Mitteilungen
der Gesellschaft
für Didaktik
der Mathematik

# 85

August 2008

Inhalt



ISSN 0722-7817

Liebe Mitglieder der GDM,

das Jahr der Mathematik geht jetzt in die zweite Hälfte. Mit dem bisherigen Verlauf, können wir – so denke ich – sehr zufrieden sein. Die Mathematik findet eine erhebliche Resonanz in Presse, Rundfunk und Fernsehen, an den Universitäten und in den Schulen. Die Internetseite http://www.jahr-der-mathematik.de gibt einen beeindruckenden Überblick über die vielfältigen Veranstaltungen in diesem Jahr. Da gibt es einen Olympia-Test, es werden Dossiers über Logistik und Verkehr angeboten, es gibt ein „künstlerisches Mathematikbuch“, Wettbewerbe für Schülerinnen und Schüler sowie für die Öffentlichkeit, das Wissenschaftsschiff, Online-Spiele, Ringvorlesungen, Kindervorlesungen, Simulationen zur „Schwarmintelligenz“, Erklärungen von Rechenhilfsmitteln und Computern, mathematische Stadterkundungen, Wanderausstellungen, mathematische Nächte und vieles mehr. Fast alle Mathematischen Institute, Fakultäten und Fachbereiche und insbesondere natürlich die Institute und Abteilungen für Didaktik der Mathematik beteiligen sich mit den unterschiedlichsten Aktivitäten zu diesem für uns besonderen Jahr. Dieses Heft möchte einige dieser Aktivitäten vorstellen, Anregungen geben, denn mathematische Veranstaltungen sollten auch nach dem Jahr der Mathematik auf breiter Basis stattfinden.

Mit freundlichen Grüßen
Hans-Georg Weigand
(1. Vorsitzender der GDM)

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.

Vorstand

*1. Vorsitzender:*
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Universität Würzburg, Didaktik der Mathematik
Am Hubland, 97074 Würzburg
Tel. 0931 . 888-5091 (Sekretariat)
Fax. 0931 . 888-5089
weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

*2. Vorsitzender:*
Prof. Dr. Rudolf vom Hofe
Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik – IDM,
Postfach 100131, 33501 Bielefeld
Tel. 0521 . 106-5063
vomhofe@math.uni-bielefeld.de

*Kassenführer:*
ADir. Karel Tschacher
Universität Erlangen-Nürnberg, Mathematisches Institut, Bismarckstraße 1½, 91054 Erlangen
Postanschrift: Postfach 3520, 91023 Erlangen
Tel. 09131 . 85-22406
Fax. 09131 . 85-22684
tschacher@mi.uni-erlangen.de

*Schriftführerin:*
Prof. Dr. Katja Lengnink
Universität Siegen, FB Mathematik, Emmy-Noether-Campus, Walter-Flex-Straße 3, 57068 Siegen
Tel. 0271 . 740-3633
0271 . 740-3582 (Sekretariat)
Fax. 0271 . 740-3583
katja@hartung-lengnink.de

*Verantwortlich für die Mitteilungen der GDM:*
Prof. Dr. Thomas Jahnke
Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam
Tel. 0331 . 9771470
0331 . 9771499
Fax 0331 . 9771469
jahnke@rz.uni-potsdam.de

*Bankverbindung:*
Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg
Kto-Nr. 305 87 00
BLZ 770 694 61
IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00
BIC GENODEF1GBF

*Homepage der GDM:*
www.mathematik.de/gdm

Impressum
*Verleger:* GDM
*Herausgeber:* Prof. Dr. Thomas Jahnke (Anschrift s. o.)
*Gestaltung und Satz:* Christoph Eyrich, Berlin
ceyrich@gmx.net
*Umschlaggestaltung:* Diana Fischer, Berlin
diana_fischer@gmx.net
*Druck:* Oktoberdruck AG, Berlin

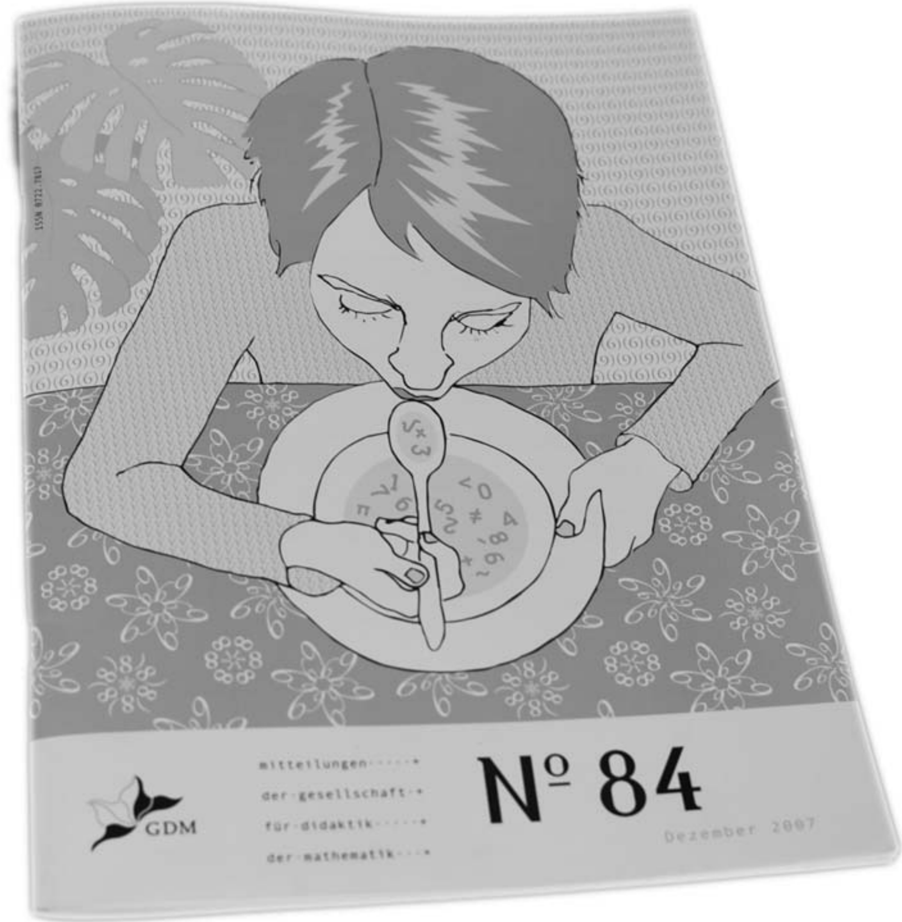
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

# De gustibus est disputandum: Das Titelbild der GDM-Mitteilungen

Thomas Jahnke

Seit ich die Herausgabe der Mitteilungen übernommen habe, trägt und prägt das Heft ein neues Titelbild, das die Grafikerin Frau Diana Fischer – wie übrigens auch das GDM-Logo – entworfen hat.
Während unser GDM-Vorsitzende Hans-Georg Weigand mit einem nicht-nachlassenden *ceterum censeo* an dem seine Suppe löffelnden Mädchen Anstoß nimmt, habe ich das Titelbild seinerzeit aus verschiedenen Entwürfen gerade wegen seines selbstironischen Untertons ausgewählt, der mir treffender erschien als andere computergrafische Botschaften der Selbstgewissheit.

Herr Weigand und ich sind daher übereingekommen, das Titelbild den Leserinnen und Lesern zur Diskussion zu stellen. Zustimmung, Kritik und Kommentare sind erwünscht. Haben Sie sich an ihm satt gesehen oder darf das Mädchen weiter seine Suppe löffeln?
Bitte bedenken Sie bei Ihrer Stellungnahme und Ihrem Urteil, dass wir aus Kostengründen und der Wiedererkennbarkeit halber das Titelblatt nicht Heft für Heft neu gestalten lassen und nur dessen Farben mit den Jahren wechseln lassen wollen.



# Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik

## Empfehlungen von DMV, GDM und MNU, Juni 2008

*Präambel*

*Wozu diese Empfehlungen?*

Die Kultusministerkonferenz (KMK) beabsichtigt, bis Anfang 2009 ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in lehramtsbezogenen Studiengängen vorzulegen, deren Entwurf den Verbänden im Juni 2008 vorgelegt worden ist. „Diese Fachprofile beziehen sich auf Kompetenzen und somit auf Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen, über die eine Lehrkraft zur Bewältigung ihrer Aufgaben im Hinblick auf das jeweilige Lehramt verfügen soll." Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) haben 2007 in einer gemeinsamen Stellungnahme „Für ein modernes Lehramt im Fach Mathematik" nach einer kurzen und prägnanten Analyse der jetzigen Ausbildungspraxis vor allem des gymnasialen Lehramts notwendige fachliche und fachdidaktische Kompetenzen von Lehrkräften für Mathematik beschrieben. Die Gesellschaft für Fachdidaktik (GFD) hat 2005 ein Modell fachdidaktischer Kompetenzen und ein fachdidaktisches Kerncurriculum für die 1. Phase der Lehrerbildung veröffentlicht. Die Formulierungen der fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen in den genannten Papieren beziehen sich auf das Mathematikstudium als Ganzes bzw. auf fachdidaktische Studien generell.
*Das Anliegen dieser Empfehlungen ist es, den Zusammenhang zu bedeutsamen Inhalten des Studiums herzustellen. Sie sollen eine Brücke zwischen den Kompetenzprofilen und relevanten mathematischen Inhalten des Studiums schlagen: Welche Kompetenzen lassen sich in besonderer Weise an welchen Inhalten entwickeln bzw. welchen Beitrag leistet der jeweilige Inhalt zum Kompetenzprofil der angehenden Mathematiklehrkraft? Für die Mathematik als Kernfach der Schule ist es dabei unabdingbar, den Unterricht von der ersten Klasse bis zu den verschiedenen Schulabschlüssen als fortlaufenden Prozess in den Blick zu nehmen.*
Dabei werden solche Inhalte benannt, die zum Verständnis des mathematischen Schulstoffes und seines Bildungsgehaltes von unmittelbarer Bedeutung sind. Damit soll nicht präjudiziert werden, dass ein Studium sich in genau diesen Inhalten erschöpfen kann; vielmehr soll die Option auf exemplarische Vertiefungen zur Erweiterung des Horizontes vor allem in den höheren Ausbildungsstufen offen gehalten werden. Jedoch sollen die hier formulierten Anforderungen eine Orientierung für die Diskussion über die Ziele und die standortspezifische Ausgestaltung der Lehramtsstudiengänge geben.
Der Einblick in die Bedeutung der Mathematik für die moderne Welt gehört zum Kern des Studiums für alle Lehrämter. Studierende aller Lehrämter sollen der Mathematik als Kulturleistung und den für sie charakteristischen Wissensbildungsprozessen begegnen. Daher gehört zur Vermittlung mathematischer Inhalte grundsätzlich auch, ihren Beitrag zur mathematischen Bildung auszuweisen und sie in der historischen Genese zu verorten.
In der modernen Wissensgesellschaft müssen Studierende aller Lehrämter außerdem Basiskompetenzen im Umgang mit neuen Medien erwerben: mathematische Software dient zur Veranschaulichung, als heuristisches Instrument und zur Konstruktion von Problemlösungen; das Internet ist als Medium zur Informationsbeschaffung unabdingbar.

*Wie sind diese Empfehlungen zu lesen?*

Die Studieninhalte sind in Themenkreise gegliedert, deren Bezeichnung (und Reihenfolge) sich zum einen an den Entwurf für die Fachprofile der KMK (s. o.) anlehnt, zum andern durch einen Zusatz die Kompetenzorientierung dieser Empfehlungen verdeutlichen soll.

- ▷ Arithmetik und Algebra – Denken in Zahlen und Strukturen
- ▷ Geometrie – Strukturieren von Raum und Form
- ▷ Lineare Algebra – Linearisieren und Koordinatisieren
- ▷ Funktionen und Analysis – Funktionales und infinitesimales Denken
- ▷ Stochastik – Daten analysieren und Zufall modellieren
- ▷ Modellieren und Angewandte Mathematik – Anwenden von Mathematik
- ▷ Fachdidaktische Kompetenzen

Die Themenkreise sind nicht als Bezeichnungen einzelner Veranstaltungen anzusehen: Eine Veranstaltung kann Studieninhalte aus verschiedenen Themenkreisen umfassen; die Inhalte eines Themenkreises können mehreren Veranstaltungen zugeordnet werden.
*Mit Blick auf das Berufsfeld ist es sinnvoll und notwendig, Veranstaltungen nach Schulstufen bzw. Schulformen zu differenzieren.*

Für die *fachlichen* Standards sind als Hinweis zu einer Ausdifferenzierung bei der Umsetzung in entsprechende Curricula vier Kategorien angegeben. Diese sind nach inhaltlicher Ausweitung, begrifflicher Elaboriertheit und Grad der Abstraktion und Formalisierung gestaffelt. Ihre Reihung ist im Sinne zunehmender Intensität zu verstehen. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass auf jeder Stufe die Inhalte und Konzepte der davor liegenden Stufen geeignet integriert werden sollen. Dabei sollte folgenden Zielsetzungen Rechnung getragen werden (vgl. gemeinsame Stellungnahme von DMV, GDM, MNU):
- ▷ Die Studierenden erfahren mathematische Wissensbildung als progressiven Prozess, der von Denkhandlungen wie Abstraktion, Verallgemeinerung, Präzisierung und Formalisierung getragen wird und die kreative Entwicklung gedanklicher Ordnungsmittel erfordert.
- ▷ Sie erwerben damit nicht nur ein vertieftes Verständnis mathematischer Inhalte, sondern auch Sichtweisen, die für die Fähigkeit zum genetischen Lehren unabdingbar sind.

*Diese Kompetenzen betreffen die im Alltag relevante Mathematik und ihre begriffliche Beschreibung.*
Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, auch dann, wenn sie kein Fachstudium absolviert hat.

*Diese Kompetenzen betreffen Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik als Mittel, die Alltagsmathematik von einem übergeordneten Standpunkt aus zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.*
Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet und ein stufenspezifisches Fachstudium absolviert hat.

*Diese Kompetenzen betreffen unterrichtsrelevante Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik und die Möglichkeit, diese von einem höheren Standpunkt zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.*
Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft darüber hinaus verfügen, die Mathematik in den Sekundarstufen unterrichtet und ein schulformspezifisches Fachstudium absolviert hat.

*Diese Kompetenzen betreffen exemplarisch die Kenntnis weiterführender mathematischer Theoriebildungen mit ihren spezifischen Mechanismen und der je eigenen Leistungsfähigkeit zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.*
Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik in der Sekundarstufe II unterrichtet.

Über die *fachdidaktischen* Kompetenzen soll eine Lehrkraft verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, wenn auch in für die jeweilige Jahrgangsstufe unterschiedlichen Ausformungen.

*Wie sind diese Empfehlungen zustande gekommen?*

Die gegenwärtige Situation im Bologna-Prozess lässt befürchten, dass sich das Ausbildungssystem trotz formaler Vereinheitlichung zu einem Flickenteppich unterschiedlichster Modelle entwickelt, die die Mobilität der Studierenden schon innerhalb Deutschlands, sogar innerhalb eines Bundes-

landes erschwert. Das gilt insbesondere für die Lehrerbildung, die auf einen zwar in den Ländern unterschiedlich gegliederten, aber vergleichbaren Arbeitsmarkt Schule ausgerichtet ist. Um diesem Trend entgegen zu wirken, hat ein Arbeitskreis der GDM in Zusammenarbeit mit der DMV und der MNU für die Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern, die das Kernfach Mathematik von der ersten Klasse bis zum Abitur erfolgreich unterrichten sollen, diese Empfehlungen von Standards für die Lehrerbildung formuliert.
Dem Arbeitskreis gehören an: Rainer Danckwerts, Hans-Jürgen Elschenbroich, Lisa Hefendehl-Hebeker, Gabriele Kaiser, Ina Kersten, Henning Körner, Jürg Kramer, Timo Leuders, Andreas Marx, Michael Neubrand, Hans-Dieter Rinkens (Sprecher), Hans-Georg Weigand, Bernd Wollring.
Der Vorstand der GDM, das Präsidium der DMV und der Bundesvorstand der MNU veröffentlichen diese Empfehlungen in der aktuellen Diskussion über ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und ihre Didaktiken in der Lehrerbildung als Beitrag zur Beschreibung der fachbezogenen Kompetenzen künftiger Mathematiklehrerinnen und -lehrer.

Prof. Günter M. Ziegler für die DMV
Prof. Hans-Georg Weigand für die GDM
OStD Arnold a Campo für den MNU

*Arithmetik und Algebra – Denken in Zahlen und Strukturen*

Der Themenkreis Arithmetik und Algebra erstreckt sich auf Zahlen und ihre Verwendung, das systematische Operieren mit Zahlen und schließlich die Algebra als formale Durchdringung und Verallgemeinerung. Er umspannt eine lange historische Entwicklung, die durch die geistige Gestaltungskraft typischer mathematischer Denkhandlungen wie Abstrahieren, Ordnen und Strukturieren, Generalisieren und Formalisieren getragen ist.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Zahlen, Zahldarstellungen, Zahlensystem* | ▷ kennen Darstellungsformen für natürliche Zahlen, Bruchzahlen und rationale Zahlen und verfügen über Beispiele, Grundvorstellungen und begriffliche Beschreibungen für ihre jeweilige Aspektvielfalt.<br>▷ beschreiben die Fortschritte im progressiven Aufbau des Zahlensystems und argumentieren mit dem Permanenzprinzip als formaler Leitidee.<br>▷ ermessen die kulturelle Leistung, die in der Entwicklung des Zahlbegriffs und des dezimalen Stellenwertsystems steckt. |
| | ▷ beschreiben die Grenzen der rationalen Zahlen bei der theoretischen Lösung des Messproblems.<br>▷ geben Beispiele für den Umgang der Mathematik mit dem unendlich Großen und mit dem unendlich Kleinen (z. B. Mächtigkeit, Dichtheit). |
| | ▷ erläutern die Vollständigkeit und weitere Eigenschaften der reellen Zahlen an Beispielen. |
| | ▷ verwenden Axiomatik und Konstruktion zur formalen Grundlegung von Zahlbereichen (bis hin zu den komplexen Zahlen) und beherrschen dazu begriffliche Werkzeuge wie Äquivalenzklassen und Folgen. |
| *Elementare Arithmetik* | ▷ erfassen die Gesetze der Anordnung und der Grundrechenarten für natürliche und rationale Zahlen in vielfältigen Kontexten und können sie formal sicher handhaben.<br>▷ kennen und nutzen grundlegende Zusammenhänge der elementaren Teilbarkeitslehre. |
| | ▷ erfassen Gesetze und Bedeutung der Potenzrechnung und des Logarithmus für die Mathematik und ihre Anwendungen. |
| | ▷ beschreiben Zusammenhänge der Teilbarkeitslehre formal und nutzen sie zum Lösen von Problemen. |
| *Algebra* | ▷ kennen und verwenden im Umgang mit Zahlenmustern präalgebraische Darstellungs- und Argumentationsformen und erste formale Sprachmittel (Variable). |
| | ▷ handhaben die elementar-algebraische Formelsprache und beschreiben die Bedeutung der Formalisierung in diesem Rahmen.<br>▷ verwenden grundlegende algebraische Strukturbegriffe und zugehörige strukturerhaltende Abbildungen in Zahlentheorie und Geometrie (z. B. Restklassenringe, Symmetriegruppen). |
| | ▷ beschreiben die Vorteile algebraischer Strukturen in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen (Zahlentheorie, Analysis, Geometrie) und nutzen sie zum Lösen von Gleichungen (z. B. Konstruktion mit Zirkel und Lineal). |
| *Neue Medien* | ▷ nutzen Taschenrechner und Tabellenkalkulation zum Erkunden arithmetischer Zusammenhänge und zum Lösen numerischer Probleme und reflektieren über Fragen der Genauigkeit. |
| | ▷ nutzen Computeralgebrasysteme zur Darstellung und Exploration funktionaler und elementarer algebraischer Zusammenhänge und als heuristisches Werkzeug zur Lösung von Problemen. |

*Geometrie – Strukturieren von Raum und Form*

Charakteristisch für die Geometrie sind Vorstellungen und Konstruktionen von Formen, Gestalten und Mustern und ihren systematischen Veränderungen in Abbildungen, sowie die Grundideen des Messens in der Ebene, im dreidimensionalen Raum und darüber hinaus. Figuren und Abbildungen bilden ferner eine wesentliche Stufe einer ersten systematischen Verständigung über mathematische Inhalte allgemein, bevor diese formal durchdrungen und fixiert werden.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Elementare Geometrie in Ebene und Raum* | ▷ beschreiben und erläutern elementare Formen, Konstruktionen und Symmetrien in Ebene und Raum und operieren damit materiell und mental.<br>▷ erläutern Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen ebenen und räumlichen Phänomenen. |
| | ▷ führen elementare Konstruktionen mit Lineal und Zirkel durch und begründen diese.<br>▷ durchdringen geometrische Aussagen argumentativ in Begründungen und Beweisen.<br>▷ beschreiben geometrische Abbildungen, insbesondere Kongruenzabbildungen, Ähnlichkeitsabbildungen und Projektionen, führen sie konstruktiv durch und nutzen sie beim Lösen von Konstruktionsproblemen. |
| | ▷ beschreiben Axiomatik und Konstruktion als Wege für eine formale Grundlegung der euklidischen Geometrie. |
| *Messen in Ebene und Raum* | erläutern und nutzen geometrische Vorstellungen (z. B. Auslegen, Ausschöpfen) zum Messen von Längen, Flächeninhalten, Rauminhalten und Winkeln. |
| | ▷ bestimmen Maße und ihr Invarianz- und Transformationsverhalten durch Kongruenz- und Ähnlichkeitsargumente.<br>▷ erklären und nutzen Verfahren der Trigonometrie erklären und nutzen Grenzprozesse zum Messen (Approximation, Cavalieri). |
| | ▷ erklären die Grundidee des Integrals geometrisch und nutzen sie zur Bestimmung von Flächen, Längen und Rauminhalten. |
| *Geometrische Strukturen* | ▷ beschreiben Symmetrien durch Abbildungen und strukturieren sie mit dem Gruppenbegriff.<br>▷ arbeiten darstellend und analytisch mit linearen Gebilden (wie Punkt, Gerade, Ebene und Hyperebene) und sie betreffenden Operationen.<br>▷ arbeiten darstellend und analytisch mit nichtlinearen Gebilden (wie Kreise, Kegel, Kegelschnitte, Kugeln und Rotationskörper). |
| | ▷ zeigen exemplarisch Wege zu nicht-euklidischen Geometrien auf. |
| *Neue Medien* | ▷ nutzen Software zur Darstellung ebener und räumlicher Gebilde, zur Exploration geometrischer Konstruktionen und als heuristisches Werkzeug zur Lösung geometrischer Probleme. |

*Lineare Algebra – Linearisieren und Koordinatisieren*

Charakteristisch für die Lineare Algebra ist ihre Rolle als Sprache und universelles Werkzeug für die Mathematik und Anwendungsbereiche in Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften. So führt die Anwendung mathematischer Methoden in den verschiedensten Gebieten auf lineare Gleichungssysteme (z. B. Verflechtungsprobleme, lineare Optimierung). Grundprinzipien sind Linearisierung (z. B. bei der Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen) und Koordinatisierung. Durch die Idee der Koordinatisierung wird die Möglichkeit gegeben, geometrische Phänomene mit Hilfe der Algebra zu beschreiben und umgekehrt algebraische Erkenntnisse geometrisch zu veranschaulichen. Das Streben der Mathematik nach Abstraktion (um größtmögliche Anwendbarkeit zu erhalten) und nach Klassifikation (z. B. unter dem Aspekt der Dimension) zeigt sich deutlich in der Linearen Algebra.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Lineare Gleichungen und Koordinatengeometrie* | ▷ verstehen Koordinatisierung als Möglichkeit, geometrische Phänomene algebraisch zu behandeln.<br>▷ unterscheiden zwischen ein-, zwei- und dreidimensionalen Räumen und haben ein intuitives Verständnis von Matrizen, z. B. als Möglichkeit, Daten übersichtlich darzustellen. |
| | ▷ geben Beispiele für Vektoren wie Kraft und Geschwindigkeit und beschreiben, wie Vektoren Beträge und Richtungen von Größen ausdrücken.<br>▷ beschreiben lineare Gleichungssysteme und Lösungsverfahren mit Hilfe von Matrizen, haben (geometrische) Vorstellungen über Lösungsmengen und zeigen Anwendungsmöglichkeiten in Technik, Naturwissenschaften und Wirtschaft auf. |
| *Lineare Strukturen* | ▷ erläutern, wie man von anschaulichen ein-, zwei- und dreidimensionalen Räumen zum abstrakten Begriff des Vektorraumes kommt.<br>▷ geben Beispiele für Vektorräume in Mathematik (z. B. Funktionenräume) und anderen Wissenschaften (Physik, Ökonomie, ...) an.<br>▷ beschreiben die Bedeutung der abstrakten Begriffe Basis und Dimension für geo-metrische Fragestellungen, bei der Lösung linearer Gleichungssysteme sowie bei linearen Koordinatentransformationen. |
| | ▷ begreifen lineare Abbildungen von Vektorräumen als strukturverträgliche Abbildungen und stellen diese durch Matrizen dar.<br>▷ geben Beispiele für Anwendungen von Matrizen (z. B. stochastische Übergangsmatrizen, geometrische Abbildungen).<br>▷ erläutern die Bedeutung der Determinante in Algebra, Geometrie und Analysis und verstehen die Determinante als alternierende Multilinearform.<br>▷ zeigen die Nützlichkeit der Begriffe Eigenwert und Eigenvektor (z. B. Klassifikation von Matrizen, Hauptachsentransformation, lineare Differentialgleichungen). |
| *Geometrische Strukturen* | ▷ stellen Zusammenhänge zur Elementargeometrie (z. B. Satz von Pythagoras) her.<br>▷ beschreiben und konstruieren Isometrien und Projektionen. |
| | ▷ beschreiben, wie Vektorräume mittels eines Skalarprodukts eine metrische Struktur bekommen und Längen- und Winkelbegriffe genutzt werden können.<br>▷ beschreiben Kegelschnitte und Quadriken algebraisch und geometrisch und wenden Hauptachsentransformation an.<br>▷ beschreiben verschiedene Zugänge zu affiner und projektiver Geometrie. |
| *Neue Medien* | ▷ nutzen mathematische Software, um Sätze der Linearen Algebra anhand von Beispielen nachzuvollziehen, und als Werkzeug bei der Lösung von Anwendungsproblemen. |

Charakteristisch für die Analysis ist der systematisierende Umgang mit dem unendlich Kleinen (und Großen). Davon handeln die zentralen Begriffe Grenzwert, Ableitung und Integral. Sie handeln ebenso von der grundlegenden Idee des funktionalen Denkens. Beides – die Erfahrung des erfolgreichen Umgangs mit dem Unendlichen und die Erziehung zum funktionalen Denken – gehört zum Kern des allgemeinbildenden Werts der Analysis, begründet ihre breite Anwendbarkeit und trägt substanziell zu einem gültigen Bild der Mathematik als Kulturleistung bei.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Funktionen* | ▷ verwenden Abbildungen als universelles Werkzeug (z. B. Kongruenzabbildungen, Permutationen, Folgen) und beschreiben sie mit Hilfe charakterisierender Eigenschaften (z. B. Bijektivität).<br>▷ arbeiten mit Funktionen in verschiedenen Darstellungen (Tabelle, Graph, Term) und unter verschiedenen Aspekten (Einsetzungs-, Veränderungs- und Objektaspekt).<br>▷ erläutern inner- und außermathematische Situationen, in denen die Abhängigkeit von mehreren Variablen eine Rolle spielt. |
| | ▷ nutzen elementare Funktionen zur Beschreibung realer Prozesse und innermathematischer Zusammenhänge und erläutern grundlegende Eigenschaften (Monotonie, Umkehrbarkeit). |
| *Grenzwert* | ▷ erläutern einen präformalen Grenzwertbegriff an tragenden Beispielen. |
| | ▷ beschreiben die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen und erläutern ihre Bedeutung an Beispielen. |
| | ▷ definieren den Begriff des Grenzwerts für Folgen und Reihen sowie die Vollständigkeit der reellen Zahlen und verwenden diese Begriffe formal sicher. |
| *Ableitung* | ▷ interpretieren den Begriff der Ableitung als lokale Änderungsrate und setzen ihn in Anwendungszusammenhängen ein. |
| | ▷ interpretieren die Ableitung als Instrument der lokalen Linearisierung.<br>▷ untersuchen Eigenschaften von Funktionen mit analytischen Mitteln. |
| | ▷ definieren die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit formal und begründen zentrale Aussagen über stetige und differenzierbare Funktionen.<br>▷ verwenden die Idee der Differenzialgleichung zur Charakterisierung von Funktionen und zur Modellbildung. |
| *Integral* | ▷ beschreiben die Idee der Flächenmessung mittels infinitesimaler Ausschöpfung an Beispielen. |
| | ▷ interpretieren das Integral als Bilanzieren und als Mittelwertbildung und setzen es in Anwendungszusammenhängen ein.<br>▷ begründen den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung anschaulich. |
| | ▷ definieren den Begriff des (Riemann-)Integrals formal und verwenden ihn in mathematischen Zusammenhängen. |
| *Vernetzungen und Verallgemeinerungen* | ▷ beschreiben und verwenden die Differenziation und Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher.<br>▷ nutzen die Begriffe der Analysis zur Darstellung von Kurven und Flächen im Raum.<br>▷ nutzen das Integral zur Arbeit mit stetigen Verteilungen in der Stochastik |
| *Neue Medien* | ▷ nutzen Software zur Darstellung und Exploration funktionaler Zusammenhänge und infinitesimaler Phänomene und reflektieren ihre Verwendung kritisch. |

*Stochastik – Daten analysieren und Zufall modellieren*

Die Statistik bietet wirkungsvolle Werkzeuge der Zusammenfassung und Darstellung von Daten, mit denen sich Zusammenhänge der Realität beschreiben und interpretieren lassen. Zudem hat die Mathematik einen Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickelt, mit dem sich auch Zufallsphänomene erfassen lassen. Datenanalyse und Zufallsmodellierung kommen zusammen in vielfältigen stochastischen Anwendungen, ohne die die moderne quantitativ arbeitende Wissenschaft nicht denkbar ist.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br><br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Beschreibende Statistik/ Datenanalyse* | ▷ planen statistische Erhebungen (Befragung, Beobachtung oder Experiment), führen sie durch und werten sie aus<br>▷ lesen und erstellen grafische Darstellungen für uni- und bivariate Daten (z. B. Kreuztabelle) und bewerten deren Eignung für die jeweilige Fragestellung. |
| | ▷ bestimmen und verwenden uni- und bivariate Kennwerte (z. B. Mittelwerte, Streumaße, Korrelationen, Indexwerte) und interpretieren sie angemessen. |
| *Zufallsmodellierung* | ▷ modellieren mehrstufige Zufallsversuche durch endliche Ergebnismengen und nutzen geeignete Darstellungen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel). |
| | ▷ unterscheiden Wahrscheinlichkeitsaspekte (frequentistisch, axiomatisch usw.) und beschreiben typische Verständnisschwierigkeiten im Umgang mit dem Zufallsbegriff.<br>▷ rechnen und argumentieren mit Wahrscheinlichkeiten. |
| | ▷ rechnen und argumentieren mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und stochastischer Unabhängigkeit.<br>▷ erläutern inhaltlich das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen und den zentralen Grenzwertsatz und deren Konsequenzen.<br>▷ verwenden diskrete Verteilungsmodelle. |
| | ▷ verwenden kontinuierliche Verteilungsmodelle. |
| *Stochastische Anwendungen* | kennen Beispiele für die Anwendung von Stochastik (z. B. Markow-Ketten) in verschiedenen Wissenschaften (Ökonomie, Physik, …).<br>▷ schätzen in Zufallssituationen Parameter aus Daten.<br>▷ führen Hypothesentests durch und reflektieren deren zentrale Schritte und bestimmen Konfidenzintervalle. |
| | ▷ beschreiben Schritte klassischer Testkonstruktion und Beispiele für probabilistische Testverfahren.<br>▷ erläutern Unterschiede zwischen Bayes-Statistik und klassischen Testverfahren. |
| *Neue Medien* | ▷ verwenden Tabellenkalkulation und statistische Software zur Darstellung und explorativen Analyse von Daten.<br>▷ simulieren Zufallsversuche computergestützt. |

## *Modellieren und Angewandte Mathematik – Anwenden von Mathematik*

Die Wechselwirkung zwischen Mathematik und realer Welt spiegelt sich in der grundlegenden Idee des mathematischen Modellierens wieder. Dabei kann zum einen die mathematische Struktur im Vordergrund stehen und ihr Modellcharakter für Anwendungssituationen herausgestellt werden; dies erfolgt in den kanonischen Fachvorlesungen. Zum andern können außermathematische Probleme Anlässe zur Entwicklung neuer und Verknüpfung verschiedener mathematischer Theorieteile sein. Die Thematisierung solcher Prozesse ist charakteristisch für die Angewandte Mathematik. Außerdem führt der Umgang mit fehlerbehafteten empirischen Daten, mit Rechenungenauigkeiten und mit großen Datenmengen zu weiteren typischen Fragestellungen der Angewandten Mathematik.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Modellieren* | ▹ beschreiben anhand von Beispielen mathematisches Modellieren als einen mehrstufigen Prozess, der von einer realen Situation über ein reales Modell (unter mehreren möglichen) zu einem mathematischen Modell führt, das wiederum in der Realität geprüft wird. |
| | ▹ wenden mathematische Denkmuster und Darstellungsmittel auf praktische Probleme an.<br>▹ reflektieren die spezifischen Möglichkeiten (z. B. Prognosen) und Grenzen (z. B. Verkürzungen) mathematischen Modellierens. |
| *Anwendungsbereiche* | ▹ beschreiben exemplarisch Modellbildungsprozesse in verschiedenen Problemfeldern und realen Kontexten, beispielsweise<br>– physikalische und weitere naturwissenschaftliche Modelle,<br>– Netzwerke und Graphen,<br>– Optimierung (Lineare Optimierung, optimale Steuerungen),<br>– Nachrichtenübermittlung (Kryptographie),<br>– Bildgebende Verfahren (Computertomographie),<br>– Finanz- und Versicherungswesen,<br>– Digitalisierung von Sprache und Musik. |
| *Numerik* | ▹ beschreiben an Beispielen, wie empirisch gewonnene Daten und numerische Rechnungen mit Fehlern behaftet sind, und schätzen deren Auswirkungen bei Modellierungen ein. |
| | ▹ verwenden Methoden (z. B. Iterationsverfahren) zur systematischen Verbesserung von Näherungswerten und erläutern die damit verbundenen Fragen (Schnelligkeit, Stabilität). |
| *Neue Medien* | ▹ nutzen Software (CAS, Tabellenkalkulation, Geometriesoftware) zur Darstellung und Exploration mathematischer Modellierungen und als heuristisches Werkzeug zur Lösung von Anwendungsprobleme. |
| | kennen und reflektieren Fragen der Umsetzung numerischer Verfahren auf dem Computer (z. B. Komplexität, Genauigkeit). |

*Fachdidaktische Kompetenzen*

Die Fachdidaktik als Wissenschaft vom fachspezifischen Lernen zielt auf theoretische und empirische Erkenntnisse zu fachlichen Lehr- und Lernprozessen und ihren Bedingungen. Lehramtsstudierende erwerben

▷ in ihren fachwissenschaftlichen Studien fachbezogene Reflexionskompetenzen, die sie mit Blick auf ihr künftiges Berufsfeld in den fachdidaktischen Studien vertiefen,

▷ in ihren fachdidaktischen einschließlich der schulpraktischen Studien mathematikdidaktische Basiskompetenzen, insbesondere mathematikdidaktische diagnostische Kompetenzen, sowie theoretisch reflektierte mathematikunterrichtsbezogene Handlungskompetenzen.

Der Erwerb dieser Kompetenzen erfolgt in einem wissenschaftlichen Studium und wird in reflektierten Praxisphasen während des Studiums aufgebaut und in einer praxisbetonten Phase vertieft.

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br><br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Fachbezogene Reflexionskompetenzen* | ▷ beschreiben spezifische Erkenntnisweisen des Faches Mathematik und grenzen sie gegen die anderer Fächer ab.<br>▷ reflektieren die Rolle und das Bild der Wissenschaft Mathematik in der Gesellschaft. |
| *Mathematikdidaktische Basiskompetenzen* | ▷ kennen und bewerten Konzepte von „mathematischer Bildung“ und die Bedeutung des Schulfaches Mathematik für die Gesellschaft und die Schulentwicklung.<br>▷ verfügen über theoretische Konzepte zu zentralen mathematischen Denkhandlungen wie Begriffsbilden, Modellieren, Problemlösen und Argumentieren.<br>▷ beschreiben zu den zentralen Themenfeldern des Mathematikunterrichts<br>– verschiedene Zugangsweisen, Grundvorstellungen und paradigmatische Beispiele,<br>– begriffliche Vernetzungen, u. a. durch fundamentale Ideen,<br>– typische Präkonzepte und Verstehenshürden,<br>– Stufen der begrifflichen Strenge und Formalisierung und deren altersgemäße Umsetzungen.<br>▷ stellen Verbindungen her zwischen den Themenfeldern des Mathematikunterrichts und ihren mathematischen Hintergründen.<br>▷ reflektieren die Rolle von Alltagssprache und Fachsprache bei mathematischen Begriffsbildungsprozessen.<br>▷ kennen und bewerten Konzepte für schulisches Mathematiklernen und -lehren (genetisches Lernen, entdeckendes Lernen, dialogisches Lernen usw.).<br>▷ beschreiben Möglichkeiten fächerverbindenden Lernens im Verbund mit dem Fach Mathematik.<br>▷ bewerten Bildungsstandards, Lehrpläne und Schulbücher und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung.<br>▷ rezipieren fachdidaktische Forschungsergebnisse und vernetzen sie mit ihren Kenntnissen. |

| Bereiche | Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse<br><br>Die Studierenden |
|---|---|
| *Mathematik-didaktische diagnostische Kompetenzen* | ▷ beobachten, analysieren und interpretieren mathematische Lernprozesse.<br>▷ kennen und reflektieren Ziele, Methoden und Grenzen der Leistungsüberprüfung und -bewertung im Mathematikunterricht.<br>▷ kennen Grundlagen empirischer Kompetenzmessung und können deren Ergebnisse handhaben (z. B. Intelligenz- und Schulleistungstests, zentrale Lernstandserhebungen).<br>▷ führen strukturierte Interviews und informelle Gespräche als individualdiagnostische Verfahren durch und werten sie aus.<br>▷ konstruieren diagnostische Aufgaben und analysieren und interpretieren Schülerleistungen.<br>▷ beschreiben Unterrichtsarrangements und -methoden mit diagnostischem Potenzial.<br>▷ erstellen auf diagnostischen Ergebnissen beruhende Förderpläne für einzelne Schüler oder Lerngruppen.<br>▷ beschreiben Konzepte und Untersuchungen von Rechenschwäche und mathematischer Hochbegabung. |
| *Mathematik-unterrichts-bezogene Handlungs-kompetenzen* | ▷ kennen wesentliche Elemente von Lernumgebungen und nutzen diese zur zielgerichteten Konstruktion von Lerngelegenheiten:<br>– Aufgaben als Ausgangspunkt für Lernprozesse,<br>– Lehr- und Lernmaterialien als Mittel fachlichen Lernens,<br>– Möglichkeiten, Bedingungen und Grenzen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht,<br>– Unterrichtsmethoden in ihrer fachspezifischen Ausformung.<br>– fachspezifische Interventionsmöglichkeiten von Lehrpersonen (z. B. Umgang mit vorläufigen Begriffen, Reaktion auf Fehler, heuristische Hilfen).<br>▷ kennen und bewerten Verfahren für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht (z. B. Lernausgangsdiagnosen, Prozesshilfen, natürlich differenzierende Aufgaben und Lernarrangements).<br>▷ kennen Verfahren qualitativer und quantitativer empirischer Unterrichtsforschung im Fach Mathematik (z. B. Fallstudien, Feldstudien) und können Ergebnisse bei der Gestaltung von Lernprozessen berücksichtigen.<br>▷ reflektieren den Umgang mit Verfahren empiriegestützter Unterrichtsentwicklung (z. B. durch zentrale Leistungsmessung). |

# Rede an die Hörerinnen und Hörer der Vorlesung ‚Einführung in die Mathematikdidaktik'

## Universität Potsdam im SS 2008

Thomas Jahnke

Liebe Lehramtsstudierende,
ich will heute zunächst einmal mit Ihnen reden und, da mir das wichtig ist, habe ich mir sogar aufgeschrieben, was ich Ihnen sagen will. Ich habe Unmut über diese Veranstaltung gehört, und das ist nicht das erste Mal bei einer derartigen Veranstaltung, so dass ich zumindest einmal sagen will, worauf dieser Unmut meiner Ansicht nach beruht: nämlich auf einem Missverständnis, einem grundsätzlichen Missverständnis, was diese Vorlesung von Ihnen und mit Ihnen und vielleicht sogar für Sie will.
Didaktik der Mathematik ist die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Lehren und Lernen von Mathematik. Nun wird so manche oder mancher von Ihnen denken, ich will gar keine Einführung in die Didaktik der Mathematik, ich will doch Lehrerin oder eben Lehrer werden, und ich erwarte, dass ich da das Handwerkszeug und die Tricks lerne, wie man diesem Beruf gekonnt nachgeht. Also bitte keine langatmigen und theoretischen oder gar historischen Ausführungen über dies und das, sondern sofort und ohne Umschweife zur Sache, zum guten Unterrichten, Punktum. Auch wenn ich diese Aufforderung schon häufiger gehört und öfter noch gefühlt habe, sie mir also insofern nachvollziehbar ist, halte ich sie, um das der Klarheit und vielleicht auch der Provokation halber einmal deutlich zu sagen, für borniert.
Stellen Sie sich vor, Sie studierten Jura und hörten eine Vorlesung zur Einführung in das öffentliche Recht. Wäre es da wohl sinnvoll, dem Vortragenden lauthals murrend oder auch nur im stillen Widerstand vorzuhalten, Sie wollten das alles gar nicht hören, schließlich wollten Sie Strafverteidiger werden und nun mal endlich zu den Verfahrenstricks.
Stellen Sie sich vor, Sie studieren Wirtschaftswissenschaften und hörten eine Vorlesung zur Einführung in die Grundlagen dieser Disziplin und Ihr Nachbar, um Sie einmal aus dem Spiel zu lassen, krakelte los, er wolle ein erfolgreicher, ja ein reicher Manager werden, einen überteuerten Aktenkoffer habe er sich schon zugelegt, aber der Porsche fehle noch, und nun wolle er endlich präzise Auskünfte, wie er es denn dahin brächte, ja ein bisschen Vokabular und Training brauche man ja schon, also her damit.
Vielleicht sehen Sie im Blick auf die fremden Fächer trotz oder wegen meiner Überzeichnung, dass diese Forderungen ganz unangemessen sind. Die Universität spendiert Ihnen gar keine Ausbildung, kein Training für einen Beruf, sie will Sie bilden. Deshalb sprechen wir hier im Haus auch immer von Lehrerbildung und nicht von Lehrerausbildung. Aber, werden Sie vielleicht ausrufen, ich will doch Lehrer werden. Das will ich schon glauben, aber wir sollten uns gerade deshalb einmal darüber verständigen, was wohl dazu gehört und wie das wohl vonstatten gehen könnte. Ich erinnere mich auch deutlich an den Ausbruch eines jungen Mannes, der mir in der Cafeteria stolz verkündete, er sei Lehrer in der dritten Generation, da habe er, so drückte er sich meiner Erinnerung nach aus, das Geschwafel der Leute in Golm[1] nicht nötig, die doch nie vor einer Klasse gestanden und von Tuten und Blasen folglich keine Ahnung hätten.
So mancher künftigen Grundschullehrerin, ich will einmal davon absehen, dass es dieses Lehramt in Brandenburg in eigenständiger Form gar

[1] Golm ist ein Vorort von Potsdam, in dem die humanwissenschaftliche Fakultät der Universität Potsdam einschließlich der Institute für Erziehungswissenschaft und für Grundschulpädagogik angesiedelt ist.

nicht gibt, scheint ein akademisches Studium gänzlich überflüssig, inhaltlich fühlt sie sich durch ihr Abitur der künftigen Tätigkeit durchaus gewachsen, nur methodisch hätte sie doch gern noch ein paar Hinweise und eine berufsorientierte Schulung, die sie für die Praxis ‚fit' mache. Studium als Fitnesstraining, wo möglich noch mit einem Wellnessbereich?

Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang auch das so genannte ‚Integrierte Eingangspraktikum', von dem Sie möglicherweise noch Reste in Golm erlebt haben, bei dem die Studierenden kaum, dass sie solche waren, kaum dass sie also selbst die Schulbank verlassen hatten, nun gewendet wurden, um als Möchte-gern-bald-Lehrer wieder das Schulhaus zu betreten, um gleich mit ihrem Berufswunsch loszulegen, sich dabei bereits im Lehrerzimmer wohl fühlend (möglicherweise mehr als im Klassenzimmer), sich schon mit ihren alten Lehrern duzend voreilig in den Habitus der anderen Seite einzugewöhnen, ohne dass sie je einen Gegenstand oder Umstand Ihrer angestrebten Berufstätigkeit mit kühlem, distanzierten, wissenschaftlichen Blick betrachtet hätten. Hinderlich war da eigentlich nur noch dieses Studium nebst seinen Prüfungen, das doch nur aufhält, wo man doch schon erste Belobigungen über schöne Tafelbilder und den netten Umgang mit den Kindern einfährt. Das Studium als Hindernis. Sinnvoller wäre es doch, man wäre eine Weile Lehrling, das würde man schon zugestehen, bei einer erfahrenen Meisterlehrerin, von der man sich den guten Unterricht eben abschaut, wobei dann der gute Wille und die Liebe zu den Kindern und die Freude am schönen Beruf schon das Übrige besorgten. Ergänzt wird diese Sicht noch durch eine entsprechend ‚gesunde' Einstellung zu der so genannten Theorie. Theorie ist hier eine ideale Praxis, eben was so in den Büchern steht und was man soll, was aber in der Praxis dann doch ganz anders ist. Da merkt man doch gleich, Theorie ist etwas für Hochschulprüfungen, aber erst wenn man diese Scheußlichkeiten mal hinter sich gelassen und die Unterlagen aus dem Studium weggeworfen hat, beginnt der unbeschwerte Beruf.

Angelegentlich dieser Eile, in den Beruf zu kommen, will ich Ihnen noch von einem persönlichen Schock berichten, den mir meine Studierenden versetzt haben: In den obligatorischen Schulpraktischen Übungen gehen wir mit einer kleinen Gruppe von nicht mehr als sechs Studierenden wöchentlich einmal in die Schule, und einer von uns unterrichtet, was wir vorher gemeinsam vorbereitet haben. Da die Studierenden in dieser Veranstaltung zum ersten Mal unterrichten, begehen sie fachliche, pädagogische und didaktische Ungeschicklichkeiten aller Art, was ja auch Sinn der Übung ist. Ihr Interesse bei der gemeinsamen Unterrichtsvorbereitung, den ins Auge gefassten Stoff tatsächlich gründlich zu durchdenken, hielt sich – übrigens unter Verweis auf das benutzte Schulbuch, in dem die Dinge doch schon aufbereitet seien – bei meiner letzten Gruppe eher in Grenzen; sehr schnell wollten sie stets klären, wer denn mit dem Unterrichten ‚dran' sei, um ihr oder ihm dann die Vorbereitung zuzuschieben. Zum Abschluss unserer Unterrichtseinheit „Sätze am Kreis" bat uns dann die Lehrerin, einen Test zu schreiben und auszuwerten, was für uns auch eine Rückmeldung über die Resultate unserer Lehrbemühungen werden sollte. In den Entwurf dieses Testes investierten die Studierenden nicht allzu viel Arbeit, er entstand per Email und wurde eher zusammengeschustert, in dem die Studierenden jeweils eine Aufgabe stellten, die mit ihrer jeweiligen Unterrichtsstunde in Zusammenhang stand. Aber bei der Korrektur des Tests waren sie deutlich engagierter als jemals sonst in dieser Veranstaltung, das Anstreichen von Fehlern schaffte ihnen offensichtlich das Gefühl, nun endlich „Lehrer" zu sein. Auch als es um die Benotung ging, kannten sie kein Pardon und übertrafen sich in Vorgaben, was man alles können müsse und warum dieser oder jener Schüler eine 5 bekommen müsste, ohne im Mindesten zu überlegen, dass sie ja einzig ihre eigene Unterrichtstätigkeit bewerteten. Korrigieren als konstitutives Kerngeschäft? Der Rotstift des Lehrers als Insignie seiner Macht und Berufsausübung?

Aber was soll denn Bildung sein, wenn nicht Ausbildung? Bildung bedeutet zunächst fachlich, dass man eine Souveränität gegenüber dem Gegenstand erworben, sie sich erarbeitet hat. Man unterliegt ihm nicht mehr, man verfügt über ihn (sicherlich nur zu einem gewissen und nicht abschließenden Grad). Das heißt keineswegs, dass man alles weiß oder dass man immer weiß, was zu tun oder zu denken wäre; aber man kann mit dem Gegenstand umgehen, nicht auf eine technische oder eine kasuistische Expertenweise, sondern mit Muße und Verstand, der den Gegenstand auch einzuschätzen weiß. Der Unterschied zwischen dem Experten und dem Gebildeten ist, dass jener sich ganz in der Sache bewegt, während dieser sich in der Hingabe an die Sache über sie erhoben hat. Na ja, das mag in Ihren Ohren etwas blumig klingen, aber zur Bildung gehört auch, einer Sache inne zu werden. „Eine Frage verstehen" heißt, sie sich stellen, bemerkt der deutsche Philosoph Gadamer. Bildung ist in ihrem Kern immer auch dysfunktional, sie befragt den Gegenstand auch und zunächst vornehmlich aus dem Interesse an ihm selbst und fragt nicht allein nach seiner Nützlichkeit. Diese Sicht können Sie auch gleich auf Ihr Studium anwenden. Wenn wir Sie und auch Sie sich selbst hier der Mathematik aussetzen, dann sollten Sie also zu allererst gar nicht danach fragen, wo brauche ich das in meinem Lehrerberuf, sondern sollten sich auf diese beweisende Kultur und die Abenteuer des formalen Denkens in einer Selbst- und nahezu Zielvergessenheit einlassen. Das soll nicht bestreiten, dass dieses Denken auch gesellschaftlich eingebunden ist, wovon Sie nach meinem Dafürhalten übrigens viel zu wenig lernen oder – sagen wir besser – erfahren. Aber Sie, Sie selbst, sollten zunächst Mathematik lernen, nicht mit dem Ziel, sie anderen „beizubringen", sondern diesem Gegenstand gegenüber sich eine gewisse innere Vertrautheit und Souveränität zu erarbeiten.

Nun, was die Mathematik anlangt, werden Sie mir vielleicht sogar zustimmen, wobei man natürlich darüber streiten kann, welche Bereiche der Mathematik Sie in welcher Tiefe sinnvoll studieren sollten, ob also Analysis I für den künftigen SI/P-Lehrer oder Analysis III für den künftigen Gymnasiallehrer die Gebiete sein sollten, an denen er seinen Verstand schärft und mit der Sache und ihren Eigenheiten sich auseinanderzusetzen lernt. Aber wie steht es mit der Didaktik?

Bei der – freilich mehr als lückenhaften – Evaluation meiner Veranstaltungen im letzten Semester ist mir aufgefallen, dass die Frage, ob die Studierenden glaubten für ihren künftigen Beruf hier Wesentliches zu lernen, in den Mathematikveranstaltungen im Mittel zustimmender beantwortet wurde als in den Didaktikveranstaltungen, von denen man meinen könnte, sie seien Ihrer künftigen beruflichen Tätigkeit doch in ihrem Anliegen viel näher. Will man dieses Antwortverhalten positiv einschätzen, dann könnte man hoffnungsvoll argumentieren, Ihnen sei eben in besonderer Weise an der oben hervorgehobenen Souveränität gegenüber dem Gegenstand gelegen. Aber mir kommen da gewisse Zweifel, ob Ihr Denken tatsächlich so edel ist oder ob es nicht vielmehr dem lapidaren Grundsatz folgt „Wer Mathematik lehrt, muss sie auch beherrschen". Dieser Gedanke ist so trivial, dass er schon wieder falsch ist. Mathematik unterrichten heißt ja nicht, das eigene Verständnis über empfangsbereite Schülerinnen und Schüler auszugießen. Es gehört nicht allzu tiefe didaktische Einsicht dazu, um hier argwöhnisch zu werden. Auch dieses fragwürdige, immer wieder gehörte Kriterium, einer sei ein guter Mathematiklehrer, weil er so gut erklären könne, ja dies sei die eigentliche Fähigkeit des guten Mathematiklehrers, lebt doch von der Vorstellung, man könne im Unterricht den Schülern Mathematik ‚beibringen', indem man sie in besonders gelungener Weise mit Erklärungen füttere.

Daneben gibt es noch die wunderliche Einstellung, dass es in der Didaktik um eine Überwinden und ein Hintersichlassen des Fachlichen unter schulischen Bedingungen gehe, ja um ein Hinbiegen des mehr oder minder unverständlichen Stoffes auf die Schulrealität. In einer stoffdidaktischen Veranstaltung zur Analysis, in der ich auf ein tatsächliches Verstehen der Kettenregel bei dem Vortragenden beharrte, herrschte dieser mich schließlich sichtlich ‚genervt' an, möglicherweise sei sein Beweis unvollständig oder falsch, aber er sei verständlich und daher führe man ihn in der Schule so.

Aber zurück zur Frage der gefühlten Nutzlosigkeit der Didaktik. Ich könnte mich (oder eigentlich Sie) hier herauszureden versuchen, indem ich den – wie der Mathematik- und Physikdidaktiker Wagenschein, auf den ich in dieser Veranstaltung auch noch zu sprechen kommen werde, es sinngemäß einmal sagte – verhängnisvollen Einfluss der fachlich-mathematischen Prägung auf Ihr Denken beklage. Der Mathematiker – und hier ist die männliche Form wohl einmal besonders angebracht – unterscheidet in seiner fachlichen Arroganz gern zwischen Hardware und Software oder, um es noch süffiger zu formulieren, zwischen Mathematik und Folklore, wobei eben alles Folklore ist, was nicht Mathematik ist, also der Rest der Welt. Und an dieser Wagenschein'schen Klage ist auch etwas Wahres. Das bewusstlose Mathematikmachen – ich habe bisher noch nicht herausfinden können, ob diese eigentümliche Art der Bewusstlosigkeit eine Voraussetzung oder eine Wirkung formaler Gedankenalgorithmik ist – ist wohl tatsächlich eine Folge mathematisch-naturwissenschaftlicher Sozialisation, die schwere Kollateralschäden nach sich zieht: Der so geprägte Geist verschließt sich jeglicher Art von geisteswissenschaftlichem Denken, in dem es kein bewiesenes Richtig und widerlegtes Falsch gibt, er hält es für abartig. Gesellschaftliche Bedingtheit, historische Ansätze, konkurrierende Theorien, ein dialektisches Denken, das den Widerspruch nicht ausschließt, ja ihn fast produktiv benötigt, scheinen dem algorithmisch geprägten Ja-Nein-Geist simpler Non-Sense, wenn nicht gar ein unsinniges Martyrium. Um es schlichter zu sagen: Nach einer strengen Analysis-III-Vorlesung kann Golm nur

Gelaber bieten. Auch wenn man in ersterer nahezu nichts verstanden hat, glaubt man doch soviel verstanden zu haben, dass der Rest der Welt – ob nun verständlich oder nicht – nur noch minderwertige und durchweg zweifelhafte Erkenntnisse zu liefern im Stande ist, die bei näherer Prüfung nur als unbewiesen zu verwerfen sind. Es ist allerdings wohl weniger die mathematische Sozialisation als der dort erworbene fachliche Habitus, dem das geschuldet ist.

Die gefühlte Nutzlosigkeit der Didaktik hat aber einen weiteren und bedeutsamen, (weil) subjektiven Grund: eine tiefe Enttäuschung. Man steigt in einen Bus, aber statt dass dieser einen hübsch von Haltestelle zu Haltestelle, Umsteigen bei Bachelor zur Master-Endstation nach zeitlich optimiertem Fahrplan zur Arbeit fährt, hält er zum Nachdenken an. Das ist ein Frevel am öffentlichen Nahverkehr, am Common Sense der Studierenden, am Stammtisch der Selbstverständlichkeiten.

Die Didaktik bedient nicht die schon oben skizzierten, aber nie so recht ins Bewusstsein gehobenen Erwartungen der Studierenden. Sie lehrt nicht Unterrichten, was von ihren Hörern in erster Linie und selbstverständlich und unabdingbar erwartet wird. Statt guten Unterricht zu lehren, fragt sie zum Beispiel, was guter Unterricht ist, auf welchen Wertsetzungen dieses ‚gut' beruht; statt Lehrpläne zu erläutern, fragt sie, was zu welchem Behufe überhaupt an Mathematik zu unterrichten ist; statt Unterrichtssequenzen süffig sowie kopier- und imitierbar nahe zu bringen, fragt sie, was unterrichtet werden soll, nach welchen Maximen, unter welchen Bedingungen, mit welchem Bild von Mathematik und Mathematikunterricht, von der Schule und vom Jugendlichen, von der Gesellschaft. Es ist offenkundig, muss aber wohl doch einmal hervorgehoben werden, dass der Mathematikdidaktiker, der an der Hochschule Ihnen dabei und dafür gegenübertritt, nicht der oben erwähnte Meisterlehrer ist.

Warum sollte ich mich auf ein wissenschaftliches Denken einlassen, wo ich doch nur ‚gut' unterrichten will, fragt sich der künftige Lehrer. Meine Antwort ist, dass Sie sich an der Universität die Grundlagen erarbeiten für eine sinnvolle und souveräne und, um einer Zeitgeistvokabel Tribut zu zollen, nachhaltige Ausübung Ihres Berufs, die sechs- oder siebenmal so lang wie Ihr Studium ist oder zumindest sein kann.

Um mir selbst das Verhalten von Mathematiklehrern zumindest im Ansatz und partiell zu erklären, habe ich vor einiger Zeit eine fiktive Lernbiographie einer Mathematiklehrerin entworfen (und dies, um den Text grammatisch zu entlasten, zunächst in der weiblichen Form). In aller Regel war sie selbst eine „gute Schülerin" in Mathematik. Unter „guter Schülerin" ist dabei grundsätzlich zu verstehen, dass sie die Erwartungen ihrer Lehrpersonen gut zu bedienen und dadurch auch Anerkennung und gute Noten zu erlangen weiß. Sie steht dem Schulbetrieb positiv gegenüber, hilft ihren Mitschülerinnen bei den Aufgaben und kann sich gut vorstellen, nach all den roten Haken, die sie erhalten hat, später selbst welche zu verteilen oder zu verweigern. Ihr Bild von Mathematik ist ein für sie recht übersichtlicher Haufen von Aufgaben, Regeln und Verfahren, der hier und da einmal mit einer Kniffligkeit aufzuwarten hat. Sie kann „gut erklären".

Sie beherrscht die Schulmathematik und auch den Habitus der Lehrerin möglicherweise so gut, dass sie nicht recht weiß, warum sie für ihren späteren Beruf eigentlich noch studieren muss. Aber das Studium gehört eben dazu und dann ist man ja auch Akademikerin.

Das Mathematikstudium beginnt klassischer Weise mit zwei Grundveranstaltungen, die von wöchentlichen Übungen begleitet sind, die darin bestehen, dass man Woche für Woche einen Übungszettel in Heimarbeit zu bearbeiten und die Resultate abzugeben hat. Dabei lernt die Lehramtsstudierende schnell, dass es Kommilitoninnen gibt, die dabei erfolgreicher sind, so dass sie zunehmend darauf angewiesen ist, von diesen abzuschreiben, und dass die, von denen sie abschreibt, häufig nicht „auf Lehramt" sondern „auf Diplom" studieren, also nur ein Fach statt zwei. So setzt schrittweise ein Prozess der Erschütterung und Demontage des fachlichen Selbstbewusstseins sowie der geistigen Demütigung ein. Dann kommen die ersten Klausuren, knapp bestanden, obwohl viele durchfielen, aber keineswegs vorne dabei, allenfalls Mittelmaß, doch sie hat „überlebt". Zunehmend stellt sie sich einzig darauf ein, die zahlreichen Anforderungen des Studiums zu bedienen, das auch nach den ersten Semestern wenig Raum für eigene Aktivitäten lässt und diese kaum einfordert. Das habituelle Gehabe der Professoren („Ich beweise jetzt" – als stünden diese Dinge nicht schon seit Jahrzehnten in Büchern) wird ihr selbstverständlich, manchmal – etwa bei einem Seminarvortrag – versucht sie es nachzuahmen. Zunehmend gerät er (ich wechsele jetzt einmal das Geschlecht, weil manches im Folgenden männlich konnotiert ist) in den Bann einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Sozialisation, die nur oder zumindest der Tendenz nach zwischen der harten Mathematik und dem Rest der Welt, zu dem auch die so genannten Professionswissenschaften und insgesamt die Geisteswissenschaften gehören, unterscheidet; ein Bann, der als gedanklichen Option – wenn nicht Realität – nur von denjenigen Lehramtsstudierenden leidlich heil überwunden wird, die in ihrem anderen Fach eine Geisteswissenschaft studieren, also auch einer anderen wissenschaftlichen Kultur begegnen. Das eigene, mathematische Fach als reflektiertes Ganzes, das die Aufsplitterung der Disziplin nach Lehrstuhlinteressen heilen oder wenigstens überwinden könnte, kommt dabei im Studium gar nicht in den Blick, ebenso wenig wie dessen innerliche oder auch nur inhaltliche Beziehung zum künftigen Beruf.

Es folgt nach dem leidlich bestandenen Examen die wohl dunkelste Periode der deutschen Lehrerausbildung, das Referendariat. Hier lernt er die unterschiedlichsten, gegensätzlichen Ansprüche zu bedienen und die eigenen (und das ist aus meiner Sicht mit das Schlimmste) aufzugeben. Dann ist er – nach einem glücklich ausgegangenen Bewerbungsverfahren – Lehrer. Was wird sich jetzt ereignen? Wie wird sich dieser Seitenwechsel auswirken? Jetzt hat er das Sagen, so fern ihm das auch unterrichtlich und gegenüber den Eltern und im Kollegium gelingt. Jetzt ist er gleichsam an der Macht, und seine Psyche hat zum ersten Mal die Möglichkeit, die Verletzungen und Prägungen durch Studium, fachliche Sozialisation und Referendariat eigenständig zu bearbeiten und sich ein Bild von sich und seiner Tätigkeit selbst zu generieren.

Es kommt aus meiner Sicht noch ein Moment hinzu, das die Betroffenen hoffentlich nach Kräften bestreiten. Mit dem Interesse für Mathematik geht zuweilen auch eine gewisse soziale Behinderung einher. Ob sie Folge dieses Interesses oder dessen Ursache ist oder einfach mit ihm korreliert, lässt sich wohl so allgemein nicht sagen. Die Autorität des Mathematiklehrers beruht aus meiner Sicht wesentlich (also ihrem Wesen nach) auf seinem Fach und darauf oft mehr als auf seiner Lehrerstellung und seiner gelungenen Pädagogik. Schon das Fach selbst hat im öffentlichen Bewusstsein eine hohe Autorität, und wird es ja häufig auch autoritär unterrichtet. Das Verlangen des autoritären Mathematiklehrers nach Unterwürfigkeit lässt sich vollständig wohl nur entschlüsseln, wenn man in die Tiefen Freud'scher Triebtheorie hinab steigt.

An dieser Stelle möchte ich Sie eigentlich bitten, selbst weiter zu denken und die Ergebnisse Ihrer Überlegungen mit Ihren Kenntnissen und den Ihnen bekannten Mathematiklehrerinnen und -lehrern und den Erfahrungen, die Sie mit ihnen gemacht haben, zu konfrontieren. Offenkundig scheint mir zum Beispiel, dass man nach solcher Sozialisation das, was man da errungen hat, nicht so einfach aus der Hand geben wird, indem man harmlos-nette Unterrichtssequenzen gestaltet.

Soweit diese lernbiographische Skizze. Wenn Sie manches daran stört oder Sie andere Ziele haben, dann ist jetzt die Zeit, daran zu arbeiten.

Zuletzt will ich noch, bevor Sie dann die Gelegenheit zu eifrigem Widerspruch haben, auf ein Autoimmunreaktions-Argument eingehen: Vorlesungen sind als Lehrform unsinnig. Sie könnten behaupten, Ihr pädagogisches Immunsystem würde in Vorlesungen einfach kollabieren oder – gewitzter noch – die Vorlesungen selbst müssten doch aller pädagogischen Forschung nach dieses Schicksal erleiden. Dazu ist zweierlei zu sagen: 1. Sie haben recht und 2. Es gibt noch immer Vorlesungen. Welche Folgerungen Sie als in der Logik bewanderter Mathematiker daraus ziehen, sei dahin gestellt. Natürlich können Sie die Erkenntnisse der Aktivitätspädagogik oder globaler noch die des Konstruktivismus gegen die Lehrform Vorlesung ins Felde führen; das ist alles ganz richtig; man lernt nicht handeln durch Vorlesungen über das Handeln, zu denen diese Vorlesung, wie ich zu erklären versuchte, allerdings nicht gehört. Es kann aber auch seinen Reiz (und auch seine Ökonomie) haben, jemandem zuzuhören, der sich mit einer Person oder einem Gegenstand ausführlich beschäftigt hat und bereit ist, darüber Auskunft zu geben.

Ohne dass ich der Diskussion über meine Ausführungen vorgreifen wollte, stelle ich Sie abschließend vor die Wahl und unterbreite Ihnen ein Angebot, das Ihr pädagogisches Immunsystem respektiert: Statt meiner Vorlesung zur Einführung in die Mathematikdidaktik in diesem Semester zu folgen, die anhand der Werke und des Wirkens von bedeutenden Mathematikdidaktikern die Ideengeschichte der Didaktik der Mathematik zu entfalten sucht – wir haben ja das letzte Mal mit Pólya und seiner Heuristik begonnen –, können Sie ebenso in eigener Arbeit, was ich als ein aktives Studienelement außerordentlich begrüßen würde, (zum Beispiel) das Buch von E. Ch. Wittmann, einem emeritierten Dortmunder Kollegen, „Grundfragen des Mathematikunterrichts" oder „Die Pädagogik des Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen" von Lutz Führer, einem Frankfurter Kollegen, allein oder besser noch in einer Diskussionsgruppe durcharbeiten und sich bei mir des Scheines halber am Semesterende darüber prüfen lassen.

Ich danke Ihnen für Ihr geduldiges Zuhören. Jetzt haben Sie das Wort.

# Ein Olivenzweig der Methodik – Eine Antwort auf die Jahnke-Rede

Judith Mangelsdorf und Martin Naumann

Wir möchten einmal von unserer Spritztour im studentischen Personennahverkehr berichten, über so einige Stationen, Umleitungen und Baustellen während dieser Odyssee am Institut für Mathematik der Universität Potsdam.

Enthusiastisch und mit einer gehörigen Portion Pioniergeist stellten wir uns vor acht Semestern erstmals den großen und KLEINen[1] Herausforderungen des Mathematikstudiums mit Endhaltestelle Staatsexamen. Schnell wurde uns klar, dass nicht nur freundliche BÄRen[1] unseren Weg kreuzen würden. Ein viersemestriges Feuerwerk mit den Knalleffekten Analysis, lineare Algebra, Arithmetik und den Funkenschlägern Stochastik und Numerik gewährte uns weite Einblicke in die bunte Farbenpracht der Mathematik.

Nun ging der erfolgreiche Umstieg an der Station Zwischenprüfung einher mit der Vorfreude auf die sich dann laut Studienfahrplan anschließende mathematikdidaktische Ausbildung. Uns erging es jedoch ziemlich bald wie den von im Jahnkes Rede an den Pranger gestellten StudentInnen – die eigenen Vorstellungen wichen merklich vom Inhalt der gefahrenen Reiseroute durch das Land der Mathematikdidaktik ab. Nur spärlich sahen wir unser methodisches Begehren bedient. Das genetische Prinzip, Mathematik und Weltoffenheit und der Nachgang philosophischer und humanistischer Fragestellungen zur Mathematikdidaktik regten uns unfraglich zur Meditation über den eigenen Standpunkt zum Mathematiklehren an. Doch je fester wir daran glaubten, dass unser nun vielfach geweiteter Horizont die Brücke zu gelungenem Mathematikunterricht schlagen würde, desto erbarmungsloser war die anfängliche Hilflosigkeit der Vorbereitungen auf Unterrichtsgänge …

Nachfolgend trennen sich die Perspektiven etwas. Zunächst wird einmal die Sichtweise einer Studentin dargelegt, die im Doppelstudium Lehramt-Musik/Mathematik und Diplom-Psychologie studiert und genau die Anforderungen der Studienordnung bedient hat. Es schließt sich die Perspektive eines Studenten an, der eine Vielzahl mathematikdidaktischer Veranstaltungen besucht hat, die über das vorgeschriebene Maß der Studienordnung eines Mathematik-Erstfach-Studenten hinausgehen.

Ich (Judith) möchte an dieser Stelle noch einmal ganz persönlich, unter Verzicht auf rhetorische Mittel und ausgefeilte Sprachbilder, das Problem aus meiner studentischen Sicht darlegen. Ich würde Sie gerne dazu einladen einmal diese (also meine) Perspektive für einen Augenblick einzunehmen.

Ich möchte mit dem für mich schwerwiegendsten Problem beginnen und es anhand eines Erlebnisses verdeutlichen, das sich erst kürzlich zugetragen hat. In diesem Winter habe ich mein großes Praktikum im Fach Mathematik und Musik absolviert. Als ich am ersten Morgen die Schule betrat öffnete sich nach fünf Minuten die Tür des Mathematiklehrervorbereitungsraums und die Schulleiterin trat ein, um mich zu bitten zwei Vertretungsstunden in Mathematik noch am gleichen Tag zu geben. Auch mit Lehrbuch der entsprechenden Klassen und mit einem bis aufs Staatsexamen abgeschlossenen Mathematikstudium im Rücken stand ich ohne Werkzeugkoffer da. Immer noch so schlau (oder wohl eher dumm) in Bezug auf mathematische Methodik wie zu Beginn meines Studiums. So begann ich also in der spezifischen Situation mir sprichwörtlich etwas aus den Fingern zu saugen, das sich im Wesentlichen auf die Methodiken der Musik und ein paar allgemeindidaktischen Erkenntnissen stütze. Auch wenn die Stunden trotz allem annehmbar verliefen, ist mir an dieser Stelle bewusst geworden,

[1] Lokalgrößen im Bereich der Lehre

dass etwas an unserer verbindlichen Ausbildung fehlt. Das Mathematiklehrerstudium ist ein akademisches Studium und ich stimme in vollem Maße mit dem überein, dass Mathematiklehrer in der Lage sein sollten mathematisch zu denken und sich in der Materie zu bewegen. Weiter sollten sie auch soziologisch und philosophisch verstanden haben, welche Rolle das Lehren von Mathematik spielt und um die Hintergründe wissen, die unterschiedliche Didaktiker zu Ihren Ansätzen geführt haben. Darüber hinaus finde ich es aber unabdingbar, dass Mathematiklehramtsstudenten auch methodische Fragen verbindlich vermittelt werden, um sie nicht einfach im Regen stehen zu lassen. Schlussendlich ist das Lehramtsstudium nämlich einer der wenigen spezifisch berufsqualifizierenden Studiengänge. Jetzt können Sie mit Recht fragen, warum denn diese Aufgabe grade der ortsansässigen Didaktik der Mathematik zukommen sollte und auch das kann ich mit rein organisatorischen Dingen beantworten. Ich studiere Mathematik im 2. Fach. Damit umfasst laut meinem Studienplan der Gesamtumfang meiner Didaktikausbildung 6 SWS. Davon fallen vier auf die Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik" und das entsprechende Seminar. Die beiden verbleibenden werden durch die ‚Schulpraktischen übungen' (SPÜ) abgedeckt. Ich vermute, dass wir in der Meinung übereinstimmen, dass 6 SWS ohnehin zu wenig sind, und ich auch werde noch weitere Kurse der Didaktik besuchen, trotzdem ist das, was sich da auftut, ein echter bildungspolitischer Missstand. Denn auch wenn sich ein Student dazu entschließen sollte, über sein Pensum hinaus zu studieren, so gibt es nicht einmal eine spezifische Methodikvorlesung in der Mathematik. Dies finde ich besonders bedauernswert, da ich innerhalb der Musik (um einmal den gewagten Schritt des Vergleichs eines humanwissenschaftlichen Fachs und eines naturwissenschaftlichen zu gehen) durch mein ganzes Studium hindurch erlebt habe, wie wichtig und bedeutsam methodisches Wissen in der Vermittlung eines Faches ist.

Ich hoffe, Sie etwas näher mit dem Gefühl in Berührung gebracht zu haben, was für mich, aber auch viele andere Studenten hinter der sehr theoretischen didaktischen Ausbildung steht. Und vielleicht eröffnet Ihnen das ja auch den Raum, die theoretischen Inhalte der Didaktik mit einigen praktischen Fragen zu ergänzen.

Nun könnte man meinen, dass der Mathematik-Erstfach-Student unter uns in seinen zusätzlich absolvierten Veranstaltungen zur Mathematik-Didaktik auch wie gefordert in Bereichen der Methodik ausgebildet wurde. Ein Blick auf die Seminar-Landschaft ließe diesen Schluss jedenfalls zu. Seminare des Formats „Didaktik der [...]" wecken die Hoffnung auf greifbare methodische Bezüge. Mmmhh ... Schön wärs.

Womit ich (Martin) nicht gerechnet hatte, sind Seminargestaltungen, die dem beharrlichen Einschenken von Wein gleicht, ohne jedoch jemals den Krug herzugeben oder etwas über den Ausschank preiszugeben. Gewiss sind inhaltliche Diskussionen notwendig und wichtig, leider setzte sich jedes von mir besuchte Seminar vorwiegend mit den Details des Lehrstoffs und dessen schulischen Auftretens auseinander. Die Frage nach der Methode war nicht Gegenstand eines Seminars. Dabei wäre es doch überhaupt einmal sinnvoll, ein Stück weit die Handwerkskunst, etwa der Visualisierung, der Gestaltung von Arbeitsblättern, der Arbeit mit Reisetagebüchern oder Expertenmethoden, zu diskutieren. Und spricht auch das geringe zur Verfügung stehende Stundenvolumen gegen eine verpflichtende Aufnahme für die Gesamtheit der LehramtsstudentInnen, so lechzen wir doch zumindest nach einem Angebot, einem Olivenzweig der Methodik.

# Verleihung der Förderpreise der GDM 2008 in Budapest

Susanne Prediger

Der Förderpreis der GDM wird seit 1989 im mehr oder weniger zweijährlichen Rhythmus vergeben, um diejenigen Arbeiten von jungen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftern zu ehren, die nicht nur ein herausragendes Ergebnis bieten, sondern auch die Community in ihrer wissenschaftlichen Entwicklung voranbringen können. Eine Diskussion um die Preiswürdigkeit von Dissertationen ist daher immer auch eine Diskussion über die Standards unserer wissenschaftlichen Disziplin. Deswegen sollen die Kriterien der Jury hier explizit angeführt werden.

*Kriterien*

Viele der (übrigens bemerkenswert zahlreichen) eingereichten Arbeiten erfüllen die von der Jury als *notwendige Kriterien* zusammengestellten Anforderungen an eine sehr gute wissenschaftliche Arbeit:

- ▷ Bedeutsamkeit des thematischen Fokus für den Kern der Mathematikdidaktik
- ▷ Theoretische und methodologische Fundiertheit
- ▷ Einbettung in den Stand der Forschung
- ▷ Sauberkeit und Angemessenheit der Methoden
- ▷ Argumentative Stringenz und Kohärenz, Gestaltungsintensität und Lesbarkeit

Die Arbeiten in der engeren Wahl erfüllen darüber hinaus die folgenden für die Jury zentralen Kriterien, die sie aus der Menge der jährlich geschriebenen Dissertationen herausheben:

- ▷ herausragende Bedeutsamkeit der Fragestellung
- ▷ überzeugende Substanz der Ergebnisse
- ▷ Innovativität im Sinne des Eröffnens wegweisender Perspektiven (methodisch, inhaltlich und/oder theoretisch, ...)
- ▷ Ausstrahlungskraft der Fragestellung, evtl. der Methode und vor allem der Ergebnisse.

Natürlich trägt eine solche Liste von Kriterien die Entscheidung nicht quasi schon in sich, aber sie hilft immens, eine Diskussion zu fundieren und zu konzentrieren auf zentrale Aspekte. So hat auch diese Jury intensiv diskutiert und ist dann zu einer Entscheidung ohne Gegenstimme gekommen.

*Entscheidung*

Die Jury hat sich angesichts der Häufung sehr guter Einreichungen entschieden, in diesem Jahr gleich zwei Förderpreise zu vergeben, sie gingen an
*Marei Fetzer* (Frankfurt) für ihre Dissertation „Interaktion am Werk – Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule“
und
*Elke Söbbeke* (Essen) für ihre Dissertation „Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel“.
Mit solchen Arbeiten wird immer auch die kompetente Betreuung durch die Doktorväter oder -mütter geehrt, deswegen sollen diese hier nicht unerwähnt bleiben. Für die beiden ausgewählten Arbeiten gilt dies insofern besonders, als beide Preisträgerinnen im besten Sinne auf der theoretischen und methodologischen Substanz aufbauen konnten, die ihre Doktorväter geschaffen haben, um sie dann selbständig weiter zu entwickeln. Insofern geht der Glückwunsch auch an Heinz Steinbring und Götz Krummheuer. Die Laudationes wurden in umgekehrt alphabetischer Reihenfolge gehalten.

*Laudatio für Elke Söbbeke*

Die Arbeit von Elke Söbbeke ist eine herausragende Forschungsleistung, die nicht nur durch ihre spezifische Fragestellung und die damit verbundenen Ergebnisse preiswürdig erscheint, sondern auch durch allgemeine Strukturmerkmale, die für die Art und Weise wissenschaftlichen Arbeitens in der Mathematikdidaktik beispielgebend ist. Ausgehend von der Beobachtung, dass es ein einheitliches wissenschaftliches Organisationsmuster für Forschungsarbeiten in der Mathematikdidaktik derzeit nicht gibt und auch ein solches nicht absehbar erscheint, ist zunächst festzuhalten, dass nach Meinung der Gutachter und der Jury preiswürdig diejenigen Arbeiten sind, die markante Akzente in der Forschungslandschaft setzen und spezifische Nutzbarkeiten beschreiben. Einen solchen markanten Akzent und solche spezifische Nutzbarkeiten strahlt die Arbeit von Elke Söbbeke aus.

Das Thema der Arbeit, der Umgang mit Anschauungsmitteln, liegt im Kern der Mathematikdidaktik. Gerade für Grundschulkinder ist das Arbeiten an und mit mathematischen Anschauungsmitteln (gerade das strukturierende Arbeiten mit ihnen) eine der zentralen Artikulationsformen, bevor entsprechende Kompetenzen in der gesprochenen Sprache und in der Schriftsprache aufgebaut sind. Elke Söbbeke untersucht dazu in ihrer Arbeit gewissermaßen die Interaktion von Kinder mit strukturierten Bildern und beleuchtet damit nicht nur die vorsprachlichen Kompetenzen von Kindern, sondern auch *den* zentralen fachlichen Aspekt der Mathematik, nämlich das Befassen mit Mustern und Strukturen. Dieser wird besonders wirksam, wenn Anschauungsmittel in einem strukturorientierten Sinne genutzt werden.

In der Dissertation wird das theoretische Konstrukt „visuelle Strukturierungsfähigkeit" in zwei Strängen entwickelt, indem sie grundlagentheoretische Fundierungen und empirische, theoriegeleitete Analysen mit fallstudienartigen Erprobungen eng miteinander verzahnt: Sorgsam und differenziert arbeitet sie mit Bezug auf die aktuellen Ergebnisse aus der Mathematikdidaktik und den einschlägigen Bezugsdisziplinen heraus, dass

- ▹ Anschauungsmittel nicht passiv von Lernenden rezipiert werden können, sondern Lernende selbst aktive Deutungen in Anschauungsmitteln vornehmen müssen,
- ▹ zu mathematischen Wissensrepräsentationen nicht nur eine einzige Deutungsweise existiert, sondern ganz unterschiedliche Kombinationen von „mathematischem Wissen" und „passenden Anschauungsmitteln" möglich sind,
- ▹ Anschauungsmittel keine bloßen „Bilder" sind, sondern als Träger von potenziellen Strukturen und Mustern gesehen und damit selbst zu symbolischen Diagrammen werden können.

Zur Entwicklung des Konstrukt der „visuellen Strukturierungsfähigkeit" wird in einer qualitativen Interviewstudie zu kindlichen Deutungsprozessen der besondere epistemologische Status mathematischen Wissens in den Blick genommen, mit Hilfe des sog. epistemologischen Dreiecks und einer Kategorisierung die Phänomene rekonstruierend analysiert und schließlich die Deutungsprozesse zwischen Anschauungsmittel und mathematischem Wissen aus *fach*didaktischer Perspektive erfassbar gemacht durch vier Ebenen der strukturellen Visualisierungsfähigkeit. Diese Ebenen lassen sich auch über die Arbeit hinaus als Analyseinstrument für individuelle Fähigkeiten fruchtbar machen.

Bewusst würdigt die Jury hier eine Arbeit, die die Forschungslandschaft für die Grundschule substanziell *fachlich* anreichert und konsolidiert. Angesichts von stets neu Einfluss heischenden Positionen, fachliche Akzentsetzungen seien für die Grundschule von nachrangiger Bedeutung, setzt die Arbeit hier einen bewussten und konsolidierten Gegenakzent. Eingebunden in einen spezifischen Forschungskontext und aufbauend auf den epistemologischen Grundlagen ihrer Arbeitsgruppe, einer differenzierten Sichtung und Auswahl relevanter nationaler und internationaler Literatur und der spezifischen Bezugnahme auf ein konsolidiertes und bedeutsames didaktisches Großprojekt bringt sie die Forschungssubstanz auf diesem Gebiet in fundierter Weise voran. Dabei zeigt sie die Ergiebigkeit der von ihr gewählten Methode und riskiert an keiner Stelle waghalsige Schlussfolgerungen, die durch ihre empirische Substanz nicht gedeckt sind. Arbeitsweise und Ergebnisse sind zur Aufnahme und Weiterführung durch andere Forscher geeignet und vorbereitet. Insgesamt eröffnet Zugang und Fragstellung der Arbeit von Elke Söbbeke einen Wirkungskreis nicht nur in einer Schar gleichartig informierter Forscher, sondern breiterer Kreise. So hat sie selbst bereits in Folgepublikationen die Ergebnisse ihrer Arbeit in konstruktive Vorschläge für einen Unterricht umgesetzt, der dem strukturierenden Arbeiten mit Anschauungsmitteln epistemologisch sensible Aufmerksamkeit widmet. In der Lehrerbildung ist die Arbeit insbesondere für die Weiterentwicklung diagnostischer Kompetenz fruchtbar, die auszubildenden Lehrerinnen und Lehrern ein autonomes Wahrnehmen und Deuten von Situationen ermöglicht. Die spezifische Nutzbarkeitsqualität der Arbeit für die Lehrerbildung liegt also gerade nicht in dem, was manche Lehrerbildende erwarten, nämlich einen Musterkatalog für methodische und unterrichtsplanerische Entscheidungen. Sie ist vielmehr im Vorfeld angesiedelt und liefert für eben diese Entscheidungen einen Beitrag zur diagnostischen Basis. Nach Überzeugung der Jury ist angesichts der zunehmenden Bedeutung empirischer Komponenten in der Bildungsforschung und in der fachdidaktischen Forschung auch eine zunehmende Balancierung von fachdidaktischen Elementen mit konzeptionellem und methodischem Akzent einerseits und fachdidaktisch orientierter Diagnostik andererseits zu beobachten. In dieser Bedarfssituation liefert die Arbeit von Elke Söbbeke sowohl für die Forschung als auch für die Bildung einen substanziellen Beitrag. Insgesamt freuen wir uns daher, eine so herausragende Arbeit mit dem Förderpreis der GDM würdigen zu können.

*Laudatio für Marei Fetzer*

Marei Fetzers Dissertation, die wir hier auszeichnen, trägt den Untertitel „Empirische Studie zur Entwicklung von Elementen einer Interaktionstheorie grafisch basierten Lernens". Mehr als nur „Elemente" einer Theorie liefert sie, indem sie mit größter Sorgfalt und Präzision ein empirisch fundiertes und theoretisch geordnetes Begriffssystem entwickelt, auf das Interaktionsanalytiker in Zukunft verweisen können, wenn sie sich nicht nur mit den mündlichen Äußerungen im Unterricht befassen, sondern schriftliche Äußerungen in die Unterrichtsanalysen einbeziehen.
Wieso sind schriftliche Äußerungen im Mathematikunterricht von Bedeutung? Man mag hierbei sofort an Reisetagebücher und Eigenproduktionen denken, zwei zunehmend wichtiger werdende unterrichtliche Elemente. Jenseits dessen zeichnen sich schriftliche Äußerungen jedoch nicht nur dadurch aus, dass sie in einem anderen Medium stattfinden. Ihnen ist zudem eine Sprache eigen, die sich von gesprochener Sprache abhebt. Dieser als kommunikative Distanz bezeichnete Unterschied ist von erheblicher Bedeutung, da die Schülerinnen und Schüler sich in Schule an eine Sprache zu gewöhnen haben, die sich durch ihre Durchsetzung des Mündlichen mit Formen des Schriftlichen auszeichnet. Es ist eine zentrale These aus Marei Fetzers Dissertation, dass mit einer solchen Distanzsprachlichkeit begriffliche Präzisierung erreicht und so vertiefende mathematische Reflexion ermöglicht wird. Wie aber können Schülerinnen und Schüler befähigt werden, diese zwar medial mündliche, konzeptionell aber schriftliche Form der Sprache zu verwenden, wenn das Schriftliche nie explizit behandelt wird? In Marei Fetzers Arbeit geht es vor allem um den Gebrauch von schriftlichen Äußerungen. Die schriftlichen Produkte sind nicht Selbstzweck oder dienen der Lernstandsdiagnose. Sie stellen die materialisierten Überlegungen dar, auf deren Basis die Schülerinnen und Schüler an Klassengesprächen teilnehmen. Ein wichtiges Ergebnis von Marei Fetzers Dissertation ist, dass in Hinblick auf das Lernen der Kinder gerade die Veröffentlichungsphase als die zentrale Unterrichtssituation der Arbeit mit Schreibanlässen erscheint, in dem sich in der Interaktion viele günstige Lernbedingungen ergeben, gerade weil die schriftlichen Produkte den Lernenden eine sichere Basis für die Partizipation bieten. Mit der Verleihung des Förderpreises würdigt die Jury nicht nur ein theoretisch anspruchsvolles und methodologisch in allen Details präzises Vorgehen, sondern auch den Mut, dem klassischen Design einer Dissertation „Problematisierung – Theorieteil – Forschungsmethoden – Resultate – Diskussion" eine Darstellung des Forschungsprozesses gegenüber zu stellen: Beobachtungen von Unterrichtspraxis erfordern theoretische Erklärungsrahmen, der Versuch der theoriegeleiteten Erklärung führt zur Weiterentwicklung der Theorie, auf dieser Grundlage wird Praxis dann besser beschreibbar, eine tiefere Einsicht in die Wirkungsweise der Praxis führt dann zu weiterem Bedarf an theoriegeleiteter Erklärung und so fort. Spiralförmig wird immer wieder an der Unterrichtspraxis angesetzt und dabei der Theorierahmen nach und nach entfaltet. Die Forschungsmethode erscheint dabei als eine theoretisch reflektierte und empirisch sensible Anpassung an den Forschungsgegenstand.
Was Marei Fetzers Dissertation von vielen anderen Arbeiten abhebt, ist nicht nur die herausragende Qualität des Endprodukts, sondern vor allem auch der Prozess seiner Entstehung, den die Jury besonders würdigen will. Die Untersuchung gründete sich in ihren Bestrebungen als Grundschullehrerin, ihren Unterricht zu verstehen und zu verbessern. Drei Jahre lang hat sie in ihrer eigenen Klasse versucht, Schreibanlässe im Mathematikunterricht zu schaffen, in der Überzeugung, dass Schreiben und Lernen eine beinahe „natürliche" Einheit bilden. Diese durchaus als experimentell zu bezeichnende Unterrichtspraxis wurde kontinuierlich auf Videoband festgehalten und alles im Mathematikunterricht Geschriebene der Erst- bis Drittklässlern gesammelt. Mit dieser Sammlung von unverfälschten Unterrichtsdaten in der Hand trat Marei Fetzer dann eine Stelle als wissenschaftliche Assistentin an, um nun die unterrichtspraktischen Erfahrungen zu systematisieren, einen theoretischen Standpunkt zu entwickeln, der ihr die nötige Distanz zu den eigenen Erfahrungen verschaffen würde, und von diesem Standpunkt aus ihre Unterrichtdaten mit dem Ziel eines verallgemeinerbaren Erkenntnisgewinns zu durchdringen. Gerade die dabei gewonnene, beeindruckende theoretische Distanz zum eigenen Unterricht ermöglicht ihr die Verallgemeinerbar-

*Elke Söbbeke (links) und Marei Fetzer*

keit ihrer Erkenntnisse: von singuläre Erfahrungen über Schreibanlässe im eigenen Unterricht zu prinzipiellen Einsichten über Wirkungszusammenhänge von Schreiben und Lernen im Mathematikunterricht. Nebenbei hat Marei Fetzer die an ihrem Frankfurter Institut weit entwickelte Interaktionstheorie schulischen Lernens im Mathematikunterricht erweitert und ihr einen wichtigen Impuls in eine neue Richtung verschafft. Ging es bisher vor allem darum, Unterrichtsinteraktion zu beschreiben und evtl. zu rekonstruieren, welche Lernmöglichkeiten daraus für Kinder erwachsen, so ging es ihr im Kern auch um die Nutzbarmachung, das heißt Adaption und Ergänzung, der Theorie für die Konstruktion lernförderlicher Unterrichtsarrangements in einem unterrichtspraktischen Sinne. Damit kommen Teildisziplinen wieder zusammen, die einst als unvereinbar diskutiert wurden. In gewisser Weise startet Marei Fetzers Untersuchung als Handlungsforschung: Eine Lehrerin analysiert die eigene, innovative Unterrichtspraxis. Manche Dissertationen enden an dieser Stelle; nicht jedoch diese. Die hier ausgezeichnete Arbeit ist ein Musterbeispiel dafür, dass elaborierte Theorie und unverzerrte Praxis zusammengebracht werden können. Marei Fetzer hat es in absolut überzeugender Weise geschafft, theoriegeleitet unverzerrte Praxis zu durchdringen; dies stellt einen äußerst hohen Anspruch dar, der hoffentlich beispielgebend ist für die immer wieder gewünschten Weg von Lehrkräften in die Wissenschaft hinein.
Auch hier freuen wir uns daher, eine solche herausragende Leistung mit dem Förderpreis der GDM würdigen zu können.

Die Förderpreis-Jury
Uwe Gellert
Günter Krauthausen
Michael Neubrand
Bernd Wollring
Susanne Prediger

# Vorlesung Arithmetik – welche Inhalte gefallen Lehramtsstudierenden?

Astrid Brinkmann

Im Jahr der Mathematik 2008 werden viele Aktionen und Anstrengungen unternommen, um die „Faszination Mathematik“ möglichst vielen Schüler/innen, aber auch einer breiten Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Es kann sich lohnen, auch mal das Augenmerk auf Lehramtsstudierende mit Mathematik als Fach zu richten. Sie sind es doch, die demnächst als Lehrende das Erlebnis Mathematik für ihre Schüler/innen gestalten. Unterstellt man, dass die Begeisterung eines Lehrenden für sein Fach auf seine Schüler/innen hinüberwirkt, so sollte diese Begeisterung beim zukünftig Lehrenden geweckt bzw., wo bereits vorhanden, erhalten werden.
Hierfür liegt es nahe, zunächst einmal zu fragen, welche Inhalte besuchter fachlicher Lehrveranstaltungen den Lehramtsstudierenden besonders gefallen haben, sie begeistert haben. In der letzten Vorlesungsstunde meiner Veranstaltung Arithmetik (Fachvorlesung für Lehramtsstudierende im 1. Semester, 170 Teilnehmer/innen) habe ich eine entsprechende Frage an meine Studierenden gerichtet und schriftliche Rückmeldungen erbeten. Ihren Antworten haben viele Studierende auch Begründungen hinzugefügt. Im Folgenden sind die genannten Inhalte mit zugehörigen Begründungen (kursiv geschrieben) aufgelistet; die angegebenen Prozentzahlen errechnen sich aus der Zahl der Nennungen bezogen auf die Zahl der Studierenden.

Primzahlen, besonders Sieb des Eratosthenes, Primzahllöcher (95 %)
- ▷ Primfaktorzerlegung, ggT, kgV
- ▷ Bestimmbarkeit von Primzahlen über das Sieb des Erastosthenes
  - · *anschaulich und gut nachvollziehbar*
  - · *strukturiert, leicht nachvollziehbar, übt das Kopfrechnen*
  - · *interessante Anwendbarkeit*
- ▷ Primzahllöcher
  - · *Beweis war sehr nett; Faszination, dass er aufging*
- ▷ Primzahl-Kriterium mit Beweis
  - · *Ich fand es interessant zu erfahren, dass zwar für jede natürliche Zahl* $x$ *gilt:* $(x \mid a$ *oder* $x \mid b \Rightarrow x \mid a \cdot b)$, *aber nur für eine Zahl* $x \in \mathbb{P}$ *die Rückrichtung gilt (und das bei einem so „einfachen“ Beweis).*

Restklassen, Kongruenzen (57 %)
- ▷ Kalenderaufgaben (Errechnung eines bestimmten Tages im Jahr xy; Berechnung der Wochentage, welche Jahre zurück liegen)
  - · *Nähe zur Realität*
  - · *hat den Sinn der Methode verdeutlicht und nebenher einen guten Praxisbezug gegeben*
  - · *war einfach nett!*

Verschiedene Stellenwertsysteme (52 %)
- · *Das damit verbundene Rechnen hat gezeigt, was für Schwierigkeiten beim Einführen von schriftlichem Rechnen für Grundschüler entstehen können. Die sonst automatisierten Rechenschritte müssten durch die Stellenwertsysteme, die man sonst nie benutzt, noch einmal aus anderer Sicht betrachtet werden.*
- · *waren schön, da man wieder zurückgeworfen wurde auf neue Zahlensysteme und sich somit auch in Kinderköpfe hineindenken konnte, die das auch erst lernen müssen*
- · *habe ich schon in der 5. Klasse gern gemacht*

Rechenproben durch Quersummen (45 %)
- · *Faszination, dass es auf diese Weise funktioniert*
- · *hilfreiches Werkzeug*
- · *neu und spannend*

Hasse-Diagramme (Knobelaufgaben, „basteln“) (40 %)
- · *sehr anschaulich und leicht zu erklären*
- · *weil sie so wunderbar anschaulich und schnell aufzufassen sind*
- · *willkommene Abwechselung zum vielen Beweisen*

Zeichnerisch zu lösende Aufgaben (32 %)
- · *weil sie anschaulich und gut nachvollziehbar sind*

- ▷ Euklidischer Algorithmus (Wechselwegnahme)
  - · *denn ich liebe Geometrie!*
  - · *komplizierte Sache gelöst; erstaunlich, wer auf so was kommt*
- ▷ direkte Beweise, die zeichnerisch geführt werden können
  - · *man konnte auf andere Weise denken und ein wenig Eigenkreativität zeigen*

Aussagenlogik (25 %)
- · *vorher nie gemacht*
- · *interessant, dass es aufgeht*
- · *„Familienrelationen", weil sie die Mathematik mal in einen Bereich bringen, über den man noch nie mathematisch reflektiert hat*

Diophantische Gleichungen (21 %)
- · *schnelles und einfaches Lösen von Gleichungen mit zwei Unbekannten*
- · *Möglichkeit, sie auf zwei Arten zu lösen*
- · *praktischer Bezug*

Beweise durch vollständige Induktion (13 %)
- · *man sieht selber, ob man korrekt gearbeitet hat, wenn es am Ende stimmt*

Verknüpfungstafeln (11 %)

ISBN/EAN-Nummern (8 %)
- · *sind faszinierend*

Bereich der natürlichen Zahlen (2 %)
- · *da es nur hier schon so viel zu entdecken gibt*

Viele der Beweise, sobald man sie verstanden hat (2 %)
- · *es freut einen oft, dass das auf so nette Art geht*

Erstaunlich und gleichzeitig erfreulich ist, dass diese Liste der von Studierenden für schön, faszinierend oder interessant empfundenen Inhalte die meisten Inhaltsbereiche der Vorlesung, zumindest in Teilen, enthält. Somit bestätigen diese Rückmeldungen der Studierenden zumindest im Hinblick auf unterstützte oder ausgelöste positive Emotionen eine gewisse Sinnhaftigkeit der Auswahl der Vorlesungsinhalte. Mindestens genauso interessant sind die Begründungen, die von den Studierenden angegeben wurden. Sie geben nicht nur Hinweise auf Aspekte, die mathematische Objekte attraktiv erscheinen lassen, sondern zeigen nebenbei auch einiges, was Studierende bewegt, was bedeutsam für sie ist.

# Das Projekt „Praxispate“ an der Universität Münster – ein Angebot in fachdidaktischen Seminaren

Astrid Brinkmann

In didaktischen Seminaren ist es üblich, in der letzten Sitzung einen kritischen Rückblick vorzunehmen und Anregungen und Veränderungsvorschläge der Studierenden bezüglich zukünftiger Seminargestaltung einzuholen. Ende des Wintersemesters 07/08 äußerten Studierende in meinem Seminar „Realitätsbezogener Mathematikunterricht“, dass sie sich wünschten, Schüler/innen in der Praxis beim Modellieren zu beobachten, zumal sie in ihrer eigenen Schulzeit kaum Erfahrung im Arbeiten mit Modellierungsaufgaben gewinnen konnten.
Dies war Anlass für den Start des Projekts „Praxispate“, über das im Folgenden berichtet wird.

### *Projektidee*

Die „Praxispaten“ sind Mathematik-Fachleiter an Studienseminaren. Unter der Leitung und Begleitung eines Praxispaten bekommen die Teilnehmer/innen eines fachdidaktischen Hochschulseminars die Gelegenheit, Mathematikunterricht – bezogen auf das jeweilige Seminarthema – an Schulen zu beobachten und mitzuerleben. Die entsprechenden Unterrichtsstunden werden von Studienreferendaren vorbereitet und durchgeführt. Die Studierenden können an der Unterrichtsvorbereitung mitwirken und es wird Ihnen insbesondere auch die Möglichkeit geboten, sich an der Unterrichtsnachbesprechung und -analyse zu beteiligen. Die Unterrichtserfahrungen und -beobachtungen aus der Schulpraxis werden dann im fachdidaktischen Seminar noch einmal diskutiert.

### *Durchführung im Sommersemester 2008*

Für das Seminar „Realitätsbezogener Mathematikunterricht“ im Sommersemester 2008 an der Universität Münster hat sich Herr Dr. Wildt als Praxispate zur Verfügung gestellt und zwei seiner Referendare für die Durchführung entsprechender Unterrichtstunden gewinnen können.
Im Seminar ist die Projektidee gut angekommen. Zehn der achtzehn Seminarteilnehmer/innen haben das Projektangebot wahrgenommen, jeweils fünf bei jedem der beiden Referendare. Die Teilnahme am Projektangebot war dabei eine Leistung der Studierenden, die freiwillig und zusätzlich zu den üblichen Anforderungen im Seminar erbracht wurde. (Als kleine Entschädigung für ihren Aufwand durften die betroffenen Studierenden lediglich eine Seminarsitzung versäumen – von diesem Angebot hat aber niemand Gebrauch gemacht.) Der zeitliche Aufwand für die Studierenden war nicht unerheblich; allein zur Planung der Unterrichtsstunden haben sie sich mehrfach mit den Referendaren getroffen.
Bei der Nachbesprechung im Seminar war der Praxispate mit anwesend und konnte somit die Ausführungen der Studierenden aus seiner Sicht und mit seiner Kompetenz ergänzen. Die Studierenden, die das außeruniversitäre Angebot nicht wahrgenommen hatten, wurden über gemachte Beobachtungen und gewonnene Erfahrungen informiert und konnten Fragen hierzu stellen. Ein Ziel der Seminarsitzung war es, dass der Erfahrungsbericht auch diesen Studierenden eine gewisse Zuversicht vermittelt, dass sie demnächst als Lehrende auch anders gestalteten Unterricht, als aus ihrer Schulzeit bekannt, führen können.

### *Rückschau und Bewertung durch die Studierenden*

Die Erfahrungsberichte der Studierenden fingen durchweg mit Aussagen wie „Es war total schön.“, „Es war sehr interessant.“, „Es war total toll.“, „Es hat Spaß gemacht.“ an und die Studierenden waren sich einig, sehr gute Unterrichtsstunden miterlebt zu haben. Besonders hervorgehoben wurden folgende Punkte:

▷ In den Vorbesprechungen mit den Referendaren haben diese Einblicke in das Referendariat gegeben und den Studierenden dargelegt, was sie im Referendariat erwartet. Es wurde darüber diskutiert, was Studierende bewegt und was Referendare bewegt.

- Es war sehr interessant zu erleben, wie eine Unterrichtsstunde konkret durchstrukturiert und umgesetzt werden kann, insbesondere auch, wie Übergänge von einer Unterrichtsphase zur nächsten gestaltet werden können. Die Erfahrung des Unterrichts als durchgeplantes Ganzes war neu; in didaktischen Seminaren an der Hochschule werden eher nur „Fetzen" besprochen.
- Es wurde als sehr gut gefunden, dass die Referendare zu Beginn ihrer Unterrichtsstunden das jeweilige Stundenziel genannt und damit den Schüler/innen transparent gemacht haben. Dies war ein „neuer Eindruck", aus der eigenen Schulzeit war diese Vorgehensweise nicht bekannt.
- Es war interessant zu erleben, wie man Mathematikunterricht anders als in Form eines Frontalunterrichts gestalten kann.
- Im Hinblick auf das Seminarthema „Realitätsbezogener Mathematikunterricht" konnten die Studierenden in beiden Unterrichtsstunden erleben, dass Schüler/innen Sachsituationen sehr unterschiedlich modellieren und „mitnichten so klassisch", wie von den Studierenden, aufgrund ihrer Kenntnisse und Erfahrungen, erwartet.
- Eine für die Studierenden neue methodische Vorgehensweise im Rahmen der Ergebnissicherung im Unterricht konnte beobachtet werden und wurde für gut befunden: In einer Gruppenarbeitsphase wurden die Ergebnisse einer jeden Gruppe durch diese auf Folie festgehalten, dann aber anhand der Folienaufschriften von einer anderen Gruppe diskutiert.
- Eine neue Erfahrung war es auch, dass am Ende der Unterrichtsstunden eine Reflexionsphase stattgefunden hat, in der die Schüler/innen bezogen auf sich selber einschätzen sollten, ob das Stundenziel erreicht wurde.
- In den Nachbesprechungen zu den Unterrichtsstunden zeigte sich, dass die Einschätzungen der Studierenden, der Referendare, des Leiters des Studienseminars und des Fachleiters sehr ähnlich waren.
- Es wurde deutlich, dass das Referendariat „unglaublich viel Stress bedeutet". (Der eine der beiden Referendare war bis kurz vor seiner Unterrichtsstunde unsicher, ob er diese gut geplant hatte.) Es zeigte sich, dass es schwer ist, geeignete Aufgaben zu finden, mit denen man zufrieden ist. „Referendariat ist wesentlich stressiger und anstrengender als Uni."

Insgesamt zeigt sich, dass die Studierenden, die das Angebot „Praxispate" genutzt haben, neben der ursprünglich fokussierten Beobachtung von Schüler/innen beim Arbeiten mit Modellierungsaufgaben, sehr viel mehr bereichernde Beobachtungen und Erfahrungen machen konnten.
Die Seminarteilnehmer/innen, die das Angebot „Praxispate" nicht wahrgenommen hatten, haben für sich die Erfahrungsberichte ihrer Kommilitonen als wertvoll und interessant befunden. Sie konnten zwar „noch nicht unbedingt behaupten, zuversichtlich zu sein, demnächst als Lehrende auch anders gestalteten Unterricht, als aus der eigenen Schulzeit bekannt, führen zu können", äußerten aber, dass sie zumindest mutiger wären, dies zu wagen.
Rückblickend waren sich die Studierenden einig, dass das Projekt „Praxispate" „total sinnvoll" ist und weitergeführt werden sollte.

### *Sicht der Referendare*

Die beteiligten Referendare konnten in den Diskussionen mit den Studierenden erkennen, welche Fortschritte sie nach dem Studium gemacht haben. Manch eine Frage der Studierenden wirkte „naiv" und „unerfahren" auf sie. Hieraus ist für sie das Gefühl erwachsen, gewisse Kompetenzen erlangt zu haben. Insofern ist das Projekt auch für sie gewinnbringend gewesen.

### *Fazit*

Das „Praxispate"-Angebot bietet eine effiziente Möglichkeit der Verzahnung von Theorie und Praxis in der Ausbildung von Lehramtsstudierenden, mit relativ wenig Aufwand für die betroffenen Hochschuldozenten sowie die Fachleiter in der Funktion eines Praxispaten.
Aufgrund der durchweg positiven Bewertung des Projekts aus der Sicht aller Beteiligten ist geplant, das Angebot „Praxispate" demnächst auch auf weitere didaktische Seminare auszuweiten.

# Grußwort der GDM zum „10. Forum für Begabungsförderung in Mathematik“

## TU Braunschweig, 3.–5. April 2008

Horst Hischer

Meine sehr verehrten Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen,
im Namen des Vorstands der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. begrüße ich Sie alle sehr herzlich zu dieser Tagung!
Mein besonderer Gruß gilt den Veranstaltern, nämlich zuförderst Herrn Dr. Meyer als dem Vorsitzenden des Vereins „Begabtenförderung Mathematik e. V.“, ferner Frau Prof. Dr. Fassbender, der Dekanin der gastgebenden Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät der TU Braunschweig, Herrn Prof. Dr. Harald Löwe von der „Mathe-Lok“ der TU Braunschweig und Herrn Prof. Dr. Heinrich vom Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik an der TU Braunschweig.
In der Einladung zu diesem „Forum zur Begabtenförderung in Mathematik“ finden sich zwei Anliegen, die ich wie folgt kennzeichnen möchte:

- ▷ *Tiefenförderung*: Suche nach Wegen und Materialien für einen Ergänzungsunterricht und für die Binnendifferenzierung für das gehobene Drittel der Klassen und für Hochbegabte.
- ▷ *Breitenförderung*: Suche nach Wegen, um mehr Jugendliche für Mathematik zu begeistern.

Das erste Anliegen greift den wichtigen Aspekt der *Begabungsförderung durch Anreicherung* auf, den der Lernpsychologe David Ausubel 1974 in seiner „Psychologie des Unterrichts“ benannt hat:

> „Anreicherung“ als *vertieftes Lernen*, z. B. also durch Binnendifferenzierung im Klassenverband, Ergänzungskurse, Arbeitsgemeinschaften, Wettbewerbe etc.

Als weitere Möglichkeit nennt Ausubel die *Begabungsförderung durch Akzeleration*:

> „Akzeleration“ als *beschleunigtes Lernen*, z. B. durch vorzeitige Einschulung oder Überspringen von Klassen.

Bei der Breitenförderung wird der Begabungsbegriff geöffnet: Jeder Mensch ist in ganz individueller Weise irgendwie „begabt“! Das bedeutet konkret für den Mathematikunterricht, dass stets auch die *Erkennung und Förderung* dieser je individuellen Begabungen im Fokus stehen muss.
Und bei der Tiefenförderung geht es Ihnen nicht nur um die Erkennung und Förderung Hochbegabter – wobei es ja schwierig genug ist, diesen Begriff wissenschaftlich konsensfähig zu definieren! Vielmehr soll auch das „gehobene Drittel der Klassen“ angesprochen werden. Doch wer ist damit gemeint?
Legt man das „leistungsorientierte Begabungsmodell“ zugrunde, so kann man fragen:

- ▷ Geht es um dasjenige Drittel der Klassen, das *bessere Leistungen im Mathematikunterricht zeigt* als die restlichen zwei Drittel?
- ▷ Oder geht es um dasjenige Drittel, das *potenziell zu besseren Leistungen im Mathematikunterricht fähig wäre* als die restlichen zwei Drittel, sofern eine entsprechende Förderung stattgefunden hätte?
  (Besondere Aufmerksamkeit verdienen hier die sog. „Underachiever“, die aus unterschiedlichen Gründen weit unter ihren Möglichkeiten bleiben und häufig sehr schwache Leistungen zeigen.)

Das „kognitive Begabungsmodell“ setzt hingegen „Begabung“ in Beziehung zur *Lernfähigkeit*: Es geht dann um die *Fähigkeit, neue Informationen aufzunehmen und zu verstehen.*
Viel und lange wurde um die Frage gerungen, ob Begabungen angeboren sind oder erworben werden können oder ob eine Kombination beider Aspekte vorliegt; und es ist eine Frage der Definition von „Begabung“, ob und ggf. wie diese direkt messbar ist, oder ob „Begabung“ nur ein Hilfs-Konstrukt ist, das der Begründung konkret vorliegender besonderer beobachteter oder gar ge-

messener Leistungen dient. Unabhängig davon scheint in der Begabungsforschung heute wohl Einigkeit darin zu bestehen, dass für die Entdeckung, Pflege und Weiterentwicklung von individuellen Begabungen eine *systematische Förderung in anregenden Unterrichtssituationen* hilfreich ist.
Und damit sind wir zugleich bei dem Anliegen Ihrer durch hohen Anspruch gekennzeichneten Tagung, in deren Beiträgen u. a. sowohl die *Anreicherung* als auch die *Akzeleration* angesprochen wird.
Derzeit können wir in der Gesellschaft eine starke Tendenz zum Utilitarismus beobachten, d. h. dem Fragen nach der „Nützlichkeit" von Handlungen, Planungen und Projekten. Und das greift auch im Wissenschaftsbetrieb um sich, wenn es etwa um finanzielle Förderung von Forschungsprojekten geht.
Selbst vor der Mathematik und dem Mathematikunterricht macht diese Denkweise nicht halt, wenn beispielsweise die „Nützlichkeit der Zahlentheorie" mit ihrer *Bedeutung für die Kryptografie* „belegt" wird, oder wenn man für den Mathematikunterricht einseitig die sog. „Anwendungsorientierung" propagiert, damit Schülerinnen und Schüler die „Nützlichkeit" der Mathematik erfahren können. Jedoch ist es nicht nötig, im ökonomischen Sinn „nützlich" zu sein, um eine Wertschätzung erfahren zu können, man denke etwa an Dichtung, Kunst und Musik.
Auch die Mathematik ist seit ihren antiken Ursprüngen neben ihrer Anwendbarkeit janusköpfig durch „Nutzlosigkeit" ausgezeichnet – wie die Philosophie (in ihrem klassischen Verständnis) nicht auf Nutzen gerichtet, und das betrifft dann beispielsweise das *Verhältnis zwischen Mensch und Spiel*: So weist der Erziehungswisssenschaftler Horst Ruprecht in diesem Zusammenhang darauf hin, dass der Mensch „das am längsten spielende und am meisten des Spielens bedürftige Wesen" sei, und er leitet hieraus die Forderung ab, dass das Bildungsangebot der Schulen sich in allen Fächern wieder für die „Spiel-Räume des Denkens" öffnen müsse. Ruprecht benutzt dabei den Begriff „Spielraum" im Sinne von „spielerischer Freiraum" als freie Übersetzung des griechischen „scholé" für „Muße" (worauf ja unser heutiges „Schule" sprachlich zurückgeht). Er ruft damit eindringlich zu *mehr Muße in der Schule* auf. Auch für den Mathematikunterricht entstünden demgemäß besondere Aufgaben, und er schreibt:

> Mathematik ist ein grandioses Spiel des Geistes, und als solches müßte sie in den Schulen erscheinen.

Bereits Schiller schrieb 1785 in seinem Werk *Die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen*, Fünfzehnter Brief:

> … der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.

Ganz in diesem Sinne forderte die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. nach dem Erscheinen der ersten PISA-Studie in einer Presseerklärung vom 5. Dezember 2001:

> Interesse ist die Grundlage jeglichen Lernens. Interesse muss sich entwickeln, es bedarf einer Atmosphäre der Muße (im Sinne der ursprünglichen Bedeutung des Wortes „Schule"), in der man den Schülerinnen und Schülern Zeit gibt und ihnen die Möglichkeit bietet, sich auf Themenbereiche einzulassen. Es kommt nicht darauf an, möglichst viele Inhalte im Mathematikunterricht abzuarbeiten, sondern die ausgewählten Inhalte mit genügender Tiefe zu behandeln. Auch Interesse stellt sich nicht von alleine ein, sondern kann nur auf vorhandenem Wissen aufbauen.

Lassen Sie mich schließen mit einem dazu passenden Beispiel: Aus dem „Rechenbuch des Ahmes" im Papyrus Rhind wissen wir, dass die alten Ägypter spätestens seit etwa 1850 v. Chr. Bruchteile eines Ganzen mit Hilfe von Stammbrüchen ausgedrückt haben, also z. B.:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$$

Spielerisches Probieren liefert eine Vielzahl weiterer Stammbruchdarstellungen, z. B.:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}\\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{84}\\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + \frac{1}{35}\\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1260}\\ &= \ldots\end{aligned}$$

In einem durch Muße und Spiel gekennzeichneten Unterricht wird man die ägyptischen Verfahren zur Gewinnung von Stammbruchentwicklungen kennen lernen und einüben lassen, ferner u. a. die Formeln von Fibonacci aus seinem *Liber Abaci* und dem dort bereits beschriebenen „gierigen Algorithmus", und es ergibt sich eine Fülle von Fragen im Sinne „forschenden Vorgehens" wie z. B.:

- ▷ Existiert zu jedem (unechten) Bruch stets eine Stammbruchentwicklung?
- ▷ Wie viele Stammbruchentwicklungen gibt es zu einem gegebenen Bruch? (Endlich viele? Beliebig viele?)
- ▷ Sind Stammbruchentwicklungen stets endlich, oder können sie auch nicht-abbrechend sein?
- ▷ Gibt es evtl. zu jedem Bruch sowohl eine abbrechende als auch eine nicht-abbrechende Stammbruchentwicklung?
- ▷ Gibt es „kürzeste" Entwicklungen?
- ▷ Gibt es „kürzeste" Entwicklungen mit „minimalen" Nennern?

Und man wird die Schülerinnen und Schüler mit einer berühmten Vermutung von Erdős und Straus konfrontieren (bzw. sie im Internet danach suchen lassen):

> Jeder Bruch der Form $\frac{4}{n}$ kann für den Fall $n \geq 5$ stets in eine Summe von höchstens drei verschiedenen Stammbrüchen zerlegt werden!

Die Schülerreaktionen auf die Lehrermitteilung oder die Information im Internet, dass diese (elementar verständliche) Vermutung bis heute nicht bewiesen werden konnte, werden möglicherweise erkennen lassen, wer „mathematisch begabt" ist, und es zeigt sich: Mathematik ist eine lebendige Wissenschaft!

Ich wünsche Ihnen eine sowohl interessante als auch erfolgreiche Tagung!

# Zahlwort und Schriftbild der Zahl nach Martin Schellenberger

Alfred Schellenberger

Der folgende Bericht ist eine gekürzte Fassung des Artikels „Vierzig und Acht – Ein Pionier der Zahlensprechweise (Erinnerungen an meinen Vater)“ von Prof. Dr. Alfred Schellenberger, der in dem u. a. von Prof. Dr. Lothar Gerritzen herausgegebenen Buch „Zwanzigeins – Für die unverdrehte Zahlensprechweise – Fakten, Argumente, Meinungen“ enthalten ist, das im Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer (Bochum) im Jahre 2008 veröffentlicht wurde.

Im Jahre 1953 erschien im VEB Bibliographisches Institut Leipzig ein Heft mit dem Titel „Zahlwort und Schriftbild der Zahl“. Der Autor war Martin Schellenberger, der damals die Position eines Professors für die Methodik des Mathematikunterrichts an der Pädagogischen Hochschule Potsdam bekleidete. Im folgenden wird ein kurzer Bericht über die wichtigsten wissenschaftlichen Ergebnisse dieser Publikation gegeben, die auf Grund der politischen Verhältnisse im damaligen Deutschland nur einem kleinen Kreis bekannt wurden Dabei wird auf seine breit angelegten experimentell-statistischen Studien zur Zahlensprechweise und ihre Konsequenzen für die schulische Praxis eingegangen und auf seine systematischen Studien über die pädagogischen Konsequenzen der invertierten Zahlensprechweise. (Da in den weiteren Ausführungen im Wesentlichen auf die dort dargelegten Resultate Bezug genommen wird, werden alle dieser Quelle wörtlich entnommenen Zitate im folgenden kursiv hervorgehoben.)
Es heißt dort:
*Im Juni 1950 hielt ich in Dresden vor über 400 Lehrern einen Vortrag über die Notwendigkeit der Angleichung der Sprechweise der zweistelligen Zahlen an das Schriftbild der Zahlen. Am Ende einer sehr positiv verlaufenen Diskussion gab ich der Versammlung das Versprechen, das von mir behandelte Problem weiter zu bearbeiten und öffentlich zur Diskussion zu stellen.*
*Umfängliche und vielseitige Untersuchungen und zahlreiche Versuche ließen mich sehr bald die große allgemeine, weit über das Pädagogische hinausgehende Bedeutung erkennen, die das Problem der Angleichung der Sprechweise der Zahlen an das Schriftbild gerade für uns Deutsche besitzt.Es gibt nur noch wenige Kulturvölker, die – wie wir Deutschen – das dekadisch geordnete Schriftbild beim Sprechen durch Inversion zerstören. Die Schwierigkeiten und Nachteile, die sich daraus für uns ergeben, sind sehr erheblich.*
Die ersten Erfahrungen von Martin Schellenberger zu diesem Thema gehen auf seine Zeit als Hilfslehrer zurück. Immer zu Experimenten bereit berichtet er in der Zusammenfassung seiner Studien von Kindern, denen die Erlernung der einfachsten Rechentechniken besonders schwer gefallen sei und bei denen ihm bereits damals die vorübergehende Nutzung einer logisch orientierten Sprechweise zu bemerkenswerten Erfolgen verholfen habe.
Er schreibt:
*Mich selbst hat der Widerspruch zwischen der Schreib- und Sprechweise der Zahlen vor ziemlich genau 40 Jahren* (also vor 1914) *zum ersten Male in meiner Praxis als Hilfslehrer in einer Dorfschule recht intensiv beschäftigt. Ich war mit den Fortschritten im Rechenunterricht meiner Klasse des 2. Schuljahres sehr unzufrieden. Die Beobachtung, dass die Kinder trotz steten Verbots immer wieder zuerst die Einer schrieben und dann die Zehner vorsetzten, veranlasste mich damals, in meiner Klasse die Sprechweise der zweistelligen Zahlen eine Zeitlang dem Schriftbild anzugleichen, um den Kindern das Rückwärtsschreiben abzugewöhnen. Der Versuch glückte natürlich sehr schnell. Zu meiner eigenen großen Überraschung konnte ich aber bei dieser Gelegenheit auch ganz eindeutig feststellen, dass sich die Rechenfertigkeit und auch die Rechenfreudigkeit außerordentlich steigerten, sobald sich die Kinder an die neue, logisch richtige Sprechweise gewöhnt hatten. Bei der nach einiger Zeit wieder benutzten überkommenen Sprechweise stellte sich sofort die alte Unbeholfenheit ein; die Kinder wurden stets unwillig und forderten das Rechnen in der von mir versuchsweise eingeführten Sprechweise.*
*Ein Jahr später verließ ich die Dorfschule. Studium, Krieg und die Arbeit an der höheren Schule ließen das Problem, das mich in meiner Hilfslehrerzeit stark be-*

*schäftigt hatte, in den Hindergrund treten. Von Zeit zu Zeit tauchte es aber immer wieder auf, vor allem, wenn ich in den Oberklassen fast regelmäßig das klägliche Versagen im Kopfrechnen mit zweistelligen Zahlen feststellen musste.*

Die in der Zeit bis Anfang der 50er Jahre durchgeführten systematischen Versuche, über die im folgenden berichtet wird, wurden vorwiegend mit Absolventen der damals noch existierenden Arbeiter- und Bauernfakultät durchgeführt. Es handelt sich dabei um begabte Schüler aus Bildungsschichten, denen nach dem Kriege durch nachträgliches Ablegen des Abiturs die Möglichkeit eines Hochschulstudiums eröffnet werden sollte. Großer Wert wurde auf die Gewinnung von objektiv nachprüfbaren Daten gelegt. Planung, Kontrolle und statistische Auswertung der Ergebnisse sind sorgfältig dokumentiert.

Zur Vorbereitung der veranstalteten Schulversuche wurden die Probanden über zeitlich kontrollierte Diktate von neunstelligen Zahlen, jeweils in der herkömmlichen und modifizierten Sprechweise, mit der für sie neuen Materie vertraut gemacht. Auf eine Dokumentation der erwarteten Häufung von Wiedergabefehlern bei Verwendung der herkömmlichen Sprechweise wurde verzichtet.

Die anschließenden Rechenoperationen umfassen *je zehn Aufgaben, von denen die ersten fünf jeweils leichter waren, während in der zweiten Fünfergruppe stets Aufgaben mit zusätzlicher Schwierigkeit gegeben wurden.*

*Eine solche Zusammenstellung wurde zunächst in der jetzt bei uns üblichen Sprechweise durchgerechnet.*

*Im Anschluß an eine kurze Einführung in die logische Sprechweise der Zahlen und einige Vorübungen wurde dann eine genau so aufgebaute Zahlen- und Aufgabengruppe (natürlich mit anderen Aufgaben) nach der neuen, dem Schriftbild angepassten Sprechweise angesagt und gerechnet.*

*Die Zeitabnahme bei den Rechenaufgaben erfolgte so, daß wir bei Addition, Subtraktion und Multiplikation nach dem Ansagen der ersten Zahl und der geforderten Operation eine kleine Pause machten und die Stoppuhr mit Beginn des Ansagens der zweiten Zahl einschalteten, weil dann erst das Rechnen einsetzt (Beispiel: 34 und … 23). Bei den Divisionsaufgaben sagten wir zuerst den Divisor an und begannen mit dem Stoppen beim Ansagen des Dividenden (Beispiel: Wir teilen durch 4 … 96). Die Teilnehmer hatten das Resultat sofort niederzuschreiben. Nach einer bestimmten Zeit, die wir durch Beobachtung der Teilnehmer fanden, wurde abgeklopft. Wurde das Resultat bis zum Klopfzeichen nicht gefunden, so hatte der Teilnehmer einen Strich zu machen. In den Vorversuchen hatte ich zwischen die Übungen nach alter und die Übungen nach neuer Sprechweise noch eine ganz analog aufgebaute Übung eingeschaltet, bei der die Teilnehmer Aufgaben mit mehrstelligen, aber zweiziffrigen Zahlen (306, 470; 8060, 7004 usw.), die wir ja logisch richtig sprechen, zu rechnen hatten, um eine allmähliche Hinführung zur eigentlichen Versuchsaufgabe herzustellen. Die Teilnehmer merkten selbst sofort, dass sie mit diesen Zahlen viel besser rechnen konnten, als mit den zweistelligen Zahlen. Im Hauptversuch habe ich auf diese zwischengeschaltete Gruppe ebenfalls verzichtet, weil sie nicht unbedingt erforderlich und für das Gesamtergebnis ohne Bedeutung ist.*

Um die Struktur und Signifikanz der anschließenden Versuchsreihen zu verdeutlichen, werden die in der Publikation zusammengefassten Protokolle der Hauptversuche, an denen je 10 Studenten teilnahmen, vollständig wiedergegeben.

| *Rechenoperation Addition* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | | *dreistellige Zahlen* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *Zeit in Sekunden* | 3,3 | 3,3 | 4,3 | 4,3 | 6,9 | 5,5 |
| *Aufgaben (5)* | 43+45 | 33+54 | 46+38 | 27+38 | 326+242 | 523+245 |

| *Rechenoperat. Subtraktion* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *Zeit in Sekunden* | 3,8 | 3,8 | 5 | 5 |
| *Aufgaben (5)* | 68–35 | 74–53 | 74–48 | 93–48 |

| *Rechenoperat. Multiplikation* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | | *dreistellige Zahlen* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *Zeit in Sekunden* | 3,3 | 3,3 | 4,3 | 4,3 | 10,7 | 5,3 |
| *Aufgaben (5)* | 6x13 | 6x14 | 7x32 | 7x64 | 4x216 | 4x218 |

| *Rechenoperat. Division* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *Zeit in Sekunden* | 3,8 | 3,8 | 5,2 | 5,2 |
| *Aufgaben (5)* | 84:7 | 91:7 | 129:3 | 126:3 |

*Das Ergebnis: Bei fünf Aufgaben in jeder Gruppe und zehn Teilnehmern war die Bestleistung in jeder Gruppe 50 richtige Lösungen.*

| *Rechenoperat.* | *Addition* | | | | | | *Subtraktion* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | | *dreistellige Zahlen* | | *leicht* | | *schwer* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *richtige Lösungen* | 43 | 46 | 30 | 41 | 32 | 40 | 39 | 43 | 29 | 44 |
| *Leist.-Steigerung in %** | 7 | | 36,6 | | 25 | | 10,3 | | 51,8 | |

| *Rechenoperat.* | *Multiplikation* | | | | | | *Division* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Schwierigkeitsst.* | *leicht* | | *schwer* | | *dreistellige Zahlen* | | *leicht* | | *schwer* | |
| *Sprechweise* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* | *alt* | *neu* |
| *Richtige Lösungen* | 47 | 50 | 13 | 25 | 29 | 34 | 45 | 45 | 34 | 41 |
| *Leist.-Steigerung in %** | 6,4 | | 92,3 | | 17,2 | | 0 | | 20,6 | |

** Als 100 % gilt stets die Zahl der richtigen Lösungen in der alten Sprechweise.*

Die Auswertung der erzielten Befunde geht davon aus, dass sich die beobachteten Leistungsdifferenzen durch akustische Hemmungen bei der Verarbeitung der neuen Sprechweise, aber auch durch deutliche Ermüdungserscheinungen nach längeren Versuchsreihen eher zu gering darstellen. Im einzelnen wird zusammengefasst:

*Die Leistungssteigerung ist bei den leichten Aufgaben verhältnismäßig gering … Die einfachen Aufgaben werden von der Schule her noch verhältnismäßig gut beherrscht, sodaß eine erhebliche Leistungssteigerung ausbleibt.*

*Die Leistungssteigerung ist bei den schwereren Aufgaben sehr beträchtlich.*

Wenn in der Addition eine 20%ige durchschnittliche Zeitverkürzung gleichzeitig noch eine 25%ige Leistungssteigerung bringt und in der Multiplikation eine über 50%ige Zeitverkürzung mit einer 17%igen Leistungssteigerung verbunden ist, so muß darin eine geradezu drastische Illustration für die am Eingang der Arbeit aufgestellte Behauptung erblickt werden: Unsere Rechenfähigkeit ist viel größer, als es nach unserer Rechenfertigkeit scheinen will.

*Im Anschluss an die Schulexperimente werden die pädagogisch-methodischen Konsequenzen diskutiert, die der akustische Zwiespalt beim Erwerb der Zahlenbilder und -vorstellungen, und seine Umsetzung in die schriftliche Dimension bewirkt.*

*Die ersten Zahlenbilder, die das Kind erwirbt, und damit die ersten Zahlenvorstellungen, Zahlen- und Größenbegriffe werden an Hand der Anschauungs- und Übungsmittel des Elementarunterrichts visuell und akustisch gewonnen …*

*Das akustisch erworbene Zahlenbild und die aus ihm resultierende Zahlenvorstellung haben sich bereits sehr fest eingeprägt, wenn der Lehrer mit dem Schreiben der zweistelligen Zahlen unter Verwendung der Ziffern beginnt.*

*In diesem Augenblick erhält die bisherige akustische Zahlenvorstellung im Kinde einen sehr empfindlichen Stoß. Das Kind war bis jetzt im Schreibunterricht daran gewöhnt worden, von links nach rechts in der Folge der Buchstaben zu schreiben. Auf einmal fordern wir von ihm, dass es das Symbol des zuerst gehörten Wortes an die zweite Stelle rücken und das Schlusswort zuerst schreiben soll. Das Kind, das noch nichts von der Notwendigkeit ahnt, aus der heraus wir so verfahren, fängt diesen Stoß auf, indem es die Zahl entsprechend dem gehörten Wort, also von rechts nach links schreibt.*

*Sicher ist, und damit fassen wir das Ergebnis der Zahlenbetrachtung zusammen: die beiden Zahlenvorstellungen für die gleiche Zahl, die wir unausgesetzt benützen, wirken durch ihre gegensätzliche Gerichtetheit verwirrend und störend aufeinander ein, beanspruchen die kindliche und auch unsere Aufmerksamkeit sehr stark, gestatten keine Entwicklung und Schulung eines dauerhaften und sicheren Zahlengedächtnisses und hemmen dadurch … in bedenklichster Weise alle Operationen, die wir im Schulrechnen, aber auch später in unserem gesamten Leben mit den Zahlen vornehmen und durchführen wollen.*

# wunderbar berechenbar

## Die Welt des Würzburger Mathematikers Kaspar Schott, 1608–1666

Hans-Georg Weigand

Zu Beginn des Jahres der Mathematik erinnerte die Universität Würzburg mit einer Ausstellung an Kaspar Schott (1608–1666), der von 1655 bis zu seinem Tode als Professor der Mathematischen Wissenschaften in Würzburg wirkte. Die Mathematischen Wissenschaften umfassten damals außer Reiner und Praktischer Mathematik auch ihre Anwendungsgebiete. Dazu gehörten neben Physik, Astronomie, Chronologie und Geographie auch Architekturtheorie und Musiktheorie.

Die Berufung nach Würzburg eröffnete Schott die Möglichkeit, sein immenses mathematisches, naturwissenschaftliches und technisches Wissen seinen wissbegierigen Zeitgenossen zu erschließen. Er verfasste 12 Werke im Umfang von etwa 10 000 Seiten in lateinischer Sprache, die ihn in kurzer Zeit weltweit bekannt machten. Sein besonderes Interesse galt dem, was in Mathematik, Natur und Technik für seine Zeitgenossen wunderbar oder zumindest rätselhaft war, Neugier und zuweilen auch Furcht auslöste. Mit Hilfe der Mathematik wurde bei Schott vieles berechenbar, begründbar und erklärbar und somit verstehbar. Durch ihn wurden Otto von Guerickes Vakuumversuche bekannt; seine Abbildung des berühmten Halbkugelversuchs findet sich noch heute in Lehrbüchern. Schotts wissenschaftlich reifstes Werk ist sein *Cursus mathematicus* (1661), eine umfangreiche Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

Angeregt und gestaltet wurde die vom 16. Januar bis 30. März 2008 von der Universitätsbibliothek organisierte Ausstellung von Hans-Joachim Vollrath, dem es darum ging, die didaktischen Leistungen dieses bedeutenden jesuitischen Wissenschaftlers deutlich zu machen. Unter dem Titel „wunderbar berechenbar“ gab sie einen Einblick in Schotts Leben, seine Weltsicht und sein Werk. Schotts Werke wendeten sich an mathematisch, naturwissenschaftlich und technisch Interessierte. Grundlage der Ausstellung war die vollständige Sammlung seiner häufig eindrucksvoll illustrierten *Bücher* aus dem Bestand der Universitätsbibliothek. Eine Rarität waren die in der Ausstellung gezeigten *technischen Zeichnungen* von Kaspar Schott aus dem Besitz der Universitätsbibliothek. Kaspar Schott war von wissenschaftlichen Instrumenten, Maschinen und Apparaten fasziniert. Er selbst hat eine Rechenmaschine erfunden, mit der man multiplizieren und dividieren konnte. Sie hat als „Schottsches Rechenkästchen“ ihren Platz in der Geschichte der Rechenmaschinen gefunden. Die Ausstellung zeigte *Instrumente*, die von ihm beschrieben oder nach seinen Anweisungen gebaut worden sind. Eine besondere Kostbarkeit war ein originales Rechenkästchen aus dem Arithmeum in Bonn.

Schotts ausführlichen Schilderungen merkt man seine Freude am Experimentieren an. Auf seine Initiativen ging die Einführung von Experimenten in das Studium an der Universität Würzburg zurück. In einem von Hans-Joachim Vollrath entwickelten „Cursus mathematicus“ hatten die Besucher die Möglichkeit, an 14 Stationen in eigenen *Experimenten* Erfahrungen zu Phänomenen zu sammeln, mit denen sich Schott befasste.

In Verbindung mit der Ausstellung wurden Vorträge über Schotts *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (Eberhard Knobloch, Berlin), über die *Kunst des Rechnens* (Karin Richter, Halle) und über *Rechenwerkzeuge* (Erhard Anthes, Ludwigsburg) gehalten.

Die Ausstellung war sowohl von Einzelpersonen als auch von Schulklassen gut besucht. Gefördert wurde sie von der Otto-Volk-Stiftung in Würzburg.

Über Kaspar Schott und sein Werk berichtet der reich bebilderte Beiband zur Ausstellung:

Hans-Joachim Vollrath (Hrsg.), *wunderbar berechenbar – Die Welt des Würzburger Mathematikers Kaspar Schott (1608–1666)*. Würzburg (Echter Verlag) 2007, 140 S., ISBN 978-3-429-02961-6, 14,80 EUR.

Im Internet findet man Informationen über Kaspar Schott unter http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/schott/ .

# Das Projekt ‚Mathe-Meister'

## Ziele, Inhalte und Aufgaben

Martin Stein

Seit geraumer Zeit beklagen Handwerkskammern sowie Industrie- und Handelskammern, dass viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer von Meisterlehrgängen bei Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der elementaren Schulmathematik aufweisen, obwohl mathematische Grundkenntnisse eine unverzichtbare Grundlage in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind.
Dabei ist zunächst für alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer von Meisterlehrgängen im Handwerk der kaufmännische Bereich verbindlich, in dem unter Anderem Kenntnisse in Prozent- und Zinsrechnung verlangt werden. Darüber hinaus werden in verschiedenen beruflichen Bereichen weitere Kenntnisse benötigt – Elektrotechniker müssen z. B. in der Lage sein, mit Formeln umzugehen, Zimmerleute müssen den Satz des Pythagoras anwenden können.
Im Bereich der Meisterqualifizierung stellt sich aber nun das Problem, dass gerade Personen mit mathematischen Defiziten ihre Fähigkeiten oft falsch einschätzen und die Defizite nicht erkennen. Werden Defizite gesehen, wird oft nicht verstanden, wie stark fehlendes mathematisches Wissen den Erfolg in den Meisterqualifizierungslehrgängen und das Fortkommen im Beruf behindern kann. Die durchaus zahlreich vorhandenen Fortbildungsangebote im mathematischen Bereich erreichen deshalb gerade diejenige Zielgruppe *nicht*, für die sie vornehmlich entwickelt wurden.
Das Projekt Mathe-Meister soll daher den zukünftigen Teilnehmerinnen und Teilnehmern von Meisterlehrgängen mittels eines webbasierten Angebots sowie einer Offline-Version des Programms helfen,

- die eigenen mathematischen Fähigkeiten mit Bezug auf das eigene Berufsprofil abschätzen zu können sowie
- Defizite im Bereich der Mathematik mittels geeigneter Tests selbst zu erkennen und
- den negativen Einfluss dieser Defizite auf den Erfolg während der Meisterqualifizierung und im späteren Berufsleben vor Augen zu führen.

Das Projekt beschränkt sich aber nicht nur auf eine Defizitanalyse. Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit Wissens- und Kompetenzlücken erhalten vielmehr

- erste Informationen und Hilfestellungen zur richtigen Lösung der gestellten Aufgaben und
- Hinweise auf für sie jeweils relevante Fortbildungsmaterialien (z. B. Kurse auf CD-ROM) und Bildungsangebote (z. B. Kurse in den Zentren der Kammern).

Das Projekt wird mit Förderung des Bundesministeriums für Bildung und Forschung in Höhe von 418 000 EUR bis Ende 2010 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster im Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik durchgeführt.
Im Bereich der Meisterlehrgänge bringen die Handwerkskammern Hamburg, Münster und Düsseldorf, die Industrie- und Handelskammern Stuttgart und Passau sowie die Zentralstelle für Weiterbildung im Handwerk ihre Fachkompetenz ein.

# Der Mathekoffer

Andreas Büchter, Hans-Jürgen Elschenbroich und Hans-Wolfgang Henn

Was hat Mathematik mit Zahnpasta zu tun oder mit einem hüpfenden Ball? Und wie gehören Mathematik und Magie zusammen? Der Mathekoffer liefert Antworten auf diese und viele andere spannende Fragen. Die umfangreiche Materialsammlung ermöglicht Schülerinnen und Schülern der Klassen 5 bis 10, mathematische Zusammenhänge aktiv zu erforschen und so die Bedeutung der Mathematik für den Alltag zu entdecken.
Der Mathekoffer entstand nach einer Idee von Hans-Jürgen Elschenbroich vom *Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* (MNU) und wird von den Verlagen Erhard Friedrich und Ernst Klett produziert und vertrieben. Das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) unterstützt den Mathekoffer ebenso wie die Deutsche Telekom Stiftung, die ermöglichte, dass die Schulen den Koffer im Jahr der Mathematik bundesweit zu einem besonders günstigen Preis erwerben können. Verantwortlich für Inhalt und Konzeption des Koffers sind Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn von der Technischen Universität Dortmund (Fakultät für Mathematik, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts – IEEM).
Pro Mathekoffer gibt es vier Themenboxen: Es geht um Zahlen, Terme, Gleichungen, um räumliches Denken und ebene Figur, Zufall und Wahrscheinlichkeit sowie funktionale Zusammenhänge. Holzquader, Spiegel und Rauten helfen, geometrische Vorstellungen aufzubauen, Experimente mit dem Würfel geben eine Antwort auf die Frage, warum die „6“ manchmal so lange auf sich warten lässt. Hüpfende Bälle und eine Feder zeigen, was man mit Funktionen anfangen kann. Neben den Materialsammlungen gibt es zu jedem Thema eine Aufgabenkartei und einen Lehrerkommentar. Darüber hinaus hält der Mathekoffer unter der Überschrift „Messen, Schätzen, Überschlagen“ Arbeitsmaterial mit herausfordernden Fragen bereit, bei denen es immer wieder um Längen, Zeiten oder Gewichte geht. Beim „Zaubern, Spielen, Knobeln“ geht es um optische Täuschungen, Geheimcodes und Zahlentricks. Die Materialien zu den einzelnen Themen sind praktisch verpackt, so dass der Koffer gleichzeitig in mehreren Klassen zu verschiedenen Lerngebieten eingesetzt werden kann.
Ein Prototyp des Mathekoffers wurde am 19. Februar 2008 auf der *didacta* in Stuttgart von der Bundesbildungsministerin, Frau Dr. Annette Schavan, und dem Vorsitzenden der Telekom-Stiftung, Herrn Dr. Klaus Kinkel, vorgestellt.
Am 21. Februar 2008 konnte sich der Mathekoffer zum ersten Mal bewähren: An diesem Tag fand an der Technischen Universität Dortmund die „Mathinee: Mathematik entdecken“ statt, eine der vielen Veranstaltungen des IEEM zum Jahr der Mathematik. 600 Schülerinnen und Schüler konnten dort in 30 Arbeitsgruppen Mathematik mithilfe der vielfältigen Materialien und Anregungen aus dem Mathekoffer auf eigenen Wegen entdecken.
Während der Eröffnungsveranstaltung der MNU-




Tagung in Kaiserslautern am 17.3.08 wurde der fertige Mathekoffer vorgestellt und wird seitdem ausgeliefert.
Durch die hervorragende Unterstützung durch die Deutsche Telekom Stiftung kann jeder Schule, die einen Mathekoffer erwirbt, eine für die Schule kostenlose, vierstündige Fortbildung an der jeweiligen Schule angeboten werden.

Weitere Informationen finden sich z. B. auf den Webseiten www.mathekoffer.de und www.mathekoffer.mnu.de.

Die Bildrechte der ersten fünf Abbildungen liegen bei der Deutschen Telekom Stiftung, bei der wir uns für die Abdruckrechte bedanken. Für das letzte Bild liegen die Rechte bei Dr. C. Thyssen, MNU.

# Berichte über Veranstaltungen des IEEM zum Jahr der Mathematik

Ulrich Schwätzer

*Erfolgreiche Auftaktveranstaltung*

Bereits am 12. 1. 2008 wurde auch in Dortmund das Jahr der Mathematik mit einer Auftaktveranstaltung begonnen. Unter dem Motto „Kinder rechnen anders" versammelten sich über 300 interessierte Erwachsene in der Rathaushalle der Stadt Dortmund. Anhand zahlreicher Beispiele stellte Prof. Dr. Christoph Selter vom Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) den Zuhörern die mathematische Denkweise der Kinder vor, mit der sich sein Projekt „Kinder rechnen anders" (KIRA) beschäftigt. Ziel der Veranstaltung war es deutlich zu machen, dass Kinder mathematische Denkansätze entwickeln, die von Erwachsenen oft nicht auf Anhieb nachvollzogen werden können. Anschließend wurde die interessierte Öffentlichkeit über die weiteren 13 Veranstaltungen des IEEM im Jahr der Mathematik informiert.

*Mathinee für Schülerinnen und Schüler der Klassen 6 und 7*

Am 21. 2. 2008 fand die erste Großveranstaltung an der TU Dortmund zum Jahr der Mathematik statt. Unter dem Motto „Mathematik entdecken" versammelten sich über 600 Sechst- und Siebtklässler und reisten mit Jan Müller (IEEM und Rivius-Gymnasium Attendorn) durch die Dimensionen des Würfels. In seinem Vortrag wurde den Schülerinnen und Schülern nahe gebracht, wie man Würfel in allen möglichen Dimensionen darstellen und zeichnen kann. Dass dies Ansichtssache ist, konnten die Schüler schon am dreidimensionalen Würfel schnell erkennen. Dann gab Jan Müller viele Beispiele, anhand derer man viele Würfeleigenschaften und das wichtige mathematische Prinzip „Analogie" kennenlernen konnte. Anschließend hatten die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit, sich aktiv selbst entdeckend mit Mathematik zu beschäftigen. Inhalte des Mathekoffers, der am gleichen Tag der Presse vorgestellt wurde, wurden in 30 verschiedenen Workshops den Sechst- und Siebtklässlern präsentiert. Der Mathekoffer entstand nach einer Idee des Fördervereins Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht (MNU) und wird von den Verlagen Erhard Friedrich und Ernst Klett produziert und vertrieben. Das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) unterstützt den Mathekoffer ebenso wie die Deutsche Telekom Stiftung, die dafür sorgt, dass die Schulen den Koffer im Jahr der Mathematik bundesweit zu einem besonders günstigen Preis erwerben können. Verantwortlich für Inhalt und Konzeption des Koffers sind Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn und Andreas Büchter (IEEM). Sie haben pro Mathekoffer vier Themenboxen zusammengestellt: Es geht um Zahlen, Terme, Gleichungen, um räumliches Denken und ebene Figuren, Zufall und Wahrscheinlichkeit sowie funktionale Zusammenhänge. Holzquader, Spiegel und Rauten helfen geometrische Vorstellungen aufzubauen, Experimente mit dem Würfel geben eine Antwort auf die Frage, warum die „6" manchmal so lange auf sich warten lässt. Hüpfende Bälle und eine Feder zeigen, was man mit Funktionen anfangen kann.

*Lehrerfortbildung „Mathematikunterricht neu entdecken"*

Am 5. 3. 2008 richtete das IEEM eine bundesweite Lehrerfortbildung aus, an der auch Frau Ministerin Sommer (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen) teilnahm. Über 1000 Lehrerinnen und Lehrer fanden den Weg zur TU Dortmund und informierten sich über innovative Ansätze für den modernen kompetenzorientierten Mathematikunterricht.

Eröffnet wurde der Kongress mit zwei Hauptvorträgen: Prof. Dr. Stephan Hußmann (IEEM) sprach zum Thema „Wofür brauche ich das alles im Leben eigentlich? – Mathematik sinnstiftend unterrichten", und wurde von Klaus Kombrink (Gymnasium Köln-Nippes) mit dem Thema „Wir rechnen nicht mehr, wir denken nur noch. Mathematiklernen mit moderner Werkzeugsoftware" ergänzt.
Expertinnen und Experten aus Schule und Hochschule boten dann eine Vielzahl von Vorträgen und Workshops an und standen für einen konstruktiven Erfahrungsaustausch zur Verfügung. Neben einem Schwerpunkt im Bereich Diagnostik und Förderung wurde auch der Bereich Modellieren sowie die Arbeit mit Computeralgebra-Systemen (CAS) und dynamischer Geometriesoftware (DGS) thematisiert, ergänzt durch Workshops auf methodischer Ebene, die sich mit der Öffnung und Flexibilisierung des Mathematikunterrichtes beschäftigten.

*Mathinee für Schülerinnen und Schüler der Klassen 3 und 4*

Mit der Veranstaltung „Mathe ist cool" fand am 2. 4. 2008 auch für die Grundschulen eine Großveranstaltung im Rahmen des Jahres der Mathematik statt. Eingeladen teilzunehmen waren 3. und 4. Klassen aus den Schulen der Region, die mit dem IEEM in Kontakt stehen und sich seit längerem rege an einem Austausch zwischen Theorie und Praxis beteiligen. Mehr als 260 Grundschülerinnen und Grundschüler erschienen in Begleitung ihrer Klassenlehrinnen und -lehrern. Eröffnet wurde das Mathinee mit einem Vortrag von Prof. Dr. Andrea Peter-Koop der Uni Oldenburg zum Thema: „Streng geheim! – Zahlen als Geheimnisträger", in dem es um Zahlencodes ging, die zum Verschlüsseln von geheimen Botschaften benutzt werden. Die Kinder konnten aktiv daran teilhaben, denn sie wurden während des Vortrags motiviert, selbst einen geheimen Text zu entschlüsseln. Sie konnten sogar einen Preis dabei gewinnen.
Anschließend waren die Kinder dann selbst Forscher: In verschiedenen Workshops konnten sie sich an interessanten und herausfordernden Phänomenen der Mathematik selbst versuchen. Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des IEEM boten in Workshops zu spannenden mathematischen Themen altersgerechte Aktivitäten an. Im Bereich Geometrie ging es z. B. darum, mit Winkelplättchen (so wie man sie vom Spiel „Tetris" her kennt) Flächen auszulegen, ohne dass Lücken entstehen. Je nach der Form der Fläche und der Anzahl der vorgegebenen Plättchen stellt dieses einen herausfordernde Anforderung für das geometrische Denken – „Kopfgeometrie" – dar. In einem arithmetisch orientierten Workshop hieß das Motto „Wer trifft die 50?". Dazu wählten die Kinder eine Start- und eine Additionszahl. Zu der Startzahl wird die Additionszahl hinzugerechnet, die neue Zahl wird notiert. Zu dieser Zahl wird wieder die Additionszahl hinzugerechnet und die nächste Zahl wird notiert, so lange, bis 5 Zahlen aufgeschrieben sind. Dann wird die Summe der 5 Zahlen berechnet (Zielzahl). Diese Zielzahl soll genau 50 sein! Die Kinder probierten durch geschickte Variation der Start- und Additionszahl näher an die 50 zu kommen. Wenn sie diese einmal getroffen hatten, sollten sie alle Möglichkeiten finden, die 50 zu treffen. Die Ergebnisse wurden analysiert: Sortiert und untereinander geheftet fanden sich erstaunliche Parallelen und Ähnlichkeiten in den Lösungen, die zur 50 führten.
Mit der Preisverleihung und der Verabschiedung um 11.30 Uhr endete für die Kinder dann ein Vormittag, der ihnen sichtlich Spaß und Freude an der Mathematik und an der Forschertätigkeit gegeben hat und ihnen vielleicht Mut gemacht hat, sich weiter und intensiver mit dem Fach und seinen Herausforderungen zu beschäftigen.

*Basisfertigkeiten sichern – Problemlösekompetenz entwickeln.*

Am 17. 5. 2008 findet ab 10.00 Uhr an der TU Dortmund eine NRW-weite Fortbildungsveranstaltung für ca. 200 Multiplikatoren zum neuen Lehrplan Mathematik des Landes NRW statt. Nach Grußworten des Rektors der TU Dortmund, Prof. Dr. Eberhard Becker und des Ministerialdirigentens Manfred Walhorn, Ministerium für Schule und Weiterbildung, werden 3 interessante Vorträge den Geist des neuen Lehrplans erläutern: Prof. Dr. Günter Krauthausen, Uni Hamburg, referiert über „Ziele und Leitideen zeitgemäßen Mathematikunterrichts", anschließend informiert Schulamtsdirektor Reinhard Forthaus (Unna) über den neuen Lehrplan Mathematik Grundschule, seine Struktur, über Bewährtes, über Neuigkeiten. Lilo Verboom (Studienseminar Duisburg) wird dann zum Thema „Mathematik erleben" sprechen und Unterricht im Geiste des neuen Lehrplans vorstellen. Abschließend wird es noch Informationen zur Implementierung des Lehrplans geben.

*Was hat eigentlich Fußball mit Mathematik zu tun?*

Am 5. 6. 2008 organisiert das IEEM einen Vortrag im Rahmen des Jahres der Mathematik (das ja auch das Jahr der Fußball-Europameisterschaft ist) für die interessierte Öffentlichkeit. Prof. Dr. Hans-Georg Weigand, Uni Würzburg (Bundesvorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) spricht zu dem Thema: „Was hat eigentlich Fußball mit Mathematik zu tun?“ Passend zum zwei Tage späteren EM-Auftakt geht es um die fußballmathematischen Fragen: Wie kommt die Mathematik in den Fußball? Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es bei einem Fußballspiel? Warum haben (manche) Tornetze Sechseckstruktur? Wie zeichnet der Platzwart am besten und schnellsten die Linien auf das Spielfeld? Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Fußballschuh zu schnüren? Warum besteht ein Fußball (meist) aus Fünf- und aus Sechsecken? Was hat der neue Fußball der Europameisterschaft, der „Europass“, mit einem Würfel zu tun? Und last, but not least: Wer wird Europameister? Und wie kann man das berechnen? Diese Veranstaltung wird sicherlich breite Resonanz in der interessierten Öffentlichkeit finden.

*mathe für alle & Symposium mathe 2000*

Mit den bundesweiten Fortbildungsveranstaltungen „mathe für alle“ am 23.08.2008 für ca. 800 Lehrerinnen und Lehrer der Sek.I/II und dem 18. Symposium ’mathe 2000’ am 20.09.2008 für ca. 500 Lehrerinnen und Lehrer gliedern sich zwei weitere – inhaltlich bereits erprobte und seit Jahren bewährte – Großveranstaltungen in die Aktivitäten des IEEM zum Jahr der Mathematik ein. Neben interessanten Hauptvorträgen werden es auch hier die intensive Arbeit und der Erfahrungsaustausch in zahlreichen Workshops sein, die Lehrerinnen und Lehrern neue Impulse für die Qualitätsentwicklung im Mathematikunterricht geben können.

*Vorträge und Abschlussveranstaltung*

Neben einer Selbstvorstellung im Rahmen des 7. Dortmunder Wissenschaftstags am 12. 11. 2008 werden im Rahmen der Aktivitäten des IEEM einige weitere Vorträgen für Eltern, (Hochschul-) Öffentlichkeit und Lehrerende stattfinden. Am 28. 1. 2008 sprach bereits Prof. Dr. Peter Gritzmann (TU München) „Über den coolen Handlungsreisenden: Mathematische Optimierung zur Reduktion der Abwärme integrierter Schaltungen.“ Prof. Dr. Timo Leuders, PH Freiburg wird am 18. 10. 2008 das Thema „Wenn Kinder und Eltern Mathe machen …“ beleuchten. Zu guter letzt wird Gero von Randow (Hamburg, Chefredakteur Zeit-online, Mitherausgeber ZeitWissen) am 23. 10. 2008 zum Thema „Mathematik als Utopie“ die Mathematik aus philosophischer Sicht betrachten.
Den Abschluss der Aktivitäten des IEEM zum Jahr der Mathematik bildet die „Night of the Profs“ am 3. 12. 2008. Unter dem Motto „Vier unterhaltsame Stücke Mathematik(unterricht) in 60 Minuten“ bieten die vier Professoren des IEEM Episoden ihrer Forschertätigkeit feil: Prof. Dr. Wolfgang Henn spricht über den Regenbogen – und zum Mythos von Mathematik. Prof. Dr. Stephan Hußmann fragt „Wie schnell war Tom?“ und ob man Mathematik selbst entdecken kann. Prof. Dr. Susanne Prediger schließt sich an mit „Toll, hier kann ich einfach rechnen, ohne zu denken“. Zum Schluss fragt sich Prof. Dr. Christoph Selter: „Wie alt ist der Kapitän?“. Anschließend wird das Jahr der Mathematik unter dem Motto „366 Tage in 15 Minuten“ mit einem Rückblick zumindest aus Dortmunder Sicht beendet.

*Kooperationspartner*

Das reichhaltige Programm des IEEM zum Jahr der Mathematik wäre ohne die vielen Kooperationspartner nicht zu schultern. Neben der Stadt Dortmund, die mit Dr. Gerhard Langemeyer, Oberbürgermeister der Stadt Dortmund, den Schirmherr für die Veranstaltungsreihe stellt, ist vor allem die Deutsche Telekom Stiftung als Hauptsponsor zu nennen. Als weitere Sponsoren unterstützen die Aktivitäten der Friedrich Verlag, der Klett-Verlag, der Kallmeyer Verlag, der Cornelsen Verlag, Texas Instruments, die Mercator Stiftung und last but not least das Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW.

Auf der Website des IEEM findet sich eine eigene Unterseite, auf der alle Veranstaltungen des IEEM anlässlich des Jahres der Mathematik 2008 mit zusätzlichen Informationen, Anmeldehinweisen und Programmdetails aufgeführt sind:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/

# Vorträge zum Jahr der Mathematik

## Institut für Mathematik der Universität Würzburg

*Die Vorträge richten sich an alle mathematisch Interessierte.* Zeit: 18.00 Uhr, Ort: Raum 127 in der Neuen Universität am Sanderring 2

12. 9. 2008
Prof. Martin Skutella, TU Berlin
*Wenn's mal wieder schnell gehen muss: Kombinatorische Optimierung*
Von der Öffentlichkeit weitgehend unbemerkt hat sich die Kombinatorische Optimierung zu einem festen Bestandteil unseres täglichen Lebens entwickelt. Jedes mal, wenn wir unser Mobiltelefon nutzen, den Zugfahrplan studieren oder eine über das Internet bestellte Lieferung erhalten, greifen wir unbewusst auf diverse Services zurück, die alle in dieser Form ohne die schnelle Lösung kombinatorischer Optimierungsprobleme nicht denkbar wären. Der Vortrag gewährt einen anschaulichen Einblick in dieses relativ junge, überaus wichtige Gebiet der Mathematik.

26. 9. 2008
Prof. Peter Müller, Würzburg
*Algebra ist überall*
Geldkarten, Online-Banking, Mobilfunk, CD-Spieler – Beispiele für moderne Geräte und Anwendungen, die ohne Algebra nicht möglich wären. Die Algebra, entstanden aus dem Lösen von Gleichungen, hat über Jahrhunderte tiefe und abstrakte Konzepte und Theorien entwickelt. Zwei heute unverzichtbare praktische Anwendungen sind die Verschlüsselungstheorie und fehlerkorrigierende Codes. Im Vortrag soll an einfachen Beispielen gezeigt werden, wo Algebra in der Mathematik, Technik und Natur vorkommt.

5. 11. 2008
Prof. Christof Schuette, FU Berlin
*Mathematik für das Leben*
Uhrzeit und Ort wird noch bekannt gegeben. Die Proteine in unserem Körper arbeiten wie kleine Maschinen, die spezifische biologische Funktionen erfüllen. Manche Fehlfunktionen bewirken Krankheiten, darunter so gefährliche wie Krebs. Mathematik hilft, derartige Fehlfunktionen zu verstehen und Medikamente dagegen zu entwickeln.

5. 12. 2008
Priv-Doz. Nils Rosehr, Würzburg
*Geheimnisse hüten und lüften mit Mathematik*
Von einer Geheimlehre, die vorwiegend Diplomaten und Militärs geläufig war, hat sich die Kryptologie in eine Technik verwandelt, die uns alle umgibt. Kein Telefonat, keine Banktransaktion und kein Computer kommt heute ohne diese Wissenschaft der Verschlüsselungsmethoden aus. In diesem Vortrag möchte ich einen Einblick geben, welche zentrale Rolle die Mathematik in dieser faszinierenden Welt der Geheimbotschaften spielt.

Aktuelle Informationen unter
www.mathematik.uni-wuerzburg.de oder
www.dmuw.de

# Mathemagische Momente

## Momente fruchtbaren Mathematiklehrens und -lernens
## Wissenschaftszentrum Bonn, 5. Dezember 2008

In den *Mathemagischen Momenten* sind fruchtbare Momente des Mathematiklehrens und -lernens versammelt und als erlebte Erfahrung dargestellt und reflektiert. Die mathemagischen Momente repräsentieren Kernideen des Mathematikunterrichts. Zwanzig namhafte Autorinnen und Autoren haben hier zentrale didaktische Kernideen zusammengetragen und so aufbereitet, dass sie in Fortbildungen und im eigenen Unterricht eingesetzt werden können.
Auf diese Weise möchte die GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) den Brückenschlag zwischen didaktischer Forschung und Unterrichtspraxis herausstellen, der ein zentrales und wichtiges Anliegen ihrer Mitglieder ist.
Auf einem bundesweiten Kongress am 5. 12. 2008, getragen durch die *Deutsche Telekom Stiftung*, stellen die Autorinnen und Autoren ihre „Mathe-Magischen Momente“ den Multiplikatorinnen und Multiplikatoren der Bundesländer und der interessierten Öffentlichkeit vor. Es ist das Ziel dieser Veranstaltung, dass die Idee der Mathemagischen Momente eine größere Verbreitung erfährt.
An diesem Tag werden den Teilnehmern die „mathemagischen Momente“ in Vorträgen und Workshops vorgestellt. Dabei steht insbesondere die weitere und zukünftige Verwendung in Fortbildungen im Zentrum. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer erhalten ein Exemplar des Buches „Mathemagische Momente“.

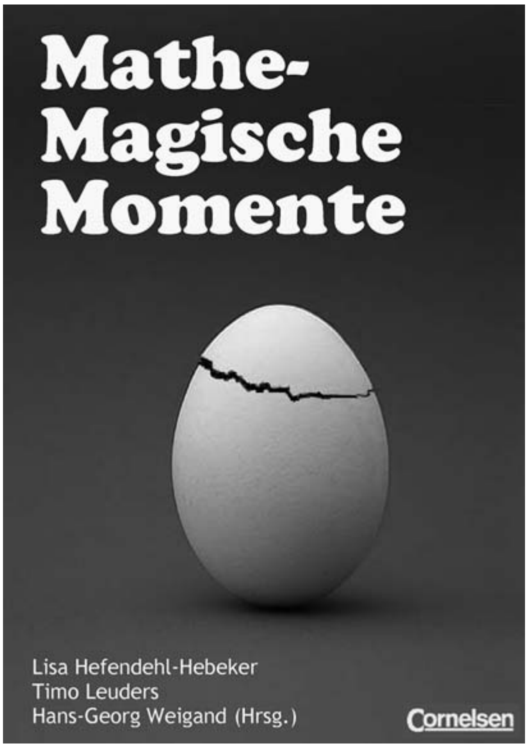
Die Fortbildungsinstitutionen aller Bundesländer und Regionen sind herzlich gebeten, die Personen, die sich mit der Konzeption und Durchführung von Mathematikfortbildungen beschäftigen, zu diesem Kongress zu entsenden.
Die Anmeldung zum Kongress wird erbeten bis zum 1. 11. 2008 bei (dort erhalten Sie auch weitere Informationen zum Kongress):

Pädagogische Hochschule Freiburg
Gerald Schick
Kunzenweg 21
79117 Freiburg
Gerald.Schick@ph-freiburg.de

Die Teilnahme und Verpflegung vor Ort sind kostenlos, die Anreisekosten können leider nicht übernommen werden. Es besteht auch eine Übernachtungsmöglichkeit im Wissenschaftszentrum – bitte bei obiger Adresse anfragen.

# Mathemagische Momente

## Das Buch




Der Band, herausgegeben von L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders und H. G. Weigand, präsentiert 23 Momente fruchtbaren Mathematiklernens. Zu jedem Beitrag finden Sie:

- ▷ Eine oder mehrere konkrete Unterrichtsbeispiele
- ▷ Didaktische Erläuterungen zum Hintergrund und methodische zur Umsetzung
- ▷ Konkrete Umsetzungsvorschläge für eine Verwendung im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen
- ▷ Hinweise zur Weiterarbeit mit Literatur, Internet und mit der beiliegenden DVD

Besonders hervorzuheben ist die dem Buch beiliegende DVD, auf der zu jedem Beitrag umfangreiche Materialien zu finden sind:

- ▷ Videos mit Unterrichtsausschnitten
- ▷ Arbeitsblätter für den Unterricht und für die Fortbildung
- ▷ Zusätzliche Hintergrundinformationen (z. B. themenbezogene Zeitschriftenartikel)
- ▷ Powerpoint-Vorträge zur Weiterverwendung
- ▷ Umsetzungsalternativen

Das Buch versammelt die folgenden mathemagischen Momente:

Bärbel Barzel: Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe!

Bruder, Regina: Problemlösen kann man lernen!

Cohors-Fresenborg, Elmar; Kaune, Christa: Beweisen ist schlüssiges Argumentieren – vor Gericht und in der Mathematik

Gallin, Peter: Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht

Hülswitt, Kerensa Lee: Kinder erfinden Mathematik mit „gleichem Material in großer Menge“

Hußmann, Stephan: Mathematik selbst erfinden

Kaiser, Hansruedi: Rechnen in beruflichen Handlungssituationen – mehr als stures Rechnen

Krauthausen, Günter: Mathematische Entdeckungen mit Zahlenmauern

Leneke, Brigitte: Aufgaben variieren – produktiv Mathematik erfinden

Lengnink, Katja: Alltagsvorstellungen als Grundlage für mathematische Begriffbildung nutzen

Leuders, Timo: Intelligente Übungsaufgaben – selbst gemacht

Lutz-Westphal, Brigitte: Moderne Mathematik erleben und verstehen – auch für die Jüngsten

Maaß, Katja: Mathematische Modelle ermöglichen (umwelt)politische Entscheidungen

Prediger, Susanne: Inhaltliches Denken – von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit

Schwank, Inge: Mathematische Spielwelten zur Förderung funktionalen Denkens

Selter, Christoph: Jedes Kind kann mathematisch forschen

Sjuts, Johann: Mit Mathematik Wirklichkeit schaffen

Stefan, Gudrun: Kinder unterrichten Kinder – wie Fünftklässler zu Lehrern werden.

Weber, Christof: Von individuellen Vorstellungen zur gemeinschaftlichen Wissensbildung

Weigand, Hans-Georg; Anzenhofer, Stefanie; Wörler, Jan: „Und so weiter …“ – viele Facetten von Unendlichkeit erleben

# Mathematik-Quiz

Thomas Jahnke

Für die Potsdamer Nacht der Mathematik haben Frau Kaganova, Herr Kollosche, Herr Brückner, einige Studierende und ich ein Mathematik-Quiz erarbeitet und in der besagten Nacht mit großem Erfolg gespielt.
Angelehnt an die Fernsehquiz-Sendung „Wer wird Millionär" haben die Kandidatinnen und Kandidaten jeweils 15 kurzweilige, allgemeinbildenden Fragen aus und über die Mathematik zu beantworten. Das Spiel kann ebenso in Vertretungsstunden wie zur allgemeinen Unterhaltung eingesetzt werden.

Das Computerprogramm für den Quiz und die Fragen können von der Webseite des Instituts für Mathematik der Universität Potsdam heruntergeladen werden (was auch schon mehrere hundert Male erfolgte):
http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/m/qq
Kritik, weitere Vorschläge und Erfahrungen sind willkommen.

# Notizen

Die Zeitschrift *Stochastik in der Schule* ist jetzt frei online verfügbar!

Der Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts e. V. hat seine referierte Zeitschrift jetzt retrodigitalisiert. Die letzten drei Jahrgänge sind immer nur für die Abonnenten als Printausgabe erhältlich, die restlichen Jahrgänge seit 1979 stehen jetzt vollständig retrodigitalisiert und frei zugänglich im Netz unter http://www.mathematik.uni-kassel.de/stochastik.schule/sisonline/index.htm.

Sie finden dort ca. 500 Artikel zu allen Aspekten des Stochastikunterrichts, mit dem Schwerpunkt auf Schulpraxis.

Unterstützen Sie die OpenAccess Philosophie des Vereins, indem Sie Mitglied unseres Vereins und Abonnent der Zeitschrift werden. Nähere Informationen finden sich auf unserer Homepage.

Prof. Dr. Rolf Biehler
1. Vorsitzender des Vereins Förderung des schulischen Stochastikunterrichts e. V.
Universität Kassel
FB Mathematik
AG Mathematik-Didaktik
Heinrich-Plett-Straße 40
34132 Kassel
biehler@mathematik.uni-kassel.de
stochastik.schule@mathematik.uni-kassel.de

# Zum Jahr der Mathematik 2008

Eberhard Lehmann

*Für die ganze Schule, für den M-Fachbereich, für Kurse und Klassen, für Projekttage …*

Im Jahr der Mathematik biete ich Vorträge oder Workshops zum Thema „Mathematik und Kunst – Kunst mit mathematischen Funktionen" für Schulen an, durch die Schülerinnen und Schüler einen andersartigen und spannenden Zugang zur Mathematik erhalten.

Viele Künstler haben in ihren Werken häufig auch mathematische Objekte verwendet. Es liegt nahe mathematische Konstellationen nachzukonstruieren oder eigene Bilder mit Mathematik zu erstellen. Hierzu sind auch in der Schule verwendete Programme, die oft auch in den Händen der SchülerInnen sind, geeignet. Im Vortrag werden solche Möglichkeiten bis hin zu Animationen gezeigt.

Mit digitalen Fotoapparaten können SchülerInnen Ausschnitte aus ihrer Umwelt aufnehmen und speichern, die auch Objekte mathematischen Inhalts enthalten. Die Suche nach solchen Ausschnitten schärft ihren Blick auf die Umgebung. Im Vortrag werden solche Bilder mathematisch analysiert. So können SchülerInnen und ihre Lehrpersonen selbstgestaltete Zugänge zu Unterrichtsthemen gewinnen.

Die Kosten der Veranstaltung sind abhängig vom Ort und der Art des Vorhabens. Auch andere Themen können angefordert werden – eine Auswahl finden Sie auf meiner Homepage.

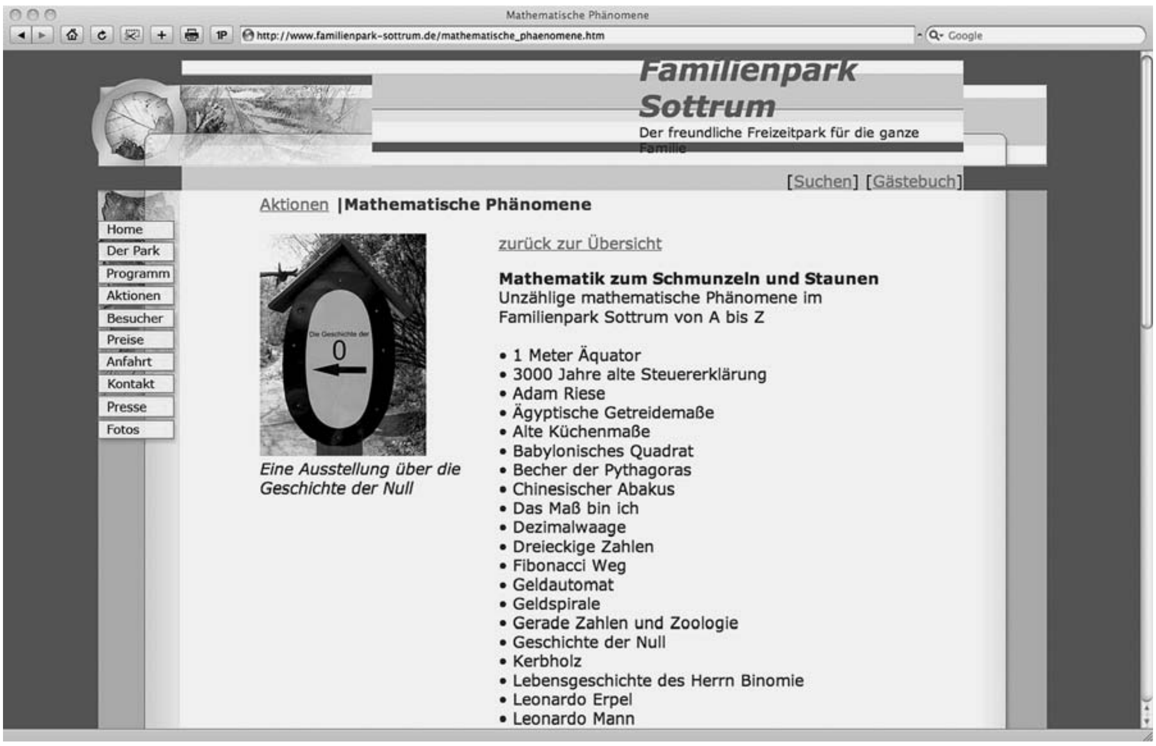
Mathemacher:
Dr. Eberhard Lehmann
Geitnerweg 20c
12209 Berlin
Tel. 030 711 24 20
mirza@snafu.de
www.snafu.de/~mirza

# Familienpark Sottrum

Katharina Speit

Das Mathematikinstitut der Universität Hildesheim möchte im Rahmen des Jahres der Mathematik 2008 den Hildesheimer Bürgern Mathematik näher bringen. Innerhalb dieses Konzeptes konnte eine Zusammenarbeit mit dem Familienpark Sottrum unter der Leitung von Herrn Deicke ermöglicht werden. So entstanden in der Winterpause des Parks mehr als einhundert Ausstellungsstücke zum Schmunzeln und Staunen von Mathematik.
Zum Schmunzeln entdeckt man neben vielem Anderen den „Becher des Phytagoras“, ein Kerbholz als Vorläufer der heutigen Kreditkarten, den $\pi$-Weg mit seiner mathematischen Erklärung oder einen chinesischen Abakus. Außerdem gibt es einen Bereich zur Geschichte der „Null“.
Staunen wird man über die verschiedenen Sonnenuhren, die sogar das Datum anzeigen können, sowie über die verschiedenen Ausstellungsstücke zur Akustik und Optik. Für die kleinen Mathematiker gibt es ein Zahlenland, in dem Zahlen gefühlt, gehört und gesehen werden können. Magische Quadrate, die Fibonacci-Folge und die negativen Zahlen laden zum Ausprobieren ein. Mathematik zum Anfassen.
Die Universität Hildesheim nutzt den Park für Exkursionen, bei denen die Studenten und Studentinnen Mathematik anders erfahren können und Möglichkeiten aufgezeigt bekommen, was mit Schülerinnen und Schülern von Klasse 1 bis zur Sek II alles möglich ist. Der Familienpark als außerschulischer Lernort.

Familienpark-Sottrum
Ziegeleistraße 28
31188 Holle
www.familienpark-sottrum.de



# Arbeitskreis ‚Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik' / Einladung zur Herbsttagung 2008

## Budapest, 17. 3. 2008

Gert Kadunz

Das diesjährige Treffen des Arbeitskreises, das am 17. März 2008 im Rahmen der Bundestagung der GDM in Budapest veranstaltet wurde, war von zwei Tagesordnungspunkten bestimmt. Zum Ersten wurden Wünsche und Vorstellungen zur Verbreitung von relevanten Informationen innerhalb des Arbeitskreises besprochen. Zum Zweiten diente dieses Treffen der Vorbereitung der Herbsttagung 2008. Was die Informationswünsche betrifft, so konzentrierten sich diese vor allem Literatur, welche sich zu Fragen der Semiotik und Linguistik äußern – soweit dies die Mathematikdidaktik betrifft. Es wurde vorgeschlagen, die Internetpräsenz des Arbeitskreises in dieser Hinsicht zu erweitern. Entsprechende Arbeiten werden zu leisten sein.

Die Vorbereitungen für die Herbsttagung schienen zum Zeitpunkt des Treffens in Budapest fortgeschritten zu sein. Es war geplant, in diesem Jahr am Kongress der Deutschen Gesellschaft für Semiotik (DGS) in Stuttgart eine Sektion „Mathematikdidaktik" zu gestalten. In der Zwischenzeit hat sich dies geändert.

Vor wenigen Wochen wurde von Seite der DGS kolportiert – Herbert Gerstberger hat mir die entsprechenden Informationen dankenswerterweise zur Verfügung gestellt –, dass der geplante Kongress in Stuttgart mit großer Wahrscheinlichkeit nicht durchgeführt werden wird. In Folge hatte Kollege Gerstberger den Beirat der DGS gebeten, möglichst rasch eine Entscheidung zu treffen, um im Fall einer definitiven Absage des Kongresses unserem Arbeitskreis die Planung der „regelmäßigen" Herbsttagung zu erleichtern. Dieser Bitte wurde bisher leider nicht entsprochen.

Aufgrund dieser offensichtlichen Unwägbarkeiten, der zeitlichen Nähe der Herbsttagung und um die Kontinuität der Arbeitskreistreffen zu gewährleisten, ist Arbeitskreis aktiv geworden. Es ist kurzfristig gelungen, das wohlbekannte und ebenso geschätzte Quartier in Augsburg (Haus Sankt Benedikt, Stephansplatz 5) für die Zeit von Mittwoch, 8. Oktober, bis Freitag, 10. Oktober 2008, für unsere Herbsttagung zu reservieren. Insofern modifiziere ich meine ursprüngliche Einladung für Stuttgart und lade alle an den Aktivitäten des Arbeitskreises interessierten Kolleginnen und Kollegen zur Teilnahme an der Herbsttagung in Augsburg ein. Die inhaltliche Gestaltung wird in den nächsten Wochen elektronisch zu besprechen sein. Vorschläge sind herzlich willkommen!

*Kontakt*
Gert Kadunz
Institut für Mathematik
Universität Klagenfurt
Universitätsstraße 65–67
9020 Klagenfurt
Österreich
gert.kadunz@uni-klu.ac.at
http://www.uni-klu.ac.at/semiotik

# Arbeitskreis ‚Mathematik und Bildung'

## Budapest, 17. 3. 2008

Günter Graumann

Der Arbeitkreis „Mathematik und Bildung" beschäftigt sich seit fast zwanzig Jahren schwerpunktmäßig mit den Problemen der Klärung und Verwirklichung von Allgemeinbildung und allgemeinen Lernzielen im Mathematikunterricht. In der Vergangenheit sind hierzu aus seiner Mitte mehrere Veröffentlichungen hervorgegangen (vgl. Polygon-Verlag Eichstätt).

Auf der Tagung in Budapest hat sich nach einer längeren Pause ein kleiner Kreis von sechs Personen getroffen, um über die Zukunft des Arbeitskreises zu beraten. Zunächst wurden verschiedene Fragen im Zusammenhang mit PISA und Vergleichstest diskutiert. Dann wurde beschlossen, dass für den Herbst wieder eine gesonderte Tagung geplant werden soll, auf der Fragen zur Allgemeinbildung durch Mathematik, aber auch zur wissenschaftspolitischen Diskussion und zur Lage der Mathematikdidaktik (einschließlich ihrer jüngsten Geschichte), behandelt werden sollen. Dazu sollen insbesondere auch jüngere Kolleginnen und Kollegen angesprochen werden, sich zu beteiligen. Nähere Einzelheiten zu Ort, Zeit und Umfang werden später noch bekannt gegeben.

Als Sprecher des Arbeitskreises wurde Günter Graumann in seinem Amt bestätigt. Anfragen bezüglich des Arbeitskreises und vor allem wegen Interesse an der Herbsttagung sind an ihn zu richten unter graumann@uni-bielefeld.de oder og-graumann@web.de oder Telefon 0521 87 28 58 bzw. Fax 0521 87 57 30.

# Arbeitskreis ‚Mathematikunterricht und -didaktik in Österreich'

## Budapest, 17. 3. 2008

Edith Schneider

Der Arbeitskreis „Mathematikunterricht und -didaktik in Österreich" tagte am 17. März 2008 im Rahmen der GDM-Tagung in Budapest. Im Mittelpunkt der Sitzung standen Berichte von den einzelnen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie der Informationsaustausch über aktuelle, die österreichische Mathematikdidaktik betreffende Entwicklungen und Themen:

An den Universitäten Graz und Salzburg ist ein deutlicher Anstieg an Neu-Inskriptionen im Lehramtsstudium Mathematik zu beobachten. Über mögliche Gründe hierfür lässt sich nur spekulieren. An der Universität Linz führte die Initiative „Frauen in die Technik" zu einer Erhöhung der Anzahl der Studienanfängerinnen im Fach Mathematik; diese brechen das Studium aber vermehrt vorzeitig ab.

An den Pädagogischen Hochschulen findet die Lehramtsausbildung künftig in modularisierter Form statt, wobei es zwischen den einzelnen PHs zu keiner Vereinheitlichung der Studienpläne gekommen ist. An der Umsetzung der Bologna-Struktur für das universitäre Lehramtsstudium wird an den österreichischen Universitäten unterschiedlich intensiv gearbeitet. Die Herbsttagung des AK soll für einen Austausch über den aktuellen Entwicklungsstand im Bereich der Lehramtsausbildung genutzt werden.

Das Projekt IMST bietet Anstoß-Finanzierungen für mathematikdidaktische Schwerpunktsetzungen in den Bereichen Naturwissenschaften, Mathematik, Geografie und Informatik an Bildungsinstitutionen. Beantragte Förderungen wurden bisher vergeben an die Universität Salzburg (Bereich Biologie/Informatik), die Pädagogische Hochschule Baden (Bereich Mathematik/Informatik – Schwerpunkt: Lehrer(innen)fortbildung), die Universität Graz im Verbund mit PH Steiermark, kirchliche PH der Diözese Graz-Seckau, LSR für Steiermark (Bereich Mathematik/Geometrie) sowie an die Universität Linz (Bereich Mathematik – Schwerpunkt Realitätsbezogener MU und Computereinsatz im MU).

Das österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik an der Universität Klagenfurt wurde angefragt, die Deskriptoren für die gesetzliche Implementierung der Standards für die mathematischen Fähigkeiten am Ende der 8. Schulstufe (M8-Standards Mathematik) zu verfassen. An der Formulierung von diesen wird gearbeitet. Die M8-Standards-Mathematik sollen im Herbst 2008 in Kraft treten.

Die gesetzliche Verankerung der Standards-Mathematik für die vierte Schulstufe (M. Fast, F. Platzgummer) sollen 2009 folgen. Die Pilottestung der M4-Standards ist bereits abgeschlossen.

Am Konzept der Standards-Mathematik für die 12. Schulstufe wird in einer Arbeitsgruppe gearbeitet (H. Heugl, M. Liebscher).

Von Seiten des Bildungsministeriums ist die Einführung einer Zentralmatura für verschiedene Fächer, u. a. auch Mathematik, in Österreich in den nächsten Jahren vorgesehen. Dabei soll es sich um eine „standardbasierte Reifeprüfung" handeln. Die Entwicklung und Erprobung an Versuchsschulen von möglichen Modellen für eine solche Reifeprüfung soll dem Österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik an der Universität Klagenfurt übertragen werden. Das Kompetenzzentrum plant ein Treffen österreichischer Mathematikdidaktiker(inne)n zum Thema Zentralmatura für den Herbst 2008.

Interesse wird von M. Gaidoschik an einem organisierten Austausch zwischen Fachdidaktiker(inne)n der Primarstufe und der Sekundarstufe I zum Thema Nahtstellenproblematik bekundet (nähere Informationen dazu: michael.gaidoschik@chello.at).

# Arbeitskreis ‚Vergleichsuntersuchungen zum Mathematikunterricht'

## Soest, 25.–26. 4. 2008

Gabriele Kaiser und Norbert Knoche

Am 25. und 26. April 2008 fand die diesjährige Frühjahrstagung des Arbeitskreises „Vergleichsuntersuchungen zum Mathematikunterricht" statt. Tagungsort war das „Tagungshaus Soest" des Schulministeriums NRW in Soest. Im Mittelpunkt der Tagung stand die Diskussion von Kompetenzmodellen für den mittleren Bildungsabschluss und für die Grundschule.

Zu beiden Modellen wurden von Herrn Köller (IQB, Berlin) zunächst die Rahmenbedingungen und Vorgaben bei der Entwicklung dieser Modelle präsentiert.

- Enge Orientierung an den 2003 und 2004 verabschiedeten Bildungsstandards der KMK, dabei aber zusätzliche Berücksichtigung des gesamten Kompetenzspektrums,
- Anbindung der Kompetenzstufenmodelle an internationale Vorarbeiten, wie sie in PISA und IGLU realisiert wurden,
- 5 Kompetenzstufen für die Grundschule und die Sekundarstufe I,
- annähernd gleich breite Kompetenzstufen,
- fachdidaktisch gut interpretierbare und vertretbare Grenzen zwischen den Kompetenzstufen,
- Festlegung von Minimal-, Regel- und Optimalstandards,
- Erarbeitung eines globalen Kompetenzstufenmodells, das für alle Leitideen gilt, und das mit Hilfe der allgemeinen mathematischen Kompetenzen beschrieben werden kann,
- ergänzend leitideenspezifische Beschreibungen der Kompetenzstufen.

Das konkrete Vorgehen bei der Setzung von Stufen variierte nach Schulstufe etwas, cum grano salis sah es aber folgendermaßen aus:

- Modifizierte Bookmarkmethode (computerbasiert) mit der Software „Criterion Map" (Wilson et al.).
- Aufgaben werden zunächst skaliert (Raschmodell, Analysen mit ConQuest) und der Schwierigkeit nach angeordnet.
- Experten setzen Bookmarks bei denjenigen Aufgaben, die zwei Kompetenzstufen voneinander abgrenzen.
- Ein Proband mit einem Fähigkeitswert x löst eine Aufgabe mit dem Schwierigkeitsgrad x mit einer Wahrscheinlichkeit von 62,5 %.
- Anschließend wurde die Personenverteilung in den Stufen geplottet. Es folgte eine kritische Reflexion der Grenzen, eventuell Neudefinition.

Eine Abstimmung mit der Politik fand am 18. 4. 2008 statt. Die Abstimmung mit den Verbänden steht noch aus.

Es folgte dann zunächst eine detaillierte Beschreibung des *Kompetenzmodell für den mittleren Schulabschluss*. Vorgestellt wurde das Modell von Herrn Blum (Kassel) und Herrn Köller. In ihren Arbeitsgruppen wurde dieses Modell erarbeitet.

Das *Modell für das Ende der Grundschulzeit* wurde von Herrn Ufer aus der Arbeitsgruppe von Frau Reiss (LMU München) und Herrn Köller vorgestellt. In ihren Arbeitsgruppen wurde dieses Modell aufbauend auf dem aus der IGLU-Studie entstandenen Modell erarbeitet.

Dieses Modell wurde in der Arbeitsgruppe von Frau Reiss aufgrund theoretischer Überlegungen für die gesamte Grundschulzeit formuliert und auf die verschiedenen Jahrgangsstufen spezifiziert.

Zum *Kompetenzmodell für den mittleren Schulabschluss:* Das Modell enthält wie schon gesagt 5 Stufen, wobei die Stufen 2–4 äquidistant sein sollen. Die Stufe 1 ist nach unten offen, die Stufe 5 nach oben.

Schüler(innen), die die Stufe 1 nicht überschreiten, werden wie in PISA als „Risikogruppe" bezeichnet, Schüler(innen), die die Stufe 5 erreichen, werden als Spitzengruppe bezeichnet. Der Normierungsprozess ergab die folgende Aufteilung der bekannten Leistungsskala (M = 500, SD = 100):

| | |
|---|---|
| Kompetenzstufe 1: | $<410$ |
| Kompetenzstufe 2: | 410–490 |
| Kompetenzstufe 3: | 490–570 |
| Kompetenzstufe 4: | 570–650 |
| Kompetenzstufe 5: | $> 650$ |

Die Kompetenzstufen wurden inhaltlich wie folgt beschrieben:

*Kompetenzstufe 1* (<410): Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können höchstens
- ▷ einfache, direkt umsetzbare Rechnungen mit Zahlen, Größen und Prozenten ausführen,
- ▷ routinemäßige Arbeitsschritte entsprechend direkter Instruktionen ausführen,
- ▷ aus einer gegebene Darstellung eine Information direkt ablesen,
- ▷ geometrisches Basiswissen reaktivieren und einfache Zeichnungen ausführen,
- ▷ mit einfachsten proportionalen und antiproportionalen Realkontexten umgehen,
- ▷ Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsversuchen berechnen.

*Kompetenzstufe 2* (410–489): Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ Wenig-schrittige Berechnungen linear (vorwärts) durchführen,
- ▷ einer gegebenen Darstellung, die mehrere Informationen enthält, die relevante Information direkt entnehmen,
- ▷ elementares begriffliches Wissen wiedergeben,
- ▷ einfache geometrische Konstruktionen durchführen und direkte Implikationen in geometrischen Kontexten vornehmen,
- ▷ einfache lineare Zusammenhänge beschreiben,
- ▷ aus gegebenen elementaren Begründungen die richtige auswählen,
- ▷ einfache Beziehungen zwischen Mathematik und Realität herstellen.

*Kompetenzstufe 3* (490–569): Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ wenig-schrittige Berechnungen, die nicht ausschließlich „vorwärts" gerichtet sind, im linearen Kontext durchführen,
- ▷ auch zwei-schrittige Prozentberechnungen realisieren,
- ▷ einfache geometrische Konstellationen analysieren, reale Kontexte linearen Charakters inhaltlich interpretieren und einfache lineare Algebraisierungen vornehmen,
- ▷ einfache Begründungen geben.

*Kompetenzstufe 4* (570–650): Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ einfache Berechnungen nach einer selbst entwickelten Strategie durchführen,
- ▷ selbst Darstellungen erzeugen,
- ▷ überschaubare Algebraisierungen vornehmen,
- ▷ inhaltliche Begründungen in überschaubaren Kontexten geben,
- ▷ reale Kontexte nicht-linearen Charakters inhaltlich interpretieren,
- ▷ Wahrscheinlichkeiten mehrschrittiger Zufallsversuche berechnen.

*Kompetenzstufe 5* (>650): Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ komplexe Algebraisierungen durchführen,
- ▷ mit nicht-linearen Termen umgehen,
- ▷ komplexe Begründungen, die tieferes inhaltliches Verständnis erfordern, geben,
- ▷ selbst erkundete Informationen begrifflich erfassen, verallgemeinern und anwenden,
- ▷ komplexe Problemsituationen modellieren,
- ▷ flexibel zwischen verschiedenen Informationsquellen auswählen,
- ▷ flexibel zwischen Darstellungen übersetzen.

Wie realisieren sich diese Kompetenzstufen in den einzelnen *Leitideen?* Herr Blum wählte zur Beantwortung dieser Frage exemplarisch die Leitidee „Funktionale Zusammenhänge". Für diese Leitidee haben die Kompetenzstufen folgende inhaltliche Beschreibung:

*Kompetenzstufe 1:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können höchstens
- ▷ einfache lineare Gleichungen lösen,
- ▷ einzelne Werte aus Graphen, Diagrammen und Tabellen ablesen und ggf. interpretieren,
- ▷ einzelne Werte innerhalb von einfachen proportionalen Realkontexten bestimmen,
- ▷ bei inhaltlich gegebenen einfachen Folgen die unmittelbar nächsten Folgenglieder ermitteln.

*Kompetenzstufe 2:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ bei Darstellungen funktionaler Zusammenhänge eine relevante Information direkt entnehmen,
- ▷ anhand einer verbal beschriebenen (realitätsbezogenen) Zuordnungsvorschrift konkrete $x$- und $y$-Werte bestimmen,
- ▷ gegebene einfache Behälter und Füllgraphen einander zuordnen,
- ▷ lineare Gleichungen den entsprechenden realen Kontexten zuordnen,
- ▷ bekannte geometrische Sachverhalte den entsprechenden Termen zuordnen,
- ▷ einfache Realsituationen den passenden Funktionstypen zuordnen,
- ▷ bei inhaltlich gegebenen Folgen konkrete Folgenglieder ermitteln.

*Kompetenzstufe 3:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ graphisch/verbal dargestellte überschaubare funktionale Zusammenhänge den passenden

realen Kontexten zuordnen,
- ▷ einfachen Realsituationen die passende lineare (Un)Gleichung zuordnen,
- ▷ eine durch eine einfache Gleichung beschriebene realitätsbezogene Zuordnungsvorschrift inhaltlich interpretieren,
- ▷ bei einer durch eine einfache Gleichung beschriebenen Zuordnungsvorschrift konkrete $x$- und $y$- Werte berechnen,
- ▷ gegebene Behälter und Füllgraphen einander zuordnen,
- ▷ bei tabellarisch dargestellten Folgen zu gegebenen Gliedern die dazugehörige Platznummer bestimmen.

*Kompetenzstufe 4:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ anhand gegebener Weg-Zeit-Graphen linearer Funktionen die Geschwindigkeit bestimmen,
- ▷ verbal oder tabellarisch beschriebene lineare Beziehungen in Realkontexten erkennen, aufstellen sowie $x$- und $y$-Werte berechnen,
- ▷ dem Graphen einer quadratischen Funktion die passende Funktionsgleichung zuordnen.

*Kompetenzstufe 5:* Schüler(innen) dieser Kompetenzstufe können zudem u. a.
- ▷ zu realitätsbezogenen linearen Sachverhalten begründet Stellung nehmen,
- ▷ zu inhaltlich gegeben Folgen einen Term aufstellen,
- ▷ aus graphisch gegebenen linearen Modellen realitätsbezogene Folgerungen ziehen,
- ▷ Auswirkungen von Änderungen des Graphen quadratischer Funktionen auf die entsprechenden Funktionsterme beschreiben,
- ▷ komplexere Modellierungen in einem funktionalen Kontext durchführen,
- ▷ in nicht-linearen innermathematischen Kontexten Argumentationen durchführen.

In den Ausführungen von Herrn Köller zu den Vorgaben bei der Entwicklung der Kompetenzmodelle waren die Begriffe Minimal-, Regel- und Optimalstandards gefallen. Wie lassen sich diese Begriffe im Rahmen dieses Modell für die Sek I inhaltlich beschreiben?
Zu dieser Frage wurden im Vortrag folgende *Arbeitsdefinitionen* gegeben und im Plenum diskutiert:
- ▷ *Mindeststandard:* Wer den Mindeststandard erfüllt, besitzt basale mathematische Kompetenzen, die in einfachen Fällen für das Zurechtkommen in Alltagssituationen oder in der beruflichen Ausbildung ausreichen. Wer ihn nicht erfüllt, gehört zur Risikogruppe, d. h. es besteht die Gefahr, dass diese Schüler nicht hinreichend in der Lage sind, selbst in einfachen mathematikhaltigen alltäglichen oder beruflichen Situationen ohne Hilfe zurechtzukommen. Den Mindeststandard sollen alle Schüler des Bildungsgangs erfüllen. Er ist im o. g. Kompetenzmodell bei 410 Punkten lokalisiert. Schüler, die den Mindeststandard erfüllen, würden also in diesem Kompetenzmodell mindesten die Stufe 2 erreichen.
- ▷ *Regelstandard:* Wer den Regelstandard erfüllt, besitzt Sek.I-typische mathematische Kompetenzen, die sowohl einen Beitrag dazu leisten, in Alltag und Beruf als „mündiger Bürger" zu handeln, als auch eine mathematische Grundbildung konstituieren, die u.a. elementare Begründungen, basale Begriffsbildungen und Standardmodellierungen mit einschließt. Der Regelstandard ist im o. g. Kompetenzmodell in der Mitte von Kompetenzstufe 3, d. h. bei 530 Punkten lokalisiert.
- ▷ *Optimalstandard:* Wer diesen Standard erfüllt, besitzt über die Regel hinausgehende mathematische Kompetenzen, wie sie von einem Schüler, der den mittleren Schulabschluss hat, normativ als Ergebnis eines verstehensorientierten Mathematikunterrichts erwartet werden. Das schließt u. a. eigenständige Begründungen, Algebraisierungen und Modellierungen mit ein. Der Optimalstandard ist im o. g. Kompetenzmodell etwa in der Mitte von Kompetenzstufe 4, also etwa bei 610 Punkten lokalisiert.

Im Anschluss an den Vortrag erhielten die Teilnehmer und Teilnehmerinnen Einsicht in einige der Items, die bedeutsame Grenzen (Mindest-, Regel- und Optimalstandard) markieren. Es wurden Arbeitsgruppen gebildet, in denen nach den Protokollen ähnliche Fragestellungen diskutiert wurden, darunter insbesondere die Frage nach dem Verhältnis des empirisch ermittelten Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe und ihrer Zuordnung zu den genannten Standards. Die Frage war, ob bei einer Aufgabe nicht vor einer Überprüfung des empirischen Schwierigkeitsgrades unter inhaltlichem Aspekt festgelegt werden muss, welchem der o. g. Standards sie zuzuordnen ist? Herr Blum führte dazu aus, dass die Festlegung der Grenzen für die verschiedenen Standards in einem Wechselspiel zwischen Theorie und Empirie erfolgt ist.

*Zum Kompetenzmodell am Ende der Grundschulzeit*

Herr Ufer ging zunächst auf allgemeinere Überlegungen der Arbeitsgruppe zur Entwicklung eines Kompetenzmodells zur Beschreibung der *Struktur* mathematischer Kompetenzen zu verschiedenen Zeitpunkten des Lernprozesses von Kindern in der Grundschule ein. Dieses Modell umfasst Kompetenzniveaus, die zunächst mathematisch inhaltlich beschrieben wurden.
*Kompetenzniveau 1:* Numerisches und begriffliches Grundlagenwissen
*Kompetenzniveau 2:* Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Zehnersystem, der ebenen Geometrie und Größen
*Kompetenzniveau 3:* Sicheres Rechnen in curricularem Umfang und einfaches Modellieren
*Kompetenzniveau 4:* Beherrschung der Grundrechenarten unter Nutzung der Dezimalstruktur und begriffliche Modellierung
*Kompetenzniveau 5:* Anspruchsvolles Problemlösen im mathematischen Kontext
Am Beispiel der Niveaus 1, 3 und 5 wurde exemplarisch eine inhaltspezifische Beschreibung der einzelnen Niveaus gegeben.

*Kompetenzniveau 1* (Grundlagenwissen)
- ▷ Einfaches Wissen zum Umgang mit Zahlen. Die Aufgaben sind so angelegt, dass sie nur Grundkenntnisse zu den jeweiligen, im Lehrplan definierten Zahlenräumen und den dort vorgegebenen Operationen voraussetzen. Sie erfordern in allen Jahrgangsstufen das Beherrschen des kleinen Einspluseins.
- ▷ Die Aufgaben beschränken sich auf einfaches Zahlenmaterial.
- ▷ Die zugrunde liegende mathematische Struktur ist leicht erkennbar und die Aufgaben berücksichtigen keinerlei Anwendungen in Sachzusammenhängen.

*Kompetenzniveau 3* (Verknüpfung von Operationen und Prozessen)
- ▷ Hier werden sicheres Beherrschen der Grundrechenarten sowie der sichere Umgang mit Größen im curricularen Umgang verlangt.
- ▷ Im Bereich Geometrie wird Basiswissen in Aufgaben angewandt.
- ▷ Einfache Sachzusammenhänge werden mathematisch interpretiert und rechnerisch gelöst.
- ▷ Darüber hinaus erfordern die Aufgaben die Verknüpfung von Operationen.

*Kompetenzniveau 5* (Kreatives Problemlösen)
- ▷ Auf diesem Niveau werden anspruchsvolle Problemstellungen bearbeitet, die eigenes Denken, flexibles Kombinieren und einem sytematischen Umgang mit Informationen erfordern. Diese werden gegebenenfalls aus unterschiedlichen Darstellungen entnommen
- ▷ Für die Lösung einer Aufgabe ist oftmals das Entwickeln individueller Lösungsstrategien erforderlich.
- ▷ Insgesamt handelt es sich um Aufgabenstellungen mit erhöhter Komplexität, bei denen der Weg zur Lösung unbekannt oder ungeübt ist und die Kreativität der Schülerinnen und Schüler fordert.

Die Bedeutung von Begriffen wie „begriffliches Verstehen“ bzw. „einfaches Modellieren“ etc. ist relativ zum Stand der Ausbildung zu verstehen. Die Kompetenzniveaus erfordern also Spezifikationen für die Referenzpunkte der Entwicklung. Das geschieht auf der Basis fachdidaktischer Theorien über Denkprozesse beim Lösen mathematischer Probleme *zum jeweiligen Zeitpunkt*.
Für das Ende der Jahrgangsstufe 1 würden die Kompetenzniveaus dann etwa die folgende Beschreibung erhalten:

*Kompetenzniveau 1:* Numerisches und begriffliches Grundlagenwissen. *Zählfertigkeiten bis etwa 20.*
*Kompetenzniveau 2:* Grundfertigkeiten im Umgang mit dem Zehnersystem, der ebenen Geometrie und Größen. *Grundlagen des kleinen Einspluseins (z. B. mit kleinen Summanden).*
*Kompetenzniveau 3:* Sicheres Rechnen in curricularem Umfang und einfaches Modellieren. *Zählfertigkeiten über 30 hinaus und sicheres Rechnen im Zahlenraum bis 20.*
*Kompetenzniveau 4:* Beherrschung der Grundrechenarten unter Nutzung der Dezimalstruktur und begriffliche Modellierung. *Addition und Subtraktion mit Zehnerzahlen.*
*Kompetenzniveau 5:* Anspruchsvolles Problemlösen im mathematischen Kontext. *Additionen im Zahlenraum jenseits der 20, z. B. ZE+E (mit oder ohne Zehnerübergang).*

Herr Ufer sprach dann Ergebnisse aus Validierungsstudien in den Jahrgangsstufen 2 und 3 an und bemerkte dazu, dass die zugeordneten Kompetenzniveaus relativ gut den empirischen Lösungsraten entsprachen. Er notierte aber auch, dass eine spezifische Niveaustruktur im Sinne einer hierarchischen Anordnung der Items entsprechend den Lösungsraten mit den allgemeinen Niveaubeschreibungen nicht zu erreichen war, wenn die Inhalte komplexer wurden (Jahrgangstu-

fe 3). Eine offenen Frage ist also, ob eine Definition von Niveaus möglich (und erstrebenswert) ist, die sich auch in einer hierarchischen Anordnung der Itemschwierigkeiten widerspiegeln.
Herr Köller stellte die von der Arbeitsgruppe Reiss und dem IQB gemeinsam erarbeitete Spezifizierung des allgemeinen Modells für das Ende der Jahrgangsstufe 4 vor.
Das Modell ist durch die folgende Skala und Kompetenzstufen gekennzeichnet:

*Kompetenzstufen im Fach Mathematik in der Grundschule bei M = 500 und SD = 100*
*Kompetenzstufe 1:* <390 Routineprozeduren auf der Grundlage einfachen begrifflichen Wissens
*Kompetenzstufe 2:* 390–460 Einfache Anwendungen von Grundlagenwissen (Mindeststandard)
*Kompetenzstufe 3:* 460–530 Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen in einem vertrauten (mathematischen und sachbezogenen) Kontext (Regelstandard)
*Kompetenzstufe 4:* 530–600 Sicheres und flexibles Anwenden von begrifflichem Wissen und Prozeduren im curricularen Umfang (Optimalstandard)
*Kompetenzstufe 5:* > 600 Modellierung komplexer Probleme unter selbstständiger Entwicklung geeigneter Strategien.

Die Stufen wurden wie folgt inhaltlich spezifiziert:

*Kompetenzstufe 1:* Einfache mathematische Begriffe und Prozeduren sind bekannt und können in einem innermathematischen Kontext bzw. in einem aus dem Alltag vertrauten oder gut geübten Kontext korrekt reproduziert werden. Insbesondere werden grundlegende Begriffe der ebenen Geometrie und gängige Repräsentanten standardisierter Einheiten richtig verwendet. Kleinere Zahlen können in Bezug auf ihre Größe verglichen werden, Zahldarstellungen in Stellentafeln werden sicher gelesen. Die Grundaufgaben des kleinen Einspluseins und Einmaleins werden beherrscht und bei halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren genutzt, wenn die Aufgabenstellungen keine besonderen Schwierigkeiten aufweisen. Klar strukturierten Diagrammen, Schaubildern und Tabellen mit Bezug zur Lebenswirklichkeit können relevante Daten entnommen werden.

*Kompetenzstufe 2:* Die Struktur des Dezimalsystems wird genutzt, Gesetzmäßigkeiten werden erkannt und bei der Fortsetzung einfacher Zahlenfolgen, beim strukturierten Zählen und systematischen Probieren berücksichtigt. Aufgaben zur Addition, Subtraktion und Multiplikation werden halbschriftlich und schriftlich durchgeführt, Überschlagsrechnungen werden durchgeführt. Insbesondere können in diesem Zusammenhang einfache Sachaufgaben gelöst werden. Aus dem Alltag vertraute proportionale Zuordnungen werden erkannt und angewendet. Bei einfachem Zahlenmaterial wird das Umwandeln von Größen in gegebene Einheiten auch bei gemischten Größenangaben durchgeführt. Grundbegriffe der räumlichen Geometrie werden korrekt verwendet, wenn diese einen Bezug zum Alltag haben. Räumliche Beziehungen werden zur Lösung einfacher Probleme genutzt. Wesentliche Grundbegriffe aus dem Umfeld von Zufall und Wahrscheinlichkeit werden korrekt verwendet („sicher“, „unmöglich“, „wahrscheinlich“).

*Kompetenzstufe 3:* Das erlernte Wissen kann flexibel in unterschiedlichen Problemstellungen genutzt werden, die einem vertrauten Kontext zuzuordnen sind. Insbesondere wird mit Zahlen und Operationen im curricularen Umfang sicher umgegangen, Überschlagsrechnungen werden auch bei großen Zahlen sicher durchgeführt. Strukturelle Aspekte werden bei gut geübten Inhalten gesehen und können kommuniziert werden. Das betrifft auch Inhalte der Geometrie, wobei etwa zwischen verschiedenen Darstellungsformen einer Figur vermittelt werden kann. Einfache Sachsituationen werden modelliert und die damit verbundenen Problemstellungen gelöst. Daten und Informationen können in bekanntem Kontext flexibel dargestellt werden. Bei nicht allzu komplexen Zufallsexperimenten werden Gewinnchancen korrekt eingeschätzt und begründet.

*Kompetenzstufe 4:* Auch in einem wenig vertrauten Kontext wird mathematisches Wissen sicher angewendet. Eigene Vorgehensweisen werden korrekt beschrieben, die Lösungswege anderer Kinder werden verstanden und reflektiert. Das Rechnen wird im curricularen Umfang in allen Varianten sicher beherrscht. Begriffe der ebenen und räumlichen Geometrie werden flexibel verwendet. Zahldarstellungen und Stellenwerttafeln können auch bei sehr großen Zahlen nach Vorschrift selbstständig manipuliert und systematisch verändert werden. Das Rechnen mit Größen ist sicher und flexibel und umfasst insbesondere Näherungsrechnungen und Überschlagsrechnungen. Informationen aus unterschiedlichen Quellen können in einen Zusammenhang gestellt und in Modellierungsaufgaben selbstständig verwendet und manipuliert werden.

*Kompetenzstufe 5:* Mathematische Problemstellungen werden auch in einem unbekannten Kontext angemessen, sicher und flexibel bearbeitet. Dabei werden geeignete Strategien, sinnvolle Bewertungen oder Verallgemeinerungen auf hohem Niveau geleistet. Umfangreiches curricular verankertes Wissen wird in ungewohnten Situationen flexibel genutzt. Das Vorgehen kann sicher und nachvollziehbar kommuniziert und begründet werden. Komplexe Sachsituationen werden modelliert und bearbeitet, wobei besondere Schwierigkeiten wie die Verwendung von Tabellen, der Umgang mit zusammengesetzten Größen oder das Rechnen mit Zahlen in Kommaschreibweise auftreten können. Es können auch ungewohnte funktionale Zusammenhänge analysiert und genutzt werden. Die Lösung von Aufgaben kann ein hohes Maß an räumlichem Denken oder entsprechende analytische Fähigkeiten voraussetzen.

Am Samstag stellten Gabriele Kaiser und Björn Schwarz ein Kompetenzmodell für angehende Lehrerinnen und Lehrer vor, das aus Ergebnissen der Studie „Mathematics Teaching in the 21st Century“ (MT21) hervorgeht. Der Vortrag basiert auf einem Kapitel aus dem zu MT21 erschienen Buch[1].

Ausgehend von massiver Kritik an der Lehrerausbildung führt die IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievements) zur Zeit (2007–2009) eine internationale Vergleichsstudie zur Wirksamkeit der Lehrerbildung durch, TEDS-M (Teacher Education Development Study – Learning to teach mathematics). Aufgrund fehlender theoretischer Konzepte und Instrumente wurde zur Itementwicklung und -testung eine Vorbereitungsstudie vorgeschaltet, MT21. Diese begann 2002 und wurde in insgesamt sieben Ländern, unter anderem Deutschland und die USA, durchgeführt. Die Studie teilt sich allgemein in drei Ebenen (Individuum, Institution, System), Zielpopulation sind angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer für die Sekundarstufe I. Auf der individuellen Ebene von MT21, deren Ergebnisse im Folgenden im Vordergrund stehen, wird dabei im Anschluß an Weinert (1999) und mit theoretischer Bezugnahme auf unter anderem Shulman (1986) und Bromme (1995) auf die erworbene Kompetenz fokussiert.

Die Daten wurden an vier Universitäten und 22 Studienseminaren erhoben ($N = 849$, verteilt auf drei Kohorten: Grundstudium: $n_1 = 368$, Hauptstudium: $n_2 = 195$, Referendariat: $n_3 = 286$). Die Ausschöpfungsquote variiert zwischen 16 % und 80 % (Durchschnitt 31 %), so dass viele Ergebnisse vorsichtig interpretiert werden müssen.

Die Itementwicklung von MT21 geschah dabei unter Berücksichtigung mehrerer Kriterien. Zum Einen wurde hinsichtlich inhaltlicher Gesichtspunkte unterschieden, wobei zwischen Arithmetik, Algebra, Funktionen, Geometrie und Statistik differenziert wurde. Daneben wurde zwischen vier mathematischen Tätigkeiten, dem Algorithmisieren, dem Problemlösen, dem Begründen und dem Modellieren unterschieden. Darüber hinaus wurden jedoch einerseits unter Bezugnahme auf das zugrunde liegende Kompetenzmodell und andererseits unter Bezugnahme auf andere Studien auch weitere Kriterien im Rahmen der Itementwicklung berücksichtigt, die für die folgenden Ergebnisse relevant sind. Dies waren insbesondere:

*Das Niveau des mathematischen Wissens.* Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Mathematik der Sekundarstufe I
- ▷ Mathematik der Sekundarstufe II
- ▷ „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ (Kirsch, 1977)
- ▷ Universitäre Mathematik

*Die Verknüpfung des mathematischen Wissens mit anderen Dimensionen.* Dies können beispielsweise Verknüpfungen von mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen oder Verknüpfungen von verbalen und graphischen Aussagen sein.

Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Keine Verknüpfung erforderlich
- ▷ Eine einfache Verknüpfung erforderlich
- ▷ Eine anspruchsvolle Verknüpfung erforderlich
- ▷ Mehrere Verknüpfungen erforderlich

*Zur Itembearbeitung nötige kognitive Anstrengungen.* Diese ergeben sich beispielsweise aus der Zahl der aufeinanderfolgenden Bearbeitungsschritte, dem Abstraktionsgrad eines Problems oder den notwendigen Transferleistungen.

Dabei wurde differenziert nach:

- ▷ Keine besonderen kognitiven Anstrengungen

[1] Blömeke, Sigrid; Lehmann, Rainer; Seeber, Susan; Schwarz, Björn; Kaiser, Gabriele; Felbrich, Anja; Müller, Christiane (2008). *Niveau- und institutionenbezogene Modellierung des fachbezogenen Wissens.* in: Blömeke, Sigrid; Kaiser, Gabriele; Lehmann, Rainer (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.*

▷ Einfache kognitive Anstrengungen
▷ Komplexe kognitive Anstrengungen

Es war das nahe liegende Ziel der Itementwicklung, ein möglichst breites Spektrum bezüglich der Kriterien abzudecken. Eine formale Klassifizierung der Items bezüglich dieser Kriterien geschah, im Gegensatz zu den vorher geschilderten Kriterien, nicht, da Uneinheitlichkeiten auf internationaler Ebene dem entgegenstanden. Daher ist die folgende Modellierung auf die deutsche Stichprobe beschränkt. Hierbei wurde die Reliabilität durch 3 Rater gesichert, bei Uneinheitlichkeit wurden externe Experten hinzugezogen.

Die folgenden Ergebnisse basieren dann auf der eindimensionalen Rasch-Skalierung. Gebildet wurde dabei ein Gesamttestwert von mathematischem und mathematikdidaktischem Wissen (latente Korrelation der Gebiete .81), was sich inhaltlich mit dem Zusammenhang dieser Wissensgebiete im Unterricht begründen lässt. Generell zeigt sich dann zuerst, dass mit der jeweils nächsten Stufe eines Merkmals (bezüglich der drei oben beschriebenen Kriterien, also Niveau des mathematischen Wissens, Verknüpfung von mathematischem Wissen mit anderen Dimensionen und den nötigen kognitiven Anstrengungen) generell ein Anstieg der Itemschwierigkeit verbunden ist.

Eine Regressionsanalyse ergibt, dass die Bestimmung der Aufgabenschwierigkeit zu großen Teilen durch vier Merkmale möglich ist (69 % Varianz erklärt). Die folgende Tabelle liefert einen Überblick über diese Merkmale und die zugehörigen unstandardisierten Regressionsgewichte:

| Merkmale | Regressionsgewicht | Standardfehler | Irrtumswahrscheinlichkeit |
|---|---|---|---|
| Konstante | −.90 | .16 | $p<.001$ |
| universitäre Mathematik | 1.67 | .20 | $p<.001$ |
| eine anspruchsvolle Verknüpfungsleistung | .45 | .18 | $p<.05$ |
| mehrere Verknüpfungsleistungen | 1.54 | .19 | $p<.001$ |
| komplexe kognitive Anstrengungen | .93 | .15 | $p<.001$ |

Ein Item, das eines der vier Merkmale aufweist, ist also um den Betrag des entsprechenden Regressionsgewichtes, gemessen in Logits, schwerer als ein Item, das das entsprechende Merkmal nicht aufweist. Die „Konstante“ bezeichnet dabei die Basisschwierigkeit eines Items, das keines der vier Merkmale enthält. Aus diesen Daten lässt sich die theoretische zu erwartende Schwierigkeit jedes Items berechnen, indem ausgehend von der Konstante die Summe der Logits derjenigen Merkmale, die das betreffende Item aufweist, gebildet wird.

Auf Basis dieser Ergebnisse kann dann ein Kompetenzmodell bestimmt werden, indem aus den Ergebnissen der Regressionsanalyse die Schwellenwerte des Modells abgeleitet werden. Als Beginn einer neuen Kompetenzstufe wird dabei derjenige Schwellenwert definiert, ab dem ein bestimmtes Merkmal erstmalig auftritt. Dabei wurden drei Voraussetzungen festgelegt:

▷ Es handelt sich um keine Ausnahme, das heißt, mehrere Items weisen die erwartete Schwierigkeit auf.
▷ Die jeweilige Merkmalskombination muss im Test wirklich realisiert sein.
▷ Die jeweilige Merkmalskombination muss konzeptionell überzeugen.

Dies führt zu einem Kompetenzmodell mit vier Stufen, das sich wie folgt zusammenfassend darstellen lässt:

| Kompetenzniveau | erwartete Aufgabenschwierigkeit in Logits | universitäre Mathematik | eine anspruchsvolle Verknüpfung | mehrere Verknüpfungen | komplexe kognitive Anstrengungen |
|---|---|---|---|---|---|
| unter A | −0.90 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | −0.45 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| B | 0.03 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | 0.64 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 1.60 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | | 1 | 0 | 0 | 1 |

„Unter Kompetenzniveau A“ bedeutet dabei, dass Aufgaben, die eines der vier Merkmale enthalten, auf diesem Niveau nicht sicher beherrscht werden können. Die vier Kompetenzstufen lassen sich dann wie folgt charakterisieren:

*Kompetenzniveau A:*

▷ Testpersonen können Aufgaben lösen, die eine anspruchsvolle Verknüpfungsleistung erfordern (in MT21 häufig: mathematisches und mathema-

tikdidaktisches Wissen verknüpft)
- ▷ Mathematisches Wissen unterhalb Universitätsniveau
- ▷ Kognitive Anstrengungen nicht zu komplex, das heißt, nicht zu viele gedankliche Bearbeitungsschritte

*Kompetenzniveau B:*
- ▷ Testpersonen können Aufgaben lösen, die komplexe kognitive Anstrengungen erfordern
- ▷ Mathematisches Niveau weiterhin unter Universitätsniveau
- ▷ Es darf höchstens eine einfache Verknüpfungsleistung gefordert sein

*Kompetenzniveau C:*
- ▷ Testpersonen beherrschen universitäres mathematisches Wissen
- ▷ Testpersonen sind in der Lage, mehrere Verknüpfungsleistungen zu erbringen
- ▷ Keine zusätzlichen komplexen kognitiven Anstrengungen, das heißt begrenzte Anzahl notwendiger gedanklicher Bearbeitungsschritte

*Kompetenzniveau D:*
- ▷ Gekennzeichnet durch das Beherrschen komplexer kognitiver Anstrengungen, das heißt mehrerer gedanklicher Bearbeitungsschritte
- ▷ Zusätzlich Beherrschen von universitärem mathematischen Niveau beziehungsweise mehreren Verknüpfungsleistungen

Abschließend sollen auf Basis der Daten von MT21 noch die Verteilungen der Referendarinnen und Referendare auf die einzelnen Kompetenzstufen dargestellt werden. Für die Gesamtgruppe der Referendarinnen und Referendare ($n$ = 286) ergibt sich dann folgende Verteilung:

| | |
|---|---|
| unter Kompetenzniveau A | 11.2 % |
| Kompetenzniveau A | 23.6 % |
| Kompetenzniveau B | 26.1 % |
| Kompetenzniveau C | 26.7 % |
| Kompetenzniveau D | 12.3 % |

Man erkennt, dass gut 10 % der Referendarinnen und Referendare unter Kompetenzniveau A liegen, und andererseits knapp zwei Fünftel den beiden höchsten Kompetenzniveaus zuzuordnen sind. Erwartungsgemäß überdeckt diese Darstellung Effekte und Unterschiede, die in den unterschiedlichen Schulstufen bedingt sind (also GHR und GyGS). Daher soll abschließend die Verteilung der Referendarinnen und Referendare auf die Kompetenzniveaus getrennt nach Schulstufen dargestellt werden:

*Gruppe der angehenden GHR-Lehrerinnen und Lehrer* (n = *133*):

| | |
|---|---|
| unter Kompetenzniveau A | 20.2 % |
| Kompetenzniveau A | 35.5 % |
| Kompetenzniveau B | 27.5 % |
| Kompetenzniveau C | 11.4 % |
| Kompetenzniveau D | 5.3 % |

*Gruppe der angehenden GyGS-Lehrerinnen und Lehrer* (n = *153*):

| | |
|---|---|
| unter Kompetenzniveau A | 3.4 % |
| Kompetenzniveau A | 13.2 % |
| Kompetenzniveau B | 24.9 % |
| Kompetenzniveau C | 40.1 % |
| Kompetenzniveau D | 18.4 % |

# EU-Projekt ‚ScienceMath'
# Meeting in Finnland

Astrid Beckmann

*ScienceMath: Mathematical literacy and cross curricular competencies through interdisciplinarity, mathematising and modelling science*

Vom 14. Mai bis 17. Mai 2008 fand das dritte Projekttreffen des EU-Projekts ScienceMath in Turku/Finnland statt. Das Projekt ScienceMath ist ein europäisches Kooperationsprojekt zur Förderung von *mathematical* und *scientific literacy*, das von der Europäischen Kommission im Programm Comenius 2.1 gefördert wird. Kooperationspartner sind Hochschulen und Schulen aus den Ländern Deutschland, Dänemark, Finnland und Slovienien (Koordination: Prof. Dr. Astrid Beckmann, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd). Ziel ist die Entwicklung von erprobten Unterrichtssequenzen und –moduln, die auf ein einsichtiges und vernetztes Lernen mathematischer Inhalte und Begriffe führen und für die europäische Lehrerfortbildung zur Verfügung gestellt werden. Grundidee ist, mathematisches Lernen in naturwissenschaftlichen Kontexten und durch aktive Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Durch außermathematische Bezüge sollen sie Mathematik angemessen, bedeutungsvoll und interessant erfahren; das Lernen in Zusammenhängen soll zu einem intuitiven mathematischen Verstehen beitragen. Mit Hilfe naturwissenschaftlicher Kontexte und Methoden soll einerseits die oft beobachtete Kluft zwischen formaler Mathematik und authentischer Erfahrung geschlossen werden, andererseits die Vielseitigkeit mathematischer Begriffe erfahren werden.
In dem Projekttreffen wurden die bisher entwickelten interdisziplinären Module diskutiert und Ergebnisse aus Unterrichtserprobungen vorgestellt. Gleichzeitig bestand die Gelegenheit, eine finnische Schulklasse im Unterricht direkt zu beobachten. Projektbeispiele betreffen mathematische Modellbildungsprozesse und experimentelle Aktivitäten in naturwissenschaftlichen Kontexten und Alltagssituationen. Ein Schwerpunkt des Austauschs in Turku betraf auch die Verbreitung der Ergebnisse über die Webseiten. Zur Zeit wird eine Oberfläche vorbereitet, die einen vereinfachten informativen Zugriff in verschiedenen europäischen Sprachen ermöglicht. Eine Auswahl von Moduln ist bereits abrufbar unter www.sciencemath.ph-gmuend.de.

*ScienceMath-meeting in Turku: Teilnehmer aus Dänemark, Deutschland, Finnland, Slovenien und den Niederlanden*

# Symposium Celebrating the Centennial of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)

## Rome 5–8 March 2008

Gert Schubring

In 1908, during the IV International Congress of Mathematicians, which took place in Rome from 6 to 11 April, was created the International Commission on the Teaching of Mathematics (Commissione Internazionale per l'insegnamento matematico, Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, Internationale Mathematische Unterrichtskommission). The first to formulate a proposal for the institution of an organisation of this type was David Eugene Smith, a professor at Teachers College of New York, who was profoundly interested in education and in the history of mathematics. The first president was Felix Klein, eminent mathematician and promoter of significant reforms in the teaching of mathematics in Germany. Klein was an unflagging and enthusiastic promoter of the commission during its early period.

The initial goal of the commission was that to "promote an inquiry and publish a general report on current trends in secondary teaching of mathematics in the various countries". From that time, the Commission, which since 1954 has been known as the "International Commission on Mathematical Instruction" (ICMI), has gone through successive periods of more or less intense activity (connected with the dramatic events of the first half of the twentieth century) before arriving to the end of the 1960s, when it experienced a veritable renaissance based on new aims and work methodologies. In the last quarter of a century its activities and the lines of research have broadened and diversified, and have contributed to the construction of a new discipline, research in the teaching of mathematics.

To celebrate the Centennial of the founding of the ICMI, an international symposium, entitled "The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction: Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education", was held in Rome, 5–8 March 2008 (http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/).

The International Programme Committee (IPC), was composed of sixteen members, with Ferdinando Arzarello as its president, while Marta Menghini represented the Organising Committee within the IPC. Palazzo Corsini, home of the Accademia Nazionale dei Lincei, and Palazzo Mattei di Paganica, home of the Enciclopedia Italiana, were the splendid venues for the symposium.

Taking as a point of departure the themes connected to ICMI activities over the course of its hundred year history (reforms in teaching of the sciences, formation of teachers, relationships between mathematicians and researchers of teaching, etc.), the symposium sought to identify the future directions of research in didactics and possible initiatives for improving the level of mathematics culture in the various countries.

The symposium was subdivided into ten plenary talks, eight talks in parallel, five working groups, and an afternoon reserved for Italian teachers, with lectures by scholars from Italy and abroad. The talks on the "Italian afternoon" were broadcast via videoconference to fifty schools throughout Italy.

The talks dealt with a wide variety of topics: the origins of the ICMI and the roles played by Klein and Smith; ICMIs renaissance at the end of the 1960s and the emergence of a new field of research; the dialectic between rigour and intuition in the teaching of mathematics; the relationships between pure and applied mathematics and the emphasis that should be given to modelling in teaching and learning of the mathematics; the interactions between research and practice; the relationship between centres and peripheries of the world; teacher training; the relationships between mathematics and teaching of mathematics and between mathematics education and technology, society, and other disciplines.

Some 200 participants from 43 countries the world over took part in the congress. The symposium ended with an excursion which, like a hundred years ago, took participants to visit the Villa d'Este at Tivoli and Hadrian's Villa, both rich in historical grandeur.

On the occasion of the congress a website dedicated to the history of ICMI was created under the direction of Fulvia Furinghetti and Livia Giacardi (http://www.icmihistory.unito.it/). It delineates the most significant events and key figures through documents, images and interviews. The site is divided into six sections: Timeline; Portrait Gallery; Documents; The Affiliated Study Groups; The International Congresses on Mathematical Education; Interviews and Film Clips. The Timeline marks the most important moments in the history of the ICMI, with each fact documented with references to the original sources. The Portrait Gallery provides a complete list of ICMI officers, and biographic cameos of those who have passed away, with the aim of making evident their roles within the ICMI, their contributions to the study of problems inherent in mathematics teaching, and their publications that are expressly dedicated to mathematics teaching.

The symposium proceedings will be published by the *Enciclopedia Italiana*, in their book series entitled *Scienze e Filosofia*. The talks of the Italian afternoon are in press in the journal *Progetto Alice*.

*The Plenary Lectures*

▷ Moments of the life of ICMI (Hyman Bass)
▷ The development of mathematics education as an academic field (Jeremy Kilpatrick)
▷ Intuition and rigor in mathematics education (Dina Tirosh and Pessia Tsamir)
▷ Perspectives on the balance between application & modelling and 'pure' mathematics in the teaching and learning of mathematics (Mogens Niss)
▷ The relationship between research and practice in mathematics education: international examples of good practice (Jo Boaler)
▷ The origins and early incarnations of ICMI (Gert Schubring)
▷ ICMI Renaissance: the emergence of new issues in mathematics education (F. Furinghetti, M. Menghini, F. Arzarello, L. Giacardi)
▷ Centres and peripheries in mathematics education (Bienvenido F. Nebres)
▷ ICMI: One century at the interface between mathematics and mathematics education – Reflections and perspectives (Michèle Artigue)

*The working groups*

▷ WG1: Disciplinary mathematics and school mathematics (co-chairs. B. Barton, F. Gourdeau)
▷ WG2: The professional formation of teachers (co-chairs: Deborah Ball, Barbro Grevholm)
▷ WG3: Mathematics Education and Society (co-chairs: Hilary Povey, Robyn Zevenbergen)
▷ WG4: Resources and technology throughout the history of ICMI (co-chairs: Marcelo C. Borba, Mariolina Bartolini Bussi)
▷ WG5: Mathematics Education: an ICMI perspective (co-chairs: G. Leder, L. Radford)

**Meike Akveld**

# Knoten in der Mathematik – Themenheft Topologie

Rezensiert von Christian Bär

Die Autorin möchte mit dem vorliegenden Themenheft Knotentheorie, ein Teilgebiet der Topologie, an Schulen bekannt und populär machen. Dies ist sehr begrüßenswert, denn Knotentheorie kann sehr elementar, d. h. ohne größere mathematische Vorkenntnisse, behandelt werden, ist sehr anschaulich und kann sehr schön verdeutlichen, dass Mathematik viel mehr ist als der sonst unterrichtete Schulstoff. Bemerkenswerterweise ist Knotentheorie auch in der mathematischen Forschung sehr aktuell, natürlich auf einem weit höheren technischen Niveau. Am Ende dieses ganz elementar gehaltenen Kurses versteht der Schüler einige natürliche Fragen, die bis heute offen sind, etwa ob es nichttriviale Knoten mit trivialem Jones-Polynom gibt. In wenigen mathematischen Disziplinen kann man so schnell und elementar an die Front aktueller Forschung geführt werden.

Worum geht es inhaltlich? Ein Knoten ist eine geschlossene Raumkurve ohne Selbstdurchdringungen, wobei wir zwei Knoten als gleich betrachten, wenn sie ineinander deformiert werden können. Am besten stellen wir uns einen Knoten als ein Stück Schnur vor, dessen Enden miteinander verbunden sind. Solche Knoten können sehr kompliziert sein; sind zwei Knoten gegeben, ist es in der Regel alles andere als offensichtlich, ob sie gleich sind, d. h. ineinander verbogen werden können. Man kann nun versuchen, eine Deformation durch Probieren zu finden. Gelingt dies, weiß man, die Knoten sind gleich. Gelingt es, nach sagen wir zwei Stunden, noch immer nicht, besagt dies natürlich nichts. Die Knoten könnten verschieden sein, aber vielleicht haben wir uns auch einfach zu dumm angestellt. Wie kann man sicher nachweisen, dass zwei Knoten tatsächlich verschieden sind?

Derartige Fragen treten in der Mathematik häufig auf und werden in der Regel durch die Einführung geeigneter Invarianten beantwortet. Wir wollen daher geschlossenen Raumkurven Invarianten zuordnen, die sich bei Deformation nicht ändern. Haben wir dann die Invarianten zweier Knoten berechnet und festgestellt, dass sie verschieden sind, müssen auch die beiden Knoten verschieden sein. Die Suche nach einer Deformation können wir uns dann also sparen. Diese Invarianten können als Werte Zahlen annehmen oder Polynome oder etwas ganz anderes. Sie sollten nicht zu kompliziert sein, damit sie praktisch berechenbar bleiben, aber auch nicht zu einfach, damit sie möglichst viele verschiedene Knoten unterscheiden können.

Da sich schlecht mit Raumkurven praktisch rechnen lässt, arbeitet man statt dessen mit Knotendiagrammen, d. h. mit dem Schatten des Knotens unter einer geeigneten Projektion in die Ebene. Wann zwei Knotendiagramme zum selben Knoten gehören, ist seit langem bekannt und führt auf die so genannten Reidemeister-Schritte, wie im ersten Kapitel des Buches erklärt. Man kann daher Knoteninvarianten dadurch konstruieren, dass man Knotendiagrammen Objekte zuordnet und dann überprüfen muss, dass diese sich nicht nur bei Deformationen des Diagramms, sondern auch bei Reidemeister-Schritten nicht ändern. Dieses Verfahren wird im Themenheft erstmals in Kapitel 5 am Konzept der Dreifärbbarkeit erläutert. Die Invariante nimmt in diesem Fall nur zwei mögliche Werte an, nämlich „ja“ oder „nein“, je nachdem ob das Diagramm dreifärbbar ist oder nicht. Mit dieser noch recht schwachen Invariante kann man immerhin schon sehen, dass das Kleeblatt ein nichttrivialer Knoten ist und auch nicht mit dem Achterknoten übereinstimmt. Auf ähnliche Weise werden in den Kapiteln 6 und 7 stärkere Invarianten auf elementare Weise konstruiert und an Beispielen erläutert, nämlich die Verschlingungszahl und das Jones-Polynom. Des Weiteren gibt es je ein Kapitel über Kreuzungszahlen, über Spiegelbilder von Knoten sowie über Primknoten. Ähnlich wie natürliche Zahlen in eindeutiger Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden können, kann jeder Knoten eindeutig aus so genannten Primknoten zusammengesetzt werden, so dass man sich auf deren Studium beschränken kann.

An mathematischen Vorkenntnissen wird vom Schüler wenig verlangt. Erst im letzten Kapitel ist eine gewisse Sicherheit bei algebraischen Umformungen erforderlich. Der Text wurde in Schweizer Schulen erprobt. Die ersten fünf Kapitel eignen sich durchaus für die gymnasiale Mittelstufe, die beiden letzten Kapitel sollten erst in der Oberstufe eingesetzt werden.

Die meisten der hier benutzten Konzepte lassen sich am besten anhand von Beispielen erklären. Der Lehrer sollte z. B. die Modifikation von Knotendiagrammen mittels Reidemeister-Schritten an einigen Beispielen vorführen und dann die Schüler selbst andere Beispiele probieren lassen und dabei Hilfestellung leisten. Für das Selbststudium dagegen eignet sich der Text meiner Einschätzung nach weniger; die Gefahr, dass ein Schüler eine Definition nicht richtig auffasst und dann ohne fachliche Anleitung nicht mehr weiterkommt, scheint mir doch sehr groß.

Es finden sich 76 Aufgaben von angemessenem Schwierigkeitsgrad mit Lösungshinweisen. Zahlreiche, meist recht schlichte Abbildungen illustrieren den Text.

Im ersten Kapitel werden sowohl Knoten als auch Knotendiagramme eingeführt. Dieser begriffliche Unterschied ist wichtig und führt, wie bereits erwähnt, zu den Reidemeister-Schritten.

Um so ärgerlicher fand ich, dass später im Text dort, wo von Knotendiagrammen die Rede sein müsste, häufig von Knoten gesprochen wird. Im 7. Kapitel werden Knoten ihre Klammerpolynome zugeordnet, um dann festzustellen, dass das gar nicht möglich ist, da das Klammerpolynom nicht unter allen Reidemeister-Schritten invariant ist. Man hätte das Klammerpolynom einem Knoten*diagramm* zuordnen müssen, um diese unnötige Verwirrung zu vermeiden. Es gibt weitere vermeidbare Ungenauigkeiten. So wird beispielsweise beim Lösungshinweis zu Aufgabe 37 übersehen, dass man begründen muss, warum die in einem Fall verloren gegangene dritte Farbe irgendwo anders im Diagramm wieder auftauchen muss. Das macht die Aufgabe weit schwieriger als von der Autorin wohl geplant.

Trotz dieser kleineren Mängel halte ich das Buch für einen sehr willkommenen Beitrag. Es kann dem Lehrer als gute Grundlage zur Konzeption einer AG zur Knotentheorie dienen. Die Knotentheorie kann eine wunderbare Bereicherung des Mathematikunterrichts sein. Insofern war dieses Buch überfällig.

Meike Akveld: *Knoten in der Mathematik – Themenheft Topologie*, DMK, Orell Füssli, Zürich 2007, ISBN 978-3-280-04050-8

**Gilbert Greefrath und Jürgen Maaß (Hg.)**

# Istron. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht: Unterrichts- und Methodenkonzepte

Rezensiert von ~~Jürgen Maaß~~ Stefan Götz

~~Die~~ 1990 in Istron Bay auf Kreta gegründete internationale Gruppe von Mathematiker/innen und Fachdidaktiker/innen hat es sich zum Ziel gemacht, durch Koordination und Initiierung von Innovationen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts auf insbesondere europäischer Ebene beizutragen. Der Schwerpunkt der Aktivitäten dabei ist die Förderung von möglichen Realitätsbezügen des Mathematikunterrichts. In diesem Zusammenhang entstandene Initiativen sollen sowohl in inhaltlicher als auch in personeller Hinsicht lokal und international vernetzt werden. Eine Frucht dieser Bemühungen ist die in der Überschrift genannte Schriftenreihe, deren erster Band 1994 herausgekommen ist. Alle Bände sind im Verlag Franzbecker erschienen. Weitere Informationen finden sich auf der Internetseite http://istron.wentsch.info/index.php/home2.html (6. Jänner 2008).

Der vorliegende bislang letzte Band 11 widmet sich vor allem der Beschreibung der Methoden, mit denen ein bestimmtes Thema im Unterricht realisiert worden ist. Dabei wird von der – leicht nachvollziehbaren – These ausgegangen, dass bestimmte Themen bestimmte Methoden verlangen abhängig von den konkreten Lehrzielen, die man dabei verfolgt. Daher wird in den Beiträgen nicht nur der Schilderung der inhaltlichen Komponente Raum gegeben, sondern auch die jeweilige Methode und die damit verbundenen Intentionen (und erhaltenen Ergebnisse) werden jeweils genau beschrieben. Besonderer Wert wird dabei wegen der erhofften Nachhaltigkeit auf selbständiges Problemlösen gelegt.
Die einzelnen Beiträge gliedern sich in solche zur Primarstufe (einer), zur Sekundarstufe I (neun) und zur Sekundarstufe II (fünf).

Von *Regina Dorothea Möller* stammt der Beitrag zur Grundschule mit dem Titel „Zur Modellierung ökonomischer Kontexte in der Grundschule“. Anhand des Themas „Geld“, welches die Materialisierung des abstrakten, durchaus subjektiven Begriffes „Wert“ darstellt, werden gewisse ökonomische Grundeinsichten wie der durch das Geld möglich gewordene Vergleich aller Waren und Dienstleistungen vermittelt. Die beschriebenen thematischen Unterrichtseinheiten „Rund um den Flohmarkt“ zeigen eindrucksvoll, wie sehr die Verwendung von Geld zweckorientiert ist, es besteht dabei Handlungsinteresse, nicht Erkenntnisinteresse wie z. B. bei physikalischen Vorgängen.
Ein anderer Themenkreis, „Ware-Preis-Aufgaben“, stellt das Selbstmodellieren durch Schüler/innen in den Vordergrund, der funktionale Charakter der behandelten Beziehungen wird dabei untersucht. Insgesamt ein sehr überzeugender Beitrag!

Der Beitrag „Von Strichcode bis ASCII – Codierungstheorie in der Sekundarstufe I“ von *Anita Dorfmayr* widmet sich der Verschlüsselung von Informationen und einfachen Möglichkeiten, Fehler bei der (anschließenden) Datenübertragung zu erkennen. Mittels konkreter Aufgabenstellungen, die sich u. a. auf einem angegebenen Arbeitsblatt befinden, wird die Selbsttätigkeit der Schüler/innen angeregt, das Basteln eigener Codes in der Gruppe hat sich besonders bewährt.
Die so entstandenen Codes werden auch miteinander verglichen, z. B. welche Übertragungsfehler wie gut erkannt werden können. Die geschilderten

Unterrichtserfahrungen zeigen das große Potential dieser Thematik für das mathematische Denken der Schüler/innen.

Ein ganz aktuelles Thema bringt der Beitrag von *Volker Eisen:* „Verändert sich unser Klima? – Auf dem Weg zum Funktionsbegriff in projektartiger Gruppenarbeit". (Zeitliche) Veränderungen bestimmter Größen können verschieden dargestellt werden: Tabelle, Diagramm, Graph, Funktionsterm etc. Eine offene Fragestellung mündet in eine projektartige Gruppenarbeit, die das Recherchieren von Daten, das Darstellen derselben und das Interpretieren der Ergebnisse bis hin zu Voraussagen vorsieht. In einem Forschungsheft werden nicht nur Ergebnisse, sondern auch individuell behandelte Fragestellungen, Schwierigkeiten, Probleme etc. dokumentiert. Auf einem Plakat („Speicher") wird der Arbeitsstand stichwortartig notiert. Ein Erarbeiten des Funktionsbegriffs passiert auf diese Weise nachhaltig, wie die späteren Erfahrungen des Autors zeigen. Die Umsetzung im Unterricht und die dabei gemachten Erfahrungen zeigt dieser Beitrag sehr genau.

Der aussagekräftige Titel des nächsten Beitrags „Schüler modellieren verschiedene Wachstumsprozesse" ist zugleich seine Inhaltsangabe. *Axel Hoppenbrock* bedient sich der Methode des Forschenden Lernens, um (z. B.) die Entwicklung der Weltbevölkerung zu untersuchen. Auch hier wird ein Forschungsheft eingesetzt. Die verschiedenen Herangehensweisen der Schüler/innen werden in diesem Beitrag sorgfältig beschrieben. Beeindruckend ist das präsentierte Beispiel des Heranziehens eines Modells für das Bakterienwachstum aus dem Biologie/Chemieunterricht durch einen Schüler, um die Exponentialfunktion zu gewinnen.

„Konkurrenzgrenzen mit GeoGebra" heißt der Artikel von *Gerda Jurkowitsch*, der ein wirtschaftsmathematisches Thema bringt: Ein potentieller Käufer interessiert sich für ein bestimmtes Konsumgut, wofür es zwei Anbieter gibt. Je nach Modellierung sind die Anschaffungskosten und/oder die Transportkosten pro km der beiden Anbieter verschieden. Abhängig vom Standort (des Käufers) soll entschieden werden, welcher der günstigere Anbieter ist. Jene Orte, von denen aus die beiden Angebote gleich teuer (oder billig) sind, bilden die sogenannte Konkurrenzgrenze. Zum Teil sind die vorgestellten Modelle in diesem Beitrag nur für die Sekundarstufe II geeignet, wie auch vermerkt wird. Die Bearbeitung erfolgt mit Hilfe des Softwarepakets GeoGebra, welches Elemente dynamischer Geometriesoftware (DGS) mit solchen eines Computeralgebrasystems (CAS) verbindet. Die sehr breite Darstellung auch des einfachsten Modells trägt vor allem Merkmale einer stoffdidaktischen reflektierten Analyse, die eingangs erwähnte Betonung der vorgeschlagenen Unterrichtsmethode kommt hier vielleicht ein wenig zu kurz.

Vom zweiten Herausgeber, *Jürgen Maaß*, stammt der Artikel „Ethik im Mathematikunterricht? Modellierung reflektieren!". Zur Thematik „Heizkosten gerecht verteilen" werden verschiedene Berechnungsmodelle vorgestellt, die es gilt zu analysieren und daraufhin begründet zu entscheiden. Gemäß der zugrundeliegenden Idee des in Rede stehenden Bandes wird die Methode der Entscheidungsfindung detailliert diskutiert. In Gruppenarbeit sollen die einzelnen Vorschläge (oder Mischformen davon) aufbereitet und vor der Klasse präsentiert werden. Dabei müssen Argumente vorgebracht, auf andere eingegangen werden, schließlich wird per Abstimmung(en) eine Entscheidung herbeigeführt. Last but not least werden jene Argumente, die sich als entscheidend herausgestellt hatten, noch einmal auf die dahinter stehenden Werte untersucht, um so ein lokales Wertesystem zu definieren, welches als ethisches angenommen werden kann. Ganz wichtig ist dem Autor dabei die zurückhaltende Rolle der Lehrkraft, die er über weite Strecken als moderierend und keineswegs (mit-)entscheidend sieht. Ein origineller Beitrag zur so oft in Sonntagsreden (Lehrplänen) gewünschten Miteinbeziehung ethischer Aspekte in den Mathematikunterricht!

„Sprouts – ein Strategiespiel für zwei Personen" stellt *Andrea Müller* vor, im Mittelpunkt steht dabei die Entwicklung einer Gewinnstrategie. In diesem Beitrag steht die inhaltliche Komponente eindeutig im Vordergrund, nur wenige Hinweise zur Methodik finden sich. Dennoch eine schöne Anregung für eine Mischform aus offenem Unterricht (Spielphase, deren Eindrücke gesammelt werden müssen) und angeleitetem (Analyse der eingegangenen Ergebnisse).

Im darauffolgenden Beitrag von *Franz Picher*, „Spiele und Texte als Reflexionsanlässe – Mathematik als soziales Reflexionsmittel", ist die Betonung gerade umgekehrt: die Gestaltung des Unterrichts wird sehr ausführlich dargestellt, ebenso die (Re-)Aktionen der Schüler/innen. Rund um das Gefangenendilemma und andere Spiele und (mathematische) Texte wird die Mathematik als Darstellungs- und Kommunikationsmittel eingebracht, die als (mächtiges) Hilfsmittel zur Reflexion verwendet werden kann. Es zeigt sich, dass Schüler/innen in sehr unterschiedlichem Maße der Aufforderung zur Reflexion nachgehen: es gibt jene, die durch Texte angeregt werden, sich in eine Sache weiter zu vertiefen, und da sind andere, die immer wieder durch neue Spiele ermuntert werden (müssen), über eine gute Taktik (kurzzeitig) nachzudenken. Die – reflektierte – Schilderung des Umgangs der Schüler/innen mit der ungewohnten Rolle von Mathematik ist sehr interessant, sie wird nur auf der vorletzten Seite des Artikels durch eine falsche Spaltenaufteilung des Textes getrübt.

*Dieter Volk* beschreibt fast akribisch sein Projekt „$CO_2$-Zeiger in der Fahrgastzelle – Ein Armaturenbrett mit Klimafaktor“ indem er seine Vorgehensweise und die (Re-)Aktionen seiner Schüler/innen im genauen zeitlichen Ablauf darlegt. In erfrischender Weise werden verschiedene Modellierungen des Themas „$CO_2$-Ausstoß eines PKWs“ erarbeitet, man bekommt einen sehr authentischen Eindruck des Erkenntnisprozesses in der Klasse. Von der Erhebung der Daten bzw. (technischer) Informationen über die mathematische Modellierung bis zur Erkenntnis und Reflexion erlebt der Leser/die Leserin hautnah, was passiert ist, worauf zu achten ist und warum dieser oder jener Weg eingeschlagen worden ist. „Der rechte Fuß im Auto ist der Klimafuß“ – dem ist nichts mehr hinzuzufügen!

Die „Körperwelten – Modellierung realer Körper mit Präsentation“ von *Antonius Warmeling* „schlagen eine Brücke zwischen zwei Welten, zwischen der Schärfe der Mathematik und der Unschärfe im ‚Rest der Welt‘“. Arbeitsblätter zeigen Abbildungen z. B. von realen Objekten oder graphischen Statistiken oder aus Comics oder von technischen Skizzen. Dazu sollen Fragen wie z. B. nach der realen Größe bestimmter Baudetails beantwortet werden. Die ebenfalls abgedruckten Lösungsvorschläge zeigen, dass im Wesentlichen sämtliche zur Beantwortung notwendige Information in den Abbildungen steckt. In Gruppenarbeit findet die Bearbeitung statt, schriftliche Ausarbeitungen dokumentieren den Arbeitsprozess. Mit Plakaten (Poster Walk) oder Folien werden die Ergebnisse präsentiert. In der nachfolgenden Klassenarbeit wird ebenfalls eine entsprechende Aufgabe gestellt. Die präsentierten Beispiele regen zur Nachahmung an, die dazugehörigen Schüler/innenlösungen enthalten zum Teil sehr kreative Ansätze der Modellierung.

Der erste Herausgeber, *Gilbert Greefrath*, beschreibt in seinem Artikel „Mathematisch Modellieren lernen – ein Beispiel aus der Integralrechnung“, wie die Füllhöhe in einem Öltank von der Füllmenge abhängt. Für verschiedene Formen des Tanks wird diese Zuordnung bestimmt und mit der tatsächlichen Peiltabelle verglichen. Die zum Teil schon recht diffizilen Auswertungen passieren mit der Unterstützung eines CAS, die Ergebnisse zeigen für gewisse Modelle nur sehr geringe Abweichungen von der Realität. In Gruppenarbeit sind die einzelnen Tankformen analysiert worden, die Methode des „Gruppenpuzzles“ bringt dann Vertreter/innen der unterschiedlichen Modelle zusammen, um die jeweiligen Erkenntnisse zu diskutieren. Ein sehr anspruchsvolles Thema für die Sekundarstufe II, welches in eindrucksvoller Manier sowohl inhaltlich als auch methodisch dargestellt wird!

„Die Vase“ heißt der Beitrag von *Henning Körner*, in dem die Querschnittsfigur einer realen Vase modelliert wird. Wiederum passiert die Bearbeitung verschiedener Ansätze in einzelnen Gruppen, wobei der Einsatz von CAS eine wichtige Rolle spielt. Die einzelnen Zwischenergebnisse werden genau dokumentiert, bis schließlich mit Hilfe der Spline-Interpolation ein befriedigendes Ergebnis erzielt wird. Gruppenprotokolle im Anhang geben Aufschluss über die Erkenntnisgewinnung der Schüler/innen, ein Übungsblatt zu den Splines und eine Klausuraufgabe (mit Lösung, es sollen zwei geradlinige Straßenstücke in bestimmter Weise miteinander verbunden werden) runden den Artikel ab. Auch dieser Beitrag zeigt, wie auf hochstehendem Niveau (angeleitete) Selbsttätigkeit der Schüler/innen zu wirklich schönen Ergebnissen führen kann!

Von *Udo Mühlenfeld* stammt ein weiterer Beitrag zu einem Thema der Analysis, „Einführung der Differenzialrechnung – Lernen an Stationen“, womit auch seine Methode schon genannt ist. Von der die Erstellung eines Höhenprofils für eine Tourenbeschreibung über das Herausrutschen eines Autos aus der Kurve und dem Unterwegssein mit einer Pistenraupe bis zum Bau einer Sprungschanze spannt sich der Bogen der Stationen. Ein buntes Programm also, welches viele Anregungen mit sich bringt und auch die Schattenseite dieser Unterrichtsform, nämlich den hohen Zeitaufwand der Vorbereitung thematisiert.

Zur Stochastik ist der nächste Beitrag zu zählen, er handelt von „Brustkrebs, AIDS und BSE – Medizinische Tests im Unterricht“ und stammt von *Guido Pinkernell*. Anhand von realen Befunden, Zeitungsmeldungen etc. auf Arbeitsblättern wird mit Hilfe der Daten Prävalenz, Sensitivität und Spezifität eines Tests und des Bayes'schen Theorems der positive predictive value (ppV) bestimmt. Eine (leider nicht ganz richtige) systematische Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeiten der eben erwähnten Parameter auf den ppV mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms verschafft eine gewisse Übersicht. Es handelt sich sicherlich um ein wichtiges Thema, welches hier (einmal mehr) angesprochen wird. Die Arbeitsblätter werden in Gruppenarbeit behandelt, ein Gruppenpuzzle (siehe oben!) bringt Gemeinsamkeiten scheinbar verschiedener Themenstellungen ans Licht.

Ein Beitrag zur Analysis schließt den Band ab: „Kumulation statt Flächeninhalt – Integralrechnung mit Werkzeugen und in Gruppenarbeit“ von *Ursula Schmidt*, der Titel verrät schon Einiges. Das Einstiegsbeispiel handelt von Zu- und Abflussraten bei einem Pumpspeicherkraftwerk, die Gesamtmenge des Wassers im Speicherbecken gilt es zu eruieren, was zunächst punktweise passiert (Treppen- bzw. stückweise lineare Funktion), dann näherungsweise (Parabel, Annäherung durch Trapeze), und schließlich mit Hilfe einer Stammfunktion. In der Übungsphase wird anhand von anderen Beispielen wie Schadstoffemissionen, Spirometer (Luftmenge in der Lunge), rote Welle (Verkehr) und Heißluftballon (gegeben ist ein Zeit-Geschwindigkeits-Graph) in Gruppenarbeit vertieft, die einzelnen Ergebnisse mit Plakaten präsentiert (Museumsgang, die Methode des Gruppenpuzzles liefert für jedes Plakat eine/n kompetente/n „Führer/in“). Der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln wie Tabellenkalkulationsprogramme oder CAS durchzieht den gesamten Bericht, über ihre Zuhilfenahme und die Art der Herangehensweise (z. B. welche Art der Näherung verwenden wir?) entscheiden die Schüler/innen in den Gruppen selbst. Insgesamt eine sehr überzeugende Abhandlung eines Aspekts der Differential- und Integralrechnung, nämlich die Interpretation des Integrierens als Berechnung der Gesamtänderung aus den Momentanänderungen, der in der Schulmathematik vielleicht im Allgemeinen zu wenig betont wird.

Hinweise auf die bisher erschienenen ISTRON-Bände (dort wird auch ein Band Null angeführt!) und die Adressen der Autor/innen stehen am Ende des in Rede stehenden Bandes.
Insgesamt lässt sich feststellen, dass der Intention der beiden Herausgeber, nämlich die im Unterricht verwendete Methode nicht hinter der inhaltlichen Beschreibung der jeweiligen anwendungsorientierten Themen zurückstehen zu lassen, über weite Strecken in diesem Band vollauf Genüge getan wird. Damit wird der Leser/die Leserin noch bestimmter eingeladen, doch die eine oder andere Anregung für den eigenen Unterricht aufzugreifen, und das war wohl der pragmatische Grund für die Vorgabe der beiden Herausgeber.
Die Ergebnisse aus den Gruppenarbeiten sind beeindruckend, ebenso zeigt die inzwischen selbstverständlich gewordene Verwendung neuer Medien im Mathematikunterricht – vielfach durch die Schüler/innen in eigenständiger Wahl – die tiefgreifenden Veränderungen, die mehr und mehr auch den „normalen“ Mathematikunterricht ergreifen. Bei Themen die die mannigfachen Anwendungen der Mathematik in den Mittelpunkt rücken wird dies natürlich besonders deutlich.
Bei der Lektüre ist dem Rezensenten wieder einmal aufgefallen, wie wenig die herkömmlichen Prüfungsmodalitäten (offenbar auch in Deutschland, Hinweise auf Klassenarbeiten belegen diesen Eindruck) auf die modernen Themen und Methoden des Mathematikunterrichts zugeschnitten sind. Hier muss besser früher als später eine entsprechende Reform erfolgen! Ansonsten ist die Gefahr groß, dass trotz (wie in diesem Band) dokumentierter Beispiele von good practice die Verbreitung innovativer Ansätze ins Stocken gerät.
Die schillernde Palette der angesprochenen Themen in diesem Band demonstriert einmal mehr, wie reichhaltig der Mathematikunterricht werden kann, wenn man Anwendungen mit berücksichtigt. Themen dazu finden sich von der Primarstufe bis in die Sekundarstufe II in jeder gewünschten Komplexität. Dem wird auch durch die Wahl geeigneter Methoden Rechnung getragen, wie dieser Band eben zeigt. Insofern passt er perfekt in die ISTRON-Reihe und ist ein Garant dafür, dass noch viele Bände dieser Reihe folgen werden.

Gilbert Greefrath, Jürgen Maaß (Hrsg.) *Istron. Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, Bd. 11: *Unterrichts- und Methodenkonzepte*. Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin 2007.
ISBN 978-3-88120-451-4

## Regina Bruder, Timo Leuders und Andreas Büchter

# Mathematikunterricht entwickeln

Rezensiert von Jürgen Maaß

Stoffdidaktik ist in der Mathematikdidaktik seit einigen Jahrzehnten nicht mehr das zentrale Thema. Und innerhalb der Stoffdidaktik war die Beschäftigung mit Aufgaben vielleicht auch infolge der Berechtigung der Kritik Lennés (1969) an der Aufgabendidaktik wiederum ein Randthema, das hauptsächlich SchulbuchautorInnen interessiert(e). „Lennés Kritik richtete sich zu Recht gegen das verbreitete „Päckchenrechnen“ und damit gegen eine einseitige Verwendung von Aufgaben zum meist sinnleeren Eintrainieren von mathematischen Verfahren.“ (S. 18). Deshalb mag es auf den ersten Blick überraschen, Aufgaben als Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten in einem ganz neuen Buch zu finden. Ab dem zweiten Blick auf die heutige Situation wird die Überraschung geringer: Mit den internationalen Vergleichstests (TIMSS, PISA,...) und den nationalen Standardtests werden Aufgaben ins Zentrum der Aufmerksamkeit gerückt. Gute Testaufgaben werden gesucht, schlechte kritisiert und über die Aussagekraft und Interpretationsreichweite von Prozentanteilen gelöster Aufgaben wird gestritten. Dieses Buch ist jedoch kein Buch mit Trainingsaufgaben für den nächsten Vergleichstest, sondern eine breit angelegte Hilfe für alle LehrerInnen, die aus den üblichen Aufgaben mehr machen wollen oder andere Aufgabentypen einsetzen möchten. Dahinter stecken auch Forschungsresultate der Mathematikdidaktik: „Inzwischen wurde das Potential entdeckt, das in Aufgaben stecken kann, wenn man den Begriff der Aufgabe viel weiter fasst und auch versucht, Aufgaben zu „öffnen“. Aufgaben sind *Aufforderungen zum Ausführen von Lernhandlungen*“ (S. 18). In diesem Sinne wird im folgenden über Typen von Aufgaben und Möglichkeiten nachgedacht, sie für das Initiieren von Lernprozessen auf vielfältige Weise zu nutzen. Didaktischer Hintergrund und praktische Beispiele wechseln dabei ab. Neben der Auseinandersetzung mit dem Begriff Kompetenz und den Lehrzielen Selbstständigkeit und Kooperation im Mathematikunterricht fördern finden sich Kapitel zur vielseitigen Arbeit mit Aufgaben, zu Hausaufgaben und zur Leistungsmessung. Als dies wird an Beispielaufgaben und Ideen für ihren Einsatz in der Schulpraxis diskutiert und demonstriert. LehrerInnen können und sollen diese „Bausteine“ gut für ihren Unterricht nutzen. Mein einziger Kritikpunkt ist der Umfang: Das Buch sollte 500 statt 200 Seiten haben oder zumindest bald einen Folgeband.

Regina Bruder, Timo Leuders und Andreas Büchter: *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*, Verlag Cornelsen/Scriptor, Berlin 2008, ISBN 978-3-589-22569-9, 192 S., Euro 17,95

## Gerd Hinrichs
# Modellierung im Mathematikunterricht

Rezensiert von Jürgen Maaß

Aus der Praxis für die Praxis ist im doppelten Sinn das Motto und das Ziel dieses – wie es in der Verlagsbeschreibung heißt – „ersten Lehrbuches“ zum Modellieren im Mathematikunterricht. Einerseits ist der Autor, Gerd Hinrichs, erfahrener Lehrer und Lehrerausbildner und schreibt deshalb sein Buch offenbar ganz bewusst so, dass andere LehrerInnen es gut nutzen können, die selbst einen Schritt weg vom üblichen und oft gescholtenen Routineunterricht zum Modellieren im Mathematikunterricht wagen wollen. Dazu gibt es im Buch sowohl motivierende Begründungen aus verschiedenen Quellen von fachdidaktischer Literatur (etwa Blum, Heymann oder Maaß) bis zu Zitaten aus offiziellen Texten der KMK zu Standards. Zwischenfazit: Modellieren ist nicht ein exotisches Steckenpferd oder etwas, was zusätzlich zum üblichen Stoff gemacht werden sollte, wenn Zeit dafür bleibt, sondern unerlässlich für den Mathematikunterricht. Solchermaßen motiviert erfahren die lesenden LehrerInnen nun in vielen Beispielen aus allen Schulstufen, was sich alles modellieren lässt und wie es im Unterricht tatsächlich gemacht werden kann (durch methodische Hinweise und Beispiele). Über die von Hinrichs ausgeführten Beispiele hinaus gibt es im Buch sogar noch ein Fülle weiterer Themenvorschläge und kommentierter Literaturhinweise dazu (ISTRON, MUED, etc.). Damit eignet sich das Buch nicht nur zur individuellen Fortbildung von LehrerInnen, sondern auch als Lehrbuch zur Ausbildung.

Die andere und ebenso wichtige Seite des doppelten Praxisbezuges betrifft die SchülerInnen. Auf ihre Fragen: „Warum soll ich das lernen?“ Und „Wozu brauche ich das einmal?“ (S. v im Vorwort) bietet realitätsbezogener Mathematikunterricht mit Themen aus Beruf und Alltag, aus der aktuellen und künftigen Lebenswelt der SchülerInnen viele überzeugende Antworten. Schon eine kleine Auswahl der im Buch (auch aufgrund von vielen Literaturquellen dazu) behandelten Themen verdeutlicht das: Einkaufen, Klassenfest vorbereiten, Stau auf der Autobahn, Tennisturnier planen, Gangschaltung am Fahrrad, Kredite, Kabelrolle, Verpackungsoptimierung, Populationsdynamik und viele Fermi-Probleme. Selbstverständlich reicht es nicht, in der Schule solche Themen zu erwähnen oder über sie vorzutragen. Vom Zuschauen lernen die Kinder nur wenig. Mit einer angemessenen Methodik bietet das Modellieren sehr viele Möglichkeiten für entdeckendes Lernen und auch damit für nachhaltigen Lernerfolg.
Ich wünsche mir, dass viele LehrerInnen das Buch nutzen, um in ihrem Unterricht tatsächlich mehr und besser zu modellieren – zum Wohle ihrer SchülerInnen und zu ihrem eigenen Vergnügen: Es macht Spaß, wenn man durch selbst erstellte mathematische Modelle die Welt besser versteht!

Gerd Hinrichs: *Modellierung im Mathematikunterricht*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2008, ISBN 1-978-3-8274-1938-5, 348 S., 22 EUR.

**Renate Tobies (Hg.)**

# Aller Männerkultur zum Trotz

## Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik

Rezensiert von Jürgen Maaß

Genderfragen werden auch in der Ausbildung von MathematiklehrerInnen immer wichtiger, sie erobern Fixplätze in Studienplänen. Das vorliegende Buch eröffnet gute Möglichkeiten, sich dem Thema sachlich aus historisch – analytischer Sicht zu nähern. Anhand von Biographien hervorragender Wissenschaftlerinnen wird gezeigt, wie schwer sie es hatten, etwas als erste Frau eine Studienberechtigung zu erhalten, einen Vortrag auf einer wissenschaftlichen Tagung zu halten (oder auch nur zu hören) und offizielle Qualifikationsarbeiten bis zur Habilitation verfassen zu dürfen. Massive Hindernisse aus gesellschaftlichen Vorurteilen und Barrieren konnten nur aufgrund von großer individueller Leistung und besonderer Förderung überwunden werden. Erst wenn der Damm gebrochen und eine generelle Zugangserlaubnis bzw. eine allgemeine Studienmöglichkeit auch für Frauen geschaffen war, konnten mehr Frauen den Weg zu Mathematik, Naturwissenschaften und Technik einschlagen und erfolgreich beschreiten.
Im Einzelnen beinhaltet das Buch folgende Beiträge:



Im Vergleich zur ersten Auflage von 1997 wurde das Buch sehr umfassend überarbeitet. Nicht nur die Erweiterung im Titel (Technik) ist neu bzw. neu überarbeitet, sondern viele Beiträge, insbesondere von Binder, Koreuber/Tobies (über Emmy Noether) und Tobies (Transdisziplinarität – ForscherInnen in der elektrotechnischen Industrie).

Tobies, R. (Hg.): *„Aller Männerkultur zum Trotz". Frauen in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. 2. (wesentlich erneuerte und erweiterte) Auflage, Campus Verlag: Frankfurt am Main/New York (April 2008), ISBN 9783593386140, 364 Seiten, Euro 32,90

# Thomas Jahnke und Wolfram Meyerhöfer (Hg.)

# Pisa & Co. Kritik eines Programms

Rezensiert von Jürgen Maaß

Über PISA und die Folgen wird innerhalb und außerhalb der Mathematikdidaktik intensiv diskutiert. Das von Jahnke und Meyerhöfer herausgegebene Buch sammelt verschiedene Arten von Kritik an PISA & CO und wendet sich laut Vorwort an „LehrerInnen, SchülerInnen, Schuladministration, BildungspolitikerInnen, die an PISA&Co beteiligten und an die nicht beteiligten WissenschaftlerInnen" (X, XI). Nicht alle Beiträge und sicher nicht alle Argumente in den verschiedenen Beiträgen sind für alle LeserInnen verständlich und fachlich bzw. sprachlich nachvollziehbar, aber es finden sich im Buch für alle angesprochenen Zielgruppen lesenswerte Beiträge und Argumente. Der Hauptunterschied zur ersten Auflage ist der wesentlich erweiterte und deutlich überarbeitete Beitrag von Wuttke, der damit auf Kritik an der in der ersten Auflage gedruckten Version seiner Überlegungen reagiert hat.
Die Beiträge sind in drei Kapiteln zusammengefasst:

1. PISA & CO global (gesellschaftliche und bildungspolitische Überlegungen)
2. PISA & CO konkret (Kritik am Test, der Analyse der Ergebnisse und ihrer Interpretation)
3. Wirkungen (auf Schule und Gesellschaft).

Im ersten Beitrag zum ersten Kapitel setzt Thomas Jahnke sich mit der Ideologie von PISA&Co auseinander. „Unter Ideologie will ich nicht mit Marx ein notwendig falsches Bewusstsein verstehen, aber auch nicht nur eine harmlose Arbeitsphilosophie, sondern die gedanklichen und wissenschaftlichen Grundlagen des PISA – Unternehmens, also die geistigen Prämissen oder Pfeiler empirischer Forschung, die ja eine eigene Charakteristik hat und nicht selbstverständlich „die Realität" vermisst." (S. 13) Nachdem er verschiedene Phänomene im Umfeld von PISA&Co ideologiekritisch analysiert hat, kommt er zu dem Schluss: „In der Hintergrundphilosophie von PISA (deutsch) paart sich angelsächsischer Testpragmatismus und testpsychologischer Rigorismus in verhängnisvoller Weise mit deutschen Ernst und Tiefsinn, der die Welt ergründen will." (S. 17) Vielleicht agiert er selbst als Deutscher hier zu tiefgründig? Es könnte durchaus sein, dass hinter dem Unternehmen PISA nur wie hinter vielen anderen Unternehmen eine schlichte, aber nicht harmlose Arbeitsphilosophie steht, die sich mit der Frage nach Wegen zur Maximierung des Unternehmensgewinns charakterisieren lässt. Dabei haben natürlich wie in jedem Unternehmen keinesfalls alle Mitarbeitenden nur diese Motivation oder Philosophie.
Christine Keitel untersucht in ihrem Beitrag über den „(un)heimlichen Einfluss der Testideologie auf Bildungskonzepte, Mathematikunterricht und mathematikdidaktische Forschung" (S. 24 ff.) die Situation ebenfalls mit deutscher Gründlichkeit, aber mehr mit einem historischen und internationalen Hintergrund. Auch ihre Position ist kritisch: „Die Geschichte des Testens vermittelt die Erkenntnis, dass Testverfahren zwar kontinuierlich formale Verfeinerungen und enorme, ja überwältigende technische Verbesserungen und Verfeinerungen – nicht zuletzt durch den Computereinsatz – erhielten, dass aber die Grundannahmen des Testens keine substanzielle Entwicklung oder Veränderung erfahren haben; die impliziten Vorannahmen und Vorurteile sind dieselben, die fehlenden theoretischen Begründungen und auffälligen Widersprüche sind nicht beseitigt, sondern nur versteckter, die funktionalen Zwecke, denen es diente und immer noch dient, sind die gleichen." (S. 26)
Wolfram Meyerhöfer sieht „PISA&Co als kulturindustrielle Phänomene" (S. 59 ff.), weil nach seiner Ansicht diese Perspektive unser Verständnis dafür schärft, „warum dort kaum Erkenntnis produziert wird, warum Theorien lediglich als Feigenblatt für die Testerstellung gebraucht werden statt als Grundlage für Testerstellung und –interpretation zu dienen… und warum die Studien wie Industrieprodukte vermarktet werden." (S. 59). Sein expliziter Bezug auf Adorno erweitert den Horizont der Debatte um PISA weit über die Mathematikdidaktik hinaus, und seine Kritik gipfelt in dem

Resumé, dass PISA nicht die selbst gesetzte Aufgabe erfüllt, „den Regierungen der teilnehmenden Länder auf periodischer Grundlage Prozess- und Ertragsindikatoren zur Verfügung zu stellen, die für politisch – administrative Entscheidungen zur Verbesserung der nationalen Bildungssysteme brauchbar sind“ (wie das Deutsche PISA Konsortium 2001 schrieb), sondern allenfalls solche, die zur „Legitimierung von politisch – administrativen Entscheidungen, die aber mit dem Untersuchten nichts zu tun haben“ (S. 95) brauchbar sind.

Am Beginn des zweiten Kapitels steht Joachim Wuttkes neu bearbeiteter Beitrag über „die Insignifikanz signifikanter Unterschiede: Der Genauigkeitsanspruch von PISA ist illusorisch.“ (S. 100–246!) Auch wer die vielen Argumente zur Statistik und zu einzelnen Fragen an PISA nicht im Detail überdenken möchte, sollte seine einleitende Übersicht auf Reaktionen zu seinem Beitrag in der ersten Auflage lesen. Offenbar waren die PISA nahen Kritiker an dem ersten Beitrag nicht zu einer wissenschaftlichen Auseinandersetzung über die gestellten Fragen bereit (S. 99, 100, 201 ff, insbesondere S. 221, 222).

Eva Jablonka spürt der Verflüchtigung eines ambitionierten Testkonstrukts namens „Mathematical Literacy“ nach (S. 247 ff.), d.h. sie untersucht, „ob die in PISA – Punkten ausgedrückte Mathematikleistung als empirische Evidenz für das im Theorierahmen der Studie definierte Konstrukt der Mathematical Literacy betrachtet werden kann.“ (S. 249). Ihr Fazit: „Die Beschreibung des Konstrukts der Mathematical Literacy erscheint also nur als rhetorische Einkleidung des Tests.“ (S. 276).

Peter Bender beantwortet für die LeserInnen seine Frage „Was sagt uns PISA&Co, wenn wir uns auf sie einlassen?“ (S. 281 ff.) Vieles von dem, was aus PISA herausgelesen wird, wäre sehr vergnüglich, wenn es nicht so ernst wäre oder von entscheidenden Stellen so ernst genommen würde. Seriös und wissenschaftlich begründet lässt sich aus PISA viel weniger herauslesen. „Mathematische Kompetenz im Sinne von PISA“ ist ein “stark reduzierter Begriff im Vergleich zu dem, was man sich als gewöhnliche Mathematikdidaktikerin oder als gewöhnlicher Mathematikdidaktiker“ (S. 332) darunter vorstellt. PISA – Aktivisten sollten nach Bender auch und gerade in ihren öffentlichen Stellungnahmen auf diese Einschränkung deutlich hinweisen.

In seinen „Kritischen Anmerkungen zum Umgang mit den Ergebnissen von PISA“ (S. 340 ff.) untersucht Volker Hagemeister an einigen gängigen Beispielen, wie PISA – Ergebnisse politisch gedeutet bzw. in bildungspolitischen Streitfragen ge- und mißbraucht werden: Klassenfrequenz, Bild des Lehrers, Alter bei der Einschulung, Verkürzung der Schulzeit, zentrale Prüfungen und Vergleichsarbeiten und Ganztagsbetreuung. Abschließend geht er der Frage nach, weshalb Deutschland einen so unbefriedigenden Listenplatz beim Ranking erhalten hat (S. 365 ff.). Seine Antwort: Die Sprachprobleme von Migrantenkindern spielen eine große Rolle. Hier sind – nicht nur wegen PISA – Maßnahmen zu setzen.

In seinem Beitrag „Mathematik ‚in der Welt‘ und mathematische ‚Grundbildung‘ – Zur Konsistenz des mathematikdidaktischen Rahmens von PISA“ (S. 375 ff.) konzentriert sich Uwe Gellert auf die Frage, ob PISA sich zu recht auf Hans Freudenthal stützt. Er kommt zu dem Schluss, dass dieser Rückbezug „weniger auf einer vertretbaren Auslegung von Freudenthals Schriften basiert als auf einer oberflächlichen und womöglich gerade daher passend erscheinenden, wissenschaftliche Autorität jedoch vorspielenden, Anbindung an einen Mathematikdidaktiker, dessen Renommee außer Zweifel steht.“ (S. 389).

„PISA und die Bildungsstandards“ sind das Thema von Hans-Dieter Sill (S. 391 ff.). Aus seiner Sicht sind die aktuellen Trends zur Messung des Outputs bzw. des erreichten Standards direkte Folge der PISA Ergebnisse. Er warnt allerdings mit guten Gründen vor einem zu schnellen Wechsel von Input – zur Outputsteuerung und empfiehlt Arbeiten zur „Qualifizierung der Bildungsstandards im Fach Mathematik,“ (S. 428) die die „nicht durch Bildungsforscher bzw. das IQB in Auswertung von Tests geleistet werden können.“ Dazu bedarf es mathematikdidaktischer Expertise und Erfahrung.

In seinem zweiten Beitrag in diesem Buch „Testen, Lernen und Gesellschaft: Zwischen Autonomie und Heteronomie“ (S. 433 ff.) bezieht Wolfram Meyerhöfer den Trend zum Testen auf das Spannungsfeld von Selbst- und Fremdbestimmung, das Schulrealität stark beeinflusst. Eine gesellschaftliche Kontrolle, ein Test der Schule bzw. der SchülerInnen und damit indirekt auch der LehrerInnen ist offenbar ein Mittel, Autonomie einzuschränken, nach Meyerhöfer eine „Autonomiebeschädigung“ (S. 451).

Thomas Jahnke und Wolfram Meyerhöfer (Hrsg.): *Pisa & Co. Kritik eines Programms*, 2. erweiterte Auflage, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 2007. 469 Seiten, ISBN 978-3-88120-464-4, 16,80 Euro.

# Istron

Katja Maaß

Realitätsbezüge gehören in den Mathematikunterricht, darüber besteht seit langem Konsens innerhalb der Mathematikdidaktik. Im Mathematikunterricht setzt sich diese Idee jedoch nur langsam durch. Daher wurde 1991 die Istron-Gruppe gegründet. Ihr primäres Ziel ist es, die Implementierung von Realitätsbezügen und Modellieren im Mathematikunterricht voranzubringen. Die alljährliche Herbsttagung widmet sich daher einerseits der Vorstellung und Diskussion aktueller Forschungsergebnisse und andererseits der Durchführung einer Lehrerfortbildung. Darüber hinaus sind bereits 12 Bände einer Schriftenreihe für Lehrerinnen und Lehrer („Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht“) erschienen.

Um mehr Lehrende anzusprechen und mehr Verbreitung zu finden, gibt es eine neue Homepage von Istron unter www.istron-gruppe.de. Dort finden sich weitere Informationen zu Istron und den alljährlichen Tagungen. Die Informationen sind auf Deutsch und auf Englisch verfügbar. Interessenten sind herzlich zum Surfen eingeladen. Konstruktives Feedback und Anregungen sind willkommen.

Die nächste Istron-Tagung findet vom 7.–9. 11. 2008 in Darmstadt statt. Interessenten wenden sich bitte an Katja Maaß (katja.maass@ph-freiburg.de).

# Beiträge zum Mathematikunterricht 2008

Die Veröffentlichung der Tagungsbeiträge aus Budapest 2008 wird wie in den letzten Jahren auf zwei Wegen erfolgen:
Die CD wird allen Mitgliedern in einem Heft der Mitteilungen zugesandt. Alle Tagungsteilnehmer, die kein Mitglied der GDM sind, erhalten auf dem Postweg die CD.

Die Druckform und den Vertrieb der CD wird in diesem Jahr durch den WTM-Verlag erledigt.
Die Verlagsadresse ist:

WTM-Verlag Stein
Ferdinand-Freiligrath-Straße 26
48147 Münster

Email-Bestellungen sind auch möglich:
kontakt@wtm-verlag.de

Der Kaufpreis der gedruckten Fassung wird den Buchhandelspreis von 39,80 EUR betragen. Es besteht ab sofort die Möglichkeit, durch eine Subskription den Preis spürbar zu senken, nämlich auf 29,80 EUR incl. Porto. Die Subskription endet sechs Wochen nach dem Erscheinen der CD. Sie werden rechtzeitig über das Ende der Frist informiert.

# Protokoll der Mitgliederversammlung der GDM

## Montag 17. 3 .2008 in Budapest

Beginn: 17.10 Uhr
Ende: 18.45 Uhr
Ort: Eötvös Loránd Universität, Budapest

*TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung*

Der Versammlungsleiter verkündet, dass ordnungsgemäß und fristgerecht eingeladen wurde. Das in den GDM-Mitteilungen Nr. 83 (Juli 2007) S. 77–80 veröffentlichte Protokoll vom 29. März 2007 wird ohne Gegenrede per Akklamation genehmigt.
Die Tagesordnung wurde einstimmig angenommen.

*TOP 2: Bericht des Vorstands*

Hans-Georg Weigand berichtet über die Aktivitäten des Vorstandes:

- Jahr der Mathematik:
  a. Die Aktivitäten zum Jahr der Mathematik werden auf der Internetseite www.jahr-der-mathematik.de aufgelistet.
  b. Es wird ein eigenes Heft der GDM-Mitteilungen zum Jahr der Mathematik herauskommen. Es wird dazu aufgerufen, Aktivitäten zu beschreiben.
  c. „Fruchtbare Momente des Mathematiklernens“ sollen im Buchprojekt „Mathemagische Momente“ zusammengetragen werden. Es wird dazu aufgerufen, sich daran zu beteiligen. (Die Frist ist bis 15. 4.), Verantwortliche Gestalter sind Lisa Hefendehl-Hebeker, Timo Leuders und Hans-Georg Weigand. Im Herbst soll ein Buch herausgegeben werden und eine Großveranstaltung für Lehrerinnen stattfinden. Dieses Projekt wird von der Telekomstiftung finanziell unterstützt.
- Es gab eine Stellungnahme der GFD (Gesellschaft für Fachdidaktik) zur Verschiebung der Semesterzeiten, an der sich auch die GDM beteiligt hat Insbesondere wurde dort deutlich auf die Probleme mit den Praktika hingewiesen. Das Papier ist auf der Homepage der GFD einzusehen.
- Es wurde ein Arbeitskreis Lehrerbildung der GDM gemeinsam mit DMV und MNU eingerichtet. Beteiligte sind Hans-Dieter Rinkens, Horst Hischer, Rainer Danckwerts, Lisa Hefendehl-Hebeker, Timo Leuders, Ina Kersten, Gabriele Kaiser, Jürg Kramer, Bernd Wollring, Michael Neubrand, Günther Törner, Hans-Jürgen Elschenbroich. Dieser Arbeitskreis soll eine Empfehlung zur Lehrerbildung erarbeiten, die eine Stellungnahme zu den zu erwartenden KMK-Standards zur Lehrerbildung darstellen kann.
- Die GFD (Gesellschaft für Fachdidaktik) tagt nächstes Jahr in Kiel. Es ist der Wunsch der GFD, sich als Dachverband der Fachdidaktiken stärker zu etablieren. Daher ergeht die Bitte, dass sich verstärkt Mitglieder der GDM auf dieser Tagung beteiligen. Insbesondere sind Nachwuchswissenschaftler zur Teilnahme aufgerufen.
- Der MNU-Kongress 2009 wird in Regensburg stattfinden. Es ist der 100. Kongress. Die GDM ist zu einer besonderen Präsentation auf dem Kongress eingeladen.
- Kommende Jahrestagungen der GDM
  a. Tagungsort 2009 ist Oldenburg
  b. Tagungsort 2010 ist München gemeinsam mit der DMV (Überlegungen zur Tagungsstruktur laufen bereits).
  c. Tagungsort 2011 ist die PH Freiburg. Falls im März 2011 bereits Vorlesungszeit sein sollte, wird die Tagung Ende Februar stattfinden.
- Kooperationen auf Europäischer Ebene: Die GDM strebt an, sich auch auf europäischer Ebe-

ne stärker zu vernetzen. Dafür wurde vom Vorsitzenden eine Initiative mitbegründet: Cooperation between the Societies for Mathematics Education in European Countries. Ziele sind:
   a. Intensivierung der Zusammenarbeit auch auf organisatorischer Ebene.
   b. Koordination von Aktivitäten zur Lehrerbildung, Praktika, …
- Der Vorsitzende hat eine Aktion „Innovative Schulen“ gestartet. Ziel ist es, Schulen mit innovativen Projekten zur Mathematik vorzustellen. Es hat bisher mehr als 30 Meldungen gegeben, die auf der Homepage zusammengestellt werden.
- DoktorandInnenkolloquium: Termin ist der 15.–18. 9. 2008 in Potsdam. Es wird hierzu noch eine eigene Ausschreibung geben.
- Nachwuchsförderung: Seitens der GDM soll in Zukunft noch verstärkt eine Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses stattfinden. Zum einen können NachwuchswissenschaftlerInnen ohne volle Stelle Mittel zur Tagungsförderung beantragen. Zum anderen sollen Doktorandenseminare mehrerer Universitäten bezuschusst werden. Formlose Anträge sind an den Vorstand zu richten.
- Matheduc, Mathdi: Es ist geplant, zukünftig auch Buchrezensionen in die Datenbank zu stellen. Das FIZ bittet um die Mitarbeit von DidaktikerInnen. Eine Meldung für Rezensionen ist im Netz möglich.
- Dank an Mitglieder für die Unterstützung des Vorstandes:
   a. Dank an Susanne Prediger für die Online-Stellung der Beiträge zum Mathematikunterricht. Der Dank gilt insbesondere ihrem Mitarbeiter Michael Link.
   b. Dank an Thomas Jahnke für die Neugestaltung der Mitteilungen der GDM.
   c. Dank an alle Mitglieder, die den Vorstand unterstützt haben.

*TOP 3: DMV-Mitteilungen*

Mit den GDM-Mitteilungen werden gegenwärtig auch die DMV-Mitteilungen verschickt. ⅔ der zusätzlichen Druckkosten für diese Mitteilungen und das erforderliche Porto zahlt die GDM (Das sind insgesamt ca. 5,50 EUR pro Mitglied und pro Jahr für 4 Hefte).
Der Vorsitzende stellt den Antrag an die Mitgliederversammlung, der zuvor vom Beirat der GDM einstimmig unterstützt wurde, unter diesen Bedingungen die DMV-Mitteilungen weiterhin allen Mitgliedern zur Verfügung zu stellen.
Der Vorschlag ist einstimmig angenommen.

*TOP 4: Bericht des Kassenführers bzw. des Kassenprüfers*

Karel Tschacher legt den Bericht über die Finanzen der GDM vor. Der Bericht hängt dem Protokoll an. Er berichtet über die Umstellung des Kontos von der Postbank auf die Raiffeisenbank Heroldsberg.
Es wurden in diesem Jahr auch Erlöse aus Werbeeinnahmen bei den GDM-Mitteilungen und auf der Homepage erzielt.
Das JMD ist nach wie vor der größte Posten bei den Ausgaben.
Der Kassenführer schätzt die gegenwärtige Haushaltslage der GDM als gut ein.

*Bericht des Kassenprüfers*

Fritz Haselbeck bestätigt, dass er im Januar 2008 die Berichte des Kassenführers der GDM (Karel Tschacher) für das Jahr 2007 geprüft hat. Sämtliche Einnahmen und Ausgaben waren ordnungsgemäß gebucht. Fritz Haselbeck beantragt die Entlastung des Kassenführers für das Jahr 2007. Der Kassenführer wird einstimmig entlastet.
Vielen Dank an Karel Tschacher für die gute Kassenführung.

*TOP 5: Entlastung des Vorstands*

Für TOP 5 übernimmt Rainer Danckwerts den Vorsitz. Er stellt den Antrag, den Vorstand zu entlasten. Dieser Antrag wird einstimmig – unter Enthaltung der betroffenen Vorstandsmitglieder – angenommen.

*TOP 6: Wahlen*

a. Zweite(r) Vorsitzende(r), Schriftführer(in), Kassenprüfer(in)
   Rudolf vom Hofe wird zur Wahl für den 2. Vorsitzenden vorgeschlagen. Weitere Kandidaten stehen nicht zur Wahl.
   Es wurden 110 Stimmen abgegeben. Davon Ja 95, Nein 6, Enthaltungen 9. Rudolf vom Hofe nimmt die Wahl an.
   Katja Lengnink wird für die Wahl zur Schriftführerin vorgeschlagen, Thomas Jahnke soll die Mitteilungen weiterhin herausgeben.

Es wurden 114 Stimmen abgeben. Davon Ja 110, Nein 3, Enthaltungen 1.
Der Kassenprüfer Fritz Haselbeck wird einstimmig und ohne Enthaltung wiedergewählt.

b. Wissenschaftlicher Beirat
Es scheiden die folgenden Kandidaten aus: Timo Leuders, Edith Schneider, Eva Vasarhelyi und, Roland Keller. Sie werden alle zur Wiederwahl vorgeschlagen. Weitere Vorschläge werden nicht genannt.
Bei einer ungültigen Stimme werden gewählt: Roland Keller (102 Stimmen), Timo Leuders (102 Stimmen), Edith Schneider (102 Stimmen) und Eva Vasarhelyi (105 Stimmen).
Alle Kandidaten nehmen die Wahl an.

*TOP 7: Journal für Mathematikdidaktik (JMD)*

Den Bericht zur Situation des JMD übernimmt der Mitherausgeber Rolf Biehler, da der geschäftsführende Herausgeber Werner Peschek krankheitsbedingt verhindert ist.

▷ Er dankt zunächst dem aus dem Amt scheidenden Mitherausgeber Klaus Hasemann für seine langjährige engagierte Mitarbeit am JMD.
▷ Der Vertrag mit dem Teubner-Verlag wurde zum Ende 2009 mit dem Ziel gekündigt, Verbesserungen in den folgenden Bereichen auszuhandeln.
  – Die JMD-Hefte sollen auch online verfügbar sein. Dabei sollen auch zurückliegende Hefte digitalisiert werden.
  – Die technische Unterstützung der Autoren soll verbessert werden.
  – Das JMD soll weiter internationalisiert werden.
  – Der Preis und die Druckqualität sollen neu verhandelt werden.
▷ Die gegenwärtige Manuskriptlage ist nicht besonders gut:
  – 10 eingereichte Artikel,
  – 9 noch im Gutachterprozess,
  – 1 Prädikat Wiedereinreichung.
  Beim JMD besteht Offenheit für jedes gute Manuskript. Auch Artikel über Dissertationen sind erwünscht. Themenhefte sind vereinzelt möglich.

Herzlichen Dank an die Herausgeber des JMD, Werner Peschek, Rolf Biehler und Andrea Peter-Koop.

*TOP 8: ZDM, MATHEDUC, Mathematica Didactica*

*ZDM*
Gabriele Kaiser berichtet über die Situation des ZDM. Die Manuskriptlage ist sehr gut, die Hefte sind bis 2009 bereits gefüllt. Einzelbeiträge sind in Absprache mit den Heftherausgebern noch möglich. Demnächst werden die Hefttitel auch auf der Seite des ZDM vorangekündigt. Dann können dazu auch Beiträge eingereicht werden. Gabriele Kaiser lädt die GDM-Mitglieder ein, sich aktiv an der Gestaltung von Heften zu beteiligen. Zudem ist das ZDM offen für Bookreviews von englischsprachigen Büchern. Wer so etwas verfassen möchte, wende sich bitte an Gabriele Kaiser. Das ZDM wird eine Monographiereihe herausgeben, in der Einzelartikel aus besonders guten Heften zusammengestellt werden.
Frau Kaiser ruft auf, die Bibliotheken um eine Bestellung des ZDM zu bitten. Auch Privatpersonen können das ZDM günstig abbonieren, für GDM-Mitglieder 40 EUR im Jahr.
Herzlichen Dank an Herausgeberin und Editorial Board dieser Zeitung, insbesondere an Gabriele Kaiser.

*Mathematica Didactica*
Die derzeitige Schriftleitung liegt bei Gerald Wittmann, Mitherausgeber sind Andreas Eichler, Wilfried Herget und Anselm Lambert. Gerald Wittmann berichtet über den derzeitigen Stand der Zeitschrift. In einem Review-Prozess für eingereichte Artikel wird auch ein externer Gutachter einbezogen.
Manuskriptlage: 2 angenommen, 2 in Begutachtung.
Erscheinungsweise: online unter http://www.mathematica-didactica.de oder http://www.mathdid.de
Alle Artikel werden in einem Jahresband erscheinen (Franzbecker).
Gerald Wittmann dankt Manfred Klika für die jahrelange Arbeit, die er in der Herausgabe von Mathematica Didactica geleistet hat.
Der Dank der GDM geht an die Herausgeber der Zeitschrift für die engagierte Arbeit.

*TOP 9: Verschiedenes*

Der Vorstand der GDM dankt allen Mitglieder für die aktive Mitarbeit und das Vertrauen.

| | |
|---|---|
| Katja Lengnink | Hans-Georg Weigand |
| (Schriftführerin) | (1. Vorsitzender) |

# Zur Erklärung der Datenbank unter http://www.gdm.uni-erlangen.de

Karel Tschacher

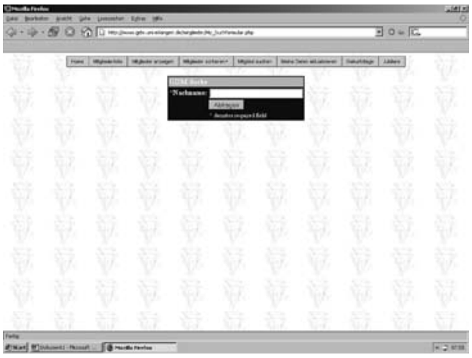

Die Datenbank erlaubt es jedem mit dem Gastzugang, unsere Daten zu lesen. Damit werden normalerweise die dienstlichen Daten sichtbar gemacht. In der Liste der Eintragungen Ihrer Daten steht in der letzten Zeile die Rubrik, Daten schützen/freigeben. Dann werden auf Ihren Wunsch hin Ihre privaten Daten nicht angezeigt, anderenfalls schon.

Der Zugang für die Aktualisierung verläuft in zwei Durchgängen und damit mit zwei Zugangsfenstern und damit mit zwei Kennwörtern und zwei Passwörtern.

Wenn Sie als Mitglied die Datei nutzen möchten, dann wählen Sie den Zugang Mitgliederbereich. Das ist dann die erste Hürde: Dazu sind dann ein Passwort und eine Kennung nötig. Das ist nicht Ihr persönliches Passwort, sondern ein allgemeines für alle Mitglieder:


Tragen Sie in die erste Zeile: Didaktik
Und in die zweite Zeile: 11235813
Die ersten Werte der Fiboncczahlen.

Dann kommen Sie in den Mitgliederbereich, der Ihnen alle bekannten Daten der Mitglieder zeigt. Und hier findet man auch den Bereich Eigene Daten aktualisieren. Das ist dann die zweite Hürde:



Dann geben Sie Ihren Familiennamen ein und drücken Abfragen.

Sie klicken auf den unterstrichenen Nachnamen und werden aufgefordert, Ihr persönliches Passwort einzugeben, so wie es im letzten Jahr versandt wurde. Es sind immer sechs Buchstaben, wobei Groß- und Kleinschreibung wichtig ist.

Dann kommen Sie auf die Seite mit Ihren persönlichen Daten, die Sie ändern können.

Schließen Sie die Änderungen mit Aktualisieren und bestätigen Sie die Sicherheitsabfrage.

Die dynamische Datenbank ist damit aktuell. Aber die Ansicht ändert sich erst, wenn Sie entweder F5 (Cache löschen) drücken oder die die Datenbank neu aufrufen. Der Internetbrowser zeigt nämlich normalerweise die gespeicherte Seite und nicht den aktualisierten Datensatz.

Tragen Sie bitte selbst dazu bei, dass die Daten immer möglichst neu sind. Damit sind Sie für andere erreichbar und Sie können gut mit Kolleginnen und Kollegen in Kontakt treten.
Wer sein persönliches Passwort nicht zur Hand hat oder es verlegt hat, erhält nach einer kurzen Anfrage bei Frau Lengnink oder bei mir die notwendigen Daten.
Für Fragen und Anregungen stehe ich gern zur Verfügung:
tschacher@mi.uni-erlangen.de

# Ein offenes Wort vom Schatzmeister

Karel Tschacher

Ein Verein muss finanziert werden, dazu haben wir die Mitgliedsbeiträge. Sie sind einmal jährlich zu zahlen. Einer alten Tradition folgend werden die Beiträge Anfang Juli eingezogen. Aber neben dem Bankeinzug, an dem inzwischen etwa 600 der 1000 Mitglieder teilnehmen, gibt es viele Mitglieder, die selbst überweisen. Verwenden Sie nur das unten angegebene Konto, Mitglieder aus dem EURO-Ausland können mit IBAN und BIC gebührengünstig überweisen.

*Konto der GDM*
IBAN: DE05 7706 9461 0003 0587 00
BIC: GENODEF1GBF
Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg
Kontonummer 3058700
BLZ 770 694 61

*Beitragssätze jährlich*

| | |
|---|---|
| Vollmitgliedschaft | 60,00 EUR |
| Ermäßigt (Studierende und Referendare/-innen) | 30,00 EUR |
| Mit MNU | 57,44 EUR |
| Mit DMV | 53,86 EUR |

Es gilt bei mehreren Mitgliedschaften der günstigste Beitrag auf Antrag. Für die Schweiz gelten durch eine interne Abmachung leicht abweichende Gebühren.
Ich würde mich aber sehr freuen, wenn die vielen Selbsteinzahler zum Einzug übergehen würden.
Es erleichtert die Buchhaltung erheblich. Und ein Bankkunde kann jeden Einzug sechs Wochen stornieren lassen, ohne eigene Gebühren dafür zu tragen. Sie finden die Vortrucke auf der Homepage der GDM unter GDM:intern und dann Konten und Beitrag.
Insgesamt ist die Zahlungsmoral gut. Viele erwarten, dass Sie eine schriftliche Aufforderung zur Zahlung erhalten. Das mache ich nicht, weil das Porto für 1000 Briefe zu viel kostet. Auch erwarten viele Mitglieder eine Quittung für das Finanzamt. Auch hier gilt die Regelung der Finanzdirektionen, dass die Kontoauszüge für Spenden bis 200 Euro anerkannt werden. Also suchen Sie bitte den entsprechenden Kontoauszug heraus und legen Sie ihn bei der Einkommenssteuererklärung vor.