $f(x) = x/(x^2 - 5x + 3)$ noch $f(x)$ eine Funktion ist, sondern f – und dieses auch im Sinne der zuvor getroffenen Definition.

Beim recht offenen Auftrag, z. B. $A \cap (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ anhand von Beispielen zu untersuchen, weiß zwar der Kenner, was dem Autor vorschwebt, nur scheint es angebracht zu sein, die Adressaten deutlicher auf die Spur zu setzen, u. a. dadurch, dass durch weitere mengenalgebraische Terme auch eine nicht vorliegende „Gleichheit" mit einbezogen wird, etwa durch Vergleich mit $A \cup (B \cap C)$, verbunden mit der Frage, ob sich eine Vermutung ergäbe. Andererseits ist positiv hervorzuheben, dass all solche an dieser Stelle von mir vermisste und für nützlich gehaltene Aspekte in den folgenden Kapiteln eine große Rolle spielen. So handelt es sich wohl eher um individuelle Geschmacksfragen der Vorgehensweise, also um eingangs genannte „subjektive Aspekte".

Dieses erste Kapitel endet wie alle weiteren sinnvoll mit einer „Zusammenfassung", bei der man u. a. folgende Feststellung findet: *„Eine Funktion ordnet Elementen einer Menge Elemente einer anderen (oder derselben) Menge zu."* Das stimmt zwar, kennzeichnet aber nur eine Relation, nicht aber eine Funktion, und damit wird dem Kennenlernen mathematischer Denkweisen ein Bärendienst erwiesen.

Im zweiten Kapitel – *„Mathematik lesen"* – betont der Autor zu Recht, dass das mathematische Denken auch das Lesen mathematischer Texte betrifft, welches sich vom Lesen manch anderer Fachtexte unterscheide; so sei etwa *„Querlesen* [...] *in der Mathematik* [...] *keine gute Methode"*, und es sei nützlich, *„verschiedene Aufbereitungen eines Themas"* und *„aktiv* [...] *mit Papier und Bleistift"* zu lesen. Andererseits widerspricht er sich im selben Kapitel mit dem Tipp *„Überfliegen Sie den Text"*, und seiner Empfehlung *„Lesen Sie erst die Aussagen – später die Beweise"* vermag ich nicht zu folgen, führt doch oft erst das Durchdringen eines Beweises zum Verständnis eines Satzes.

Die Übungsaufgaben und der Rückgriff auf Beispiele aus Kapitel 1 sind hingegen gut. Jedoch mag der Hinweis, dass man ein Thema nicht verstanden habe, wenn man eine Übungsaufgabe nicht lösen könne, bei den Adressaten zu Enttäuschungen führen, falls nämlich die Aufgaben nicht klug konzipiert und formuliert sind. Die Empfehlung, in Fachzeitschriften und wissenschaftlichen Magazinen zu lesen, ist eingeschränkt gut, denn nur wenige Fachzeitschriften sind für Anfänger geeignet. Auch etliche weitere (z. T. in Aufgaben gekleidete) Hinweise sind nützlich, jedoch sind die Empfehlungen *„Finden Sie drei Bücher über dasselbe Thema. Suchen Sie sich einen mathematischen Begriff, der in allen drei Büchern vorkommt* [...]*"* und *„Welches ist* [...] *Ihre Lieblingsdefinition?"* nur bedingt gut, wie man an der oben erwähnten Definition von „Menge" sieht.

Die weiteren drei Kapitel des ersten Teils sind, abgesehen von Kleinigkeiten, im Wesentlichen erfreulich. Sie betreffen das *Schreiben von Mathematik* und das *Problemlösen*, wobei das Letztgenannte mit Bezug auf Pólyas Vierpunkteplan vielfältige vorzügliche Beispielprobleme und Übungsaufgaben enthält, die elementar zu verstehen sind, aber dennoch für Anfänger nicht auf Anhieb lösbar sind, weil noch keine Theorien dafür zur Verfügung stehen (deren Entwicklung oder Findung aber motiviert wird).

Im zweiten Teil werden ausführlich Grundlagen logischer Strukturen unter Einbezug von Elementen der Aussagenlogik entwickelt, wobei auf die Verwendung der üblichen aussagenlogischen Symbole zugunsten einer verbalen Fassung verzichtet wird. Obwohl der Autor betont, dass es *„überraschend schwierig"* sei, *„genau zu definieren, was eine mathematische Aussage ist"*, stellt er dennoch zu Beginn mit *„Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist – aber nicht beides“* eine „Definition“ vor, die aber (wie bei Mengen, s. o.) nur den Rang einer „Verabredung“ haben kann. Erfreulicherweise wird die kulturelle Problematik der doppelten Verneinung gestreift, und die logischen Verknüpfungen „und“ und „oder“ werden über Wahrheitstabellen definiert, wobei zwar die alltagssprachliche Doppeldeutigkeit des „oder“ erwähnt wird, jedoch merkwürdigerweise das ausschließende „oder“ aussagenlogisch nicht betrachtet wird. Es findet (wie meist in der Literatur) keine Unterscheidung zwischen Subjunktion und Implikation statt (analog bei der Äquivalenz), und letztere wird ebenfalls über Wahrheitstafeln erklärt, wobei „$-1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$“ als Begründung für die Wahrheit im Fall (f, w) gekünstelt wirkt und den Anfänger wohl nicht zu überzeugen vermag. Davon abgesehen ist die Untersuchung von Feinheiten der Implikation hervorhebenswert, und hierzu gehört auch die ausführliche Erörterung von *Umkehrung*, *Inversion*, *Konversion* und *Kontraposition* in Bezug auf eine *Implikation*. Interessant und lobenswert ist auch die getroffene Unterscheidung von *Gegenbeispielen* (zur Falsifizierung einer Vermutung im Sinne von Popper) und *Nichtbeispielen* (für eine Definition), wobei der Autor Letztere an späterer Stelle auch für Theoreme heranzieht.

Aussageformen werden kurz angesprochen, wobei dies eigentlich erst im Zusammenhang mit Quantoren und Variablenbindung sinnvoll wäre. Während Letztere leider nicht thematisiert wird, werden All- und Existenzquantor in einem eigenen Kapitel behandelt, und zwar unter Verwendung der Symbole $\forall$ und $\exists$ (anstelle von $\bigwedge$ und $\bigvee$ in Konsequenz zur Nichtverwendung der Logiksymbole $\wedge$ und $\vee$). Inhaltlich werden diese Quantorsymbole an Beispielen verständlich entwickelt, wobei nach Einführung von $\forall x \in M$ ohne Erläuterung unvermittelt auch $\forall x$ verwendet wird. Bezüglich der Vertauschbarkeit bzw. Nichtvertauschbarkeit mangelt es an beeindruckenden und überzeugenden Beispielen.

Die „Komplexität“ von Aussagen mit mehreren Quantoren wird erörtert, insbesondere, *„wenn sich $\forall$ und $\exists$ abwechseln“*. So wird wohl der Satz *„Beispielsweise wird $\forall x\ \forall z\ \exists y : P(x, y, z)$ im Allgemeinen einfacher sein als $\forall x\ \exists z\ \forall y : P(x, y, z)$“* Anfänger kaum erreichen können, auch dann wohl nicht, wenn folgt: *„Wenn wir jedoch $\forall x\ \forall y$ durch $\forall x, y$ ersetzen, erhalten wir ein gutes Maß für die Komplexität, indem wir einfach die Quantoren zählen.“* Hier entsteht der Verdacht, dass der Autor die Quantorsymbole nur als umgangssprachliche Kürzel ohne logische Syntax verwendet, denn das Ersetzen von $\forall x\ \forall y$ durch $\forall x, y$ bedarf immerhin einer Definition. Die anschließenden Beispiele *„$\forall x\ \exists y$, so dass $y > x$ gilt“* und *„$\exists y$, so dass $\forall x : (y > x)$“* bestätigen diesen Verdacht, doch dann sollte man lieber gleich ganz verbal bleiben, denn korrekt wäre $\forall x\ \exists y : (y > x)$ bzw. $\exists y\ \forall x : (y > x)$ (ggf. ohne Klammern, besser noch mit Mengenangaben). Aber die vermutete Deutung von $\forall$ *bzw.* $\exists$ nur als Abkürzung der sprachlichen Floskeln „für alle“ bzw. „es gibt“ (ver)führt zu der oben kritisierten Notation, was hingegen bei der Verwendung der Quantorsymbole $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ nicht nahe liegt. Auch in den nachfolgenden Beispielen finden sich diese formalen Mängel, so etwa *„$\exists y \in \mathbb{Z}$, so dass $\forall x \in \mathbb{Z} : y > x$ gilt“* statt: $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : y > x$. Die *„Negation von Aussagen mit Quantoren“* wird argumentativ plausibel anhand von Beispielen entwickelt. Die abschließenden Übungsaufgaben sind vielfältig und hilfreich, wenn man von dem auch hier vorhandenen formalen Mangel der Verwendung der Quantorsymbole absieht.

Diese relativ ausführliche Betrachtung der ersten beiden Teile, die rund ein Drittel des Buchs ausmachen, zeigte nicht nur Vorzüge, sondern auch Mängel, die bei einer späteren Überarbeitung jedoch leicht behebbar sind. Die restlichen zwei Drittel des Buchs erfreuen den Rezensenten trotz weniger Fehler rundum und seien zusammenfassend gewürdigt, zunächst etwas ausführlicher:

Zu Beginn von Teil III erläutert der Autor, dass der Text eines mathematischen Fachbuchs in *„kleine Informationsbrocken“* aufgeteilt sei, die *Satz* (bzw. *Theorem*), *Proposition*, *Lemma*, *Korollar*, *Beweis*, *Definition*, *Vermutung* und *Axiom* heißen würden und dass *„[wir] in den folgenden Kapiteln* [...] *sehen [werden], wie man an sie herangeht.“* Damit wird programmatisch der Rest des Buchs beschrieben, das sich dann anhand vieler konkreter sehr schöner anregender mathematischer Beispiele präsentiert, auch wenn an dieser Stelle für die Adressaten wohl (noch) nicht deutlich wird, was „Lemma“, „Proposition“ und „Axiom“ im mathematischen Kontext bedeuten. Immerhin erwähnt der Autor, dass manche dieser Termini von verschiedenen Autoren durchaus unterschiedlich gebraucht würden.

Im Kapitel 15, *„Wie man eine Definition liest“*, werden acht elementare Beispiele für Definitionen vorgestellt, die später analysiert werden, z. B. *„Eine ganze Zahl wird quadrisch genannt, wenn ihre Ziffern gleich den letzten Ziffern ihres Quadrats sind“*. Zwar fehlt hier noch das „genau dann, wenn“, was aber auf der folgenden Seite in Gestalt des „dann und nur dann“ ergänzt wird. All diese Beispiele regen spontan zum Nachdenken und Ausprobieren an.

Sehr gut ist der Hinweis, dass man sich bei jeder Definition fragen müsse, *„ob der definierte Gegenstand überhaupt existiert“*, so dass also in anderer Formulierung die betreffende Definition nicht „inhaltsleer“ ist. Und an späterer Stelle wird auch zu Recht hervorgehoben, dass man stets nach (vom Autor so genannten) *„Nichtbeispielen"* für eine Definition Ausschau halten solle, wobei der ergänzende Hinweis wünschenswert wäre, dass erst durch die Entdeckung mindestens eines Nichtbeispiels eine „Definition" als „Abgrenzung" vorliegt. Schön sind dann die Ausführungen über *Standardbeispiele*, *triviale Beispiele* und *Extrembeispiele* und die Aufforderung, solche zu finden. Die abschließenden Übungsaufgaben sind sehr anregend und von recht unterschiedlichem Niveau. Bei der letzten im Prinzip sehr schönen Aufgabe dieses Kapitels hat sich aber leider ein (behebbarer) Fehler eingeschlichen, den aufmerksame Leser hoffentlich bemerken: Die übliche Produktdarstellung von $n!$ ist bekannt, und alternativ sei nun $n!$ *„für nicht-negative Zahlen"* auch *„als die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen von* 1 *bis* n *anzuordnen (ohne eine Zahl zu wiederholen)"* definiert. Zu zeigen ist dann, *„dass die beiden unterschiedlichen Definitionen für* $n \geq 1$ *übereinstimmen"* (was leicht ist) *„und dass mit der neuen Definition auch* $0! = 1$ *gilt"* (was unter den Voraussetzungen nicht möglich ist).

Kapitel 16, *„Wie man einen Satz liest"*, ist eine sehr schöne Darstellung bezüglich der Analyse und Interpretation von Theoremen, insbesondere auch in Verbindung mit guten Beispielen. Die Bedeutung der „Stärke" von Voraussetzungen und auch der von Schlussfolgerungen wird erörtert, auch in Verbindung mit Verallgemeinerungen. Es wird deutlich, dass ein als Implikation formulierter Satz nicht automatisch umkehrbar ist, und die Adressaten werden aufgerufen, auch nach „Nichtbeispielen" Ausschau zu halten (die also die Voraussetzungen nicht erfüllen). Die abschließenden Übungsaufgaben sind geschickt zusammengestellt und zwingen erfreulicherweise zum Rückgriff auf vorherige Kapitel.

Kapitel 17, *„Beweise"*, bietet eine knappe, aber schöne Darstellung zur Bedeutung von Beweisen. Erfreulich ist auch der Hinweis auf den Unterschied zwischen einem in der Literatur dargestellten eleganten Beweis und dem meist mühsamen und publizierten Weg zu dessen Findung. Allerdings vermag ich den abgrenzenden Hinweis auf die Philosophie nicht zu goutieren: *„Philosophen [...] debattieren immer noch über dieselben Fragen, mit denen sich schon die alten Griechen abmühten. Nicht so in der Mathematik; unser Fachgebiet hat sich seitdem ein großes Stück weiterentwickelt."*

Bei Kapitel 18, *„Wie man einen Beweis liest"*, sei zunächst hervorgehoben, dass der Autor bei der verbalen Formulierung von Sätzen und Beweisen sprachlich vorbildlich stets „Es sei ..." anstelle (der leider üblichen Floskel) „Sei ..." schreibt. Das gesamte Kapitel ist vorzüglich, so u. a. die Analyse des Satzes: *„Es seien* m *und* n *natürliche Zahlen. Das Produkt* $m \cdot n$ *ist dann und nur dann ungerade, wenn* m *und* n *ungerade sind."* Hierzu zerlegt der Autor diesen Satz verbal in die beiden Bestandteile „[...] *dann ungerade, wenn* [...]" und „[...] *nur dann ungerade, wenn* [...]", die es in sich haben und zur Reflexion der Sprache herausfordern. Wichtig ist auch der Hinweis darauf, dass in Beweisführungen oft unausgesprochen die Kontraposition oder andere Sätze oder bestimmte Definitionen verwendet werden, was die Aufmerksamkeit der Leser herausfordert. Auch die weiteren Hinweise sind hilfreich, so auch die exemplarisch unterlegte Anregung, Beweisteile ggf. zu visualisieren.

Das letzte Kapitel dieses Teils III, *„Eine Analyse des Satzes von Pythagoras"*, bezieht sich exemplarisch auf die zuvor entfalteten grundsätzlichen Betrachtungen und ist aufschlussreich und lehrreich für die „Anfänger" (und gewiss nicht nur für diese). Schön sind auch die Analyse der Umkehrung des Satzes und die Anwendung auf diverse Beispiele.

Teil IV widmet sich ausführlich und mit Anwendung auf Beispiele grundlegenden Beweistechniken wie *Direkter Beweis*, *Beweis durch Fallunterscheidungen*, *Widerspruchsbeweis*, *Vollständige Induktion* und *Beweis durch Kontraposition*, und er kann als sehr gelungen gelten, wenn auch Kleinigkeiten anzumerken sind z. B.: So wird der Name „Dreiecksungleichung" über die komplexen Zahlen begründet, was aber kaum hilfreich ist, weil diese nicht behandelt werden. Im Satz *„Durch drei Punkte* [...] *in der Ebene kann entweder eine Gerade oder ein Kreis gezeichnet werden"* muss es entweder „drei verschiedene Punkte" heißen, oder das „entweder" muss entfallen (wobei die Adressaten das vermutlich gar nicht merken, was aber wichtig wäre). Und auch wenn klar ist, was der Autor meint, ist die Formulierung *„für alle* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$*"* nicht vorbildlich.

Auch Teil V ist gelungen, und hier fließen alle vorherigen Entwicklungen anhand konkreter Beispiele zusammen (was dem Inhaltsverzeichnis nicht in Gänze zu entnehmen ist), wobei natürlich die „Heimatdisziplin" des Autors (nämlich Zahlentheorie) erkennbar ist, was aber durchaus von Vorteil ist, weil sich hier viele Fragestellungen elementar formulieren (wenn auch nicht leicht lösen) lassen, so dass Zahlentheorie stets ein dankbares Einstiegsthema zum Kennenlernen „mathematischen Denkens" ist, wie es die Klassiker „Von Zahlen und Figuren" von Rademacher & Toeplitz und „Proben mathematischer Forschung" von Hasse zeigen. So geht es im Kapitel 27, *„Teiler"*, um Teilbarkeit, Primzahlen und den ggT. Hervorhebenswert ist hier die exemplarische Entwicklung des Beweises von Satz 27.5, der lautet: *„Wenn* $a \mid b$ *und* $a \mid c$ *gilt, dann gilt auch* $a \mid (mb + nc)$ *für* *alle ganzen Zahlen m und n.“* Zunächst greift der Autor ausführlich auf Kapitel 16, *„Wie man einen Satz liest“*, zurück, führt Plausibilitätsbetrachtungen durch, untersucht die trivialen Fälle, betrachtet Beispiele und fordert die Adressaten auf, *„andere Methoden aus Kapitel 16“* anzuwenden und zu beobachten, was man dabei entdeckt, womit das „Umfeld“ des Satzes vor einem Beweis ausgelotet wird. Wichtig ist dann folgende Ankündigung:

„Wir beweisen jetzt den Satz. Unsere Präsentation entspricht dabei zunächst nicht der Art, wie ein normales Lehrbuch den Beweis darstellen würde. Ich will Ihnen zeigen, wie ein Beweis entsteht, mit allen Fehlern und Sackgassen. Anschließend werde ich dann alles so zusammenfassen, wie es in einem Buch stehen würde.“ Das ist ein Weg, wie man sich ihn öfters wünschen würde und wie er im Mathematikstudium eigentlich unverzichtbar ist – insbesondere im Lehramtsstudium.

Es folgen die Kapitel 28, *„Der euklidische Algorithmus“*, und Kapitel 29, *„Modulare Arithmetik“*, jeweils mit schönen Beispielen und anspruchsvollen Übungsaufgaben, die Appetit auf Vertiefung in und Beschäftigung mit Zahlentheorie machen. Kapitel 30, *„Injektiv, surjektiv, bijektiv – und ein wenig zur Unendlichkeit“*, dient der Beschreibung und Erfassung von Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit und damit der Erkenntnis verschiedener Stufen des Unendlichseins. Kapitel 31 behandelt schließlich Äquivalenzrelationen und damit zusammenhängend Partitionen. Der Einführungstext ist sehr informativ, die knappe Einführung in „Relationen“ ist aber unbefriedigend und ist wohl einer Umfangsbeschränkung geschuldet. Irritierend ist hierbei, dass $(x, y) \in R$ zwar mit $x \sim y$ notiert wird, der Autor aber darauf hinweist, dass R *„nicht das* $\sim$*“* sei. Die Behandlung von „Äquivalenzrelationen“ ist gut inkl. der Übungsaufgaben, und die knappe Behandlung von „Äquivalenzklassen“ ist akzeptabel (bis auf ein Beispiel betreffend „Winkel“, weil dieser nicht eindeutig ist). Der Einleitungstext zu „Partitionen“ ist verständlich und motivierend, beim Beweis des Satzes über den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen liegt ein formaler Fehler vor:

Es soll $\bigcup_{x \in X}[x] = X$ bewiesen werden. Der Beweis beginnt dann konkret mit *„Es sei* $x \in X$*“*, gefolgt von *„Wegen* $x \sim x$ *folgt* $x \in [x]$*, also* $x \in \bigcup_{x \in X}[x]$*“*.

Der letzte Term ist jedoch formal falsch, da das x vor $\in$ eine freie Variable ist, die beiden x danach sind jedoch gebundene Variablen. Hier rächt sich, dass dieser Aspekt von freien und gebundenen Variablen zuvor im Zusammenhang mit Aussageformen und Quantoren nicht erörtert wurde. Zwar ist für den Kenner klar, was gemeint ist, jedoch ist das für Anfänger nicht vorbildlich, und in Examensarbeiten müsste das gerügt werden. Unabhängig davon ist aber der Rest des Beweises einwandfrei.

Teil VI ist ohne jede Beanstandung, hier liegt eine vorzügliche Wiederholung der in den vorangehenden Kapiteln entwickelten Strategien und Methoden vor. Die Übungsaufgaben sind sehr anspruchsvoll und setzen keine geschlossene Theorie voraus. So bieten sie ein ausgezeichnetes Terrain für problemorientiertes, forschendes, offenes Vorgehen: Mathematik als Experimentierfeld! Und insofern wird das Buch insgesamt seinem Anspruch gerecht.

Leider spielt Geometrie in diesem Buch im Wesentlichen keine Rolle. Schön wäre es auch, wenn die Lösungen der Übungsaufgaben an geeigneter Stelle veröffentlicht würden.

Kevin Houston: *Wie man mathematisch denkt. Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger.* Berlin / Heidelberg: Springer Spektrum, 2012. ISBN 978-3-82742997-1. (Aus dem Englischen übersetzt von Robert Girgensohn.)

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de

Herbert Möller: Elementaranalysis

Rezensiert von Jürgen Maaß

Der Analysisunterricht in den Schulen stützt sich in der Regel auf die auch an den Universitäten verwendeten Basisdefinitionen und Sätze. Wer mit dem Unendlichen formal korrekt umgehen und dabei die ganze Fülle der definierbaren Funktionen zulassen will, muss mit großer Sorgfalt vorgehen. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden von verschiedenen Mathematikern Funktionen entdeckt, die von ihren Kollegen ‚pathologisch' genannt wurden. So veröffentlichte P. du Bois-Reymond 1875 ein Beispiel für eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion. Solche Funktionen sind in der Regel nicht Gegenstand des Analysisunterrichts in der Schule; dennoch sind die verwendeten Definitionen und Beweismethoden so angelegt, dass sie auch den Anforderungen gerecht werden, die solche Funktionen an sie stellen. Selbstverständlich ist es für Schülerinnen und Schüler schwer einzusehen oder gar wirklich zu verstehen, weshalb Definitionen und Beweise so umständlich sind, wenn sie die eigentlichen Ursachen dafür nicht kennenlernen. Um dieses Problem zu meiden, wird in der Schule bisweilen die Analysis weitgehend auf das Lösen bestimmter Aufgabentypen wie Kurvendiskussion oder Extremwertaufgabe reduziert. Infolgedessen beklagen sich an vielen Universitäten die Kolleginnen und Kollegen zu Recht über mangelnde Analysiskenntnisse der Abiturientinnen und Abiturienten.

Herbert Möller arbeitet im Anschluss an einen 1973 von Hermann Karcher veröffentlichten Artikel „Analysis auf der Schule" an einem anderen Weg zum Umgang mit Analysis in der Schule. Er hat die Analysis so elementarisiert, dass alle zentralen Definitionen und Beweise auf Oberstufenniveau verständlich sind (jedenfalls deutlich verständlicher als die bisher üblichen) und andererseits die zentralen Eigenschaften reeller Zahlen, Folgen und Funktionen für Schülerinnen und Schüler verstehbar werden. Wie geht das? Im Detail lässt sich das nun dank Internet einfach und kostenlos in der Elementaranalysis nachlesen, deren Hauptteil seit 1981 schon durch drei Skripten weithin bekannt geworden ist. Die mathematische Idee kann stark vereinfacht so charakterisiert werden, dass Möller von verschärften Grundbegriffen ausgeht, etwa der „Lipschitz-Stetigkeit", um die „pathologischen" Fälle zu vermeiden. In der Einleitung schreibt der Autor dazu: „Bezeichnenderweise wird der Begriff der globalen Lipschitz-Stetigkeit, der mit der elementaren Stetigkeit identisch ist, in der klassischen Analysis als ein Arbeitsbegriff zusätzlich zu den durch Allgemeinheit ausgezeichneten Stetigkeitsbegriffen eingeführt. Seine wichtigsten Anwendungsgebiete sind Existenzaussagen und die Konvergenzsicherung bei der Methode der sukzessiven Approximation („Picard-Iteration") zur Lösung von Differentialgleichungssystemen und bei Iterationsverfahren, die auf Fixpunktsätzen beruhen. Beide Methoden werden in der Elementaranalysis unmittelbar genutzt und zwar im ersten Kapitel bei der Herleitung der Polynomapproximation für die Exponentialfunktion (Seite 84) sowie im fünften Kapitel bei dem Fixpunktsatz (Seite 236) und dem Quadratkonvergenzsatz (Seite 241). Daraus ergibt sich, dass die elementare Stetigkeit auch in der Praxis genügend leistungsfähig ist." (Seite 5 f.)

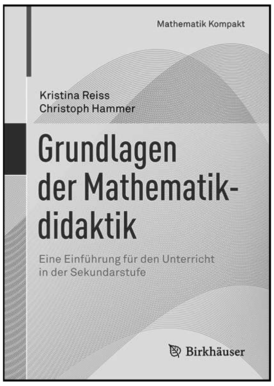
Einige Lehrer haben sich von Herbert Möller und der Idee der vereinfachten bzw. elementaren Analysis für die Schule anstecken lassen und selbst nach diesem Konzept unterrichtet. Ihre Ergebnisse waren beeindruckend; aber wie immer in solchen Selbstversuchen lässt sich nicht feststellen, ob das Geheimnis ihres Erfolges die andere Analysiskonzeption oder das besondere Engagement und Können der Lehrenden war. Echte empirische Studien auf breiter Basis stehen noch aus. Wenn dieser Hinweis auf den Hauptteil der Elementaranalysis einen Anstoß zu solchen Studien liefert, kann Herbert Möller sein Lebenswerk vielleicht noch mit einer auf empirische Forschungen gestützten Vollversion krönen.

Herbert Möller: Elementaranalysis. Hauptteil. 297 Seiten mit 86 LaTeX-Figuren. Kompass-Buch. Eigenverlag: http://www.math.uni-muenster.de/u/mollerh/data/ElAn5.pdf (und ElAn5Print.pdf zum Ausdrucken sowie ElAn5Cut.pdf für E-Reader und Tablets)

Juergen Maaß, Universitaet Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich, Email: Juergen.Maasz@jku.at

Kristina Reiss und Christoph Hammer: Grundlagen der Mathematikdidaktik

Rezensiert von David Kollosche



Mit *Grundlagen der Mathematikdidaktik* legen Kristina Reiss, welche die Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität München vertritt, und Christoph Hammer, einem Mitarbeiter in der Didaktik der Mathematik an der Universität München, in diesem Jahr eine neue „Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe" vor. Da der Didaktik der Mathematik bedauerlicherweise nur wenige aktuelle Einführungen in ihre Disziplin zur Verfügung stehen, ist diese Veröffentlichung erfreulich und die für sie aufgebrachte Arbeit dankenswert. Zugleich steht ein Buch, welches Grundlagen legen und eine Einführung bieten soll, ganz besonders im Fokus der kritischen Begutachtung, zu welcher diese Rezension einen Beitrag leisten soll.

Zum Aufbau und Anlass des Buchs

Auf 132 Textseiten widmen sich Reiss & Hammer einer breiten Auswahl mathematikdidaktischer Themen. Ihr Werk umfasst folgende Kapitel:

1. Ziele des Mathematikunterrichts
2. Mathematik unterrichten
3. Die Entwicklung mathematischen Denkens
4. Individuelle Voraussetzungen des Lernens im schulischen Kontext
5. Grundmuster des Arbeitens in der Mathematik
6. Didaktische Prinzipien
7. Bildungsstandards und Kompetenzen
8. Aufgaben im Mathematikunterricht
9. Fehler und Fehlerdiagnose
10. Planung von Mathematikunterricht

Herausgeben wird das Buch in der Reihe „Mathematik Kompakt" des Birkhäuser Verlags. Die Herausgeber der Reihe erklären im Sammeltitel, dass die Reihentitel „als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende gedacht" seien und „sich an der möglichen Stofffülle einer Vorlesung von zwei Semesterwochenstunden orientieren".

Die Autoren präsentieren im Vorwort „ein kompaktes Buch, das entsprechend auf sehr begrenztem Raum versucht, wesentliche Themen der Mathematikdidaktik anzusprechen". Sie wollen „grundlegende Ideen und Forschungsergebnisse der Disziplin beschreiben und sie an Beispielen aus der Mathematik der Sekundarstufe illustrieren". Dabei erklären die Autoren ihre „besondere Nähe zur Pädagogik und Pädagogischen Psychologie" und wollen darunter „keine Geringschätzung anderer Bezüge oder gar Bezugsdisziplinen" verstanden wissen, sondern sehen „eine Auswahl des Wissens" als Notwendigkeit einer jeden „Darstellung der Mathematikdidaktik". Die Lektüre ihres Buchs und „ein umfangreiches Literaturverzeichnis" sollen die Leser ermuntern, „ihren eigenen Interessen entsprechend die Beschäftigung mit den Themen zu erweitern und zu vertiefen".

Kriterien der folgenden Bewertung

Natürlich obliegt es jedem Autor selbst, ein Buch nach seinen Wünschen zu schreiben, seinen eigenen Stil zu verfolgen, seinen eigenen roten Faden zu spinnen und dabei einige Inhalte hervorzuheben, andere in einem neuen Licht zu interpretieren und wieder andere ganz auszulassen. Reiss & Hammer explizieren die Ausrichtung ihres Buchs bereits im Vorwort.

Gleichwohl scheint es mir nicht zielführend zu sein, die vorgelegten *Grundlagen* einzig und allein am selbsterklärten Anspruch der Autoren zu messen und nach Konsistenz und Inkonsistenz von Anspruch und Geleistetem zu durchforsten. Immerhin handelt es sich bei einem Einführungsbuch für viele Studierende um den wohl ersten literarischen Kontakt mit der Mathematikdidaktik. Als Dozierender stellt sich jenseits der Konsistenz der vorlegten Grundlagen daher die noch dringlichere Frage, ob die Autoren in einer erstrebenswerten Weise in die Mathematikdidaktik einführen. Was erstrebenswert ist und was nicht, ist nun aber eine sehr subjektive Frage. Indem ich an dieser Stelle die der folgenden Kritik zugrundeliegenden Kriterien offenlege, möchte ich dem Leser die Möglichkeit geben, diese Kriterien zu bewerten und die folgende Rezension im Lichte dieser Gewichtung zu lesen. Meines Erachtens sollte eine gelungene Einführung die Mathematikdidaktik

- einen repräsentativen Überblick über Mathematikdidaktik ermöglichen und bei notwendigen Aussparungen auf das Übergangene zumindest hinweisen,
- für die zentralen mathematikdidaktischen Fragen Interesse und Problembewusstsein wecken sowie
- trotz aller Vereinfachung und Platzmangel der Wissenschaftlichkeit mathematikdidaktischer Erkenntnis verpflichtet bleiben,
- die Intentionen und Gedanken rezipierter Beiträge etwa redlich wiedergeben und in ihren Sinnzusammenhang einordnen.

Eine Bewertung nach diesen Kriterien kann an dieser Stelle freilich nicht das gesamte Werk in den Fokus rücken; stattdessen wird versucht, wiederkehrende Unstimmigkeiten zu benennen und an ausgewählten Textstellen zu verdeutlichen.

Thematische Auswahl

Die pädagogisch-psychologische Ausrichtung ihrer Themenwahl hatten Reiss & Hammer bereits im Vorwort angekündigt; sie überrascht folglich nicht. Wissenschaftstheoretische, mathematikhistorische und unterrichtsoziologische Aspekte anzuschneiden oder wenigstens in einem Verweis zu benennen, hätte allerdings an vielen Stellen zu einem umfassenderen Überblick und Problembewusstsein beitragen können. Dazu einige Beispiele:

- Abgesehen von den diskutierten ‚Grundmustern des Arbeitens in der Mathematik' (Kap. V) geht diese Einführung nicht auf die Frage ein, was überhaupt der Gegenstand des Mathematikunterrichts sei. Dabei können philosophische, historische und soziologische Aspekte der Mathematik das Verständnis der Mathematik und mathematikdidaktischer Probleme bedeutsam steigern.
- Beim Modellierungskreislauf auf S. 60 könnte sich die Frage aufdrängen, welchen Sinn es hat, die Mathematik als etwas der Welt gegenüberstehendes ‚Außerweltliches' darzustellen.
- An anderer Stelle wird die in der Mathematikdidaktik wohlgepflegte Wertschätzung des Beweisens in einem dogmatischen Schülerzitat zugespitzt, dieses aber nicht weiter philosophisch, historisch oder wissenschaftstheoretisch diskutiert: „Wenn man die vorgegebene Figur zeichnet, dann sieht man meistens sofort, dass die Behauptung wahr oder falsch ist, doch das zählt leider nicht. Also muss das Ganze bewiesen werden" (S. 49). Wieso zählt das intuitive Sehen nicht? Ist das bei den pythagoreischen figurierten Zahlen nicht noch anders? Wer entscheidet überhaupt, was zählt? Und was bedeutet es dann, „das Ganze" zu beweisen?
- Schließlich ist es zumindest bedauerlich, dass soziologisch inspirierte Beiträge zur Mathematikdidaktik nicht berücksichtigt wurden, obwohl soziologische Betrachtungen des Mathematiklernens in den letzten 20 Jahren so sehr an Erklärungskraft gewonnen haben, dass zuweilen gar von einem *social turn* der Mathematikdidaktik gesprochen wird.[1] Beispielsweise im Kapitel zu den ‚individuellen Voraussetzungen des Mathematiklernens' hätte die Aufmerksamkeit auch auf die auf Basil Bernstein aufbauende Forschung zur schichtspezifischen Situiertheit des Mathematiklernens gerichtet werden können, hat diese doch einen entscheidenden Einfluss darauf, wie Mathematik und insbesondere Mathematikaufgaben von welchen Schülern verstanden oder nicht verstanden werden.[2]

Wissenschaftliche Redlichkeit

Wenn eine Einführung in die Mathematikdidaktik Zeugnis der Wissenschaftlichkeit der Disziplin ablegen und sogleich den Beginn einer Kultivierung einer wissenschaftlich redlichen Arbeitshaltung markieren soll, kann man von ihren Autoren erwarten, dass sie nachvollziehbar und überzeugend argumentieren sowie herangezogene Quellen, redlich rezipieren, deren Herkunft reflektieren und sie in die jeweilige Diskussion einordnen. Zum einen zeigen sich Schwierigkeiten bezüglich der Argumentation an den folgenden Stellen:

- Auf S. 6 wird argumentiert, dass „ein allgemeinbildender Mathematikunterricht sicherlich die subjektiven Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler ernst nehmen sollte", weil Hans-Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept eine ‚individuelle Komponente' vorsehe. Ist das Gebot, die Schüler ernst zu nehmen, tatsächlich ein Desiderat aus Heymanns Bildungstheorie oder doch eher ein davon unabhängiger, ethischer Grundsatz?
- Auf S. 101 schreiben die Autoren: „Mathematik begegnet uns täglich und überall. Es ist daher ein wesentliches Ziel des Unterrichts, die

[1] Vgl. Lerman, Stephen: "The Social Turn in Mathematics Education Research" in Boaler, Jo (Hg.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning.* Ablex: Westport, CT, 2000.

[2] Vgl. Gellert, Uwe & Michael Sertl (Hg.) *Zur Soziologie des Unterrichts. Arbeiten mit Basil Bernsteins Theorie des pädagogischen Diskurses.* Beltz: Weinheim, 2012.

Alltagstauglichkeit der Mathematik zu zeigen". Doch wozu sollte die Alltagstauglichkeit der Mathematik noch gezeigt werden, wenn sie uns doch täglich und überall begegnet?

Zum anderen werden die herangezogenen Quellen oft nicht in ihrer Gesamtheit wertgeschätzt, redlich rezipiert und in die jeweilige Diskussion eingeordnet. Stattdessen werden die unterschiedlichen Perspektiven einzelner Denker verschwiegen, ihre Worte und Ideen aus dem Zusammenhang gerissen und zum Untermauern der Ausführungen der Autoren genutzt ohne dass eine ernsthafte Auseinandersetzung oder Wertschätzung dieser Denker erkennbar wird. Beispielsweise werden auf S. 52 völlig unvermittelt die US-amerikanischen *Principles and Standards for School Mathematics* herangezogen, ohne dass diese vorgestellt, im Weiteren noch diskutiert, im Diskurs verortet oder weiter genutzt würden. Auf S. 65 leitet L. E. J. Brouwers Satz, die Mathematik sei mehr ein Tun als eine Lehre, ein lernpsychologisches Kapitel ein, wenngleich er von Brouwer offensichtlich nicht lernpsychologisch, sondern epistemologisch im Sinne der konstruktiven Mathematik gemeint war. Noch kurioser steht es um ein angeblich von d'Alembert stammendes Zitat, welches das Kapitel zur ‚Entwicklung mathematischen Denkens' einleitet (S. 27): „Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis." Dieses Zitat taucht in der Literatur offenbar nur auf, um Präsentationen und Kapitelüberschriften zu schmücken; nachweisen lässt es sich jedoch weder im Deutschen noch im Französischen. In der Tat mutet es seltsam an, dass ein Aufklärer die Mathematik nicht verstehen soll als Weg von der Finsternis ins Licht, sondern als Werkzeug, um den Menschen in der Finsternis zu trösten und zu unterhalten.

Doch die Verwerfungen im Umgang mit den herangezogenen Quellen greifen tiefer und betreffen auch genuin mathematikdidaktische Beiträge. Exemplarisch betrachte man den Umgang mit dem Konzept des Dialogischen Lernens von Urs Ruf und Peter Gallin, einem zweifellos originellen Beitrag zur Mathematikdidaktik, welcher nirgends umfassend vorgestellt und gewürdigt wird, sondern nur in Bruchstücken zur Unterstützung des Gedankenganges der Autoren herangezogen wird – wobei Fehlinterpretationen die Regel sind. So werden auf S. 107 mit Bezug auf Ruf & Gallin *Aufgabe* und *Auftrag* unterschwellig ineinsgesetzt, obwohl Ruf & Gallin in der genannten Quelle gerade die Unterscheidung beider Konzepte als einen zentralen Aspekt ihrer Pädagogik ausweisen. Ferner lässt sich das Konzept der *Kernidee*, ein weiterer zentraler Aspekt der Pädagogik von Ruf und Gallin, nicht wie auf S. 125 auf die gewöhnlich bildungstheoretisch verstandene Frage reduzieren, warum „Schüler den zu behandelnden Gegenstand lernen" sollen; er steht stattdessen für ein revolutionär subjektives Verhältnis des Lehrers zur Mathematik. Schließlich kommen Reiss & Hammer auch auf die Passage in Platons *Menon* zu sprechen, in welcher Sokrates dem Sklaven des Menon (und nicht Menon selbst!) einseitig vorträgt, wie man ein Quadrat der Fläche nach verdoppeln kann, und dem Sklaven dabei kaum etwas tiefgründigeres als ein „Ja", „Doch", „Allerdings" und „Offenbar" abringt. Wenn das Dialogische Lernen, in welchem Lehrende und Lernende gleichermaßen und aneinander interessiert voneinander lernen sollen, dann als Fortführung dieser sokratischen Indoktrination dargestellt wird, obwohl sich Ruf & Gallin ausdrücklich von der Lehrmethode des Sokrates abgrenzen,[3] bleibt selbst dem gutwilligen Kritiker nur zu sagen: Nein, beim Zeus!

Kritik oder Dogma?

Wissenschaftlichkeit zeichnet sich jedoch nicht nur durch einen redlichen Umgang mit Argumenten und Quellen aus, sondern auch durch eine bestimmte Haltung des Forschenden. Insbesondere in den Geisteswissenschaften schließt dies mit ein, scheinbar Selbstverständliches zu hinterfragen, fertigen Antworten kritisch zu begegnen, mehrere Erklärungsmodelle gegenüberzustellen und nach ihrem Nutzen und ihren Beschränkungen zu befragen. Gerade von solch einer Geisteshaltung zehrt die Lebendigkeit einer jeden Geisteswissenschaft. Von einer Einführung in eine Wissenschaft kann erwartet werden, dass sie ebendiese Haltung vorlebt, dass sie bedeutsame Fragen des Mathematikunterrichts aufwirft, lehrt, ungeeignete Erklärungsmodelle zurückzuweisen oder zu erweitern, und das Interesse an der mathematikdidaktischen Diskussion weckt.

In den *Grundlagen der Mathematikdidaktik* von Reiss und Hammer werden jedoch keine Fragen entwickelt, Konzepte kritisiert oder widersprüchliche Theorien diskutiert. Selbst wo sich dies aufdrängt, kommt es nicht zu einer Diskussion: Dass die PISA-Studien höchst umstritten sind, erfährt der Leser nicht einmal in einer Fußnote. Hey-

3 Vgl. Ruf, Urs & Peter Gallin (1998) *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik.* Band 1. Kallmeyer: Seelze-Velber. S. 49, 109, 318.

manns Allgemeinbildungskonzept (Kap. I) einerseits und ‚Bildungsstandards und Kompetenzen' (Kap. VII) andererseits werden nicht gegenübergestellt, sondern stehen unvermittelt nebeneinander. Durchaus gegenübergestellt werden hingegen die instruktionale und die konstruktive Lehrmethode, deren Effizienz dann auch noch psychometrisch vermessen wird, wenngleich unklar ist, inwieweit diese Gegenüberstellung überhaupt sinnvoll ist.

Stattdessen liest sich die Einführung zuweilen dogmatisch. Auf S. 49 erfährt der Leser beispielsweise: „Mathematik muss [!] als *Prozess* und Tätigkeit gesehen werden" – wer wagt es da noch zu widersprechen? Auf S. 16 f. werden „Kriterien guten Unterrichts" nicht vorgeschlagen oder diskutiert, sondern sind einfach da: Sie brauchen nicht im mathematikdidaktischen Diskurs gewonnen werden, sondern werden von Klieme, Schümer & Knoll (allesamt Psychologen) nur noch ‚unterschieden' (S. 16). Hilbert Meyers ‚Merkmale guten Unterrichts' sind nicht etwa ein konkurrierender Vorschlag, sondern gehen lediglich „etwas stärker ins Detail" (S. 17). Die sokratische Frage danach, was überhaupt das Gute sei, wann in unserem Fall also Mathematikunterricht ‚gut' genannt werden sollte, wird gar nicht erst gestellt.

Pflege des Berufsglaubens

Die sokratische Frage nach dem Guten wird meist affirmativ beantwortet. Da der rezensierten Einführung in die Mathematikdidaktik keine kritische Reflexion von Mathematik und Mathematikunterricht zugrundeliegt, kann sie den Wert von Mathematik und Mathematikunterricht nur proklamieren und nicht begründen. Schon auf der ersten Seite des Buchs erfährt der mathematikdidaktische Novize: „Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen." Wird hier wider besseren Wissens die Allmacht logischen Denkens beschworen? Ist der kritische Vernunftgebrauch im Mathematikunterricht wirklich „leichter anzugehen als in anderen Fächern" (S. 5) oder ist der Mathematikunterricht mit seinem (selbst in dieser Einführung) unreflektierten Glauben an das Wahre und Richtige nicht seit jeher das unkritischste aller Schulfächer? Ist es in der Tat so, dass die Mathematik besonders kritisch und vernünftig ist „weil subjektive Ansichten nicht zählen und ohne den Rückgriff auf Autoritäten entschieden werden muss, ob eine Aussage richtig oder falsch ist" (S. 5) oder wird durch solche Aussagen nur verdeckt, dass auch die Mathematik in einem gesellschaftlich-politischen Raum gewachsen ist, sehr eigentümlichen und nicht von jedem geteilten Gesetzen des Denkens folgt und in der Gesellschaft wie im Mathematikunterricht von Autoritäten (sogenannten Mathematikern) vertreten wird? Und ist eine Aussage wie „Mathematik begegnet uns täglich und überall" (S. 101) überhaupt sinnvoll oder wird der Begriff der Mathematik damit so weit gestreckt, dass schon Mathematik ist, wenn irgendwer in irgendeinem Phänomen oder Gegenstand Mathematisches angewendet oder verborgen wähnt? Die hier unkritisch reproduzierte Mathematik-ist-überall-Polemik mit Verweis auf MP3-Player und Co. wird allenthalben beschworen, um „die Unverzichtbarkeit der Mathematik" zu belegen (S. 7); dabei wäre eine Differenzierung dieser Aussage hier dringend angebracht. Das Repertoire mathematikdidaktischer Mythen ließe sich freilich noch um weitere plakative Statements erweitern. Es wird jedoch schon jetzt deutlich, dass dem Leser wissenschaftlich fragwürdige Glaubensbekenntnisse auf die Zunge gelegt werden anstatt eine kritische Fragehaltung gegenüber dem Mathematiklernen zu kultivieren.

Fazit

Gemessen an den zugrunde gelegten Kriterien sind die *Grundlagen der Mathematikdidaktik* von Reiss & Hammer nicht „als Unterstützung der Dozierenden sowie als Material zum Selbststudium für Studierende" geeignet, solange sie nicht durch Materialien ergänzt werden, die die beschriebenen Mängel auszugleichen imstande sind. Die thematische Ausrichtung des Buchs kann man mögen oder nicht; mit ihr gehen die Autoren aber lobenswert offen um. Besonders schwer wiegen meines Erachtens jedoch die inhaltlichen Unstimmigkeiten sowie die Befürchtung, dass sich Studenten schon beim Einstieg in die Mathematikdidaktik ein Bild von ‚wissenschaftlichem Arbeiten' machen, wie es sich eine Wissenschaft nicht wünschen kann. Das heißt nicht, dass die Einführung von Reiss & Hammer aus dem Hörsaal zu verbannen ist, aber doch, dass man ihr am besten – gerade auch im Hörsaal – so begegnet, wie die Autoren es gegenüber der Mathematik und ihrem Unterricht vermissen lassen: nämlich kritisch.

Reiss, Kristina & Christoph Hammer: *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe.* Birkhäuser, Basel 2013, 143 S., ISBN 978-3-03460141-2, 18,90 EUR.

David Kollosche, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Email: dkollosche@googlemail.com

Selbstvorstellung in diesem Jahr gewählter Vorstands- und Beiratsmitglieder

Andreas Eichler

Liebe Mitglieder der GDM,

für die Wiederwahl zum Beirat der GDM im vergangenen März möchte ich mich herzlich bedanken und komme hier der noch jungen Tradition nach, sich als Beiratsmitglied kurz in den MGDM vorzustellen.

Bis 1996 habe ich an der TU Braunschweig Mathematik und Geschichte für das höhere Lehramt studiert und nach dem Referendariat an der Christophorusschule in Braunschweig beide Fächer unterrichtet. Zunächst parallel zu der Lehrtätigkeit, dann mit voller Stelle war ich von 2000 bis 2006 als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Braunschweig tätig und habe 2004 dort meine Promotion zum Thema „Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern" abgeschlossen, die den Nachwuchspreis der GDM 2006 erhalten hat. Unterbrochen war die Tätigkeit an der TU Braunschweig durch eine einjährige Vertretung an der Universität Bielefeld. 2006 habe ich einen Ruf auf eine Professur an die Universität Münster angenommen, 2009 bin ich an die Pädagogische Hochschule Freiburg gewechselt.

Im Rahmen der GDM, deren Mitglied ich seit 2001 bin, ist mir die Vernetzung wie auch die methodische Weiterentwicklung insbesondere auch für den wissenschaftlichen Nachwuchs ein stetiges Anliegen. Daher habe ich etwa 2007, 2009 und 2012 die GDM-Summerschool mit organisiert und führe im Auftrag der GDM zusammen mit der GDCP in diesem Herbst nach 2012 das zweite Mal einen Workshop zur Beratung von DFG-Anträgen durch. Weiterhin habe ich den AK Stochastik vier Jahre lang geleitet. International bin ich Mitglied der PME und engagiere mich organisatorisch auf den Konferenzen der ERME (CERME) und der IASE (ICOTS). Momentan gebe ich verantwortlich die Zeitschrift mathematica didactica heraus und bin als Mitherausgeber der Zeitschrift Stochastik in der Schule aktiv.

Meine momentanen Arbeitsschwerpunkte sind die Vorstellungen von Lehrkräften (teachers' beliefs), die Stochastikdidaktik, das Lehren und Lernen mit neuen Technologien sowie das Professional Development von Lehrkräften auch im Rahmen der Organisation und Durchführung von Fortbildungsprogrammen (mathexpert.bw/DZLM, T3).

Ich bedanke mich bei Ihnen für Ihr Vertrauen und hoffe, mich für dieses in den kommenden Jahren revanchieren zu können.

Rudolf vom Hofe

Liebe Mitglieder der GDM,

ich möchte mich als neu gewählter Vorsitzender auch an dieser Stelle kurz vorstellen und einige Etappen meiner mathematikdidaktischen Arbeit darstellen. Ihr Beginn war die Zeit als junger Studienrat in einer Schule, an die ich heute noch gerne zurückdenke: das Gustav-Stresemann-Gymnasium in Bad Wildungen. Hier konnte ich nach meinem Studium in Kassel über 13 Jahre Praxiserfahrungen sammeln und erleben, wie schön es sein kann, Mathematik zu unterrichten.

In den letzten Jahren dieser Zeit führte mich mein Weg mit halber Abordnung wieder zu meinem Studienort Kassel, wo ich nun als Pädagogischer Mitarbeiter arbeitete und bei Werner Blum und mit viel Unterstützung von Heinz Griesel und Arnold Kirsch über das Thema Grundvorstellungen promovierte.

Nach dieser zunächst eher stoffdidaktisch geprägten Zeit wechselte ich zum Lehrstuhl von Lisa Hefendehl-Hebecker an die Universität Augsburg, nun zum ersten Mal wieder ganz an der Universität. Hier konnte ich interpretative Methoden kennenlernen, was zu einer Habilitation im Bereich des computergestützten Analysisunterrichts führte.

Es folgte ein Ruf auf eine Professur für Didaktik der Mathematik in Regensburg. Schwerpunkt meiner dortigen wissenschaftlichen Arbeit war das PALMA-Projekt, eine DFG-Längsschnittstudie über acht Jahre, in der mit vorwiegend quantitativen Methoden die mathematische Leistungsentwicklung im Laufe der Sekundarstufe I untersucht wurde.

Seit fünf Jahren bin ich nun in Bielefeld, wo ich mich wieder auf Projekte mit kürzerer Laufzeit und auf die Entwicklung von Produkten für die Praxis konzentriert habe. Im Mittelpunkt dabei stehen Projekte zur Diagnose und individuellen Förderung sowie die Entwicklung von Konzepten und interaktiven Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe. Und nicht zuletzt bildet die Verbandsarbeit für die GDM als erster Vorsitzender eine neue und interessante Herausforderung, die für mich nicht nur eine Ehre, sondern auch eine Freude ist.

Stefanie Rach

Mein Name ist Stefanie Rach, ich komme aus und wohne in Kiel, fast am nördlichen Ende Deutschlands. Dort habe ich mein Studium für das gymnasiale Lehramt in den Fächern Mathematik und Physik 2009 abgeschlossen und arbeite seitdem an meinem Promotionsprojekt am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in der Arbeitsgruppe von Prof. Aiso Heinze. Seit 2011 engagiere ich mich in der Nachwuchsvertretung der GDM. 2012 und 2013 habe ich jeweils zusammen mit einer Kollegin die GDM-Nachwuchstage auf den GDM-Tagungen hauptverantwortlich organisiert. Während der GDM-Tagung in Münster 2013 wurde ich als Sprecherin der GDM-Nachwuchsvertretung in den Beirat der GDM gewählt. Bei meiner Arbeit im Beirat möchte ich insbesondere die Interessen des wissenschaftlichen Nachwuchses der GDM (Doktorandinnen und Doktoranden sowie Postdocs) vertreten.

In meinem Dissertationsprojekt konzentriere ich mich auf die individuellen Lernprozesse von Mathematikstudierenden in der Studieneingangsphase. Im Rahmen einer Längsschnittstudie im ersten Studiensemester habe ich Faktoren auf individueller Ebene identifiziert, die für erfolgreiche Lernprozesse verantwortlich sind. Dabei bin ich von der Annahme ausgegangen, dass Studienanfängerinnen und Studienanfänger mit zwei Veränderungen beim Übergang Schule-Hochschule umgehen müssen: einer Charakterverschiebung des Lerngegenstandes, der Mathematik, sowie einer Veränderung der Lehrprozesse. Aus diesem Grund müssen Studierende ihren Lernprozess an die neue Lernumwelt anpassen. In einem zweiten Forschungsbereich beschäftige ich mich mit dem Lernen aus Fehlern im Mathematikunterricht. Im Rahmen einer größeren Implementationsstudie habe ich gemeinsam mit Kolleginnen und Kollegen untersucht, wie sich eine positive Fehlerkultur in Schulklassen bzw. die explizite Förderung von Strategien im Umgang mit Fehlern auf die Einstellungen und Unterrichtswahrnehmungen der Schülerinnen und Schüler zum Lernen aus Fehlern auswirkt. Zudem bin ich an der wissenschaftlichen Begleitung des Hamburger Schulversuchsprogramms alles»könner beteiligt, dessen Ziel die Entwicklung von kompetenzorientierten Unterricht mit dazugehörigen Rückmeldeformen ist. An dieser Arbeit schätze ich besonders den Bezug zur praktischen Arbeit der als Multiplikatoren teilnehmenden Lehrkräfte, da bei ihrer Arbeit die Machbarkeit der Umsetzung mathematikdidaktischer Ideen im Unterricht erkennbar wird.

Meine Aufgabe im Beirat sehe ich speziell darin, die Interessen und Belange von Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftlern zu vertreten und als eine Ansprechperson im Beirat für diese Gruppe zur Verfügung zu stehen. Ein wesentlicher Teil meiner Arbeit wird sein, die Angebote für den wissenschaftlichen Nachwuchs gemeinsam mit der Nachwuchsvertretung weiter zu betreuen und zu entwickeln. Besonders wichtig ist mir dabei, dass die Maßnahmen für die Bedürfnisse der Promovierenden und Postdocs geeignet sind. Diese Passung kann durch Analysen der bestehenden Angebote sowie Befragungen von Promovierenden und Postdocs gestützt werden.

Maike Vollstedt

Maike Vollstedt wurde 1979 in Schleswig-Holstein geboren und machte dort 1998 ihr Abitur. Von 1998 bis 2003 studierte sie Mathematik und Englisch für das Lehramt an Gymnasien an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, der Universität zu Köln und der University of Aberdeen, Schottland. Von 2001 bis 2003 war sie Stipendiatin der Heinrich-Böll-Stiftung. Nach einem Zusatzstudium zum bilingualen Unterricht an der Bergischen Universität Wuppertal und einer Tätigkeit als Leiterin des Sprachlabors der Philosophischen Fakultät an der Universität zu Köln bekam sie 2005 ein Promotionsstipendium im DFG-Graduiertenkolleg Bildungsgangforschung an der Universität Hamburg. Ihre mit Auszeichnung bewertete Promotion erfolgte dort 2010 unter der Betreuung von Gabriele Kaiser zum Thema „Sinnkonstruktion und Mathematiklernen in Deutschland und Hongkong – Eine rekonstruktiv-empirische Studie“.

Von 2009 bis 2013 war Maike Vollstedt wissenschaftliche Mitarbeiterin bei Aiso Heinze am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel. 2011 wurde sie freigestellt für die Vertretung einer Professur an der Universität Hamburg. Nach ihrer Rückkehr ans IPN hatte sie bis 2012 kommissarisch die stellvertretende Abteilungsleitung der Abteilung Didaktik der Mathematik inne. Seit Februar 2013 ist Maike Vollstedt Professorin für Didaktik der Mathematik am Fachbereich Mathematik und Informatik an der Freien Universität Berlin.

Die mathematikdidaktische Forschung von Maike Vollstedt ist angesiedelt im Bereich der empirischen Unterrichtsforschung und nimmt die Perspektive der Lernenden ein. Dabei werden sowohl qualitative als auch quantitative Methoden eingesetzt. Ein wichtiger inhaltlicher Schwerpunkt ist die Frage nach dem Sinn, den Schülerinnen und Schüler mit (dem Lernen von) Mathematik verbinden. Maike Vollstedt arbeitet hier zusammen mit Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern anderer Domänen an den Grundlagen einer sinnorientierten Fachdidaktik. Darüber hinaus erforscht sie die Entwicklung mathematischer Kompetenz in der beruflichen Erstausbildung in verschiedenen mathematisch-naturwissenschaftlich geprägten Berufen sowie den Einfluss, den die Beliefs der Auszubildenden zu Mathematik auf diese Entwicklung haben. Zusammen mit Aiso Heinze leitet Maike Vollstedt ein deutsch-dänisches EU-Projekt zur Verbesserung der Aus-, Fort- und Weiterbildung von Mathematiklehrkräften.

Seit 2006 ist Maike Vollstedt Mitglied der GDM. Von 2007 bis 2013 war sie Sprecherin des wissenschaftlichen Nachwuchses in der GDM und hat zusammen mit der Nachwuchsvertretung das Nachwuchs-Programm auf den Jahrestagungen organisiert und durchgeführt. Darüber hinaus hat sie 2007 und 2011 zusammen mit Susanne Prediger und Andreas Eichler bzw. Aiso Heinze und Stefan Ufer die Summerschools der GDM organisiert. 2010 wurde Maike Vollstedt das erste Mal in den Beirat der GDM gewählt. Sie ist darüber hinaus Mitglied im Local Organising Committee der PME 37 2013 in Kiel sowie der ICME-13 2016 in Hamburg. Seit kurzem ist sie außerdem Mitherausgeberin des Newsletters der PME.

Hans-Georg Weigand

Nach dem Studium für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik und Physik an der Universität Würzburg, dem 1. und 2. Staatsexamen habe ich sechs Jahre an einem bayerischen Gymnasium unterrichtet. Von 1986–1992 hatte ich eine wissenschaftliche Mitarbeiterstelle an der Universität Würzburg bei Prof. Dr. Hans-Joachim Vollrath. 1989 habe ich in Didaktik der Mathematik mit dem Thema: „Zum Verständnis von Iterationen im Mathematikunterricht“ promoviert und 1992 mit einer Arbeit über „Didaktische Betrachtungen zum Folgenbegriff“ am Institut für Mathematik der Universität Würzburg habilitiert. Nach einer halbjährigen Tätigkeit an der Universität Eichstätt habe ich 1992 eine Professur für Didaktik der Mathematik an der Oldenburg erhalten. Von 1995 bis 2000 war ich dann an der Universität Gießen tätig. Seit 2000 habe ich den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Würzburg. Daneben habe ich zwei Gastsemester an der University of Illinois in den USA verbracht.

In der Didaktik der Mathematik beschäftige ich mich in unterschiedlichen Varianten mit den Möglichkeiten des Einsatzes neuer Technologien. Dabei war ich stets auch daran interessiert, die forschungsorientierten Ergebnisse der Didaktik der Mathematik mit der Lehreraus- und -fortbildung zu verbinden sowie in unterrichtspraktischen Zeitschriften zu veröffentlichen.

Von Januar 2003 bis März 2007 war ich Herausgeber des Journals für Mathematikdidaktik der und von 2007 bis 2013 Erster Vorsitzender der GDM. Neben der Nachwuchsförderung im Bereich der Didaktik der Mathematik, der Weiterentwicklung einer deutschsprachigen – und nicht nur deutschen – Gesellschaft sowie der Pflege guter Kontakte zu unseren Nachbargesellschaften wie DMV und MNU und zu anderen fachdidaktischen Gesellschaften wie Physik, Chemie, ... war ich stets auch an der internationalen Reputation der GDM vor allem im europäischen Raum Kontakten interessiert. Das sind Ziele, für die ich mich auch im Beirat der GDM weiterhin einsetzen werde.

Grußwort der GDM zur Verabschiedung von Prof. Lisa Hefendehl aus dem aktiven Dienst am 25.04.2013

Hans-Georg Weigand

Liebe Festgesellschaft, liebe Lisa,
ich freue mich sehr, dass ich – jetzt schon nicht mehr als 1. Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) – dennoch für die GDM dieses Grußwort sprechen darf. Es ist mir deshalb eine besondere Freude, da ich das aus langjähriger persönlicher Verbundenheit tun kann. Wir kennen uns schon sehr lange und hatten fortwährend in den unterschiedlichsten Bereichen miteinander zu tun.

Ich möchte in diesem Grußwort fünf Aspekte ansprechen:
1. Würdigung der GDM-Arbeit
2. Persönliche Verbundenheit
3. Über die Sprache
4. Authentizität
5. Wünsche für die Zukunft

1 Arbeit in der GDM

Ich danke Lisa Hefendehl für das langjährige und fortwährende Engagement in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Lisa Hefendehl war von 1987 bis 1997 im Beirat der GDM und sie war von 1990–1994 die 2. Vorsitzende unserer Gesellschaft. Dabei ist besonders hervorzuheben, dass sie in einer Zeit, in der viele Fach-Mathematiker der GDM noch skeptisch gegenüberstanden, die Kontakte zur Deutschen Mathematiker-Vereinigung bewusst aufgebaut und durch ihre Mitgliedschaft im Präsidium der DMV fortwährend ausgebaut hat. Sie war von 2001–2007 Herausgeberin des Journals für Mathematikdidaktik, der Hauszeitschrift der GDM.

2 Persönliche Verbundenheit

Ich habe 1989 den ersten Vortrag von Lisa Hefendehl gehört – zu den negativen Zahlen – und ich war damals schon von der gewählten ausdrucksstarken Sprache und den stets passenden Formulierungen beeindruckt. Anfang der 1990er Jahre erinnere ich mich an eine Podiumsdiskussion zur Lehrerbildung, damals als 2. Vorsitzende. Hier war ich beeindruckt von ihrer Fähigkeit, verworrene Diskussionen durch wenige strukturierte Bemerkungen zusammenfassen und wieder in geordnete Bahnen lenken zu können. Ihr berühmten Satzanfänge wie „Meinen Sie das so, …“ verbalisierten häufig zusammenfassend die Argumente des Gegenübers und drückten erst dadurch dessen Meinung *so* aus, wie er es eigentlich hätte sagen wollen.

Wir – Lisa und ich – haben mehrere Jahre als Herausgeber des Journals für Mathematikdidaktik zusammengearbeitet. Bei keiner anderen Person habe ich ein derart sorgfältiges Studium von Texten – mit weitreichenden, immer konstruktiven Bleistiftnotizen am Rand des Textes und auf der Rückseite des Blattes – gesehen.

Weiterhin haben wir zusammen im Jahr der Mathematik 2008 das Buch „Mathemagische Momente“ herausgegeben, eine unterrichtspraktische Sammlung von fruchtbaren Momenten des Mathematiklehrens und -lernens, bei dem ich immer noch den Titel – Mathemagische Momente – als sehr treffend empfinde und ihn als Ansporn und Verpflichtung ansehe.

Derzeit arbeiten wir zusammen am „Handbuch der Mathematikdidaktik“, einem Werk, in dem das derzeitige Wissen der Mathematikdidaktik überblicksmäßig dargestellt werden soll. Sorgfalt und Verlässlichkeit sind zwei Eigenschaften, die ich bei allen gemeinsamen Arbeiten an Lisa Hefendehl stets besonders geschätzt habe und besonders schätze.

3 Über die Sprache

Wie bei kaum jemand sonst ist bei Lisa Hefendehl die Sprache nicht nur ein Kommunikations-, Verbalisierungs- oder Darstellungsmittel, sondern bei ihr ist die Sprache das verbalisierte Denken. Sätze werden bei ihr – wie es Wilhelm von Humboldt ausgedrückt hat – zu „Portionen des Denkens“. Für ihn – Humboldt – ist die Sprache nicht nur ein Mittel, um schon erkannte Wahrheiten darzustellen, sondern sie ist weit mehr, indem sie es ermöglicht, noch unerkannte Wahrheiten zu entdecken. Sprache ist so nicht nur ein kommunikatives, sondern ein kognitives, erkenntnisermöglichendes Instrument. Bei nur wenigen mir persönlich bekannte Personen lässt sich der Prozess des Denkens in Form einer „allmählichen Verfertigung der Gedanken beim Reden“ – wie es Heinrich von Kleist in seinem berühmten Aufsatz ausdrückt – so eindrucksvoll miterleben.

4 Authentizität

Authentizität bedeutet in der Fachdidaktik, dass Inhalte im Mathematikunterricht oder im Lernprozess „intellektuell ehrlich“, wohl vereinfacht, aber nicht verfälscht wiedergegeben werden. Eine authentische Person ist eine Person, bei der das Handeln mit der eigenen Überzeugung und Einstellung einhergeht. Bei niemand sonst habe ich diese Authentizität authentischer erlebt als bei Lisa Hefendehl. Wenn sie über Manuskripte, Artikel, Bücher und deren Autorinnen und Autoren urteilt, dann weiß man, dass ihre Meinung ehrlich ist, dass sie nicht sekundär oder gar drittmittel-affin beeinflusst ist, dass ihre Meinung stets auf durchdachten und wohlüberlegten Einschätzungen basiert. Eine derartige persönliche Haltung, erfordert nicht nur Wissen, fortwährendes Engagement und Interesse an aktuellen Entwicklungen, sie erfordert vor allem die Fähigkeit, mit anderen Menschen umgehen und reden zu können, heute nennt man das wohl Kommunikationskompetenz, was eigentlich – kommutativ richtiggestellt – kompetente Kommunikation heißen müsste.

5 Wünsche für die Zukunft

Kommen wir nach diesem deskriptiven nun zum konstruktiven Teil. Wir richten den Blick in die Zukunft. Ich wünsche dir – liebe Lisa – das, was sich vielleicht am besten *in einem Wort* ausdrücken lässt. Ein Wort, das *ich* erst vor Kurzem anlässlich einer Podiumsdiskussion – richtig – kennen und schätzen gelernt habe und das ich vielleicht als eines der schönsten Wörter der deutschen Sprache ansehe. Die Bedeutung dieses Wortes ist stets in die Zukunft gerichtet: Das Wort drückt aus, dass Neugierde und Interesse fortbestehen bleiben mögen, dass es wichtig ist, sich fortwährend Ziele im Leben zu setzen, Ziele, nach denen man strebt, nach denen man sich sehnt. Wir wissen das, die Neugierde ist die Quelle aller Wissenschaft. Dabei ist ja häufig oder gar meist nicht das Erreichen oder Ankommen das Ziel, sondern das Streben und Sehnen nach diesem Ziel. Man mag das auch eine produktive Unruhe nennen. „Nur wer strebend sich bemüht, den können wir erlösen“, aber wohl auch wissend, „es irrt der Mensch, so lange er strebt“. Beide Zitate – natürlich aus „dem Faust“ – sehe ich nicht als Widerspruch an. Irrwege sind ja – häufig – keine Nebenwege, sondern sind die eigentlich interessanten Wege. Wir reisen, um unterwegs zu sein und nicht um anzukommen.

Damit schließe ich mit einem Geburtstagsständchen. Keinem Lied, sondern einem Gedicht. Ein Gedicht, das so heißt, wie das Wort, das über diesem letzten Abschnitt schwebte, das aber noch nicht gefallen ist. Das Gedicht ist von Joseph von Eichendorff, ist von 1832, ein Gedicht der Romantik mit natürlich romantischen Worten und Sätzen. Es heißt – natürlich – Sehnsucht. (Dieses kann oder sollte jeder selbst nachlesen)

Alles Gute für die kommende Zeit!

Laudatio anlässlich der Verleihung des Johannes Kühnel Preises zur Förderung des mathematischen Anfangsunterrichts 2013 an Prof. Dr. Erich Christian Wittmann

Hans-Jürgen Elschenbroich

Erich Christian Wittmann ist einer der bekanntesten und renommiertesten deutschen Mathematik-Didaktiker und hat zunächst an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in der Nachfolge von Wilhelm Oehl und dann an der Universität Dortmund eine große Zahl von Lehramtsstudenten aller Schulformen ausgebildet und geprägt.

Sein Werk ‚Grundfragen des Mathematikunterrichts' war für Generationen von Lehramtsanwärtern Pflichtlektüre in der Lehrerausbildung.

Schulisch ist sein Name besonders mit dem Grundschul-Projekt *mathe 2000*, das letztes Jahr 25-jähriges Jubiläum feiern konnte, und mit dem Grundschul-Lehrbuch *Das Zahlenbuch* verbunden. Das Zahlenbuch hat wie wohl kein anderes Schulbuch den Mathematik-Unterricht in der Grundschule geprägt. Nach ersten Unterrichtserprobungen ab 1992 ist es mittlerweile in der dritten Generation erhältlich.

In ihm konkretisieren sich die Grundprinzipien von mathe 2000, nämlich

- Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen
- Konzentration des Stoffes auf die tragenden Grundideen und Sparsamkeit in Darstellungsmitteln
- Grundlegendes, automatisierendes und produktives Üben
- Gemeinsame Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten und von leistungsstarken Kindern nach dem Prinzip der natürlichen Differenzierung
- Systemische Qualitätssicherung.

Der MNU-Vorsitzende Jürgen Langlet (links), Laudator Hans-Jürgen Elschenbroich (rechts) und der Preisträger Erich Chr. Wittmann (Mitte) (Foto: MNU, Felicitas von Stackelberg)

Es ist ihm in herausragender Weise gelungen, didaktische Prinzipien aus dem universitären Bereich heraus in den Schulen wirksam werden zu lassen!

Für seine Verdienste um den mathematischen Anfangsunterricht erhält er den Johannes Kühnel Preis.

Der Johannes Kühnel Preis wird vom Ernst Klett Verlag, Stuttgart, gestiftet und durch den MNU Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. verliehen.

Hans-Jürgen Elschenbroich, Medienberatung NRW, Bertha von Suttner Platz 1, 40227 Duesseldorf, Email: elschenbroich@t-online.de

Über Günther Ossimitz – Ein Nachruf

Roland Fischer

Günther Ossimitz
9. 10. 1958–8. 1. 2013

Meine erste Erinnerung an einen intensiveren Kontakt mit Günther Ossimitz verbinde ich mit seiner Diplomarbeit. Anders als die meisten Studierenden hat er selber ein Thema vorgeschlagen. Ausgehend von Gödel/Escher/Bach ging es um Grenzfragen der Mathematik, die er mit großem Engagement und mit Kreativität bearbeitete.

Wir haben dann etliche Jahre miteinander gearbeitet. Ein Thema war die Erschließung der Möglichkeiten der Beschreibenden Statistik für die Schule. Ich denke, dass da viel gelungen ist, jedenfalls sieht der Unterricht heute diesbezüglich anders aus als vor 30 Jahren, was auch ein Verdienst von Günther ist. Ein anderes Thema war „Mathematikunterricht und Politische Bildung“, wofür Günther interessante Vorschläge entwickelte und auch zur Grundsatzdiskussion Wesentliches beitrug. Wir waren damals auch gemeinsam in der Lehrerfortbildung tätig, wobei seine Vorträge großen Anklang fanden.

Hinter dem Ganzen stand eine vom Mainstream abweichende Philosophie der Mathematik. Eine Vorstellung, die den Darstellungs- und Kommunikationsaspekt von Mathematik betont und die darüber hinaus die Möglichkeit bietet, zu grundlegenden Einsichten über die Welt und das Mensch-Sein zu kommen. Dass sich die Mathematik paradoxerweise auch dafür eignet, einen Zugang zum Nicht-Mathematischen zu erschließen, hat Günther für mich immer wieder durch treffende Beispiele gezeigt.

Den Weg von der Mathematik über diese hinaus ist er dann auch in seiner Beschäftigung mit systemischem Denken gegangen. Der Anfang war Systemdynamik – mathematische Simulationen mit dem Computer, wie sie heute in vielen Gebieten gang und gäbe sind. Günther hat dazu viele Vorschläge für den Mathematikunterricht entwickelt, ist aber dann weit darüber hinausgegangen. Die psychosoziale, die kommunikative und schließlich die philosophische Dimension systemischen Denkens und Handelns haben ihn beschäftigt.

Was war das Ziel seiner Arbeit? Aus meiner Sicht ging es ihm einerseits darum, all diese Bereiche in ihren Grundlagen und in ihrem Zusammenhang zu verstehen, andererseits darum, sie in ihrer Bedeutung und in ihrem Nutzen für möglichst viele Menschen zugänglich zu machen. Er war Didaktiker, er wollte nützlich sein, nicht nur er sollte verstehen, sondern andere sollten daran teilhaben und – noch wichtiger – die Bedeutung für ihr Leben erkennen und daraus Nutzen ziehen. Diese Einstellung hatte auch Auswirkungen auf seinen Stil des Umgangs mit Menschen, insbesondere mit Studierenden: zugewandt, hilfsbereit, ermunternd, deren spezifische Situation ernst nehmend.

Günther Ossimitz war jemand, der sich große Ziele gesetzt hat – größere als sie sich die meisten Wissenschafter im heutigen Universitätsbetrieb setzen – und der diese konsequent verfolgt hat. Dass er dabei manche Dinge, die anderen bedeutsam erschienen, nicht so ernst genommen hat, hat ihm auch Kritik eingetragen. Er hat sich nicht geschont, für das zu arbeiten, was ihm wichtig war, davon hat ihn auch seine schwere Krankheit nicht abgehalten. Ich habe ihn dafür bewundert.

Günther Ossimitz war ein Grenzgänger: in der Mathematik, in der Wissenschaft, in seinem Denken und Handeln. Er wollte Grenzen ausloten und immer wieder überschreiten. Die letzte Grenze in diesem Leben hat er jetzt überschritten. Ich bin guter Hoffnung, dass dies für ihn auch ein Grund zur Freude ist.

Roland Fischer, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Institut für Didaktik der Mathematik, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich, Email: roland.fischer@uni-klu.ac.at

Mathematik im Web 2.0

Heidelberger Wissenschaftler erhalten begehrte Förderung des Stifterverbandes, um einen Online-Kurs über mathematische Denk- und Arbeitsweisen durchzuführen

(PH Heidelberg) Im Rahmen der Ausschreibung „MOOC Production Fellowship – Lehren und Lernen im Web“ des Stifterverbands für die Deutsche Wissenschaft und der Firma iversity hat die Pädagogische Hochschule Heidelberg den Zuschlag erhalten: Professor Dr. Christian Spannagel und Dr. Michael Gieding vom Fach Mathematik haben sich – gemeinsam mit Lutz Berger und Dr. Martin Lindner (wissmuth.de) – gegen mehr als 250 Mitbewerber durchgesetzt und können einen der zehn ausgeschriebenen MOOCs („massive open online course“) durchführen. Der Online-Kurs steht jedem offen und soll im Wintersemester 2013/2014 starten; hierfür erhalten die Heidelberger Forscher 25 000 Euro sowie eine individuelle Beratung von iversity.

V. l. n. r.: Dr. Meyer-Guckel (Stifterverband), Dr. Lindner, Marcus Riecke (iversity), Lutz Berger, Prof. Dr. Spannagel, Dr. Schütte (BMBF), Dr. Gieding

„Wir freuen uns sehr, dass wir mit unserem Konzept überzeugen konnten“, erklären Spannagel und Gieding während der öffentlichen Auszeichnung in Berlin. Sie hatten sich um die Durchführung des MOOCs „Mathematische Denk- und Arbeitsweisen in Geometrie und Arithmetik“ beworben: „Dieser MOOC ist für uns die konsequente Weiterführung unserer bisherigen Arbeit“, so die beiden Mathematikdidaktiker. „Wir können hier unsere langjährigen Erfahrungen im Einsatz von Neuen Medien in Lehrveranstaltungen perfekt bündeln“.

Ihr MOOC vermittelt mathematische Denk- und Arbeitsweisen wie Problemlösen, Beweisen und Definieren. Anders als bei klassischen Online-Kursen kommen jedoch nicht nur Videos zum Einsatz. Die Heidelberger Wissenschaftler setzen vielmehr konsequent auf ihr Überzeugung, dass man Denk- und Arbeitsweisen nur lernt, wann man sie selbst ausführt: „Die Teilnehmer sollen selbstständig Erfahrungen sammeln und sich so ein fundiertes mathematisches Verständnis aufbauen.“

Um diesen Prozess kontinuierlich begleiten zu können, setzen sie neben der Plattform iversity noch auf diverse social-media-Tools wie Twitter, Google+ und ein Wiki. So können sich die Online-Teilnehmer mit den in Heidelberg präsenten Studierenden vernetzen. Außerdem soll die persönliche Lernumgebung der Teilnehmer genutzt werden, um einen ungezwungenen Austausch von Mathematik zu ermöglichen: „Sämtliche Teilnehmer können sich über mathematische Lösungen verständigen und sich gegenseitig korrigieren und ergänzen“, betonen die Wissenschaftler. Mit dem Preisgeld will das Heidelberg Team nun seinen MOOC möglichst umfassend und nachhaltig umsetzen; der Start ist für Herbst 2013 geplant.

Leserbriefe

Zum Bericht aus dem Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik (Soest 28.–30. 9. 2012), GDM-Mitteilungen 94 (2013)

Ein Kommentar: Im Zusammenhang mit dem Bericht aus dem Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik (Soest 28.-30.9.2012) ist es auf Seite 34 leider zu der folgenden missverständlichen Darstellung gekommen:

> JZ: ... Beweise sind eigentlich nie gemacht worden (große Proteste aus dem Publikum) ...

Meiner Erinnerung nach habe ich (sinngemäß) gesagt: „... (streng) formale Beweise spielen im Unterricht praktisch keine Rolle ... " Selbst, wenn ich in der Hitze der Diskussion das Wort „formal“ ausgelassen haben sollte, so habe ich in der darauffolgenden Diskussion deutlich zu machen versucht, dass sich meine Äusserung zum Beweisen im Mathematikunterricht ausschliesslich auf abstrakte, streng formale, axiomatische Beweise bezog. In dieser Form gibt die zitierte Aussage nach wie vor meine Überzeugung wieder.

Was meine Äusserung aber nicht bedeutet ist, dass Beweisen, Begründen und Argumentieren aus meiner Sicht keine Rolle im Mathematikunterricht spielen würden oder sollten. Ganz im Gegenteil. Die Arbeiten zum präformalen, paradigmatischen, exemplarischen und auch visuellen Beweisen gehören für mich mit zu dem besten, was die Didaktik der Mathematik in den letzten Jahrzehnten hervorgebracht hat und ein bisschen davon wird doch wohl hoffentlich auch in den Mathematikunterricht eingeflossen sein.

Jochen Ziegenbalg (Karlsruhe und Berlin)

Zur Rezension des Buches „Elementare Stochastik“ (H. Kütting, M. J. Sauer) von H. Läuter in den GDM-Mitteilungen 94 (2013)

Die positive Rezension unseres Buches hat uns als Autoren sehr gefreut. Gleichwohl möchten wir zwei Hinweise geben, um mögliche Missverständnisse auszuschließen:

1. Erwartungswert und Varianz: In einem eigenen Abschnitt 8.6 werden Erwartungswert und Varianz für Verteilungsfunktionen mit Dichten definiert und für die in den Abschnitten 8.3, 8.4, 8.5 behandelten speziellen Verteilungsfunktionen berechnet.
2. Tschebyscheff-Ungleichung: Nach dem Beweis der Tschebyscheff-Ungleichung für diskrete Zufallsvariable wird in einer Anmerkung ergänzt, dass diese Ungleichung auch für abstrakte Zufallsvariable gilt.

Wir hoffen, dass diese Hinweise die Rezension ergänzen und der Sache dienlich sind.

H. Kütting, M. J. Sauer (Münster)