Neu in diesem Fachgebiet ist das *ALM Journal*, das als elektronisches Journal (siehe www.alm.online.org) im Juli dieses Jahres erstmals erscheint. Es wurde in der Absicht gegründet, weltweit das Forum für alle Fragen im Themenbereich Erwachsene und Mathematik zu sein.

Kontakt: Jürgen Maaß [redacted], Wolfgang Schlöglmann, Linz (Österr.)

Nach der Übergabe der Ehrenpromotionsurkunde an HEINRICH WINTER

Universität Dortmund, 13. Mai 2005

[v.l.n.r.: Erich Ch. Wittmann, Heinrich Winter,

Gerhard Rosenberger (Dekan), Eberhard Becker (Rektor)]

Ehrenpromotion

Ehrenpromotion für Heinrich Winter an der Universität Dortmund am 13. Mai 2005

**Prof. em. Dr. Dr. paed. h.c.
Heinrich Winter
(RWTH Aachen)**

Universität Dortmund verleiht Ehrendoktorwürde an den Aachener Mathematik-Didaktiker Professor Heinrich Winter[1]

In mehr als vier Jahrzehnten hat Prof. em. Dr. HEINRICH WINTER von der RWTH Aachen ein mathematikdidaktisches Werk geschaffen, das an Umfang, Fundierung und wissenschaftlicher Breite seinesgleichen sucht. Für diese herausragende Leistung verleiht der Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund dem 77-jährigen Wissenschaftler jetzt die Ehrendoktorwürde. Der Fachbereich Mathematik ist damit der **erste mathematische Fachbereich in Deutschland**, der die Ehrendoktorwürde an einen Mathematikdidaktiker verleiht und damit ein Zeichen für die wachsende Bedeutung der

[1] Ankündigender Pressebericht der RWTH-Aachen (Mai 2005): http://www.rwth-aachen.de/zentral/dez3_pm2005_winter.htm

Mathematikdidaktik bei der wissenschaftlichen Entwicklung des Mathematikunterrichts setzt. Die offizielle Verleihung findet am Freitag, dem 13. Mai ab 14.30 Uhr im Hörsaal M/E 29, Mathematikgebäude, Campus-Nord, statt.

Wie stark die Entscheidung des Fachbereichs außerhalb beachtet wird, zeigt sich am Programm des Festakts: Die Präsidenten der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und der Deutschen Mathematikervereinigung, Prof. Dr. ELMAR COHORS-FRESENBORG, Universität Osnabrück, und Prof. Dr. GÜNTHER WILDENHAIN, Universität Rostock, werden die Grußworte sprechen. Die Ehrenurkunde wird vom Dekan des Fachbereichs Mathematik, Prof. Dr. GERHARD ROSENBERGER und dem Rektor der Universität Dortmund, Prof. Dr. EBERHARD BECKER, gemeinsam überreicht. Die Festvorträge halten Prof. Dr. GÜNTER ZIEGLER, Mathematiker an der Technischen Universität Berlin, und Prof.Dr. HANS NIELS JAHNKE, Mathematikdidaktiker an der Universität Duisburg-Essen.

Aufbauend auf gründlichen Studien für alle Lehrämter sowie Lehrerfahrungen in allen Schulformen hat HEINRICH WINTER bei der Entwicklung des Mathematikunterrichts aller Stufen und der wissenschaftlichen Fundierung der Mathematik mitgewirkt. Konstruktive Beiträge zu allen Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts von der Grundschule bis zur Oberstufe verbinden sich darin schlüssig mit theoretischen Analysen und wissenschaftstheoretischen Überlegungen. Winter erweist sich dabei als vielseitig gebildeter und interdisziplinär arbeitender Wissenschaftler. Markenzeichen seines Werkes ist die kreative Nutzung der Elementarmathematik im Rahmen eines überzeugenden stufenübergreifenden Allgemeinbildungskonzepts (Mathematik als "Schule der Anschauung"). In seinem Hauptwerk "Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre pädagogische Bedeutung" hat WINTER die Grundlage für die Veränderung des Mathematikunterrichts in Richtung des entdeckenden Lernens gelegt. Der unter seiner Federführung entstandene Mathematiklehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen von 1985 übte als "Jahrhundertlehrplan" auf die Lehrpläne aller Stufen bundesweit einen durchschlagenden Einfluss aus. In seiner 30-jährigen Lehrtätigkeit an den Pädagogischen Hochschulen Neuß, Dortmund, Aachen und der RWTH Aachen hat HEINRICH WINTER mehr als eine Generation von Lehrerinnen und Lehrern aller Schulformen durch sein persönliches Wirken geprägt.

HEINRICH WINTER ist ein allseits anerkannter, hochgeschätzter und beliebter Kollege von einer besonderen Ausstrahlungskraft. Er trägt begeisternd vor, wovon man sich in Dortmund zuletzt 1999 in einem Festkolloquium und 2001 in einem Vortrag im Mathematikdidaktischen Kolloquium (über den "Kanon der Geometrie") überzeugen konnte. Die Mathematikdidaktik in Dortmund verdankt ihm neben WILHELM OEHL (1904 - 1991) die Grundsteinlegung. Ohne seinen prägenden Einfluss auf die Dortmunder Kollegen, mit denen er bis heute in enger Verbindung steht, hätte die Dortmunder Mathematikdidaktik sicherlich nicht den heutigen Stand erreicht.

Kontakt: Anja Fresen, [redacted]

Grußwort

im Namen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zur Ehrenpromotion von Prof. Dr. Heinrich Winter

Michael Neubrand

Sehr geehrter Herr Winter, Herr Rektor, liebe Kolleginnen und Kollegen, meine Damen und Herren,

Herr WINTER war von 1983 bis 1987 der erste Vorsitzende der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM). In Vertretung von Herrn Kollegen COHORS-FRESENBORG, dem derzeitigen Vorsitzenden unserer Gesellschaft, darf ich Ihnen, lieber Herr WINTER, die herzlichsten Glückwünsche der ganzen GDM zu Ihrer Ehrenpromotion überbringen. Ich tue das einerseits offiziell, andererseits auch ganz persönlich. Ohne dass ich auch nur versuche, eine Würdigung Ihrer Arbeiten in der und für die Mathematikdidaktik vorzutragen - das wird heute ja ausführlich geschehen - möchte ich doch ein paar Gedanken anschließen:

Worin besteht die fortdauernde Wirkung von HEINRICH WINTER in die Mathematikdidaktik insgesamt?

Zunächst kann man die Aktivitäten von Herrn WINTER in drei Bereiche bündeln:

- die fachdidaktisch - inhaltlichen Arbeiten: Man denke etwa an die Beiträge zum "Entdeckenden Lernen" oder an die zahlreichen und vielfältigen Analysen mathematischer Themen im Bildungszusammenhang.
- sein Einwirken ins "politische Feld": Denken Sie z.B. an die 1985-er Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen.
- das Engagement innerhalb der professionellen Organisation der Mathematikdidaktik, eben z.B. seine Tätigkeit als erster Vorsitzender der GDM.

Aber wie wenig träfe man den Charakter von HEINRICH WINTERs Arbeiten, wenn man sich mit ein paar Aufzählungen, etwa der Art, wie in Datenbanken auf Stichwörter zugegriffen wird, zufrieden gäbe: Arbeitsgebiet "Problemlösen" [stimmt irgendwie, aber stimmt ja eigentlich doch nicht], Mitglied in der und der Kommission [stimmt ja in vielfältiger Hinsicht, aber was sagt das schon allein für sich].

Kennzeichnend ist vielmehr etwas, was ich - wohl eher in nicht zu erwartender Weise - kürzlich in einem Interview mit dem neuen Papst, JOSEPH RATZINGER, gehört habe: Alles müsse "mit geistiger Weite" betrieben werden.

Sagen wir es also so: HEINRICH WINTERs Arbeiten sind ein einziger Appell für die "geistige Weite", gegen Kleinkariertheit und Kleingeisterei in der Mathematikdidaktik.

Warum ist das wichtig? Aus zwei Gründen, einem "internen" und einem "externen":

Intern ist es sicher so, dass die Mathematikdidaktik zunehmend eine "normale" Wissenschaft wird. Und dann treten die üblichen Mechanismen der Profilierung ein (und sie sind auch erforderlich): Dies und das Paper an der richtigen Stelle platzieren, den richtigen Vortrag vor dem richtigen Publikum, usw.. Aber mathematikdidaktische Forschung ist hohl ohne die Frage, worum es denn eigentlich gehe: Um eine kognitiv anspruchsvolle (nicht unbedingt technisch schwierige) Mathematik für alle, ja mehr noch um das "Gesamtunternehmen der Ausbreitung der Kultur", wie HEINRICH WINTER einmal in einer Eröffnungsansprache zur Jahrestagung der GDM gesagt hat, und dass mathematikdidaktische Forschung und Entwicklung - bei aller Anerkennung von Grundlagenforschungen - schließlich darauf bezogen sein müssen.

Extern bedeutet das, dass wir einerseits den Kontakt ins politische Feld suchen müssen, und dennoch nicht die Wurzeln aus der Mathematikdidaktik verlieren dürfen - aber das eben in "geistiger Weite". Das hat uns HEINRICH WINTER, wie wohl kaum ein anderer, vorgemacht. Nicht von ungefähr haben wir uns daher in PISA explizit auf WINTERS großen Rahmen vom Allgemeinbildungspotential der Mathematik bezogen.

Zusammengenommen kann man wohl so sagen: HEINRICH WINTER hat uns darauf hingewiesen - und zwar nicht nur unverbindlich-philosophisch, sondern in zahlreichen konkreten Beispielen - , dass Mathematik integraler Bestandteil des menschlichen Lernens, der Kultur und damit der Ausbildung ist (vielleicht besser: sein kann!). Die Mathematikdidaktik findet ihren Kern also in einer Reflexion über diese Rolle der Mathematik zwischen Fachstrukturen, individuellem Lernen, Unterricht und dem gesellschaftlichen Gebrauch.

Persönlich also, lieber Herr WINTER, und offiziell im Auftrag der GDM:
Herzliche Glückwünsche zu der Ehrenpromotion, die wir heute hier feiern.

Laudatio

anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde (Dr. paed.h.c.) an Prof.em.Dr. Heinrich Winter, RWTH Aachen durch den Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund am 13.05.2005

Erich Ch. Wittmann

Fast auf den Tag genau vor 36 Jahren habe ich als Assistent am Erlanger Mathematischen Institut die Einladung zu einem Fachgespräch an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in Dortmund erhalten, das 14 Tage später stattfand. Ich begegnete dabei zum ersten Mal HEINRICH WINTER, der als frisch an die Hochschule berufener Professor der bestimmende Gesprächspartner war. Ich hatte das große Glück, ein halbes Jahr später Kollege von ihm zu werden und als Greenhorn in den folgenden drei Jahren bei ihm in die Lehre gehen zu können. Diese gemeinsamen Jahre haben mich geprägt. Es war daher eine große Freude und Ehre für mich, den Vorsitz in der Ehrenpromotionskommission führen zu können, und es ist eine große Freude und Ehre für mich, die Laudatio auf Person und Werk vortragen zu dürfen.

Der Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund ehrt mit der Verleihung der Ehrendoktorwürde an HEINRICH WINTER den Mathematikdidaktiker, der, wie es einer der Gutachter treffend ausgedrückt hat, **die** Identifikationsfigur für die heute aktiven Mathematikdidaktiker in Deutschland ist. HEINRICH WINTER hat in 40 Jahren ein mathematikdidaktisches Werk geschaffen, das an Umfang, Vielseitigkeit und theoretischer Fundierung seinesgleichen sucht. Wir haben einleitend die "Passacaglia" von JOHAN HALVORSEN gehört, in der eine Violine und ein Violoncello mit zahlreichen Doppelgriffen den Eindruck erwecken, als spiele ein volles Streichquartett. Bei HEINRICH WINTER hat man ebenfalls den Eindruck, dass mehrere Wissenschaftler am Werk waren.

HEINRICH WINTER hat diese Leistung erbracht unter ganz schwierigen Startbedingungen, die man sich heute kaum noch vorstellen kann. Die öffentliche Erinnerung an das Kriegsende vor 60 Jahren hat uns in den letzten Tagen die damaligen Zustände bis zu einem gewissen Grad bewusst gemacht. HEINRICH WINTER besuchte während des Krieges als Fahrschüler aus dem thüringischen Dorf Buttlar das Aufbaugymnasium in Fulda. Mit Kriegsende wurde sein Schulweg durch den Eisernen Vorhang zerschnitten. Der Abschluss des Gymnasiums war nicht mehr möglich. Nach einem zehnmonatigen Lehrgang wurde der Achtzehnjährige Lehrer an einer einklassigen Dorfschule in Thüringen. Erst mit 23 Jahren konnte HEINRICH WINTER in Erfurt auf dem zweiten Bildungsweg das Abitur nachholen. Als die politischen Verhältnisse in der DDR für ihn unerträglich wurden, entschloss er sich Anfang der fünfziger Jahre zur Flucht in die Bundesrepublik. Aachen wurde ihm zur neuen Heimat. Er musste an der Pädagogischen Akademie aber erst noch einmal studieren und eine Prüfung ablegen, ehe er Volksschullehrer werden konnte. Während seiner siebenjährigen Tätigkeit legte er auch noch die Realschullehrerprüfung ab und absolvierte parallel zu seinem Beruf an der RWTH Aachen das Studium für das Lehramt an Gymnasien. Anschließend war er zwei Jahre lang als Studienreferendar und Studienassessor tätig, betrieb nebenher noch seine Promotion an der RWTH Aachen und wechselte mit Abschluss der Promotion als Assistent an das mathematikdidaktische Seminar der Pädagogischen Hochschule Neuß. Dort konnte er sich als 33jähriger endlich voll und ganz dem Gebiet widmen, das ihm immer vorschwebte: der Didaktik der Mathematik.

1969 wurde er Professor an der Pädagogischen Hochschule in Dortmund, kehrte 1973 an die Pädagogische Hochschule Neuß zurück und folgte 1978 einem Ruf an die Pädagogische Hochschule Aachen, die 1980 in die RWTH Aachen eingegliedert wurde. Während er an der Pädagogischen Hochschule in der Lehrerbildung für die Grundschule und die Sekundarstufe I tätig war, widmete er sich an der RWTH Aachen der Lehrerausbildung für die Sekundarstufe II und der Ausbildung im Service für Biologen.

Eine solche Breite an Erfahrungen im Unterricht von der Grundschule bis zum Gymnasium und an Erfahrungen in der Lehrerbildung für alle Lehrämter und der Ausbildung im Service ist sicherlich einzigartig. Diese Erfahrungen stehen aber nicht isoliert, sondern bilden ein zentrales Element seiner wissenschaftlichen Arbeit in der Didaktik.

Die theoretische Durchdringung der Praxis des Mathematiklehrens und - lernens: Darin sieht HEINRICH WINTER die Aufgabe der Mathematikdidaktik. Dieser Aufgabe hat er sich auf breiter Front gewidmet: er hat bahnbrechende Arbeiten zur Zielsetzung, zu den Inhalten des Mathematikunterrichts sowie zu den Prinzipien des Lehrens und Lernens geschrieben. Das Besondere an diesen Arbeiten ist, dass die theoretischen Überlegungen immer durch substanzielle Unterrichtsbeispiele konkretisiert und abgesichert sind. Der Praxisbezug wurde dadurch noch verstärkt, dass Frau LOTTI WINTER, die heute ebenfalls in unserer Mitte ist, als Grundschullehrerin aktiv an der Arbeit ihres Mannes teilnahm und für ihn viele Unterrichtsexperimente durchführte.

HEINRICH WINTER sieht den allgemeinbildenden Auftrag des Mathematikunterrichts in der Schulung der "Anschauung". In einer grandiosen Arbeit, die in der Auseinandersetzung mit den Überlegungen von HANS WERNER HEYMANN zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht entstanden ist, hat er seine Überlegungen ausführlich dargelegt und der verunsicherten Community damit wieder Halt gegeben. Nach seiner Auffassung soll der Unterricht die Schülerinnen und Schüler befähigen, mathematische Strukturen wahrzunehmen, begrifflich zu fassen, darzustellen und in kritischer Distanz zur Deutung von Phänomenen der realen Welt einzusetzen. Das große Ziel ist für HEINRICH WINTER die Entwicklung einer mathematischen Kultur als Teil der allgemeinen Kultur.

Der Unterricht muss in dieser Sichtweise struktur- **und** anwendungsorientiert sein. Die Komplementarität des "reinen" und "angewandten" Aspekts der Mathematik ist dabei aus gutem Grund konstitutiv: Die Bildung mathematischer Strukturen wird ja nur zum Teil durch die Realität angeregt. Viele Strukturen entwickeln sich nach internen Regeln und bilden eine eigene Welt. Aus dem auf spielerische Weise gewonnenen Vorrat an möglichen Modellen der Realität kann man dann Modelle zur Umwelterschließung gewinnen. Diese Modelle werden der Umwelt mit bestimmten Absichten und Interessen aufgeprägt und dürfen nicht für bare Münze genommen werden. Insbesondere ist ihre interne mathematische Konsistenz kein Beweis der objektiven Gültigkeit der dargestellten Sachverhalte.

HEINRICH WINTER ist vor diesem Hintergrund bereits in den siebziger Jahren mit Nachdruck dafür eingetreten, schon das Sachrechnen in der Grundschule als *Modellbildung* zu verstehen und im Sinne der Entwicklung von Kritikfähigkeit die hinter der Modellbildung stehenden nicht-mathematischen Annahmen und Absichten zu hinterfragen. In Vorträgen zum Thema "Bürger und Mathematik" hat er diesen Gedanken ausgebreitet und bewusst den Bezug zur Philosophie der Aufklärung hergestellt.

Ein wesentlicher Beitrag WINTERs zur praktischen Umsetzung dieser Ideen sind die mit seinem Namen verbundenen "allgemeinen Lernziele" des Mathematikunterrichts, die durch folgende Stichwörter bezeichnet werden:

- "Mathematisieren",
- "Explorieren",
- "Argumentieren" und
- "Formulieren".

Diese Lernziele haben im Gegensatz zu anderen Zielformulierungen wie sie heute im Rahmen der "Bildungsstandards" gewählt werden, den großen Vorteil, dass sie in natürlicher Weise mit dem mathematischen Erkenntnisprozess verbunden sind: Man hat eine Problemsituation vor sich und beschreibt sie mit mathematischen Mitteln, d.h. man mathematisiert sie. Dann sucht man in der erhaltenen Struktur nach Mustern, Regeln, Gesetzmäßigkeiten, Lösungswegen, usw., d.h. man exploriert die Situation. In einem dritten Schritt versucht man die erhaltenen Ergebnisse zu begründen - Argumentieren - und am Ende stellt man die Ergebnisse mündlich oder schriftlich in möglichst geschlossener Form dar - Formulieren. In der Praxis folgen diese Schritte in der Regel nicht linear aufeinander, sondern vermischen sich. Wenn man z.B. beim Formulieren eine Lücke entdeckt, kehrt man zur Exploration oder zur Begründung zurück und formuliert neu, wenn es gelingt, die Lücke zu schließen.

Die allgemeinen Lernziele sind stufenübergreifend und eröffnen daher die Vision eines Mathematikunterrichts vom Kindergarten bis zum Abitur - unabhängig von unterschiedlichen Inhalten. Es kommt allerdings darauf an, auf den unteren Stufen die nichtformalen Darstellungsmittel entsprechend zu nutzen. Hierfür hat HEINRICH WINTER in vielen Beiträgen überzeugende Beispiele geliefert. Ich erinnere nur an den wunderbaren Beweis der Neunerregel mit Hilfe der Stellentafel. Um zu zeigen, dass der Neunerrest einer beliebigen natürlichen Zahl gleich dem Neunerrest ihrer Quersumme ist, denkt man sich Zahlen am Abakus durch Plättchen dargestellt: 3215 z.B. wird durch 3 Plättchen in der Tausenderspalte, zwei Plättchen in der Hunderterspalte, 1 Plättchen in der Zehner- und 5 Plättchen in der Einerspalte dargestellt. Wenn nun ein Plättchen von einer höherwertigen Spalte eine Stelle nach rechts verschoben wird, ändert sich die Zahl um ein Vielfaches von 9, ihr Neunerrest bleibt erhalten. Diese Operation kann man so lange ausführen, bis alle Plättchen in der Einerspalte liegen. Die Gesamtzahl der Plättchen ist aber genau die Quersumme der Zahl.

Bemerkenswerter Weise wurde diese von mir als Mitglied des Editorial Boards der "Educational Studies in Mathematics" 1986 eingereichte Arbeit von dem damaligen Editor höchstpersönlich abgelehnt - ein erstes Signal für das Wegdriften dieser Zeitschrift und weiter Teile der internationalen Mathematikdidaktik von der Mathematik. HANS FREUDENTHAL, dem Gründer der "Educational Studies", wäre eine solche Fehlentscheidung nicht unterlaufen.

Hervorstechendes Merkmal der "stoffdidaktischen" Arbeiten von HEINRICH WINTER ist die kreative Nutzung der Elementarmathematik auf dem Hintergrund seines Allgemeinbildungskonzepts und der stufenübergreifenden allgemeinen Lernziele. Die Breite und Tiefe seiner Beiträge ist hier besonders beeindruckend. Es gibt von der Grundschule bis zum Abitur keinen Inhaltsbereich, zu dem er nicht fundamentale Arbeiten geschrieben hat. Die traditionellen Gebiete Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis und Lineare Algebra sind darin genauso vertreten wie neue Bereiche, insbesondere die Stochastik mit ihren vielfältigen Anwendungen. In allen Beiträgen finden sich originelle und authentische Unterrichtsbeispiele, bei denen die Strukturorientierung und die Anwendungsorientierung überzeugend ausbalanciert sind. Eine wunderbare Synthese seiner Beiträge zur Geometrie stellt der "Kanon für den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen" dar, ein Poster[2], das einer der Gutachter zu Recht ein "Kunstwerk" genannt hat. Das Credo HEINRICH WINTERS kommt in den vier Leitmotiven des "Kanons" in kompakter Form zum Ausdruck:

- innermathematischer Beziehungsreichtum
- Bedeutung in Alltag, Wissenschaften und allgemeiner Kultur
- Herausforderung des heuristischen und analytischen Denkens
- ästhetische Aspekte der Theoreme und Beweise.

Die von HEINRICH WINTER in seinen Arbeiten eingesetzten Ausdrucksmittel bewegen sich immer im Bereich der "Anschauung". Es gelingt ihm unter dieser Perspektive auch Themen zu erschließen, die weit über den Schulstoff hinaus reichen. Seine ganz neue Arbeit zum Zwei-Quadrate-Satz in den Semesterberichten, die er eine Studie zur Heuristik des Beweisens nennt, ist besonders beeindruckend.

Was die Prinzipien des Lehrens und Lernens anbelangt, steht HEINRICH WINTER wie kein zweiter Mathematikdidaktiker für die Veränderung des Mathematikunterrichts aller Stufen einschließlich der Lehrerbildung in Richtung des *entdeckenden Lernens*. Sein Hauptwerk "Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre pädagogische Bedeutung" fasst seine Auffassungen prägnant zusammen und führt sie an Praxisbeispielen überzeugend aus. Typisch für HEINRICH WINTER ordnen sich in diesem Buch historische, epistemologische, pädagogische und elementarmathematische Analysen beziehungsreicher Unterrichtsthemen aller Stufen nahtlos in ein didaktisches Konzept ein. Das entdeckende Lernen wird dabei besonders auch von der Mathematik her untermauert, wobei die von GEORGE POLYA begründete Heuristik besondere Berücksichtigung findet.

WINTER setzt das entdeckende Lernen bewusst in Gegensatz zum traditionellen Konzept des belehrenden Unterrichts, der noch heute den Mathematikunterricht und die Lehrerausbildung weithin beherrscht.

[2] Um einen Eindruck davon zu vermitteln geben wir es in stark verkleinerter Form (Original: DIN A 3) und schwarz-weiß auf Seite 65 wieder [MT].

Dass das Prinzip des entdeckenden Lernens 1985 erstmals als oberstes Unterrichtsprinzip Eingang in einen Lehrplan gefunden hat, ist HEINRICH WINTERS Verdienst. In dem unter seiner Federführung entstandenen Mathematiklehrplan für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen findet sich folgende klassische Formulierung in der für WINTER typischen Sprache:

> *Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefasst wird. Der Unterricht muss daher so gestaltet werden, dass die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten ...*
>
> *Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereit zu stellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist.*

Dieser Jahrhundertlehrplan, in dem folgerichtig auch der Strukturorientierung und der Anwendungsorientierung ein eigener Abschnitt gewidmet ist, hat auf die Lehrpläne aller Stufen und aller Bundesländer einen großen Einfluss ausgeübt. Auch die Bemühungen um die Reform des Mathematikunterrichts im Umfeld von PISA berufen sich auf HEINRICH WINTER. Dass in der Grundschule der Übergang vom Rechen- und Raumlehreunterricht zum Mathematikunterricht mit breiter Zielsetzung erfolgt und gelungen ist, ist ganz wesentlich ihm zu verdanken.

Vom Standpunkt des entdeckenden Lernens aus hat HEINRICH WINTER auch einen Bereich des Unterrichts auf eine neue Grundlage gestellt, der als Bastion des belehrenden Unterrichts gilt: das Üben. In seinem fundamentalen Beitrag "Begriff und Bedeutung des Übens", der 1985 in der Zeitschrift "mathematik lehren" erschienen ist, hat er einen Unterricht konzipiert, in dem "übend entdeckt und entdeckend geübt" wird. Die Konzeption wird durch vier didaktische Prinzipien beschrieben, die an Unterrichtsbeispielen aller Stufen erläutert werden. Für das Projekt "mathe 2000" war dieser Beitrag von großer Bedeutung.

HEINRICH WINTER hat durch sein Werk auch entscheidend zur Konsolidierung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin beigetragen. Die theoretisch fundierte Konstruktion von Unterrichtsbeispielen, deren Rohmaterial von der Elementarmathematik geliefert wird, steht bei ihm im Mittelpunkt. Die in unserem Institut entwickelte Auffassung von Mathematikdidaktik als "design science" hat von ihm entscheidende Impulse erhalten. HEINRICH WINTER ist aber gleichzeitig immer offen gewesen gegenüber anderen Strömungen. Er hat sich nicht nur mit der mathematikdidaktischen Literatur in ihrer vollen Breite auseinandergesetzt, sondern sich stets interdisziplinär orientiert, was sich in seinem Werk und seinem Wirken deutlich zeigt. Welche seiner Arbeiten man auch immer liest: man sieht sich einem vielseitig interessierten und gebildeten

Wissenschaftler gegenüber, der in großen Zusammenhängen denkt und seine Überlegungen glänzend formuliert, nicht einem Spezialisten, der nur auf sein Gebiet und seine Fachsprache beschränkt ist.

Wir blicken heute voller Bewunderung auf das stolze Werk, das HEINRICH WINTER in vier Jahrzehnten geschaffen hat. Wir sollten dabei aber nicht vergessen, dass dieses Werk für uns auch Verpflichtungen beinhaltet. Bei einem so umfangreichen Werk besteht sehr leicht die große Gefahr, dass sich jede Gruppe nur das herauspickt, was ihren jeweiligen Interessen dient und sich zur Wahrung ihres Besitzstandes einsetzen lässt. Nach meiner Überzeugung werden wir dem WINTERschen Werk nur dann voll gerecht, wenn wir es im Gesamtzusammenhang sehen und würdigen, und daraus Folgerungen für die Zukunft ziehen.

Lassen Sie mich dazu abschließend einige Gedanken formulieren. Da es sich um die *erste Ehrenpromotion eines Mathematikdidaktikers durch einen mathematischen Fachbereich* handelt, möchte ich dabei an die gemeinsame Verantwortung von Mathematikdidaktikern und Mathematikern appellieren.

Die Mathematik als Wissenschaft und der Mathematikunterricht stehen in der heutigen Gesellschaft besonderen Herausforderungen gegenüber: die Mathematik steht in der Gefahr, ihre kulturelle Attraktivität einzubüßen, das Interesse an Mathematik nimmt im Unterricht von der Mittelstufe an immer mehr ab, mathematische Inhalte drohen hinter messbaren Kompetenzen zu verschwinden, Bildungsforscher, die vom Fach keine Ahnung haben, erscheinen den Bildungspolitikern als Retter in der letzten Not.

In dieser Situation sollte die Verleihung der Ehrendoktorwürde an HEINRICH WINTER auch als Aufforderung an Mathematikdidaktiker und Mathematiker betrachtet werden, die eigene Praxis vor dem Hintergrund des WINTERschen Werkes kritisch und selbstkritisch zu prüfen und sich auf Grundlagen für den Mathematikunterricht und die Lehrerbildung zu besinnen, die wirklich tragfähig sind. Folgende Punkte erscheinen mir dabei wesentlich:

1. Wie von HEINRICH WINTER vorgelebt muss das Mathematiklernen von der Früherziehung im Kindergarten bis zur Lehrerbildung als Einheit und als Teil der allgemeinen Kultur begriffen werden. Jede Stufe hat dabei ihre besondere, unersetzliche Rolle zu spielen. Es muss dafür gesorgt werden, dass die Lernenden von klein auf im Laufe von Jahren in die Mathematik hineinwachsen können, man darf ihnen die Mathematik auf keiner Stufe in fertiger Form überstülpen. Die Formen des Mathematiklehrens und -lernens auf den frühen Stufen sind dabei zweifellos wesentlich effektiver als die später auf der Sekundarstufe und auf der Universität angewandten Lehr-/Lernformen. Von der Früherziehung her sollte daher das Lernen auf höheren Stufen kritisch analysiert werden. Mancher Mathematiker mag das nur schwer nachvollziehen können. Als Kronzeuge steht aber gerade ein hervorragender Mathematiker zur Verfügung: WILLIAM KINGDON CLIFFORD (1845 -1869), bekannt durch die von ihm entdeckte und nach ihm benannte Clifford-Algebra, die später in der Quantenelektrodynamik Anwendung gefunden hat, äußerte sich in einem Brief folgendermaßen:

   Die Mathematik ist das Tor zur Naturwissenschaft und dieses Tor ist so eng und schmal, dass man nur als kleines Kind hineinkommen kann.

   Über diesen Satz sollten Mathematikdidaktiker und Mathematiker lange und gründlich nachdenken.

2. Das WINTERsche Werk fußt auf der Einsicht, dass die aktive Auseinandersetzung mit Mathematik der Schlüssel zu Interesse und Verständnis ist. Auch auf höheren Stufen einschließlich der Universität besteht daher *die Aufgabe des Lehrers darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereit zu stellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die für alle Lernenden förderlich ist.*

   Der Unterricht auf den höheren Stufen und die Lehrerbildung müssen unter dieser Perspektive reformiert werden. Zur Umsetzung dieser Forderung ist in erster Linie eine intime Kenntnis der Elementarmathematik nötig, die aber nicht als fertig gegeben, sondern als entwickelbar zu betrachten und behandeln ist. Es ist sehr erfreulich, dass DMV, GDM und MNU vor kurzem in einer gemeinsamen Verlautbarung erste Vorschläge gemacht haben, Elemente des entdeckenden Lernens in die Lehrerausbildung aufzunehmen.

3. Basis des WINTERschen Werks ist die Elementarmathematik. Es scheint mir angesichts der zunehmenden Spezialisierung in der mathematischen Forschung dringend nötig, dass sich bei den Mathematikern in der Einschätzung der Elementarmathematik eine fundamentale Bewusstseinsänderung vollzieht.

   Dieser Bereich muss als Basis der Mathematik und als unverzichtbarer Teil der Allgemeinbildung der Mathematiker verstanden werden, nicht als ein überwundener historischer Abschnitt, der für die heutige Mathematik bedeutungslos ist. Ausgangspunkt für ein Umdenken könnte die schlichte Tatsache sein, dass die Aufgaben des Bundeswettbewerbs Mathematik, der ein Programm zur Förderung mathematischer Begabungen ist, genau der Elementarmathematik entstammen.

   Nachdenken sollte man in diesem Zusammenhang auch über ein elementarmathematisches Doktorandenprogramm, das sich speziell an Lehramtsstudierende richtet.

4. Bildung ist das Megathema der Gesellschaft. Genauso wie für die Entwicklung der Technologie, der Wirtschaft und der Infrastruktur wird auch für die Entwicklung der Bildung eine wissenschaftliche Basis benötigt. Die Berufswissenschaft der Mathematiklehrerinnen und -lehrer ist die Mathematikdidaktik. Diese Disziplin hat inzwischen etwas vorzuweisen, wie das Werk von HEINRICH WINTER eindrucksvoll demonstriert.

Für ihre weitere wissenschaftliche Entwicklung müssen an der Universität stabile Rahmenbedingungen geschaffen werden. Ein mathematikdidaktisches Doktorandenprogramm, das für alle Stufen offen ist, ist dabei ein zentraler Punkt. Wichtig wäre auch, die Lehramtsstudiengänge so zu gestalten, dass aus ihnen elementarmathematisch gut ausgebildeter mathematikdidaktischer Nachwuchs rekrutiert werden kann.

Lieber Herr Winter,
mit der Verleihung der Ehrendoktorwürde durch den Fachbereich möchte ich den Dank der Mitglieder des Instituts für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts für die vielfältigen Anregungen verbinden, die Sie gerade uns im Laufe von Jahrzehnten gegeben haben und ohne die wir heute nicht dort stehen würden, wo wir stehen. Wir sind uns wohl bewusst, dass die Dortmunder Mathematikdidaktik Ihnen neben WILHELM OEHL die Grundsteinlegung verdankt.

Über die Orientierung hinaus, die uns Ihr Werk bietet, wünschen wir uns natürlich, dass Sie uns auf unserem Weg noch lange persönlich begleiten. Hierfür gibt es ein höchst ermutigendes Zeichen: Die Mitteilung, dass der Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund beschlossen hat, Ihnen die Ehrendoktorwürde zu verleihen, haben Sie, wie Sie mir sagten, auf Ihrem Anrufbeantworter nach der Rückkehr vom Tennisspielen vorgefunden. Das lässt uns hoffen. Wir wünschen Ihnen alles Gute und freuen uns auf die weitere Zusammenarbeit.

Ehrenpromotion von Heinrich Winter am 13.5.2005: [v.l.n.r.:] Eberhard Becker (Rektor), Gerhard Rosenberger (Dekan), Heinrich Winter, Erich Ch. Wittmann, Josef Bemelmans (Aachen), Günther Wildenhain (DMV-Präsident)

Zum Verhältnis von Mathematik und Mathematikdidaktik

Erweiterte Fassung meiner Dankrede anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde durch die Universität Dortmund am 13. Mai 2005

Heinrich Winter

Danksagung

Meine Damen und Herren dieser Festveranstaltung,

es ist mir nicht nur eine selbstverständliche Pflicht, dem Fachbereich Mathematik der Universität Dortmund für die hohe Ehre, die mir heute zuteil wird, ganz herzlich zu danken. Ich habe vielmehr das Bedürfnis, mein Glücksgefühl in Worte zu fassen, was mir nur teilweise gelingen will. Ich kann lediglich sagen, dass ich diesen Tag genieße und mich ganz naiv wie ein reich beschenktes Kind freue. Diese Ehrung ist die Krönung meines beruflichen Lebens, das mir hoffentlich noch die Chance gibt, mich dieser hohen Ehrung weiterhin würdig zu erweisen.

Es wäre schön, wenn diese Ehrung von vielen auch als Respekt vor der Arbeit der Mathematikdidaktik insgesamt empfunden werden könnte. Schließlich hätte ich ja nichts ohne Hilfe, Ermunterung und Kritik von Mathematikern und Didaktikern zustande bringen können.

Insbesondere möchte ich hier dem Dekan des Fachbereichs Mathematik, Herrn Prof. Dr. GERHARD ROSENBERGER , dem Rektor der Universität Dortmund, Herrn Prof. Dr. EBERHARD BECKER, dem Präsidenten der DMV, Herrn Prof. Dr. GÜNTHER WILDENHAIN, dem Vertreter des Vorsitzenden der GDM, Herrn Prof. Dr. MICHAEL NEUBRAND, und dem Sprecher der Fachgruppe Mathematik der Fakultät I der RWTH Aachen, Herrn Prof. Dr. JOSEF BEMELMANS, für ihre so freundlichen Grußworte danken.

Ganz besonderen Dank bin ich dem Laudator dieser Ehrenpromotion, Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. ERICH CHR. WITTMANN, schuldig, auch für die langjährige und für mich ersprießliche Zusammenarbeit, die hier in Dortmund im Jahre 1969 begann.

Den Herren Prof. Dr. GÜNTHER ZIEGLER und Prof. Dr. HANS NIELS JAHNKE danke ich im voraus für ihre Festvorträge, mit denen sie mir eine hohe Ehre erweisen.

Das hier - offensichtlich einträchtige – Beisammensein von Fachmathematikern und Fachdidaktikern ist eine gute Gelegenheit, einige Bemerkungen zum Verhältnis von Mathematik und Mathematikdidaktik zu machen, natürlich aus der Sicht eines Didaktikers.

Bemerkungen zur Lehrerausbildung

Jedermann hält es für richtig und notwendig, dass Lehramtsbeflissene nicht nur möglichst "gut" fachlich ausgebildet werden, sondern auch didaktische Fähigkeiten erwerben müssen.

Jenseits dieses (eigentlich trivialen) Konsenses gibt es aber bis heute keine Einigkeit darüber, wie die Ausbildung der Lehrer gestaltet werden soll.

Das klassische Modell der Ausbildung der Gymnasiallehrer, auf die ich mich hier beschränke, ist seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts und im Grunde bei uns bis heute die Zweiteilung: Mathematikausbildung durch ein Studium an der Universität (mindestens bis zum Vorexamen vergleichbar mit dem Diplom- (bzw. Bachelor-Master-) Studium), danach fachdidaktische Ausbildung praxisnah im zweijährigen Referendariat. Die Fachdidaktik hat in diesem Modell keinen Platz an der Hochschule.

In wünschenswerter Klarheit haben die Mathematiker des Fachbereichs einer bayerischen Universität dieses scheinbar so plausible Modell in einem Brief an das Kultusministerium (März 1976) damit verteidigt, dass es eine Wissenschaft Mathematikdidaktik nicht gebe und eine solche auch nicht im Entstehen begriffen sei und insofern mathematikdidaktische Studienangebote an der Hochschule gänzlich deplatziert seien. Über die Vertreter der von der Kultusbürokratie erzwungenen Einführung der Fachdidaktik in die Fachbereiche heißt es:

> "Sie werden Vorlesungen über Fachdidaktik ankündigen und im Grunde nichts zu sagen haben. Der vom Vorlesungsbetrieb und den Prüfungsverpflichtungen ausgehende Druck wird sie dazu bringen, ihren Gegenstand pseudowissenschaftlich aufzustutzen, womit dann der Scharlatanerie Tür und Tor geöffnet sind."

Es lohnte sich nicht, auf diesen polemischen Brief weiter einzugehen, wenn nicht darin eine Sicht des Verhältnisses von Fachmathematik zu Fachdidaktik zum Ausdruck käme, die auch heute noch weit verbreitet zu sein scheint, zumindest hinter vorgehaltener Hand:

(1) Im allgemeinen sind die "guten" Mathematiker auch die "guten" Lehrer, weil sie "klar und fasslich" vortragen (!) können.

(2) Die Aufgaben der Fachdidaktik haben sich auf unterrichtspraktische und methodische Fragen zu beschränken, darauf, wie man in der Schule am besten Mathematik "erklärt" oder "verkauft" oder didaktisch "umsetzt".

Zu (1): Richtig ist, dass der Lehrer den "Stoff" des Unterrichts auch von einer Warte, die deutlich über dem Niveau der anstehenden Schulmathematik steht, kennen lernen soll. So sollte der Lehrer der Bruchrechnung u.a. auch gelernt haben, dass es sich hier um die algebraische Erweiterung des (euklidischen) Halbringes der natürlichen Zahlen

zum Halbkörper der (nicht negativen) Bruchzahlen handelt, dass die endlichen Dezimalzahlen (wie alle endlichen p-adischen Zahlen) nur einen "kleinen" Teil der Bruchzahlen ausmachen und nur Halbringstruktur aufweisen. Mehr einschlägiges Wissen wäre wünschenswert, etwa über Teilstrukturen und Automorphismen in der Menge der Brüche[3].

Insofern kann es eine didaktische Kompetenz ohne fachinhaltliche Verankerung nicht geben; man kann nicht ohne Wolle stricken. Die frühere Volksschullehrerausbildung war in ihrer Mathematikferne genau deshalb defizitär. Der Rechenunterricht konnte gemessen an seinen Zielen i.g. auch nicht erfolgreich sein, obwohl damals die Volksschule keineswegs eine Restschule war, im Gegensatz zur heutigen Hauptschule.

Falsch aber ist die Annahme, dass die mathematische Kompetenz die didaktische gewissermaßen automatisch mit einschließe, weil natürlicherweise der Leitfaden **der** Fachsystematik auch der Leitfaden **der** Lehre sei. Ein Seminarvortrag nach dem Muster einer "idealen" Vorlesung - viel Stoff, klarer globaler Aufbau, Konsequenz im Lokalen (Definition, Satz, Beweis), übersichtliches Tafelbild, kein Wort zu viel, keines zu wenig, evt. Anreicherung durch Bilder, ... - lässt nicht ohne weiteres auf didaktische Kompetenz schließen. Er ist geradezu *antididaktisch*, wenn keine übergeordnete Fragestellung erkennbar ist oder wenn Lösungsbarrikaden nicht thematisiert werden oder wenn nicht der Beziehungsreichtum - weder seitwärts, noch rückwärts, noch vorwärts - aufgedeckt wird oder wenn genetische Aspekte fehlen oder auch, wenn keinerlei emotionale Bindung an den Inhalt und an die Lernenden zu erkennen ist, d.h. wenn der sogenannte "pädagogische Eros" nicht zu spüren ist.

Für die Schule gilt jedenfalls: Wer nur den Stoff kennt, kann ihn deshalb noch lange nicht unterrichten, auch wenn er das berühmte "natürliche Lehrgeschick" hat.

Kurz: Stricken ohne Strickmuster geht nicht.

Deshalb ist die bei Lehrermangel von der Kultusbürokratie gelegentlich praktizierte Einstellung von Fachleuten ohne pädagogische Ausbildung nicht zu verantworten.

Zu (2): Die Bescheidung von Fachdidaktik auf Unterrichtspraxis und Methodik - etwa im Sinne einer Meisterlehre, also Nachahmung von Mentoren - stellt eine nicht akzeptierbare Reduktion dar, zumal dann, wenn der Mathematikunterricht wirklich grundlegend verbessert und erfolgreicher gestaltet werden soll. Verbesserung kann nur erwartet werden, wenn das, was wesentlich für den Mathematikunterricht ist, systematisch, also wissenschaftlich auf Hochschulniveau, bearbeitet wird.

---

[3] Artmann, B.: Über die Teilringe von Q, in: ML 23, (1977), Heft 2, S. 10-19. - Artmann, B.: Der Zahlbegriff, Vandenhoeck & Ruprecht 1983, vgl. dazu auch Winter, H.: Strukturorientierte Bruchrechnung, in: Winter,H./ Wittmann, E. (Hrsg.): Beiträge zur Mathematikdidaktik - Festschrift für W. Oehl, Schroedel 1976, S. 131 - 165

Wir können nicht - und das ist die gute Nachricht aus Bayern - hinter die Forderung von ALFRED PRINGSHEIM (1850-1941) zurück gehen[4], der die Einrichtung von Lehrstühlen für mathematische Pädagogik forderte und einsichtig begründete:

> "Nachdrücklich möchte ich jedoch hervorheben, dass nach meinem Dafürhalten die Ausbildung der Lehrer gerade in Bezug auf denjenigen Punkt, der mir der wichtigste scheint, nicht bloss viel, sondern geradezu alles zu wünschen übrig lässt. Lehren ist eine schwere Kunst, und das Lehren der mathematischen Anfangsgründe der schwersten eine" [S. 28], ...
>
> "Was uns in Wahrheit not täte, das sind Universitäts-Vorlesungen und Seminar-Übungen aus dem Gebiete der mathematischen Pädagogik, welche sich auf alle einzelnen in den Mittelschulen zu lehrenden Disziplinen zu erstrecken hätte" [S. 29].

Das erscheint heute um so dringlicher, als nicht rd. 4 % wie zu Pringsheims Zeiten, sondern tendenziell 50 % eines Jahrganges zum Gymnasium gehen und die mageren Erfolge des Mathematikunterrichts insgesamt recht gut dokumentiert sind. Stattdessen erleben wir nach einer sehr kurzen Phase der Förderung der Fachdidaktik in den frühen 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts zunehmende personelle und sächliche Beschneidung der Ausstattung der Fachdidaktik und ein alarmierendes Nachwuchsproblem.

Die gegenwärtige Diskussion über die Folgen aus TIMSS und PISA greift zu kurz, wenn nicht die Bildungsreform primär als **Unterrichtsreform** angesehen wird[5]. Kleinere Klassen, ganztägige Betreuung, mehr Selbstständigkeit der Schulen, mehr Computereinsatz, mehr Internetnutzung, mehr Lernstandserhebungen, usw. führen allenfalls zu einer Verbesserung der Bedingungen, ersetzen aber keineswegs das Wichtigste: die Steigerung der didaktischen Kompetenz der Lehrer und Didaktiker.

Wesentlich für die Didaktik als Hochschuldisziplin sind drei Fragenkreise, die sich stark überlappen können:

a) Was soll warum und mit welchen Intentionen gelernt werden? - Didaktik als Bildungslehre (Curriculum-Forschung)

[4] Pringsheim, A.: Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik, Festrede zur Feier ihres 145. Stiftungstages der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München am 14. 03. 1904, Verlag der K. B. Akademie, 1904, vgl. dazu auch
- Freudenthal, H.: Vorrede zu einer Wissenschft vom Mathematikunterricht, Oldenbourg 1978.
- Winter, H.: Wie lässst sich Mathematikdidaktik als Hochschuldisziplin legitimieren? in: DMV- Mitteilungen 1994, Heft 2, S.14 - 18

[5] Müller, G. N. / Steinbring, H. / Wittmann, E. Chr.: Jenseits von PISA - Bildungsreform als Unterrichtsreform, Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht, Kallmeyer 2002

b) Wie verlaufen bei wem und unter welchen Bedingungen Lernvorgänge? - Didaktik als Lehre von psycho-sozialen Prozessen (Lehr-Lern-Forschung)

c) Welche didaktischen Interventionen gibt es, um Lernprozesse im Sinne der Zielvorstellungen in Gang zu setzen und zu begleiten? - Didaktik als Lehre von Gestaltungsmitteln des Unterrichts (u.a. Didaktische Phänomenologie als Forschungsrahmen)

Alle drei Fragenkreise beziehen sich wesentlich auf "die" Mathematik, jedoch Mathematik weniger als objektive fertige Architektur, die "nur" herunter transformiert werden müsste, sondern weit mehr als durchaus subjektiv gefärbte mathematische Erfahrung in geeigneten Lernsituationen. Insofern ist die Didaktik metamathematisch geprägt, oder in der Denkweise POPPERS: Die Mathematik selbst gehört zur *Welt 3* der "Sätze an sich", während die Didaktik zur *Welt 2* der subjektiven Erfahrungen gehört, *Welt 1* ist die Welt der physischen Objekte[6]. Naturgemäß sind dann Aussagen als Antworten auf die obigen Fragen weder von Ewigkeitswert noch hochgradig deduktiv strukturiert, immerhin sollten sie aber möglichst falsifizierbar sein.

Aussagen zu a) sind in erster Linie **normativer** Natur. In einer demokratischen Gesellschaft werden Erziehungsziele nicht von irgendeiner Autorität gesetzt und kontrolliert, sondern erwachsen aus komplexen und streitbaren öffentlichen und ergebnisoffenen Diskursen, an denen sich alle Betroffenen beteiligen sollten, wobei die Fachdidaktik mindestens die innere Kohärenz, die spezifischen Aspekte des Faches und die Erfüllbarkeit kritisch zu bewerten hat.

Die gegenwärtigen Aktionen der Kultusbürokratien zur Verschlankung oder gar der sog. "Entrümpelung" der Lehrpläne können nicht einfach hingenommen werden, um sich beflissen auf die "Umsetzung" der neuen Lehrpläne zu beschränken.

Aussagen zu b) sind wesentlich von **deskriptiver** Natur, es geht hier um die Didaktik als empirische Wissenschaft. Jedoch unterscheidet sich unsere Empirie deutlich von der Empirie in den Natur- oder Ingenieurswissenschaften (ganz abgesehen von der enormen Schwierigkeit, Feldforschung zu betreiben, wo ja mehrere Instanzen einverstanden sein müssen). So ist schon die Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen kaum zu gewährleisten. Jedenfalls scheinen mir derzeit einfühlsame Beobachtungen von Schülern, Eltern, Lehrern, Mathematikern und sensibel geführte Gespräche mit ihnen über ihr Verhalten und ihre Einstellungen ergiebiger als die heute so gefeierten Leistungstests (auch bei Verzicht auf die kindischen Rankingspielereien).

Es ist fast paradox: Obwohl in der Schule laufend beobachtet und geprüft wird, ist bisher die empirische Komponente der Didaktik weithin unterentwickelt. Ein Grund für dieses Defizit ist m.E. der Mangel an Theorieorientierung, d.h. hier vor allem das Fehlen gut formulierter Hypothesen **vor** dem Testen.

[6] Popper, K.: Ausgangspunkte, Hoffmann und Campe 1979, S. 263 ff

In puncto c) kann man kaum von Aussagen im üblichen Sinne sprechen, man spricht von **präskriptiven** oder besser von **konstruktiven** Produkten. Auf Grund von Wissensbeständen über das Lernen und mit Blick auf die Ziele des Unterrichts werden Unterrichtsszenarien entworfen, wobei historische und Anwendungsaspekte im weitesten Sinn eine tragende Rolle spielen. Hier vorzugsweise ist die Kreativität der Didaktiker gefragt, und vielleicht ist es die typischste Seite der Didaktik, eben Didaktik als design science[7].

Bevor ich im zweiten Teil versuche, die konstruktive Didaktik am Beispiel der Bruchrechnung (bitte nicht erschrecken) zu erläutern, schalte ich hier eine Art Zwischenbilanz über das Verhältnis Mathematik - Mathematikdidaktik bezüglich der Lehrerausbildung ein.

Fachmathematiker sind primär an der Fortentwicklung und Umgestaltung des beeindruckenden Theoriegebäudes Mathematik interessiert, betreiben also hoch spezialisiert Forschung. Von daher beziehen sie in erster Linie ihr Selbstverständnis. Sie allein entscheiden und verantworten, wie sie ihre Lehre für ihren Nachwuchs inhaltlich und didaktisch gestalten.

Wenn es allerdings um Lehrerausbildung geht, so muss ein Angebot an Mathematik gesichert sein, das in Inhalt und Form die mathematischen Hintergründe der wichtigsten Themen möglicher Schulmathematik wirklich erfahren lässt, und zwar in einer Weise, dass der hochschulmathematische Hintergrund weder als Luxus noch als Grundlage zur Steigerung des Selbstwertgefühles angesehen wird, vielmehr als etwas, was den späteren Schulunterricht wesentlich mitbestimmt. Vielleicht wäre der Titel "Höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt" angemessen, das auch in Abgrenzung von diesbezüglichen Arbeiten FELIX KLEINS[8].

Fachdidaktiker sind dagegen primär an der Fortentwicklung der mathematischen Bildung - vor allem via Lernen in Schulen - interessiert. Das ist ihre Zuständigkeit und ihre Verantwortung. Da es nie einen Königsweg zur Mathematik geben wird , der die Abschaffung der Mathematikdidaktik rechtfertigen könnte, so handelt es sich um eine bleibende Aufgabe. Mögen die Befunde und Empfehlungen der Fachdidaktik auch nicht den deduktiven Glanz mathematischer Theoreme aufweisen, so können sie doch im Erfolgsfalle dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler vertiefter an mathematischer Kultur teilhaben können. Und was gibt es Größeres, als zur Vermehrung von Kultur beizutragen! Dabei ist die Anwendbarkeit von Mathematik ein sehr wichtiger aber nicht der einzige Aspekt mathematischer Kultur. Es ist sogar eher zweifelhaft, ob eine rigide

[7] Wittmann, E. Chr.: Mathematikdidaktik als "design science", in: JMD 13 (1992) Heft 1, S. 55 - 70

[8] Relativ sympatisch ist mir die "Enzyklopädie der Elementarmathematik", herausgegeben von H. Grell, K. Maruhn und W. Rinow unter der Redaktion von P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch und A. J. Chintschin; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1970

Überbetonung von Anwendungen im Mathematikunterricht dem Ziel des Modellbildenkönnens à la longue dienlich ist.

> "Wer die Mathematik mit Erfolg anwenden will, muss Phantasie besitzen und träumen können",

lässt RENYI Archimedes zu König Hieron sagen[9]. Mit Recht wird allerorts hervor gehoben, wie eminent wichtig für Individuen und die Gesellschaft ein hohes Mass an mathematischer Allgemeinbildung ist. Von dieser Relevanz unserer Bemühungen beziehen wir in erster Linie unser Selbstverständnis.

Hier noch zwei Wünsche an die Fachmathematiker:

1. Unterstützen Sie bitte die Einrichtung oder den Fortbestand der Fachdidaktik in Ihrem Fachbereich, auch zur eigenen Entlastung. Überall, wo Lehrer ausgebildet werden, sollte es mindestens eine Professur für Fachdidaktik geben.

2. Werben Sie unter den besten Mathematikstudenten für das Lehramt. Der Beruf des Lehrers ist einer der wichtigsten in der Gesellschaft - und auch einer, der noch in hohem Maße eigenes Gestalten ermöglicht.

Didaktische Phänomenologie am Beispiel der Bruchrechnung

Angeregt vor allem durch Arbeiten von HANS FREUDENTHAL[10], einem der Erzväter unserer Didaktik, dessen Werk noch lange nicht genügend Beachtung (einschließlich Kritik) gefunden hat, versuche ich hier einen Einblick in ein Teilgebiet der konstruktiven Mathematikdidaktik zu geben.

Die Bruchrechnung ist in mehrerer Hinsicht eine große didaktische Herausforderung: erfolgsarm trotz hohem didaktischem Aufwand, bleibt Pflichtstoff auch im Zeitalter der Taschenrechner, erscheint vielen zeitlebens als ein Buch mit sieben Siegeln trotz der vielen Materialien, bunten Bilder und markigen Merksätze, wird weithin als lebensfern und grottenlangweilig empfunden, wo sie doch gerade mit einem hohen Anwendungspotenzial begründet werden kann.

Wie kaum ein anderer Schulstoff ist die Bruchrechnung mit allen fünf Quellgebieten der Mathematik wesentlich verbunden, was auf ihre besondere curriculare Stellung hinweist:

[9] Renyi, A.: Dialoge über Mathematik, Birkhäuser 1967, S. 53

[10] Freudenthal, H.: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Reidel Publishing Company 1983, vgl. dazu auch
- Vollrath, H.J.: Didaktische Phänomenologie als Grundlage für die Erforschung der Konstitution mentaler Objekte - Gedanken zu Freudenthals Buch, in: JMD8 (1987) , Heft 4, S. 247 - 255 und - obwohl vor allem den Physikunterricht betreffend -
- Wagenschein, M.: Rettet die Phänomene! (Der Vorrang des Unmittelbaren) in: MNU, 30 (1977), Heft 3, S. 129 - 137

Zahlen (Arithmetik) **Muster**/Strukturen (Musik) **Zufall** (Stochastik)

Formen/Gestalten (Geometrie) **Bewegungen** (Astronomie)

Die vier ersten Quellgebiete korrespondieren mit den artes liberales des Quadriviums, das rd. 2000 Jahre lang die mathematisch-naturwissenschaftliche Allgemeinbildung im Lehrplan des Abendlandes bestimmte[11]. Die Mathematisierung des Zufalls begann erst im 17. Jahrhundert. Die vielfältige Verankerung der Bruchrechnung kann auch so ausgedrückt werden: "Brüche haben viele Gesichter" [12].

Vor allem aber begegnet den Schülern in der Bruchrechnung zum erstenmal eine Welt, die die Alltagswelt und das Sprechen über sie auf spezifische Weise übersteigt, aber gleichzeitig im Erfolgsfall auch besser verstehen lässt.

So gibt es einerseits geradezu monsterhaft erscheinende Erfahrungen , etwa: Kein Bruch hat der Größe nach einen bestimmten Nachbarn. Ein Produkt kann kleiner sein als jeder der beiden Faktoren.

Andererseits wird durch die Bruchrechnung das **Teilen und Messen von Größen** auf eine höhere und praxisrelevante Stufe gestellt. Das ist der Hauptgrund für diese erste Zahlbegriffserweiterung in der Schule.

Die Bruchrechnung ist sozussagen von Natur aus anspruchsvoll (was sich auch in ihrer Geschichte zeigt), und diesen Ansprüchen kann man nicht eigentlich durch massives Üben gerecht werden, auch wenn es funny betrieben wird; und Verständnishindernisse darf man nicht (methodisch geschickt!) umschiffen, sondern muss sie thematisieren[13].

Didaktische Phänomenologie besteht grob gesagt darin, die Beziehungen zwischen den eigentlichen Objekten der Mathematik (noumena = Gedankendinge) und ihrer Erfahrbarkeit in Phänomemen (phänomena = Erscheinungen) im Lichte des Lernens und Lehrens systematisch aufzusuchen. Die Erfahrung besteht im mathematischen Ordnen eines Phänomens, wobei Mittel im Vorgriff benutzt und damit konstituiert werden, die auf einer höheren Stufe Objekte der Betrachtung werden. Brüche sind noumena, aber in der Pizza-Arithmetik und vielen anderen Phänomenbereichen können wir situationsverhaftete und subjektiv gefärbte Erfahrungen mit diesen Gedankendingen machen.

Das Wort "Phänomenologie" eignet sich insofern, als es (allgemein, untechnisch) etwa "Kunde vom Erkennen geistiger Zusammenhänge durch Wahrnehmen und Analyse zugänglicher Gegebenheiten" bedeutet.

---

11 Stewart, I.: Mathematik - Probleme Themen Fragen, Birkhäuser, 1990, S.17, vgl. dazu auch
- Dolch, A.: Lehrplan des Abendlandes, Henn Verlag, 1971

12 Hefendehl-Hebeker, L. : Brüche haben viele Gesichter, in: ML Heft 78, 1996, S. 22 ff

13 Prediger, S. Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen?, in: ML, Heft 123, 2004, S. 10 - 13

Das Hauptziel der didaktischen Phänomenologie ist es, Hypothesen über Lehr-Lern-Prozesse zu generieren (durch die Ausweisung von Lernzielen und die Darstellung von Lernumgebungen), die dann mit Betroffenen zu diskutieren sind und im Feld erprobt werden müssen. Das Auffinden und die Konstruktion solcher Phänomene beruht auf vielerlei Kenntnissen, nämlich über Mathematik, Mathematikgeschichte, Anwendungen der Mathematik, Allgemeinwissen, bekannte und schon erprobte didaktische Konstruktionen, kognitive Entwicklungspsychologie, innere und äußere Schulbedingungen und nicht zuletzt die Alltagssprache als Hauptmedium der Verständigung.

Eine wichtige Ausgangsthese ist, dass das Lernen von Mathematik in der Schule nicht mit *Definitionen* (der noumena, Begriffe, Verfahren, Ideen) beginnen kann, sondern mit dem Angebot von genügend problemhaltigen und gleichzeitig bekannt erscheinenden *Situationen*, die es zu ordnen, zu mathematisieren gilt. Man kann immer nur das begrifflich klären, mit dem man schon vielerlei Vor-Erfahrungen gemacht hat.

Am Anfang der Bruchrechnung kann also nicht die Frage "Was ist ein Bruch bzw. was sind Bruchzahlen?" stehen, sondern z. B. die Aufforderung, Vorschläge zu machen, wie man 3 Pizzen an 4 Personen verteilen kann.

Damit gelangen wir zur sogenannten

Pizza-Arithmetik - ein Phänomen der Stufe 0

die von STREEFLAND[14], seinerzeit Mitarbeiter in FREUDENTHALs Utrechter Institut, entwickelt worden ist und als eine erfolgreiche Lernumgebung für die Bruchrechnung mindestens auf der Stufe 0, sie stammt ja aus der Alltagswelt, gelten kann.

Wenn die Schüler - evt. schon Grundschüler - an Papierpizzen enaktiv hantieren können (falten und schneiden), können sie mehrere Lösungswege der o.g. Einstiegsaufgabe entdecken und beschreiben. Zuvor muss jedoch vereinbart werden, dass die Pizzen einander in jeder Hinsicht gleichen sollen, dass sie in sich völlig gleichartig (homogen) sein sollen und dass eine Gleichverteilung gewollt ist, womit schon einmal explizit **Modellbildung** praktiziert wird. Keine der drei einschränkenden und vereinfachenden Bedingungen ist selbstverständlich, insbesondere nicht die Gleichverteilung.

Die Lösungswege (Abb. 1) werden verglichen und diskutiert, von besonderem intellektuellem Charme ist gewiss Lösung 5, deren Strategie der Zuhilfenahme von etwas, was urprünglich gar nicht dazu gehört, aber zur Lösung führt, bei vielen Gelegenheiten nützlich ist.

---

14 Streefland, L.: Pizzas - Anregungen, ja schon für die Grundschule, in: ML , Heft 16, 1986, S. 8 - 11, vgl. dazu auch
- Winter, H.: Ganze und zugleich gebrochene Zahlen, in: ML, Heft 123, S. 14-18, und
- Führer, L.: Verhältnisse - Plädoyer für eine Renaissance des Proportionsdenkens, in ML, Heft 123, S. 46 - 51.

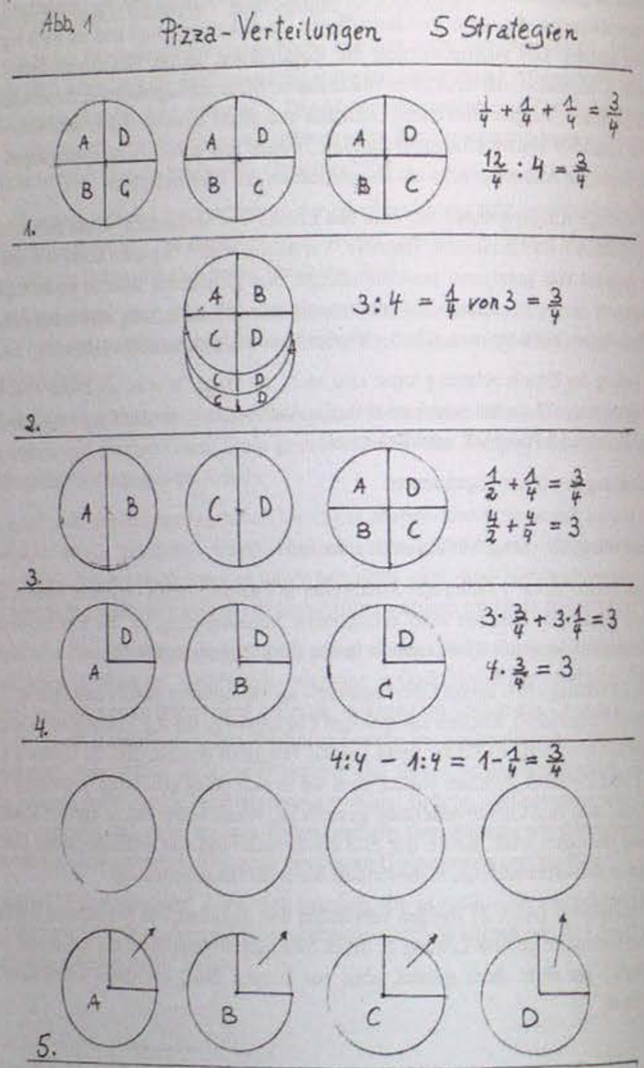

Abb. 1: Lösungswege zur Pizzaverteilung

Wesentlich für den Lernfortschritt ist nun, dass zur Beschreibung der Lösungen und Lösungswege Sprachmittel naiv in Gebrauch genommen werden (Brüche und Rechengleichungen mit Brüchen, in der Abb. 1 nur wenige Beispiele) die noch gar nicht offiziell behandelt wurden, die aber die Lernenden aus der Lebenswelt (1/2 Meter, ¼ Liter) "kennen", wenn auch nur vage. Natürlich sprechen wir dabei überwiegend in der Alltagssprache, auch unter Gebrauch von Gesten und Gebärden.

Die Kreisteilung via Faltung, die als Gedankenexperiment beliebig weit ausgedehnt werden kann, liefert Ganze, Halbe, Viertel, Achtel, Sechzehntel, ... (also Dualbrüche), und man hat einen kleinen Kosmos, der in Form von entsprechend unterteilten Kreisscheiben derselben Größe stets für alle Schüler sichtbar sein sollte und der zahlreiche Entdeckungen numerischer Art anregt, z. B. 1 Achtel von 1 Achtel der ganzen Pizza ist 1 Vierundsechzigstel der ganzen Pizza. U. v. a. kann der Satz gefunden werden: Ist die Personenzahl 1, 2, 4, 8, 16, . . . (Potenzen von 2), so können wir stets durch Falten Lösungen finden, egal, wie viele Pizzen verteilt werden sollen.

Was machen wir aber, wenn 3 Personen sich 1 Pizza teilen wollen? Wir haben ein klassisches Problem der Geometrie (Kreisteilung !), das im Alltag natürlich nach Augenmaß gelöst wird. Die Kinder können ähnlich vorgehen, spannend ist dann die Probe durch Übereinanderlegen der 3 Stücke, Deckungsgleichheit?

Aber es geht auch systematisch und genau. Über Spielereien mit dem Zirkel kann entdeckt werden, wie man ein reguläres Sechseck konstruiert und damit auch eine Faltlösung für 3 Personen schafft und in Fortsetzung auch für 6, 8, 12, 16, 24, usw. Personen. Die nächste Hürde wäre 5 als Anzahl der Personen. Es müsste Staunen erregen, dass und wie das Problem auch noch mit Falten zu lösen ist (Knotenbildung eines Papierstreifens). Vielleicht tritt die Ahnung auf, dass es wohl kaum eine Methode gibt, eine Kreisscheibe in eine beliebige Anzahl von gleichgroßen Sektoren über Falten zu zerlegen (?).

Beharren wir dagegen auf dem ursprünglichen Falten, so können wir die Dreiteilung eines Kreises (und auch durch 5, 7, . . .) ganz anders bewältigen, und zwar in mehreren Schritten approximativ, womit wir auf einer algorithmischen Spur sind: Zunächst kann jede der 3 Personen eine Viertelpizza erhalten (warum keine halbe?), es bleibt eine Viertelpizza übrig. Dann erhält jede Person eine Sechzehntelpizza (warum keine Achtel?) , und es bleibt eine Sechzehntelpizza übrig. So geht es als Gedanken- und Rechenexperiment immer weiter. Wir werden nie ganz fertig (Erahnung der Unendlichkeit), aber das Stück, das übrig bleibt, wird immer kleiner. Beim nächsten Teilen bleibt z.B. nur noch eine 1/64 ungeteilt übrig. Wir haben den Anfang einer Entwicklung von 1/3 als unendlicher Dualbruch $1/3 = 0{,}010101..._2$ mit erlebter Periodizität. Das ist für die mathematische Bildung grundlegend wichtig, muss allerdings hier noch nicht so thematisiert werden und ist für die Lebenspraxis des unmittelbaren Pizza-Essens eher bedeutungslos, was auch gesagt werden muss. Andererseits läge doch eine Vorerfahrung zu den Dezimalbrüchen vor, mit denen ja nun wirklich jeder täglich zu tun hat, dabei freilich immer mit endlichen oder mit zu endlichen Brüchen abgebrochenen Näherungsbrüchen.

Dazu noch eine Bemerkung: Das immer wieder von Schülern heiß diskutierte Problem "Ist $0,\overline{9} = 1$ wirklich wahr?" kann als Verteilung einer Pizza an 9 Personen angegangen werden, wobei nur Zehntel, Hundertstel, . . . zur Verteilung kommen. Da wären unendlich viele Teilungen nötig, um 1 restlos zu verteilen. Bei jeder Teilung bleibt ein Reststück, das so groß ist wie die jeweils gerade verteilte Portion an jede Person, d.h. jeder Rest ist 1/10 des vorigen Restes. Am Ende erhält jede Person $0,\overline{1}$ Pizza, und $9 \cdot 0,\overline{1}$ ist 1. Also alles klar? Nein, wir erreichen doch gar nicht ein Ende! Es bleibt uns eigentlich nur das Eingeständnis, dass $0,\overline{9} = 1$ eine Vereinbarung ist, allerdings eine wohl begründbare: Wir können in endlich vielen Schritten uns der 1 so nahe wie gewünscht bringen und die Alternative $0,\overline{9} < 1$ produziert nichts als Schwierigkeiten[15]. Diese Betrachtung muss nicht für alle zwingend sein. Typisch ist die Äußerung eines Studenten: "Ich akzeptiere es dann so, aber ich verstehe es trotzdem nicht". (Ich danke Herrn Kollegen M. WINTER in Vechta für wertvolle briefliche Hinweise zu dieser Thematik). M.E. kommt hier noch dazu, dass zwischen dem Maximum einer Zahlenfolge und ihrer Obergrenze (= kleinste obere Schranke = Supremum) zu unterscheiden ist: Die durch $0,\overline{9}$ gegebene Zahlenfolge 0,9, 0,99, 0,999, . . . hat kein Maximum, aber ihre Obergrenze ist 1. Wir haben etwas, was beständig ohne Ende wächst, und dennoch begrenzt ist, ein extrem erstaunliches Phänomen, für das es in der Lebenswelt keine Parallele gibt.

Die Pizza-Arithmetik ist - zumindest in der Theorie - über das Gesagte hinausgehend bemerkenswert mathematikhaltig und beziehungsreich. Sie trägt sehr viel weiter als man zunächst glauben mag. So erging es mir auch. Einige generelle Andeutungen müssen hier genügen:

Die Betonung des **Paarcharakter** der Brüche, m Pizzen im Vergleich mit n ($n > 0$) Personen, ist das eigentlich Neue gegenüber der traditionellen Veranschaulichung von Brüchen als Kreissektoren (Tortenbilder), die dann bald verlassen werden und vergessen werden können, da das Weitere durch Rechnen nach Regeln erledigt wird. Hier dagegen gibt es die große Freiheit, und man kann auf Entdeckungsfahrt gehen.

Numeralvariationen: Wird die Zahl der Pizzen irgendwie vergrößert und die Zahl der Personen beibehalten, dann gibt es mehr Pizza pro Person, eine bessere Verteilung im Sinne der Pizzafans; bei Verkleinerung der Zahl der Pizzen bekommen wir eine schlechtere Verteilung. Wird dagegen die Zahl der Personen vergrößert (oder soweit möglich verkleinert) und die Zahl der Pizzen beibehalten, dann gibt es eine verschlechterte (verbesserte) Verteilung. Und wenn man gleichzeitig die Zahl der Pizzen und die Zahl der Personen verändert, etwa die eine vergrößert und die andere verkleinert? Oder beide etwa um 1 vergrößert? Auf jeden Fall können wir jetzt, auch wenn größere Zahlen

[15] Gowers, T.: Mathematics - A very short Introduction, Oxford University Press, 2002, S. 60

(als Zähler und Nenner) auftreten, ohne zu rechnen und ohne direkte Anschauung Urteile folgender Art aufschreiben: $44/101 < 9/20$ oder $27/113 < 28/114$.

Speziellere Veränderungen: Was geschieht bei Verdoppelung (Verdreifachung, ...) der Zahl der Pizzen, der Zahl der Personen, beider Zahlen? Dieselben Fragen mit Halbieren, Dritteln, :.. der Pizza- und/oder Personenzahlen.

Wir gelangen so zu den Themen Bruchvergleich, Kürzen und Erweitern von Brüchen und zum Ordnen von Brüchen der Größe nach.

Dass $15/20 = 18/24$ ist, kann in einer Pizzeria erfahren werden: In beiden Fällen können die Personengruppen an Tischen mit je 3 Pizzen und 4 Personen sitzen, die beiden Verteilungen sind also gleich gut. Diese Sicht des Bruchvergleichs kann bei größeren Zählern und Nennern systematisert werden, indem die 4 beteiligten natürlichen Zahlen in Primfaktoren zerlegt werden.

Multiplizieren/Dividieren von Brüchen erweisen sich als die für Brüche "natürlichen" ,"typischen" Rechenoperationen, bei denen eine Verteilung von Pizzen an Personen gemäß einem Doppeloperator (als Skalar) in eine (nicht notwendig neue) Verteilung überführt wird. $2/3 \cdot 5/7$ heißt dann

5 Pizzen pro 7 Personen $\rightarrow 2 \cdot 5$ Pizzen pro 7 Personen $\rightarrow 2 \cdot 5$ Pizzen pro $3 \cdot 7$ Personen = 10 Pizzen pro 21 Personen.

Ähnlich gestaltet sich das Addieren/Subtrahieren, wenn Brüche als Verteilungen aufgefasst werden. $1/3 + 1/2$ heißt dann: 1 Pizza pro 3 Personen + 1 Pizza pro 2 Personen = 2 Pizzen pro 6 Personen + 3 Pizzen pro 6 Personen = 5 Pizzen pro 6 Personen. Beim letzten entscheidenden = handelt es sich um dieselben 6 Personen.

Der Paarcharakter der Brüche rückt die Sprache der **Verhältnisse (Proportionen)** ins Blickfeld, ein bisher bei uns sträflich vernachlässigter Aspekt der Bruchrechnung.

$15/20 = 18/24$ bedeutet dann: 15 Pizzen verhalten sich zu 20 Personen wie 18 Pizzen zu 24 Personen (externe Verhältnisse) oder auch: 15 Pizzen verhalten sich zu 18 Pizzen wie 20 Personen zu 24 Personen (interne Verhältnisse). Die Pizzenzahl ist in beiden Fällen 5/6 der Personenzahl, 5/6 ist der Proportionalitätsfaktor der proportionalen (und diophantischen) Funktion $y = 5/6\, x$ mit x = Personenzahl und y als Pizzenzahl.

Der Verhältnisaspekt in der Bruchrechnung wird besonders in den **Anwendungen** wichtig. Da gibt es eine Fülle von Phänomenen in Alltag, Naturwissenschaften, Technik, Humanwissenschaften und Künsten, für die die Pizza-Welt in gewisser Weise paradigmatisch sein kann. Das Gemeinsame der vielen Varianten ist das Insverhältnissetzen zweier Größen, und der Wert des Verhältnisses ist eine neu geschaffene, eine im technischen Sinne spezifische Größe, die durch Abstraktion von Absolutwerten der Größen gewonnen wird. Beispiele:

Kosten einer Ware: Größe der Ware (Masse, Stückzahl) = Kosten der Ware pro Wareneinheit = (Einzel-)Preis.

Weglänge : Zeitspanne = Weglänge pro Zeiteinheit = Durchschnittsgeschwindigkeit.

Weite Teile des sogenannten Bürgerlichen Rechnens bestehen aus Bruchrechenaufgaben, deshalb ist der Bruchsatz der bessere Dreisatz.

Ein letzter aber besonders wichtiger Hinweis. Die Pizza-Arithmetik lässt auch das Problem der Einbettung von $\mathbf{N}_0$ in $\mathbf{B}_0$ auf allgemeinere Weise erscheinen, indem keine weitere Beschränkung für Verteilungen von Pizzen an Personen gefordert ist. Unter allen möglichen zeichnen sich diejenigen Verteilungen aus, bei denen gar keine Zerschneidung von Pizzen notwendig ist, etwa wenn 18 Pizzen an 18 oder 9 oder 6 oder 3 oder 1 Person(en) zu verteilen sind (ist). Numerisch gesehen, sind diese - oft "Scheinbrüche" genannten - Brüche wie 18/6 = 3/1 als natürliche Zahlen anzusehen. Für das Arbeiten mit Brüchen spielen diese besonderen Brüche eine hervorragende Rolle: Bei der Suche nach Neudefinitionen für das Rechnen mit Brüchen muss und kann immer geprüft werden, ob eine vorgeschlagene Definition bei den speziellen "ganzen" Brüchen mit dem Rechnen in $\mathbf{N}_0$ übereinstimmt. Es wäre nun zu untersuchen, ob durch die Pizza-Arithmetik weniger sogenannte Einbettungsfehler in Schulaufgaben auftreten. Laut Fehlerforschung treten in allen 4 Spezies Fehler dann gehäuft auf, wenn in der Aufgabe sowohl natürliche (ganze) Zahlen und Brüche gemeinsam vorkommen. So rechneten im Durchschnitt rd. 20 % der Schüler je Aufgabe bei der Addition so: $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$ [16].

Und nach wie vor ist der Hauptfehler beim Addieren die "falsche" Addition (die Mischung), deren Falschheit beim Gebrauch der "ganzen" Bruchzahlen massiv erfahren würde. Dabei ist die Mischung, die ja keine mit der Gleichheit der Brüche verträgliche Verknüpfung ist, für die Bruchrechnung dennoch interessant. Einzelerfahrungen zeigen, dass, wenn die Mischung thematisiert wird, kein Schüler mehr den o.g. Fehler begeht[17]. Verlassen wir nun endlich die Pizzen-Welt, überspringen wichtige weitere Phänomene (u.a. Brüche als Streckenlängen) und befassen uns noch kurz mit einem geometrischen Phänomen, dem

Bruchrechnen im Quadratgitter - ein Phänomen höherer Stufe

Über dieses hochsymmetrische Muster (Abb. 2) sagt FREUDENTHAL zwiespältig: "Es ist das eine ganz bestechende Einführung der rationalen Zahlen, die ich allerdings nirgendwo systematisch entwickelt gesehen habe. . . . Sieht man genauer hin, so verliert das Bild schnell von seinem Reiz. . . . das Bild erleichtert höchstens das Verständnis des Kürzens und Erweiterns, aber kaum das der Rechenarten" [18].

[16] Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung, Wissenschaftsverlag 1989, S. 93
[17] Haeberlen, F.: Dichte Lage der Bruchzahlen, in: ML Heft 16, 1986, S. 33
[18] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd.1, Klett 1974, S. 208

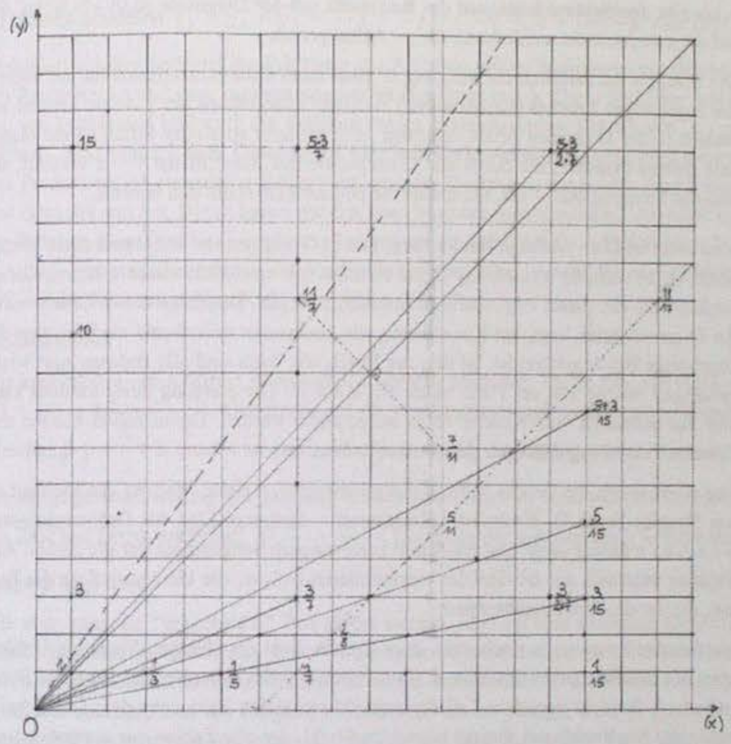

Abb. 2

Ich glaube, man muss noch genauer hinsehen. Wir haben ein (nach oben und rechts) unendliches Quadratgitter, in dem wir uns auf die übliche Weise mittels Koordinaten zurecht finden können: Jeder Gitterpunkt ist durch ein Paar natürlicher Zahlen (x, y) eineindeutig bestimmt, x = Rechtswert, y = Hochwert.

Jetzt können wir den Gitterpunkten Brüche zuordnen, dem Punkt (a, b) den Bruch b/a, der das Verhältnis b : a zweier Streckenlängen, eben seiner Koordinaten, darstellt. Und dieses Verhältnis ist die **Steigung** des Strahls, der in O beginnt und durch den Gitterpunkt (a,b) verläuft.

Wir können den b/a -Strahl als gerade Straße oder als eine gerade Bahnstrecke ansehen, im Verkehrswesen wird ja auch die Steigung eines Verkehrsweges als (internes) Verhältnis"vertikaler Höhenzuwachs : horizontaler Weitenzuwachs" definiert und in Bruchform (oft als %-Satz) angegeben. Eine etwas andere Interpretation: Das Verhältnis b : a

= b/a gibt den **Schlankheitsgrad** des Rechtecks mit der Diagonale (0,0) - (a,b) an, das auf der x-Achse steht und links an die y - Achse grenzt.

Die x-Achse hat natürlich die Steigung 0, allen ihren Gitterpunkten kommt der Wert 0 des zugehörigen Bruches (Verhältnisses) zu. Den Gitterpunkten der y-Achse können wir freilich (außer O) keinen Bruch zuordnen . Ein weiterer spezieller Strahl ist die diagonale Symmetrieachse, die durch alle Gitterpunkte mit Koordinaten y = x verläuft, die also das Steigungsmaß 1 hat. Sie spaltet die Brüche $\neq 1$in echte und unechte.

Eine erste wirklich wichtige Entdeckung: Der in O beginnende und durch einen Gitterpunkt (a, b) ≠ (0, 0) verlaufende Strahl inzidiert mit unendlich vielen weiteren Gitterpunkten, die den Strahl in gleichlange Strecken zerlegen. Derjenige dieser Gitterpunkte, der O am nächsten liegt, hat Koordinaten, die zueinander teilerfremd sind, so dass der zugehörige Bruch gekürzt ist. Ist dies der Bruch v/u, dann sind alle anderen zum Strahl gehörigen Brüche von der Form vk/uk mit k aus N. Die Steigung eines Strahles kann also auf unendlich verschiedene Arten ausgedrückt werden. Damit haben Kürzen und Erweitern einen augenfälligen geometrischen Sinn.

Vor allem haben die Brüche selbst einen geometrischen Sinn: Maß für die Steilheit eines Strahles durch O, Hochwert : Rechtswert = *Steigung*. Und die Ordnungsaussage b / a < d / c besagt dann: Der b/a-Strahl hat geringere Steigung als der d/c-Strahl. Alle Strahlen unterhalb des d/c-Strahles repräsentieren Brüche, die kleiner sind als die Brüche, die der d/c-Strahl repräsentiert.

Verfremdend mag noch erscheinen, dass Brüche nicht im üblichen Sinne als Größen, etwa als Streckenlängen erscheinen. Tatsächlich erweist sich aber der lotrechte Strahl mit x = 1 als nicht negativer Teil der aufrecht stehenden Zahlengeraden: Der Schnittpunkt des b/a-Strahls mit diesem lotrechten-Strahl, der alle Zahlen aus n repräsentiert, ist der obere Endpunkt der Zahlenstrecke von O zu eben diesem Schnittpunkt. Alle Brüche des zweidimensionalen Quadratgitters werden so auf den eindimensionalen (x = 1)-Strahl projiziert. Alle echten Brüche finden dabei ihren Platz im ersten Intervall des Zahlenstrahls der Länge 1. Es ist sicher nützlich, in den weiteren Betrachtungen diesen Sachverhalt im Blick zu behalten.

Nun zum Rechnen mit Brüchen im Quadratgitter.

Addition

Zunächst wird auffallen, dass jeder senkrechte Gitterstrahl Brüche mit gleichem Nenner repräsentiert, also jeweils eine Bruchfamilie, von unten nach oben schön der Größe nach geordnet, beginnend mit einem Stammbruch (von dem alle darüber liegenden abstammen): 1/n, 2/n, 3/n, ... Sie erscheinen auch als Längen auf der Zahlengeraden mit x = 1.

Brüche einer Familie zu addieren, kann dann erklärt werden als die Überlagerung von zwei gegebenen proportionalen (u. diophantischen) Funktionen $y_1 = \frac{m}{n}x$ und $y_2 = \frac{k}{n}x$

zur Summenfunktion $y_S = y_1 + y_2 = \frac{m}{n}x + \frac{k}{n}x = (\frac{m}{n} + \frac{k}{n})x = \frac{m+k}{n}x$. Das letzte Gleichheitszeichen bedeutet die Erklärung der Addition zweier Steigungen mit demselben Rechtswert n und dem zusammengesetzten Hochwert m + k. Diese Sicht der Addition von Funktionen hilft auch die Addition zweier ungleichnamiger Brüche m/n , k/i zu erklären. Man braucht dazu Gitterpunkte gleichen Rechtswertes für beide Funktionen. Das Produkt n·i ist ein solcher Rechtswert, und die Hochwerte der beiden Funktionen sind dann m·i und k·n. Damit haben wir den oben besprochenen Spezialfall der Addition von Brüchen einer Familie sinnvoll verallgemeinert. In Abb. 2 ist die Addition 1/3 + 1/5 zu sehen. Wertetabellen können das Verständnis unterstützen, notwendig ist der Rückgriff auf das Rechnen in **N**, z.B.: 91 : 7 = 70 : 7 + 21 : 7.

Multiplikation

Wir können von der Addition gleichnamiger Brüche ausgehen. Da ist z.B. 1/3 + 1/3 + 1/3 + 1/3 = 4/3 = 4 · 1/3. Der Bruch 1/3 ist hier Steigungsmaß eines Strahls, dessen Gleichung $y = \frac{1}{3}x$ ist, und 4 ist eine reine Operatorzahl, die angibt, auf das Wievielfache die gegebene Steigung 1/3 gebracht werden soll. Damit ist bereits der Fall natürliche Zahl mal Bruch erklärbar: $h \cdot \frac{m}{n} = \frac{h \cdot m}{n}$. Gehe von der x-Achse aus h Schritte der Länge m nach oben.

Wie aber kann der "umgekehrte" Fall gelöst werden, nämlich eine gegebene Steigung durch i zu teilen, beispielsweise 1/ 3 : 4 ? Das geht so ohne weiteres nicht, wir müssen ja wieder auf einen Gitterpunkt stoßen. Es ist ein Knackpunkt in der Bruchrechnung. Wird aber beachtet, dass die Steigung eines Strahls um so geringer wird, je größer bei konstantem Hochwert der Rechtswert ist, dann ist der Weg vorbereitet: Ver-4-fache den Rechtswert, also $\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{3 \cdot 4}$. Gehe von der y-Achse aus 4 Schritte der Länge 3 nach rechts. [Notwendig ist auch hier wieder ein Rückgriff auf das Rechnen in **N**, z. B. (72 : 6) : 3 = 72 : (6 · 3)].

Der allgemeine "Fall" der Multiplikation ist dann eine Verkettung der beiden besprochenen Fälle: $\frac{h}{i} \cdot \frac{m}{n}$ = h-faches vom i-ten Teil von $\frac{m}{n} = \frac{h \cdot m}{i \cdot n}$. Geometrisch ist die Zuordnung Punkt (n, m) → Punkt (i·n, h·m) der Ausdruck einer Eulerschen Affinität mit den Koordinatenachsen als Fixgeraden und O als Fixpunkt, so dass die Multiplikation auch ohne Bezugnahme auf die Addition erklärt werden kann. Das Rechteck mit der Diagonale (0, 0) - (n, m) hat als Bild gemäß dem Operator (i, h) das Rechteck (0,0) - (i·n, h·m). Man kann hier die Deutung der Brüche als Schlankheitsgrad von stehenden Rechtecken nutzen.

In Abb. 2 ist die Multiplikation 5/2 · 3/7 dargestellt.

Zum Schluss noch zwei Beispiele aus der Fülle der weiteren möglichen Untersuchungen am Quadratgitter.

(1) Man kann Gitterstrahlen parallel zur Symmetrieachse betrachten. Die damit repräsentierten Brüche bilden eine streng wachsende Folge mit dem Grenzwert 1, wenn das erste Glied ein Stammbruch ist, bzw. eine streng fallende Folge mit dem Grenzwert 1, wenn das erste Glied eine natürliche Zahl ist. Damit wird ganz B zerfasert und vielleicht kommt eine Ahnung davon auf, dass B abzählbar ist. Den genannten Folgen entsprechen differenzengleiche Zahlenpaare, und durch Ausweiten des Quadratgitters auf alle 4 Quadranten können wir zur Darstellung von Q gelangen.

(2) Man kann, obwohl die Bruchzahlen dicht liegen, noch Strahlen von O aus einfügen, auf denen kein weiterer Gitterpunkt liegt, die also keine Gitterstrahlen sind (gestrichelter Strahl mit der Steigung $\sqrt{2}$ in Abb. 2). In einem präzisierbaren Sinn gibt es sogar echt mehr solcher Strahlen als Gitterstrahlen. Damit stoßen wir das Tor zu den irrationalen Zahlen auf, zu eienr weiteren neuen Welt.

Poster:[19]

Ein Kanon für den Geometrieunterricht in den Sekundarstufen

Konzeption & Design: Prof. Dr. Heinrich Winter, RWTH Aachen
Graphische Bearbeitung: Cand. Math. Stephan Niewersch, Dipl. Math. Sebastian Mayer

Leitmotive:

- Innermathematischer Beziehungsreichtum
- Bedeutung in Alltag, Wissenschaften, allgemeiner Kultur
- Herausforderung des heuristischen und analytischen Denkens
- Ästhetische und historische Aspekte

Sinn und Zweck des Posters:

- In Schülerinnen und Schülern Neugierde und Interesse wecken
- Lehrer zu inhaltlichen Veränderungen anregen
- Lehrplanmacher zur Strukturierung des Stoffes in Themenkreisen ermuntern
- Lehrerausbildern Material für fachdidaktische Veranstaltungen/Arbeiten anbieten

[19] Das farbige Poster ist von DIN A 3 auf DIN A 5 verkleinert wiedergegeben. Download unter: http://www.matha.rwth-aachen.de/lehre/geometrieposter/index.html