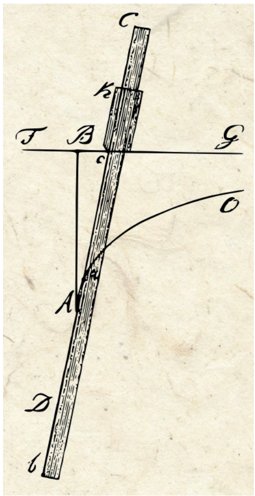
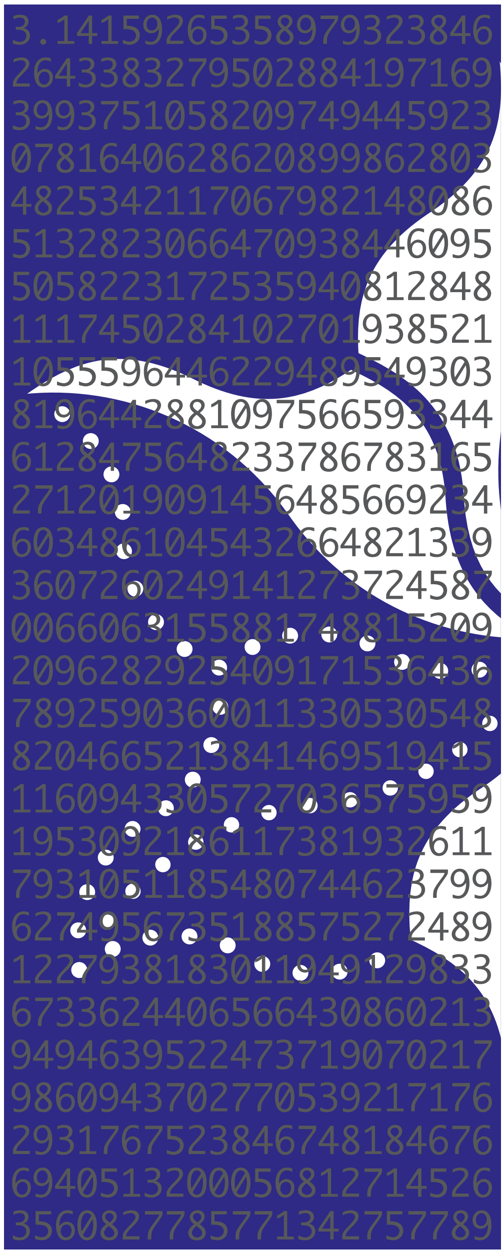
MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK





GDM

103

Juli 2017

Gemeinsame Jahrestagung GDM und DMV 2018
PADERBORN, 5.–9. MÄRZ 2018

Joint Annual GDM and DMV Meeting 2018
PADERBORN, MARCH 5–9, 2018

Gemeinsame Jahrestagung
Paderborn
GDMV 2018
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
Deutsche Mathematiker-Vereinigung

Hauptvorträge Mathematik

- **Andrea Bertozzi,** Los Angeles
- **Simon Brendle,** New York
- **Pierre-Emmanuel Caprace,** Louvain
- **Gerd Faltings,** Bonn (Cantor-Medaille 2017)
- **Franco Flandoli,** Pisa
- **Mathias Schacht,** Hamburg
- **Maryna Viazovska,** Lausanne
- **Eva Viehmann,** München (Emmy-Noether-Vorlesung)

Hauptvorträge Mathematikdidaktik

- **Iddo Gal**, Haifa
- **Petra Scherer**, Duisburg-Essen
- **Andreas Vohns**, Klagenfurt

Schnittstellenvorträge

- **Susanne Prediger**, Dortmund
- **Bernd Sturmfels**, Leipzig

Tandemvorträge

- **Daniel Grieser,** Oldenburg
  & Reinhard Hochmuth, Hannover
- **Thomas Bauer,** Marburg
  & Lisa Hefendehl-Hebeker, Duisburg-Essen

Tag für Lehrerinnen und Lehrer **6. März 2018**

Mathematik in Industrie und Gesellschaft **8. März 2018**

www.gdmv2018.de

UNIVERSITÄT PADERBORN

DMV

GDM

Editorial: Panta rhei

Liebe Lesende,

mit Heraklit ein wenig altsprachliche Halbbildung vortäuschend möchte ich Sie zur neuen Ausgabe der Mitteilungen begrüßen. Als Kontrapunkt dazu bediene ich mich im Folgenden sodann gleich dem mit der allseits spürbaren Verbetriebswirtschaftlichung und Durchbürokratisierung des „Wissenschaftsbetriebs" einhergehenden denglischen Sprachjargons – als (in Rückübersetzung der Bezeichnung meines Vorstands-Postens aus dem Englischen) „Chefsekretär" gehört das wohl zur in Kauf zu nehmenden *déformation professionelle*: Ich habe mir als eines meiner *Managment Goals & Objectives* der auslaufenden Amtszeit vorgenommen, für die *Key-Processes* in meinem Kompetenz-Bereich ein *Streamlining* des *Workflows* vorzunehmen.

Neusprech beiseite: Sie halten mit der aktuellen Ausgabe der Mitteilungen das erste Heft in Händen, für welches wir von der Einreichung über die Redaktion bis zur Veröffentlichung im Internet ein Onlinesystem verwendet haben, das diesen Prozess in ein engeres technisch-organisatorisches Korsett zwingt, von dem ich mir in der Tat für meine(n) Nachfolger(in) eine leichtere Übergabe der Amtsgeschäfte und eine künftig vereinfachte oder jedenfalls weniger hemdsärmelige Entstehung unseres Vereinsblattes erwarte (mehr dazu und zu Vorteilen für Leser(innen) und Autor(inn)en finden Sie unter der Rubrik „In eigener Sache").

Satzungs- und wahlbedingt ständig im Fluß ist die Besetzung des Vorstands. Nach Hans-Georg Weigand und Rudolf vom Hofe steht mir nun mein dritter Erster Vorsitzender an der Seite, mit Torsten Fritzlar die zweite Person im Amt der Kassenführung. Das bietet mir die Gelegenheit, mich bei Rudolf vom Hofe und Christine Bescherer noch einmal persönlich und ganz herzlich für die gute Zusammenarbeit in den letzten Jahren zu bedanken. In überaus bewegten Zeiten (spürbare Erhöhung der Mitgliedsbeiträge, Gründung unseres ersten Landesverbandes, Ausrichtung der weltweit größten Konferenz für Mathematikdidaktik) hatten wir es im Vorstand nicht immer ganz leicht und insbesondere Rudi hat mit seiner Unaufgeregtheit einen aus meiner Sicht für unseren Verein ganz entscheidenden Ruhepol dargestellt. Bei den nicht unbedingt populären und populär machenden Verwaltungsaufgaben des Vorstands kooperieren Schriftführung und Kassenführung besonders eng miteinander. Christine war dabei im Amt der Kassenführung ein ideales Gegenüber: Bestimmt dort, wo Bestimmtheit nötig ist (und das ist sie in heiklen finanziellen Dingen eben häufig), unbürokratisch dort, wo flexible Lösungen gefordert waren und die Vorstandsarbeit aus ihrer langjährigen Erfahrungen aus der Rektoratsarbeit an ihrer PH heraus ungemein bereichernd.

Versucht man „Panta rhei" durch die Google-Bildersuche zu illustrieren (ohne Bildrechte zu verletzen), so ist dessen Illustration durch das Symbol ∞ omnipräsent. Wer dieses gedanklich mit den Fingern abläuft, kommt nicht umhin, wieder zum Anfangspunkt zurückzukehren. Im Magazinteil der aktuellen Ausgabe berichten Gabriella Ambrus und Ödön Vancsó über ein Projekt, das die Ideen Tamás Vargas aufgreifend „komplexen Mathematikunterricht" für das 21. Jahrhundert neu zu interpretieren sucht. Bodo von Pape erinnert uns daran, dass das durch dynamische Geometrie neu belebte Thema „Kurven" schon in früheren Zeiten das Interesse der Menschen wecken konnte. Marc Sauerwein und Malte Mink greifen das Thema „Mathematikunterricht für minderjährige Geflüchtete" aus der letzten Ausgabe wieder auf.

Als Herausgeber war es mir ebenso wie meinem geschätzten Vorgänger, Thomas Jahnke, ein Anliegen, den Diskussionsfluss in den Mitteilungen nicht durch allzu enge editorische Vorgaben versickern zu lassen (nicht immer zum Wohlgefallen aller Mitglieder). Auch im aktuellen Heft werden einige „Dauerläufer" der letzten Ausgaben wieder aufgegriffen (Zentralmatura, Analysisunterricht und angemessenes Grenzwert(nicht)verständnis, Geschichte der GDM).

Ihren Lesefluss nun nicht weiter mit Metatext aufhalten wollend bleibt mir, Ihnen neuerlich eine anregende Lektüre zu wünschen

Andreas Vohns

Panta rhei (Quelle: https://goo.gl/JsNdSq)

ISSN 0722-7817

Inhalt

Bildnachweise der Umschlagseite:
Oben (v. l. n. r.): Christian Dohrmann, Christian Dohrmann
Mitte (v. l. n. r.): Diedrich Uhlhorn (modifiziert), Andreas Vohns/placeit.net
Unten (v. l. n. r.): BMBF/Hans-Joachim Rickel, Metropolitan School (CC BY-SA 3.0)

Vorwort des ersten Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,

für mich sind nun die ersten Monate als Vorsitzender vergangen und ich möchte mich auf diesem Wege noch einmal für Ihr Vertrauen bedanken. Besonders möchte ich auch meinem Vorgänger, Rudolf vom Hofe, danken, der mir eine umfassende Starthilfe gegeben hat. Nicht zuletzt ist es aber auch der Vorstand der GDM, der stets sowohl Rückhalt als auch Partner in den ersten begangenen Schritten war. Trotz aller Hilfe schien mir nur unklar zu sein, wie ein Vorwort für die MGDM zu gestalten sei. „Bezieh Dich halt auf ein aktuelles Thema" war eine zunächst etwas vage Hilfe. Die Ungewissheit dauerte allerdings nicht länger als drei Wochen, dann war für mich eigentlich offensichtlich, welches Thema das Vorwort haben würde:

Allen von uns geht es um das gleiche Ziel: Schülerinnen und Schüler sollen beim Übergang in die Hochschule Mathematik bestmöglich verstanden haben und Mathematik zu einem gewissen Grad beherrschen. Doch in der näheren Definition eines solchen, offenbar im Konsens bestehenden Ziels gibt es schon erhebliche Differenzen, die aber fast wieder verschwinden, wenn man versucht, die gewaltige Spanne der unterschiedlichen und aus verschiedenen Perspektiven als wahr angenommenen Wege zu dem genannten Ziel zu überblicken.

Das ist in der jüngsten Debatte um die mathematischen Kompetenzen deutlich geworden, die angehende Studierende von MINT-Fächern haben sollten. Diese Debatte entzündete sich zunächst an dem als „Brandbrief"[1] bekannt gewordenen offenen Brief, der von etwa 130 Lehrenden im Bereich Mathematik – auch von einigen unserer Mitglieder – unterschrieben wurde. Die primäre Aussage des Briefs ist, dass das „mathematische Vorwissen von vielen Studienanfängern nicht mehr für ein WiMINT-Studium ausreicht". Als Grund für diesen Zustand wird insbesondere die überwiegend als Überbetonung von Modellierung verstandene Kompetenzorientierung ausgemacht.

Gerade diese Ursachenbeschreibung hat in einem weiteren offenen Brief[2] zu einer deutlich gegensätzlichen Stellungnahme von 50 ProfessorInnen aus der Mathematikdidaktik geführt. In diesem Brief wird festgestellt, dass zwar mangelnde Mathematikkenntnisse bei Studienanfängern festzustellen seien, dass aber eine Ursachenzuschreibung in der Kompetenzorientierung, die aktuelle Bildungsstandards ausmacht, falsch und kontraproduktiv sei. Vielmehr gelte: „Bildungsstandards können [...] weder aufgrund ihrer Zielsetzungen noch angesichts der Kürze der Zeit seit ihrer Einführung für die benannten Defizite verantwortlich gemacht werden."

Mit anderer Ausrichtung, aber ähnlich gegensätzlich zum Brandbrief argumentierte in der Süddeutschen Zeitung der Mathematikprofessor Christian Hesse: „Was ist von diesen Forderungen [des Brandbriefs] zu halten? Nicht viel. Es handelt sich um seltsam rückwärtsgewandte, altmodische Vorschläge, die den Erfordernissen des 21. Jahrhunderts nicht gerecht werden."[3] Vielmehr wird in dem Beitrag, auf den es fast als wütend zu bezeichnende Reaktionen gab, gefordert, die Fächergrenzen zu überdenken, was auch zu einer Bildunterschrift führte, es werde „Klimawandelkunde"[4] statt Mathematik gefordert.

Das ist eine nur kleine Auswahl der vielen, mehr oder minder öffentlichen Aussagen zum Stand der Mathematikausbildung an deutschen Schulen, die in Interviews der lokalen, teilweise auch der überregionalen Presse, in Emails und Briefen an die Vorsitzenden der verschiedenen mit Mathematikunterricht befassten Verbände und Vereine geäußert wurden. In diesen hier nur zusammenfassend genannten Äußerungen wird der Disput mitunter als bizarrer Professorenstreit bezeichnet und zum Teil moniert, dass mit dem Bezug des mathematischen Wissens von Studienanfängern nur ein kleiner Teil der Zielsetzungen des Mathematikunterrichts betrachtet wird – nämlich der, zur Studierfähigkeit von Fächern zu führen, die einen ausgeprägten mathematischen Anteil haben.

Die Meinungspluralität kann auf der einen Seite zeigen, dass es immer wieder erneut wichtig ist, auch die Grundfesten des Mathematikunterrichts zu überdenken. Auf der anderen Seite scheint es

[1] www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html
[2] www.tagesspiegel.de/berlin/streit-um-bildungsstandards-50-professoren-verurteilen-mathe-brandbrief-als-schaedlich/19590112.html
[3] www.sueddeutsche.de/bildung/gastkommentar-mehr-gauss-weniger-goethe-1.3455512
[4] www.sueddeutsche.de/bildung/matheunterricht-schafft-die-traditionellen-schulfaecher-ab-1.3485811

mir sinnvoll zu sein, trotz der fast notwendigerweise unterschiedlichen Perspektiven von Fachmathematik, Fachdidaktik und Schulpraxis alle Perspektiven zu beachten und auch in strittigen Fragen nüchtern und ohne Polemik auszuloten, welche gemeinsamen Grundlagen es für ein im Konsens bestehendes Ziel – den bestmöglichen Mathematikunterricht zu gewährleisten – geben kann. Dieses Ausloten, das für mich ein Teil der Tätigkeit als Vorsitzender der GDM ist, ist in diesem Fall gelungen. In Absprache mit den Spitzen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) konnte rasch geklärt werden, dass in der genannten Meinungspluralität ein Verbands- bzw. Vereins-übergreifende Positionierung wichtig wäre – auch um deutlich zu machen, dass es sehr wohl ein gemeinsames Vorgehen und gemeinsame Haltungen oder Ideen zur produktiven Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts geben kann.

Das Ergebnis dieser Absprache ist die von der *gemeinsamen Kommission Übergang Schule–Hochschule* von DMV, GDM und MNU verfasste und von allen drei Vereinen bzw. Verbänden unterschriebene Stellungnahme, die Sie in der Rubrik „Aktivitäten" in diesem Heft der Mitteilungen finden. In dieser Stellungnahme werden die Ursachen einer veränderten Leistungsfähigkeit des Mathematikunterrichts genannt, die unabhängig von der Perspektive auf den Mathematikunterricht wahrzunehmen sind: „Unstrittig ist der Beitrag der Reduktion des Mathematikunterrichts in den Stundentafeln der Länder in den vergangenen Dekaden." Ebenso müssen bei der Veränderung der Kompetenzen in mathematischen Fächern zum Studienbeginn die weitgehende Aufhebung von Grund- und Leistungskursen sowie der in den vergangenen Jahrzehnten enorm gestiegene Anteil eines Jahrgangs, der ein Studium aufnimmt berücksichtigt werden – beispielsweise ist allein im Zeitraum seit der ersten Veröffentlichung der Bildungsstandards im Jahr 2004 der Anteil der Abiturienten von rund 30 % auf über 40 % gestiegen[5]. Andere Ursachen könnten dagegen, so die Stellungnahme, wenn überhaupt höchstens in geringem Maße für die sich über die Jahre verändernden mathematischen Kompetenzen von Studienanfängern verantwortlich gemacht werden. Möchte man dieser Position nicht folgen, so scheint es mir persönlich ratsam zu sein, Überzeugungen stärker mit empirischen Daten zu fundieren als es bisher zumindest teilweise der Fall ist.

Sicher ist die nun veröffentlichte gemeinsame Stellungnahme von DMV, GDM und MNU nicht als Abschluss einer Kontroverse zur Leistungsfähigkeit des Mathematikunterrichts gedacht. Sie stellt als solche auch noch keine Lösung des Problems dar, auch wenn bedenkenswerte Forderungen an die Bildungsadministration in der Stellungnahme formuliert werden, die sich auf die oben genannten, belastbaren Ursachen einer Schwächung der Leistungsfähigkeit des Mathematikunterrichts beziehen. Die Stellungnahme hat aber auch zum Ziel, die Diskussion um den Übergang Schule Hochschule unter Berücksichtigung verschiedener Perspektiven auf den Mathematikunterricht zu bündeln. Gerade das ist seit Jahren das Anliegen der gemeinsamen Kommission zum Übergang Schule Hochschule und sollte auch in Zukunft das sichtbare Anliegen sein. Vorausblickend und noch ohne Kenntnisse der aktuellen Positionspapiere hatte die Kommission für Ende Mai zu einer Konferenz nach Münster geladen, auf der die Perspektiven von Fachmathematik, Fachdidaktik, Schulpraxis und zu dem der Bildungsadministration gleichberechtigt vertreten waren. Selbst wenn mir auf dieser Konferenz mitunter deutlich wurde, wie verschieden die Beschreibung ein und derselben Situation sein kann, scheint es mir der richtige Weg zu sein, Differenzen auszutauschen und zu diskutieren, um im Konsens in wichtigen und unstrittigen Punkten zur Verbesserung des Mathematikunterrichts nicht nur hörbar sondern auch wirksam zu werden.

Natürlich bemisst sich die Wirksamkeit der GDM nicht nur über eine Positionierung der mathematischen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im Übergang zur Hochschule. So gibt es, wie ebenfalls in der Stellungnahme angesprochen, auch allgemeinbildende Ziele des Mathematikunterrichts, der sich an die vielen richtet, die nicht studieren oder kein ausgeprägt mathematikhaltiges Studium aufnehmen. Es gibt, ganz aktuell und ganz unabhängig von der hier diskutierten Stellungnahme, die ebenfalls aktuellen Diskussionen um die digitale Bildung sowie den Komplex der Inklusion. Beide Aspekte des Lehrens und Lernens von Mathematik werden durch unsere Gesellschaft begleitet und vorgedacht, was in entsprechenden Positionspapieren in diesem Heft deutlich wird. Ein Abbild des gesamten Spektrums des Einsatzes der GDM für die Erforschung und Gestaltung des Lehrens und Lernens von Mathematik zeigt sich von Heft zu Heft in den Mitteilungen der GDM und sicher auch in diesem aktuellen Heft.

Andreas Eichler
(1. Vorsitzender der GDM)

[5] Vgl. Starke, R. & Pabst, S. (2017). Akademische oder berufliche Bildung: Der große Run zum Abitur. *Profil* 3/2017, 16–18.

Der komplexe Mathematikunterricht von Tamás Varga im 21. Jahrhundert

Förderung des mathematischen Denkens nach neusten Forschungsergebnissen

Gabriella Ambrus und Ödön Vancsó

1 Einführung – Ziele und Vorhaben

Die mathematikdidaktische Forschung gewinnt in den letzten Jahrzehnten in Ungarn immer mehr an Bedeutung. Der Grund dafür ist einerseits, dass die Fachdidaktik erst seit den 70er Jahren in mehreren Ländern als ein eigenständiger Fachbereich anerkannt wurde. Andererseits gab es ein Bedürfnis danach, dass sich der Unterricht in den einzelnen Fächern – so auch der Unterricht in Mathematik – mehr und mehr interdisziplinär ausrichtet, sich – unter Beachtung der Eigenschaften des Faches – auch an Erkenntnissen aus Pädagogik, Psychologie und Physiologie orientiert.

Daneben nimmt auch die Forderung nach der Verwendung digitaler Medien im Unterricht immer mehr zu. Diese Geräte gelten nicht nur für Schüler als unentbehrlich, sondern bieten auch neue Möglichkeiten für die Lehrer einen effizienteren und interessanteren Unterricht zu gestalten.

In unserem einjährigen, von Ungarischen Akademie der Wissenschaften (Magyar Tudományos Akadémia – MTA) geförderten fachdidaktichen Projekt im Jahr 2015, war es unser Ziel, ein Unterrichtskonzept auszuarbeiten, basierend auf der Praxis des Mathematikunterrichts und methodischen Ansätzen von Tamás Varga. Der Untersuchungsgegenstand wurde wegen des kurzen Zeitraums auf den Bereich der Kombinatorik beschränkt und das Konzept sollte die wissenschaftlichen Entwicklungen und die technologischen änderungen der letzten Jahrzehnte berücksichtigen. Aufgrund der Ergebnisse konnte unsere Gruppe[1] im Jahre 2016 ein neues, von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (MTA) gefördertes Projekt erfolgreich einwerben und bekommt dadurch nun Unterstützung für weitere vier Jahre (2016–2020). Die Ziele des neuen Projekts sind ähnliche wie vorher, unsere Pläne sind aber vielschichtiger und übergreifender, beschränken sich nicht mehr ausschließlich auf die Kombinatorik. Dementsprechend wurden weitere ungarische Experten in unsere Arbeitsgruppe aufgenommen. Ebenso wurde die Anzahl der beteiligten Schulen vergrößert.

Bei der Ausarbeitung des Konzepts sind der Projektgruppe folgende Punkte besonders wichtig:

- die Einbindung von Forschungsergebnisse aus kognitiven Disziplinen
- die Berücksichtigung der Popularität digitaler Geräte
- die Erweiterung der Methoden von Tamás Varga auf den Unterricht in der Mittelschule (diese wurden trotz einiger Versuche abgebrochen)
- das Zustandekommen der Zusammenarbeit in einem möglichst weiten Kreis
  - von Experten aus den Bereichen verschiedener Bildungsstufen (vom Kindergarten bis zum Hochschulwesen),
  - von Experten auf institutioneller Ebene (Hochschulinstitutionen in Budapest, Szeged, Debrecen und Kaposvár)
  - von Schulen aus den vorher erwähnten und aus weiteren Städten in Ungarn und
  - Experten aus unterschiedlichen Berufszweigen in unserer Arbeitsgruppe (Universitätsdozenten am Gebiet der Mathematikdidaktik, Psychologen, und Mathematiklehrer in verschiedenen Schulstufen und -typen).

2 Theoretische Hintergründe und Vorgeschichte

Der Erwerb von Begriffen und Denkstrategien ist das Ergebnis eines langen Prozesses im Unterricht. Im Laufe dieses Vorgangs ändern sich diese ständig. Tamás Varga war der erste Forscher in Ungarn, der eine solche mögliche Strukturierung der mathematischen Kenntnisse ausgearbeitet hat, die sich nach dem Niveau des Fortschrittes der Schüler richtet. Der Lehrplan der Grundschule und die Unterrichtsmethoden wurden bei ihm gemeinsam betrachtet.

2.1 Tamás Varga und der Versuch „komplexer Mathematikunterricht"

Tamás Varga (1919–1987) war Lehrer für Mathematik und Physik, unterrichtete zunächst in einer

[1] Ödön Vancsó, Gabriella Ambrus, Csaba Csapodi (ELTE Univ.), József Kosztolányi, Klára Pintér (Univ. Szeged), Judit Szitányi (ELTE Univ.), Eleonóra Stettner (Univ. Kaposvár); György Emese (Újpesti Bilingual Technical HS), und Lehrkräfte aus Grund und Mittelschulen.

Tamás Varga (1919–1987) (Foto: CIAEM)

Mittelschule, arbeitete anschließend im Unterrichtsministerium und später an der Universität ELTE und im Landesinstitut für Pädagogik in Budapest. Anfang der 60er Jahre lernte Varga auch ausländische Bestrebungen für Reformen des Mathematikunterrichts kennen. Diese Kenntnisse und seine Beziehungen zu vielen Didaktikern, in erster Reihe zu György Pólya und Zoltán Dienes, waren entscheidend für die Gestaltung des Konzepts seines in 1963 beginnenden Versuches „Komplexer Mathematikunterricht". Das Hauptziel des Versuchs war die grundlegende Erneuerung des Lehrmaterials und der Methoden im Unterricht der Klassen 1–8 aufgrund des genetischen Erkenntnisprozesses unter Einbeziehung neuer Gebiete der Mathematik (z. B. Stochastik), wobei die Selbstständigkeit der Kinder sowie intrinsische Motivation einen hohen Stellenwert einnahmen (Deák, 2002).

Die Mitarbeiter von Varga waren ungarische Mathematiker, Mathematiklehrer und Grundschullehrer. Die Lehrbücher und Arbeitsblätter wurden von Mathematiklehrern und Grundschullehrerinnen für den Versuch konzipiert und u. a. auch von Tamás Varga begutachtet.

Varga hat über den Mathematikunterricht übergreifend konzeptionell gedacht – und zwar ab der Grundschule bis zum der Ende der Mittelschule (wie es beispielsweise seinerzeit auch E. Beke getan hat, vgl. Ambrus, 2016). Seine Versuche betrachtete Varga auch als Verwirklichung früherer Reformgedanken (Varga, 1975).

Im Jahre 1978 kam es zu einem völlig neuen Lehrplan in Mathematik für die Klassen 1–8 – basierend auf der Methode von Tamás Varga. Es war aber nicht leicht nach dem Konzept von Varga zu unterrichten, insbesondere für jene Lehrer, die früher mit den herkömmlichen Lehrmaterialien und mit den traditionellen Methoden arbeiteten. Auch Varga war der Meinung, dass seine Methode aus unterschiedlichen Gründen zu früh allgemein verpflichtend eingeführt wurde. Dies führte zu einer teilweisen Überarbeitung des Lehrplans von 1978 in der zweiten Hälfte der 80er Jahre. Die Methode von Varga hatte dennoch auch weiterhin starke Auswirkungen auf den ungarischen Mathematikunterricht, besonders in der Kombinatorik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der Versuch „Komplexer Mathematikunterricht" hat sich mit dem schulisch-mathematischen Unterrichtsstoff, mit den zugehörigen Mathematikaufgaben und mit den im Unterricht zu verwendenden Methoden und Arbeitsmaterialien beschäftigt. Im Rahmen unseres Projektes halten wir es für notwendig, mit Berücksichtigung des aktuellen Lehrplanes und mathematikdidaktischen, sowie weiteren pädagogischen und psychologischen Ergebnissen diese erneut zu überdenken.

Varga hielt es beispielsweise für wichtig, im Mathematikunterricht für alle Schüler, besonders aber für benachteiligten Schüler, verschiedene Hilfsmittel zu verwenden (unter anderen die bunten Stangen, das Dienes-Set, Geobretter, Varga, 1975). Die Sammlung didaktischer Materialien hat sich aber in den letzten Jahren erweitert. In dieser Zeit konnte Tamás Varga beispielsweise noch nicht an die heutigen digitalen Möglichkeiten denken und kannte demnach auch die Spiele und Spielzeuge nicht, die seitdem erschienen sind und im Mathematikunterricht sinnvoll einsetzbar sind.

2.2 *Stand der Forschung*

Zum aktuellen Stand der Forschung sind drei Meilensteine, zu nennen, die – trotz verschiedenen Dimensionen und Zielen – mit dem neuen Projekt dennoch viele Gemeinsamkeiten haben.

- Projekt Sulinova (2002–2006): Ist wegen der Ausarbeitung von Materialien nach neuen Konzepten, auch für Informatik und andere Disziplinen wichtig. Die Materialien und sind allerdings nur in ungarischer Sprache erschienen.

- Projekt Geomatech[2]: Hier besteht der Schwerpunkt in der Entwicklung von Unterrichtsmaterialien mit Hilfe des interaktiven Programms „GeoGebra“ für die Klassen 1–12. Mehrere Experten aus unserer Arbeitsgruppe haben an der Arbeit in diesem Projekt teilgenommen.
- Mathematikdidaktisches MTA-Projekt im Jahr 2015: Unterschiedliche Experten der Projektpartner haben an diesem Projekt teilgenommen. Dieses Projekt beeinflusst unsere aktuelle Arbeit stark.

Die Ergebnisse dieses dritten Projekts werden nun im Folgenden kurz erläutert.

Das MTA-Projekt (2015)

In diesem Projekt war es das Hauptziel, das Werk von Tamás Varga zu bewahren und es gleichzeitig mit aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsergebnissen anzureichern. Inhaltlicher Schwerpunkt war aufgrund der kurzen Projektdauer die Kombinatorik.

In den methodischen Forschungen von Tamás Varga spielte die Frage des Unterrichts in Kombinatorik eine besonders große Rolle. Die Mehrheit der kombinatorischen Aufgaben lässt sich nicht mechanisch lösen, sie erfordern ein kritisches Denkvermögen. Durch Lösen von nicht-standard kombinatorischen Aufgaben wird das metakognitive Vermögen bzw. die Fähigkeit auf die strategische Planung aktiviert. Dadurch kann die mathematische Leistung gefördert werden. Das Unterrichten kombinatorischer Problemstellungen bietet gute Möglichkeiten für Schüler, zu lernen, eigene Strategien auszuarbeiten und diese dann anzuwenden. Im Mittelpunkt unserer Arbeit stand die Förderung eben jener kreativen Problemlösungsstrategien.

Eine große lerntheoretische Erkenntnis des Versuchs „Komplexer Mathematikunterricht“ von Tamás Varga war, dass diese Methode den Schülern ermögliche, aufgrund ihrer eigenen vorangehenden Erfahrungen neue Kenntnisse zu erwerben.

Im Rahmen des Projekts wurden die kombinatorischen Kenntnisse der Schüler mit Hilfe eines Tests[3] untersucht. Zusätzlich wurden Daten von Lehrern und Schülern mittels eines Fragebogens erhoben, mit dem Ziel, mehr über die Einstellungen zur Kombinatorik und zum Kombinatoriklehren und -lernen zu erfahren. Anhand der Ergebnisse der Schülertests wurden Lehrmaterialien für den Unterricht der Kombinatorik ausgearbeitet und erprobt, die sich in erster Linie auf die Förderung der Fähigkeit des Erkennens und Konstruierens von Algorithmen und mathematischen Modellen innerhalb der Kombinatorik richten.

Als wichtigstes Ergebnis dieses Projekts soll hier erwähnt werden, dass es gelungen ist, eine neue Art der Zusammenarbeit von Experten auszuprobieren und zu verwirklichen – unter Berücksichtigung der aktuellen Möglichkeiten/Rahmen des Unterrichts (aktueller Lehrplan, neue Arbeitsmaterialien, digitale Medien und andere methodische Neuerungen). Diese Zusammenarbeit möchten wir in unserem neuen Projekt in erweiterter Form fortführen.

Eine weitere Erfahrung unseres kurzen Projekts war, dass die tätigkeitsorientierte Methode von Tamás Varga – obwohl sie seinerzeit mit mit Hilfe von Arbeitsblättern und anderen damaligen Materialien gearbeitet hat – sich gut auf die neunen Möglichkeiten und Medien adaptieren lässt. Besonders effektiv ist diese Methode, wenn sie von einer Gruppe verwendet wird, in der Lehrer, Didaktiker, und möglicherweise auch Mathematiker und Forscher der kognitiven Psychologie zusammenarbeiten. Das Errichten von solchen „vernetzten“ Gruppen könnte die Grundlage einer neuen Art von didaktischen Forschungen (zumindest in Ungarn) werden und bereits eher kurzfristig positive Auswirkungen auf den mathematischen Unterricht haben.

3 Ziele des aktuellen Forschungsprojekts (2016–2020)

Die immer schlechteren Ergebnisse der ungarischen Schüler in Mathematik und die Rückmeldungen der ungarischen Mathematiklehrer weisen auf unterschiedliche Probleme im heutigen Mathematikunterricht hin.

Im Hintergrund stehen inhaltliche und methodische Ursachen. Wir halten die Abnahme (Minderung) der Anzahl der Mathematikstunden – wohingegen der Lehrstoff gleichzeitig nicht reduziert wurde – für ein Hauptproblem. Wegen des Mangels an Zeit erwirbt eine relativ große Anzahl von Lernenden nicht genügend mathematische Grundkenntnisse, sie erreichen nicht das gewünschte Niveau der Automatisierung, weitere Fortschritte können nicht gemacht werden.

Es gibt Probleme mit der Anwendung mathematischer Kenntnisse, sowohl in der Mathematik als auch „außerhalb“ der Mathematik (siehe die ungarische Ergebnisse in PISA 2015).

Ursachen des mangelhaften Aufbaus von Kenntnissen sind unserer Meinung nach

[2] Internetseite: www.geomatech.hu
[3] Der Onlinefassung dieses Artikels liegt die englischsprachige Version des Tests als Zusatdatei bei.

- ein Mangel an erlebnis- und problemorientierten Bearbeiten des Lehrmaterials,
- die Art und Weise der Anwendung von unverstandenen Prozessen beim Erwerb neuer Kenntnisse (dazu kommt noch die Hervorhebung der Formalismen, die übertriebene Betonung von Einübung neuer Verfahren usw.) und
- ein Mangel an Berücksichtigung von individuellen Gegebenheiten beim Lernen von Mathematik.

Die Entwicklung neuer Lehrmaterialien für die Differenzierung auf Basis der Lehrmaterialien von Tamás Varga, die ursprünglich auch schon für diesen Zweck gedacht waren, scheint daher höchst aktuell zu sein.

3.1 *Inhaltliche und fachmethodische Förderungsmöglichkeiten auf der Basis der Prinzipien von Tamás Varga sowie der bisherigen Ergebnisse*

Die genetische Methode (vgl. Wittmann, 1981, S. 130–131) als Basis der Methode von Tamás Varga (Deák, 2002), bedeutet die Realisation des Aufbaus und die Anwendung der Mathematik durch bzw. anhand natürlichen wissenstheoretischen Prozessen. Die Methode erfordert einerseits den komplexen Aufbau des Unterrichtsstoffs, andererseits verlangt sie dazu passende Arbeitsweisen und -mittel. Das Lehrmaterial und die Unterrichtsmethoden sind nach Varga ebenso wichtig. Sie müssen zeitgemäße Lernstoffe in einer zeitgemäßen Weise vermitteln (Varga, 1975, S. 3, bzw. ebenda: die Hilfsmittel des Unterrichts und Methoden S. 11–18).

Ein wichtiger Teil der Methode von Varga ist die problemorientierte Annäherung an mathematische Themen. Das heißt, der Unterrichtsstoff sollte nicht nach Themen, sondern eher nach Themenbereichen aufgeteilt werden. (Siehe die fünf großen Themenbereiche von Tamás Varga, Lehrplan 1978). Der logische, stufenartige Aufbau der Themenbereiche ermöglicht, dass zunehmend mehr mathematische Kenntnisse erworben werden. Als Basis bei der Einführung von abstrakten Kenntnissen sollte immer eine enaktive Handlung mit konkreten Dingen dienen, daran anknüpfend eine Tätigkeit auf der ikonischen Ebene, die Modellbildung (Klein, S. 1987).

Im Rahmen unserer Forschung aus dem Jahr 2015 haben die Schüler zuerst einen Test ausgefüllt, dessen Ergebnisse unsere vorangehende Vermutungen bestätigt haben: Die Mehrheit der Schüler lernt Formeln im Thema Kombinatorik, die sie nur in speziellen Aufgaben nutzen können. Nur wenige Schüler verfügen über Strategien und Denkfähigkeit, die auch zur Lösung schwierigerer Probleme angewendet werden können. Viele Schüler konnten die Formeln bei der Lösung von nicht typischen Aufgaben nicht benutzen. Dies führte dazu, dass sie zuweilen weniger Erfolg hatten als jüngere Schüler, die die Ausführung der möglichen Abläufe bei der Lösung ausprobierten, da sie noch keine Formel konnten. (Kosztolányi et al., 2016)

Der nächste Schritt der Forschung in 2015 war die Ausarbeitung von Lehrmaterialien, für einen auf Tätigkeiten und Entdeckungen orientierten Unterricht der Kombinatorik im Sinne von Tamás Varga.

Im Themenbereich Kombinatorik wurden sieben Arbeitsblätter für je eine Unterrichtsstunde für Schüler der Grundschule sowie ähnliches Aufgabenmaterial für Schüler der Mittelschule erstellt, inklusive Korrektur- und Bewertungsanweisungen bzw. methodischen Vorschlägen für die Lehrer. In den Lehrmaterialien gab es für die verschiedene Jahrgänge dieselben Inhalte (Aufgaben) und es gab jeweils „nicht typische" Aufgaben, für deren Lösung die Anwendung von Hilfsmitteln und Strategien unentbehrlich war. (Vancsó, 2017)

Bei der Erprobung in der Schule konnte beobachtet werden, dass die Schüler der Grundschule sowie die Schüler der Mittelschule Hilfsmitteln und Strategien gerne und erfolgreich nutzten; die konkrete Tätigkeit mit den Gegenständen leistete in vielen Fällen eine große Hilfe – nicht nur beim Verstehen der Probleme oder bei der Entdeckung der Ordnungsstrategien, sondern vielmehr auch bei der Veranschaulichung – auch bei älteren Schülern. Bei den Ergebnissen des Abschlusstests, nach der Erprobung der Materialien (diese sind noch nicht ausgewertet) ist eine gewisse Verbesserung der Ergebnisse sichtbar.

Aufgrund dieser Erfolge nehmen wir an, dass die auf konkreten Tätigkeiten und auf problemorientierter Annäherung basierende methodische Innovation auch erfolgversprechend für den Unterricht in anderen Themenbereiche sein könnte.

Nach Vargas Meinung ist es sehr wichtig, dass man statt isolierten Wissenselementen und Fähigkeitsfragmenten eher von der Wirklichkeit ableitbaren und in der Wirklichkeit anwendbaren Wissenserwerb fördert (Varga, 1965). Um das zu ermöglichen, ist es nötig, auch auf die Zusammenhänge innerhalb und außerhalb der Mathematik zu verweisen. Varga meint auch, dass vor allem die Schüler diese Zusammenhänge wahrnehmen müssen. Zudem, so Varga, ist es wichtig, den Schülern zu helfen, möglichst viele Zusammenhänge zwischen den einzelnen Themenbereichen und Problemen der Mathematik, zwischen der Mathematik und anderen Disziplinen bzw. zwischen der Mathematik und Erfahrungen des alltäglichen Lebens erkennen zu können (Varga, 1965, S. 7). Eine der wichtigsten Aufgaben der Lehrer sei es, in Zusammenarbeit mit Kollegen, in erster Linie mit Physiklehrern, die

Entdeckung verschiedener (physikalischer) Phänomene in der Umwelt und die Suche nach deren Ursachen und die Beschreibung von Zusammenhängen solcher Phänomene, auch mit den Mitteln der Mathematik zu fördern. (Varga, 1965, ebenda, S. 5).

In den letzten Jahren wurden in der Forschung (siehe 2.2) sowohl Arbeitsmittel benutzt, die aus dem Versuch von Tamás Varga stammen, als auch solche, die den Zusammenhang zwischen Kombinatorik und Geometrie in den Vordergrund stellen (z. B. GeoGebra). Diese Arbeitsmittel möchten wir um weitere ergänzen, wobei die Erfahrungen und Publikationen aus dem Umfel des „Experience Workshop: International Math-Art-Movement" bzw. allgemein zu Zusammenhängen von Mathematik und Kunst genutzt werden sollen. (Siehe z. B. http://www.elmenymuhely.hu/[4])

Neben der Erweiterung von Methoden und Arbeitsmaterialien ist die Erneuerung des Aufgabenmaterials wenigstens genauso wichtig. Obwohl offene Aufgaben – in erster Linie solche, die verschieden interpretierbar sind bzw. Aufgaben, die die Angabe weiterer Bedingungen voraussetzen – von Tamás Varga oft verwendet wurden, kommen diese in den heutigen ungarischen Lehrbüchern nur selten vor.

Die Suche nach der Lösung von (inner- und außermathematischen) Problemen unter Verwendung praktischer Erfahrungen tritt bei Tamás Varga sowohl bei dem Erwerb neuer Kenntnisse als auch bei ihrer Anwendung auf:

> Das Ziel des Mathematikunterrichts ist nicht, Mathematiker zu bilden. [...] Das Ziel des Schulwesens ist es, die Befähigung der Menschen, Mathematik in verschiedenen Situationen zu entdecken und dafür die passenden mathematischen Modelle finden zu können (Varga, 1973, S. 174, Übersetzung von GA).

Bei der Wahl des passenden mathematischen Modells können Bücher und Computer allerdings weniger helfen. Er betont auch, dass die Bewältigung von nicht traditionellen Situationen in dem Unterricht eine größere Rolle spielen sollte.

> Er hat sogar ungewöhnlichen Situationen ausgenutzt, um seine Schüler zum Denken zur kreativen Verwendung ihrer Kenntnisse zu bewegen. Daran haben sich ein seiner Schüler folgendermaßen erinnert: „Einmal Mitte Januar mussten wir die heruntergefallenen Nadeln des Weihnachtsbaumes auf die Stunde mitbringen. Er berichtete vorab, dass wir die Anzahl der Nadel eines mittelmäßigen Tannenbaumes abschätzen werden. Wir fanden es sehr lustig. Wir brachten etwa 10–20 Kisten angefüllt mit Tannennadeln mit und wir dachten, er wollte sie zählen.
> [...] Zuerst fragte er uns, was wir dachten, wie viele Tannennadeln es gab. Wenn ich mich gut daran erinnere, gab es viele verschiedene Tipps zwischen tausend und Hundert Millionen. [...] Dann schüttete er die erste Kiste aus und halbierte sie. Eine Hälfte ließ er wieder halbieren und das wiederholte er etwa achtmal. Es gab nur noch einige Tannennadeln. Er fragte uns, welcher Bruchteil der ganzen Nadeln es wäre? Es war einfach, eine Antwort zu geben, 1024tel. Also ungefähr ein Tausendstel? Ja, sagten wir. Dann zählen wir den einen der übrigen kleinen Haufen. Es folgte eine fassungslose Stille. Wir verstanden schon, worum es ging." (Török, 2007, S. 34).

Seit der Entfaltung der komplexen Methode im Mathematikunterricht von Tamás Varga sind digitale Geräte Teile unseres Alltags geworden. Das Schulwesen kann sie nicht ignorieren, aber wir müssen sorgfältig überlegen, wann, wie, für welche Altersgruppe und in welcher Phase der Entdeckung und der Problemlösung die digitalen Geräte und die digitalen Lehrmaterialien im Mathematikunterricht verwendet werden sollen, da falsch verwendete Mittel das Verstehen sogar behindern können.

In der Arbeit des Projekts wird zudem die Wichtigkeit der Lehrerbildung und der Lehrerfortbildung betont. Eine Mitarbeit der Mathematiklehramtsstudenten und Doktoranden der Eötvös-Loránd-Universität, der Universität Szeged, der Universität Debrecen und der Universität Kaposvár ist daher mit eingeplant.

4 Forschungsfragen und -methoden

Es muss betont werden, dass es in dem neuen Projekt – welches auf Lehr- und Lernprozesse fokussiert – um die Untersuchung des „komplexen Mathematikunterrichts" sowie dessen zeitgemäßer Adaptation geht. Wir beabsichtigen, dessen Effizienz im Sinne der oben genannten Feststellungen zu steigern. Dementsprechend ist der Klassenraum der Primärort unseres Versuchs und die Schüler/Lehramtsstudierenden sind die wichtigsten „Untersuchungsgegenstände". Mit Hilfe ausgewählter Forschungsmethoden möchten wir Unterrichtsmaterial und neue Unterrichtsmethoden entwickeln bzw. effizienter machen, sowie die Er-

[4] Kontaktaufnahme: http://www.elmenymuhely.hu/kapcsolat/?lang=en

probungen im Klassenraum vorbereiten und beobachten.

Durch diese Untersuchungen und Analysen möchten wir ermitteln, wie das Konzept von Tamás Varga für die heute praktizierenden Lehrer verfügbar gemacht werden könnte, d. h. unter anderem zu fragen:

- Welche Modifikationen sind am Konzept nötig?
- Welche Hilfsmaterialien könnten Lehrer unterstützen?
- Welche Lehrerkompetenzen müssen hierzu gefördert werden?
- Wie sind in der heutigen Lehrerbildung und in der Lehrerfortbildung diese notwendigen Lehrerkompetenzen zu fördern?

Wir beabsichtigen, in einigen Klassen die Erprobungsstunden zu videographieren und die Videoaufzeichnungen zu analysieren und zu bewerten.

Zusammenfassend sind unsere Methoden und Mittel wie folgt:

- Erhebung des aktuellen Zustands zu einigen ausgewählten mathematischen Teilgebieten mit unterschiedlichen Methoden
- Durchführung von Interviews mit Lehrern zu unterschiedlichen Teilfragen
- die Beobachtung der Handhabung der experimentellen Lehrmaterialien im Klassenraum nach ausgearbeiteten Aspekten (z.B. durch Videos) und die Modifikation des Inhalts der Lehrmaterialien und der Methoden gemäß der gesammelten Erfahrungen und Analysen
- die Messung der Effizienz durch Vergleich der Ergebnisse mit Kontrollgruppen am Ende jeder Forschungseinheit

Zur Beginn der gemeinsamen Arbeit wurden neun kleinere Forschungsgruppen unter Beteiligung der Projektpartner gebildet, die sich jeweils auf einige ausgewählte Themen konzentrieren und teilweise voneinander unabhängig arbeiten. In den Gruppen werden beispielsweise in Zusammenhang mit der Methode von Tamás Vargafolgende Themen behandelt: Übergang Kindergarten – Schule, zielgerichtete Entwicklung der Problemlösefähigkeit von Lehramtsstudierenden, Beobachtung und Entwicklung des (problemlösenden) Denkens der Lernenden mit spezifischen Zielsetzungen (z. B.: ob Schüler die Offenheit einfacher realitätsnaher Probleme wahrnehmen und wie sie diese Aufgaben bearbeiten), Untersuchung der Verwendungsmöglichkeiten von (bislang wenig verwendeten) Arbeitsmitteln für einen tätigkeitsorientierten Unterricht in der Mathematik (beispielsweise das schon erwähnte Polyuniversum-Set).

5 Internationale Bezüge des Projekts 2016–2020

Den internationalen Gedankenaustausch, die gemeinsame Arbeit und gemeinsame Publikationen mit internationalen Partnern hat auch Tamás Varga sehr geschätzt. Wir glauben, dass internationaler Gedankenaustausch auch für unsere Projektarbeit sehr wichtig ist, darum planen wir u. a. die Erprobungen von Materialien in anderen Ländern. Bei dieser Arbeit können uns insbesondere unsere Kontakte im deutschsprachigen Raum helfen auch und gerade innerhalb der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), außerdem zum Beispiel unsere intensive Partnerschaft mit der Humboldt Universität in Berlin und mit der Schiller Universität in Jena (die seit mehr als fünfzig Jahren besteht).

Darüber hinaus ist eine Wiederaufnahme des Kontakts zum niederländischen Freudenthal Institut bzw. zur Babes-Bolyai-Universität in Kolozsvár (Rumänien) vorgesehen. Ebenso ist im Rahmen des IREM-Systems eine französisch-ungarische Zusammenarbeit geplant.

Literatur

Ambrus, G. (2013). Problem solving and modelling. Traditions and possibilities in Hungarian Mathematics education, *Problem Solving and Mathematics Education*, (Eds. Ambrus A., Vásárhelyi É.) 2013 Eger, ELTE TTK & Eszterházy Károly College, 7–17.

Ambrus G. (2015). Komplexer Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert? *Arbeitskreis Ungarn – Beiträge der ersten Tagung*, 2015 (Hrsg. Vásárhelyi É.).

Ambrus, G.; Vancsó Ö.; Koren B. (2012). The application of modelling tasks in the classroom – why and how? 10/2 *TMCS*, Debrecen 231–244.

Ambrus, G. (2016). Vergangenheit und Gegenwart der ungarischen Mathematikdidaktik – unter besonderer Berücksichtigung der Bezüge zu Deutschland und Österreich, Hauptvortrag an der 50. Jahrestagung der GDM in Heidelberg, *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Bernard, A.; Gosztonyi, K. (2015). Series of problems, at the crossroad of research, pedagogy and teacher training. In E. Barbin, U.T. Jankvist & T.H., Kjeldsen (Eds.), *History and epistemology of mathematics education. Proceedings of the sevens european summer university ESU 7, Copenhagen, Danemark 14–18 July 2014.* (pp. 141–152). Aarhus University. http://conferences.au.dk/ESU-7/.

Blum, W.; Wiegand, B. (1999). Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker Verlag.

Deák, E. (2002). Die besondere Verflechtung der mathematischen Forschung, des Mathematik-Unterrichts und der Mathematikdidaktik Ungarns im 19. und 20. Jahrhundert, *Mitteilungen der GDM*, Nr. 74.

Fenyvesi, K.; Oláhné – Téglási I.; Prokajné – Szilágyi I. (eds). (2014). *Adventures On Paper Math-Art Activities for Experience-Centered Education of Mathematics*, Edited by, Publisher: Eszterházy Károly College, Eger.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht-Holland, D. Riedel Publ. Comp.

Gosztonyi, K. (2016). The 'New Math' reform and pedagogical flows in Hungarian and French mathematics education. In. Krainer, K. & Vondrova, N. (Eds.). *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic*. (pp. 1709–1716). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288002

Halmos, M.; Varga, T. (1978). Change in Mathematics Education since the late 1950's – Ideas and Realisation, Hungary In. *Educational Studies in Mathematics* **9**, 225–244.

Klein, S. (1987). *The Effects of Modern Mathematics Teaching*, Academic Publisher, Budapest.

Kosztolányi J.; Pintér, K.; Dancs G.; Bagota M. (2016). How Students solve combinatorial problems? Some results of a research about difficulties and strategies of Hungarien Students,Vortrag, PME 2016 Szeged.

Polya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University.

Varga, T. (1965). *A matematika tanítása*, Budapest, Tankönyvkiadó.

Varga,T. (1987). Post-"New Math" Since 1963: Its Implementation as a Historical Process, *Development in School Mathematics Education Around the World*. (ed. Izaak Wirszup), Chicago, 237–249.

Varga, T. (1988). Mathematics Education in Hungary Today, *Educational Studies in Mathematics* **19**, 291–298.

Varga,T.; Engel, A.; Walser, W. (1973). *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in Grundschulbereich.* Stuttgart, Klett.

Varga, T. (1975). *Komplex Matematika, kandidátusi alkotás ismertetése* [Komplex Mathematik Unterricht Habilitationsschrift]. Magyar Tudományos Akadémia.

Wittman, E. Ch.(1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität Budapest
Email: ambrusg@cs.elte.hu

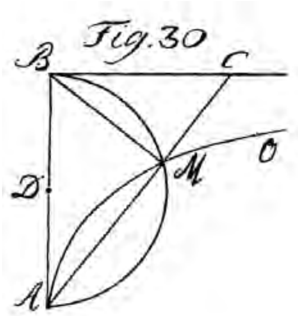
Ödön Vancsó, Eötvös-Loránd-Universität Budapest
Email: vancso@cs.elte.hu

Die Didaktyloide

Bodo von Pape

Heinz Schumann zum 77. Geburtstag

Das Uhlhorn-Problem Nr. 3



3. Aufgabe. In dem rechtwinklichten Dreyecke ABC (Fig. 30.) ist BM auf AC senkrecht, AM = BC und AB = a, wie vorhin gegeben; man soll das Dreyeck ABC construiren.

Diese Aufgabe formuliert der Oldenburger Hofmechanicus Dietrich Uhlhorn – als solcher geführt in der altehrwürdigen Hamburger Mathematischen Gesellschaft von 1690 – in seinem Hauptwerk „Entdeckungen in der Höhern Geometrie" [8]. Heute wird diese Aufgabe den Geometer herausfordern, sein aktuelles Konstruktionswerkzeug zu erproben, womöglich aber auch dazu, über „Konstruktionen" ganz allgemein nachzudenken.

Im Zuge des Nachdenkens wird die Versuchung wachsen, die Lösung nach der klassischen Methode der alten Griechen anzugehen, also mit einer Neusis.[1] Erst seit der Zeit der Araber sind derartige Verfahren – unter der Sammelbezeichnung „Bewegungsgeometrie" – in Verruf geraten: Bei dem Ein-

[1] Neusis = auf einen Punkt ausgerichtete Einschiebung einer Strecke zwischen zwei Kurven

passen einer Länge könne es sich doch nur darum handeln, „durch manuelle Annäherung auf der Basis sinnlicher Wahrnehmung eine ‚Lösungsposition' zu finden." [4]

Erst Descartes hat der Geometrie wieder zu Exaktheit verholfen. [1] Er hat den Standard neu festgelegt, und zwar über „lignes qu'on puisse imaginer estre descrites par un mouvement continu". [3] (Sein „Mesolab" wird man vor Augen haben.) Nur Lösungen, die diesem Standard genügen, erscheinen fortan noch akzeptabel.

Genau hier knüpft Uhlhorn an mit seiner Didaktyloide. Sie ermöglicht die exakte Lösung der obigen Aufgabe, und Uhlhorn stellt ein Konstruktionswerkzeug dazu vor. Die Rolle, die der „Didaktyloide" für die gestellte Aufgabe zukommt, ist zu vergleichen mit der Rolle, die die Konchoide spielt[2] im Rahmen einer „echten" Lösung des Problems zur Verdopplung des Würfels (bzw. zur Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen zweier Längen): Erst die Kurve legitimiert die Lösung, nur über derartige Kurven kommt man zu „völlig exakten expliziten (theoretischen) Lösungen". [4]

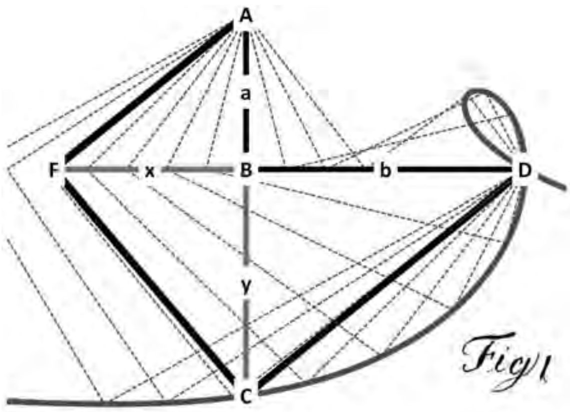
Die Grundidee ist einfach: Das „Herumprobieren" zur Findung eines einzelnen Punktes wird ersetzt durch einen Schnitt mit der Ortskurve aller entsprechenden Punkte. Diese Kurve ist jeweils adhoc auf das anstehende Problem zugeschnitten. Dazu muss dann nur noch ein Gerät vorgestellt werden für eine „organische" Erzeugung. Genau darauf war unser „Mechanicus" spezialisiert.

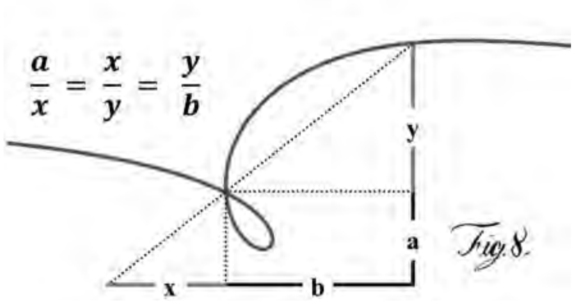
Die Ophiuride und die Toxoide

Die Ophiuride ist die wichtigste der insgesamt 18 höheren Kurven, die Uhlhorn in seinem Buch vorstellt, seine #1. Zu ihrer Erzeugung greift er zurück auf ein Gerät, das Platon zugeschrieben wird, ein Doppelgnomon. Zuätzlich stellt er ein eigenes Gerät vor.

Uhlhorn zeigt, dass sich mit der Ophiuride nicht nur die „Platonische" Lösung des Delischen Problems legitimieren lässt („Fig. 1"), sondern auch der Komplex der drei Lösungen nach Heron, Philo und Apollonius. („Fig. 8")

Zudem zeigt Uhlhorn, wie man mit eben dieser Ophiuride auch das Problem der Dreiteilung eines Winkels lösen kann.



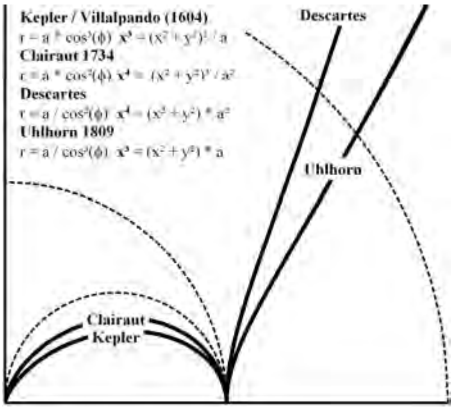


Die Kissoide ist ein Spezialfall der Ophiuride. Zur Legitimierung des Kissoide-nahen Lösungstripels „Diocles/Pappus/Sporus" zeigt Uhlhorn zusätzlich, dass man mit einer Hyperbel zum Ziel kommt. Einen Hyperbel-Zeichner stellt er vor.

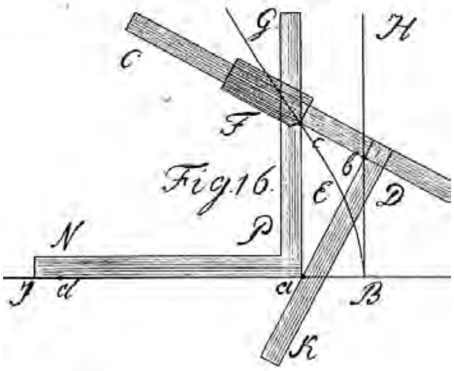
Zur Geschichte der Ophiuride weiß der Mathematik-Historiker Knorr [5] nur, dass die Bezeichnung im 19. Jahrhundert entstanden ist. Im Hinblick auf die Kurve selbst geht er davon aus, dass bereits Eudoxus sie zur Lösung des Problems der Würfelverdopplung eingesetzt hat. In dem Eutocios-Kanon der 12 Lösungen ist die von Eudoxus nicht enthalten. Hier ist nur die Rede davon, dass Eudoxus mit einer „krummen Linie" gearbeitet hat. Diese „Kampyle" des Eudoxus hat vielfach Anlass gegeben zum Spekulieren. Mehrheitlich geht man davon aus, dass es sich um eine Umsetzung des Ansatzes von Archytas handelt. Archytas beschreibt eine Kurve im Raum. Insbesondere dann, wenn man von „Konstruktion" spricht, muss man aber wohl eine ebene Konfiguration fordern. Hier kommt eine weitere der Uhlhorn-Kurven ins Spiel, seine #2, die Toxoide.

[2] Die Frage, ob die Kurve ursprünglich Konstruktionsmittel war oder bloß Mittel zum Nachweis der Möglichkeit, kann hier ausgeblendet bleiben. Nur das letztere lässt sich mit dem überlieferten Text belegen. Unisono heißt es bei Pappus (2x) und Eutocios zu der Neusis-Lösung des Nicomedes: „Dass dies möglich ist, ist vorab mit der Konchoide gezeigt worden." (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς) Apollonius nimmt die Möglichkeit (wie später Vieta [10]) als Postulat. Allgemein heißt es zur Neusis schlicht: „Es sei getan." (γεγονέτω)

Breidenbach [2] gibt einen Überblick über die Kurven, die im Laufe der Jahrhunderte zur Umsetzung des (Kathetensatz-)Ansatzes von Archytas in der Ebene vorgeschlagen worden sind.



Uhlhorns Toxoiden-Zeichner ist noch einfacher als das analoge Gerät von Descartes.



In dem umfassenden Werk von Loria [6] wird in Fußnoten zur Ophiuride und zur Toxoide auf die Urheberschaft von Uhlhorn verwiesen. Danach verliert sich die Spur - vor mehr als 100 Jahren!

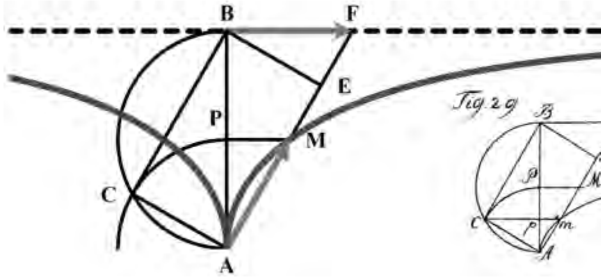
Weitere Uhlhorn-Kurven

In der Zeit nach Descartes standen zunächst die Kurven selbst – auf der Basis ihrer „kunstrichtigen" [7] Erzeugung – im Vordergrund des Interesses, nicht deren algebraische Darstellungen. (Descartes: "peut estre exprimé par quelque equation") Uhlhorn leitet aber jeweils auch den Term her.

Für die Didaktyloide – Kurve #5 – erhält er:

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2}, \text{ folglich } y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Der Name „Didaktyloide (Zweifingerlinie)" leitet sich daraus ab, dass in der Figur beim Wandern des Punktes F auf der Senkrechten zu AB die „zwei Finger" BF und AM stets gleich lang bleiben. (Eine Interpretation als „Verfolgungskurve" liegt nahe.) In der Beweisfigur zeichnen sich die beiden Finger als Pfeile ab. Genau wie Nikomedes im Zuge der Absicherung seiner Lösung, so thematisiert auch Uhlhorn das asymptotische Verhalten seiner Kurve.



Weitere Kurven, zu denen Uhlhorn Zeichengeräte vorstellt, sind: Die Strophoide (#3: „Kukumaide (Querkolbenlinie)"), die Kreisconchoide (#4: „Krommyoide (Zwiebellinie)") und die „Neilische Parabel". Zu den ersten beiden stellt er - wie bei der Didaktyloide - jeweils eine eigene Aufgabe vor. Bei der letzten zeigt er, wie man sie zur Lösung des Delischen Problems einsetzen kann .

Zur Algebra hat Uhlhorn keinerlei Berührungsangst. Das stellt er eindrücklich damit unter Beweis, dass er die Wendestelle der Ophiuride ganz schulbuchmäßig über das Nullsetzen der 2. Ableitung einer passenden Funktion bestimmt. Er kommt auf eine Gleichung 8. Grades. Deren Herleitung erstreckt sich über sechs Seiten.

$$\left.\begin{matrix} 4a^4 \\ 40a^2b^2 \\ 36b^4 \end{matrix}\right\} y^8 \left.\begin{matrix} -224a^2b^3 \\ -216b^5 \\ -8a^4b \end{matrix}\right\} y^7 \left.\begin{matrix} +540b^6 \\ +496a^2b^4 \\ -44a^4b^2 \end{matrix}\right\} y^6$$

$$\left.\begin{matrix} -520a^2b^5 \\ -720b^7 \\ -4a^6b \\ +196a^4b^3 \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} -320a^4b^4 \\ +540b^8 \\ +200a^2b^6 \\ +20a^6b^2 \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +80a^2b^7 \\ +256a^4b^5 \\ -40a^6b^3 \\ -216b^9 \end{matrix}\right\} y^3$$

$$\left.\begin{matrix} +36b^{10} \\ -96a^2b^8 \\ -92a^4b^6 \\ +40a^6b^4 \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} +24a^2b^9 \\ -4a^4b^7 \\ -20a^6b^5 \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +4a^6b^6 \\ +4a^4b^8 = 0. \end{matrix}$$

Den Grad dieser Gleichung reduziert Uhlhorn auf 3. Für die Gleichung dritten Grades gibt er eine Lösung – nach Cardano – mit einer Genauigkeit von 5 Stellen. Dazu schreibt er: „Aus dieser Berechnung ersieht man, wie sehr mühsam es gewesen ist, den Wendungspunct durch die Differential=Rechnung zu finden." Abschließend stellt Uhlhorn eine Dezimalschachtelung vor. Er hält fest: „Auf diese Art kann man durch Interpolieren Zahlen finden, welche dem wahren Wert, wenn er noch nicht gefunden ist, immer näher und näher kommen." Auch dieser Zusatz verdient unsere Beachtung.

Uhlhorns Lebenswerk

Nach Abschluss seines umfassenden Programms[3] zur Anpassung der antiken Lösungen an das neue Konzept von Descartes wandte Uhlhorn sich einem ganz anderen Feld zu, dem Maschinenbau.

Im Jahr 1817 wurde der Prototyp seiner „Kniehebel-Münzpresse" fertig. Über 200 Maschinen haben bis zum Jahr 1878 die Uhlhornsche Fabrik in Grevenbroich verlassen. Einzelne Exemplare werden noch heute ausgestellt (Münze in Berlin, Wien; Dt. Museum München). Das grundlegende „Kniehebelprinzip" findet sich in zahlreichen Vorrichtungen des Alltags. Dabei geht es stets um den Einsatz einer extremen finalen Druck- oder Zugkraft.

Ebenfalls vor genau 200 Jahren erschien Uhlhorns Schrift über den Tachometer. [9] Uhlhorn beschreibt sein Gerät als „ein Instrument, welches ohne Gebrauch einer Uhr jeden Augenblick den Gang derjenigen Maschin angiebt, mit welcher dasselbe in Verbindung gesetzt wird". Zur Berechnung der Skalenteilung kommt er abermals auf eine Gleichung vom Grad 8. Mit diesem Gerät – einem Drehzahlmesser auf rein mechanischer Basis – war Uhlhorn den Bedürfnissen seiner Zeit weit voraus. Vor der Zeit des Automobils – zumindest der ersten Eisenbahn – gab es für die Messung der Momentangeschwindigkeit kein wirkliches Interesse. Heute wird bei „Momentangeschwindigkeit" keiner mehr an den Pionier Diedrich Uhlhorn aus dem Oldenburger Land denken.

Bereits in seinen jüngeren Jahren hatte Uhlhorn sich – als völliger Autodidakt in seinem abgelegenen Heimatdorf Bockhorn – in einer anderen innovativen Grundlagen-Technologie hervorgetan: Der Bau eines achromatischen (!) Fernrohrs hatte ihm 1796 den Titel „Hofmechanicus" seines Landesherrn Peter Friedrich Ludwig eingebracht, dazu ein auskömmliches Jahresgehalt auf Lebenszeit.

Es gibt Menschen, die Großartiges geleistet haben und die sich große Verdienste erworben haben, die aber dem völligen Vergessen anheimgefallen sind. Die Didaktyloide mag uns an einen dieser Menschen erinnern:

Diedrich Uhlhorn
Bockhorn 1763–1837 Grevenbroich

Literatur

[1]. H. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, Springer (2001)

[2]. W. Breidenbach, *Das Delische Problem*, B.G. Teubner (1953)

[3]. R. Descartes, Ğéométrie, Leyden (1637)

[4]. H. Hischer, *Die drei klassischen Probleme der Antike*, Franzbecker (2015)

[5]. W. Knorr, *The ancient tradition of problem solving*, Dover (1986)

[6]. G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, B.G. Teubner (1902)

[7]. J. C. Sturm, *Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher*, Nürnberg (1670)

[8]. D. Uhlhorn, *Entdeckungen in der Höheren Geometrie, theoretisch und practisch abgehandelt*, Oldenburg (1809)

[9]. D. Uhlhorn, *Theoretische und praktische Abhandlung über einen neu erfundenen Tachometer oder Geschwindigkeitsmesser*, Frankfurt (1817)

[10]. F. Vieta, *Supplementum Geometriae*, Mettayer (1593)

Bodo von Pape
Email: teamherbart@gmail.com

[3] Dazu: B. v. Pape: Dietrich Uhlhorn (1764–1837) und die Großen Probleme der Antike. Erscheint in *Mitt. Math. Gesellschaft Hamburg* 37 (2017).

Mathematikunterricht in einer Internationalen Vorbereitungsklasse

Malte Mink und Marc Sauerwein

Dieser Artikel berichtet über einen Ausschnitt eines laufendes Unterrichtsentwicklungsprojekt der beiden Autoren, das sich mit Figurierten Zahlen als einen besonderen Zugang zu Termen und Termumformungen befasst. Der hier vorgestellte Teil findet innerhalb des regulären Mathematikunterrichts einer Internationalen Vorbereitungsklasse statt: es werden zuerst die äußeren Rahmenbedingungen beschrieben, bevor dann die Unterrichtsreihe erläutert wird. Ausgehend von den dort gesammelten Erfahrungen wird im Anschluss kurz Bezug auf den Beitrag *Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten* aus den Mitteilungen der GDM 102 (Oswald, 2017) genommen.

Hintergrund

Als direkte Reaktion auf die große Anzahl von Flüchtlingen, die im Sommer 2015 nach Deutschland kamen, wurde Anfang des Schuljahres 2015/2016 an der Otto-Kühne Schule in Bad Godesberg eine provisorische Flüchtlingsklasse eingerichtet. Da es zu dem Zeitpunkt schon einige Angebote für jüngere Flüchtlingskinder in der Umgebung gab, wurde dort der Schwerpunkt auf die Altersgruppen von 14 bis 18 Jahren, in Einzelfällen sogar bis 21 Jahre, gelegt. Bei der Aufnahme in diese Klasse werden unbegleitete Minderjährige bevorzugt. Zum Februar 2016 wurde diese zu einer offiziellen Internationalen Vorbereitungsklasse (IVK) ausgebaut. Der Zweck dieser Klasse ist es, die Schülerinnen und Schüler in höchstens zwei Jahren auf einen sprachlichen und fachlichen Stand zu bringen, der ihnen den Besuch einer deutschen Regelklasse ermöglicht. Dafür erhalten die Schüler zwischen 15 und 18 Wochenstunden Deutschunterricht, drei bis fünf Stunden Mathematikunterricht und je zwei Stunden Politik, Geschichte und Sportunterricht.[1] Seit Gründung der IVK haben etwa 40 Schülerinnen und Schüler[2] aus Afghanistan, Äthiopien, Eritrea, Irak, Iran, Somalia und Syrien die Klasse besucht. Ungefähr ein Viertel davon sind inzwischen Regelschüler an der Otto-Kühne Schule, während bei einem weiteren Viertel keine gymnasiale Eignung festgestellt werden konnte. Diese Schüler wurden an andere Schulformen in der Umgebung vermittelt oder haben seitdem eine Lehre begonnen.

Der Mathematikunterricht in der IVK unterscheidet sich in einigen Punkten deutlich von dem Unterricht in einer deutschen Regelklasse:

- Die Schüler verfügen kulturell bedingt über eine deutlich positivere Einstellung zu Schule, als die meisten deutschen Schüler. Sie sind ausgesprochen höflich, hilfsbereit und dankbar für jedwede Unterstützung.
- Die mathematische Vorbildung ist extrem heterogen. Einzelne Schüler beherrschen nur die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10, während andere zwölf Jahre mathematische Bildung an gut ausgestatteten Schulen genossen haben.
- Das Sprachniveau der Schüler ist ebenfalls sehr unterschiedlich. Einzelne Schüler versuchen das Level A1 zu erreichen, während andere schon für B2 lernen.[3] Für alle ist aber auf eine einfache Sprache zu achten, insbesondere bei der Planung aller Unterrichtseinheiten.
- Darüber hinaus ist es aber auch eine wesentliche Aufgabe des Mathematikunterrichtes Sprachbildung zu betreiben, stärker als dies in einer Regelklasse der Fall ist.
- Die Schüler freuen sich meistens auf den Mathematikunterricht, da dieser viele der alltäglichen Sprachprobleme, mit denen sich die Kinder ständig konfrontiert sehen, umgehen und dadurch schnelle Erfolgsergebnisse ermöglichen kann. Das führt in Einzelfällen auch dazu, dass sich im Mathematikunterricht ganz andere Facetten einer Schülerpersönlichkeit zeigen können. Eine Schülerin, die im Deutsch- und Englischunterricht nur passiv dasitzt und den Sportunterricht

[1] Wegen der kurzfristigen Einführung dieser Klasse und der sich häufig ändernden Zusammensetzung der Schülerschaft wird der Stundenplan regelmäßig an die Anforderungen angepasst.

[2] Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit wird im Folgenden das generische Maskulinum benutzt.

[3] Die Niveaus beziehen sich auf den gemeinsamen europäischen Referenzrahmen für Sprachen. Zur Ermittlung der Sprachniveaus dienen einerseits die Tests des deutschen Sprachdiploms sowie andererseits die Tests aus dem Lehrwerk *Netzwerk - Deutsch als Fremdsprache*.

nur unregelmäßig besucht, blüht im Mathematikunterricht auf: sie hilft den Mitschülern, präsentiert Lösungen an der Tafel und zeichnet sich durch besonderen Fleiß aus. Diese Entwicklung kann dann im persönlichen Gespräch mit Mathematiklehrern dafür genutzt werden, auch mehr Leistung in den anderen Fächern einzufordern.

Mit unserem Ansatz Terme und Termumformungen über Figurierte Zahlen einzuleiten, konnten wir gleichzeitig sprachliche Schwierigkeiten (teilweise) umgehen und die Schülerinnen und Schüler zu mathematischer Diskussion anregen.

Eingangsgespräche für die IVK

Wegen der außergewöhnlich großen Heterogenität wird der Mathematikunterricht in der IVK im Regelfall von zwei Lehrern[4] parallel gegeben, die von weiteren ehrenamtlichen Helfern unterstützt werden, so dass die Klasse in drei bis sechs Lerngruppen unterteilt werden kann.

Da auch unterjährig regelmäßig neue Schüler aufgenommen werden, muss immer wieder neu entschieden werden, in welche Gruppen diese eingegliedert werden können. Dabei ist besonders bei neuen Schülern die Sprachbarriere teilweise sehr hoch. Um diese Barriere zu umgehen, wurde in der Gründungszeit der IVK darüber nachgedacht, Figurierte Zahlen zu verwenden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass für die Analyse von mathematischem Vorwissen die Sprache der Algebra überaus geeignet ist. Diese Symbolsprache ist international so ähnlich, dass alle Schüler während der Gespräche den geschriebenen Term $3/4 + 2/5$ als starken Imperativ empfanden, diesen Term auszurechnen. Mündliche Sprache oder bildliche Erklärungen wurden hier nicht benötigt. Ebenso versuchen alle Schüler von sich aus die Gleichung $3x + 7 = 8x - 2$ nach x aufzulösen. Für uns war es interessant, dass sowohl im nahen Osten und Afghanistan, als auch in Afrika einige Schreibweisen von der in Deutschland üblichen Notation abweichen. In all diesen Fällen werden aber die im angelsächsischen Raum üblichen Notationen verwendet (u.a. Multiplikation mit einem Kreuz statt einem Punkt, schriftliche Division mit einer Tableauschreibweise aus dem englischsprachigen Raum, quadratische Gleichungen durch Faktorisieren mit der Crisscross-Methode zu lösen). Geometrisches Vorwissen lässt sich in den meisten Fällen durch einfache Bilder abfragen. Lediglich die Frage, ob man von einem Dreieck den Umfang, den Flächeninhalt oder die Hypotenuse berechnet haben will, führte in der Vergangenheit zu leichten Verwirrungen. Wahrscheinlichkeitsrechnung lässt sich nur sehr schwer ohne ein komplexes Vokabular abfragen. Hierfür sind wir noch an Lösungsansätzen interessiert.

Durchführung und Theoretische Aspekte

Meist wird in deutschen Schulbüchern auf Alltagssprache zurückgegriffen, um den Verallgemeinerungsaspekt von Variablen in den Fokus zu nehmen (vgl. Prediger & Krägeloh, 2015). Aufgrund der oben beschriebenen Gegebenheiten war diese Vorgehensweise so nicht möglich und es wurden Figurierte Zahlen als das zentrale mathematische Objekt gewählt. Unter einer Figurierten Zahl wird hier eine ikonische Folge aus Punkten wie in Abbildung 1 einschließlich der dazugehörigen Zahlenfolge (hier: $3, 6, 9, \ldots$) verstanden.

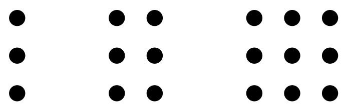


Abbildung 1

Zu Beginn wurde diese Figurierte Zahl mit der kompletten Klasse an der Tafel besprochen. Dabei haben die Schüler die Folge zunächst ikonisch fortgesetzt, bevor sie dann auch die Punkte gezählt haben. Gesetzmäßigkeiten wurden dabei auf arithmetischer Ebene (*immer plus* 3) sowie auf ikonischer Ebene (*da kommt eine Spalte hinzu*) beschrieben und schließlich wurde die Folge als die 3er-Reihe erkannt. Im Anschluss daran wurden typische Fragen gestellt: z. B. wie viele Punkte sind in Bild 100, etc.? Die starke ikonische Repräsentation soll hier aber nicht nur als Sprachvermeidung verstanden werden, vielmehr sollen die Figurierten Zahlen auch der Sprachentwicklung dienen und diese unterstützen (siehe nächster Abschnitt). Nach dem Einführungsbeispiel wurden die weiteren Figurierten Zahlen aus Abbildung 2 in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet mit den folgenden Leitfragen:

- Male die Folgen in dein Heft. Kannst du die weiteren Bilder malen?
- Zähle die Punkte. Trage die Anzahlen in eine Tabelle ein.
- Wie viele Punkte sind in Bild 100 und Bild 100.000?
- Wie viele Punkte sind in einem beliebigen Bild?
- Versuche viele verschiedene Formeln zu finden.

[4] Zurzeit sind das die beiden Autoren.

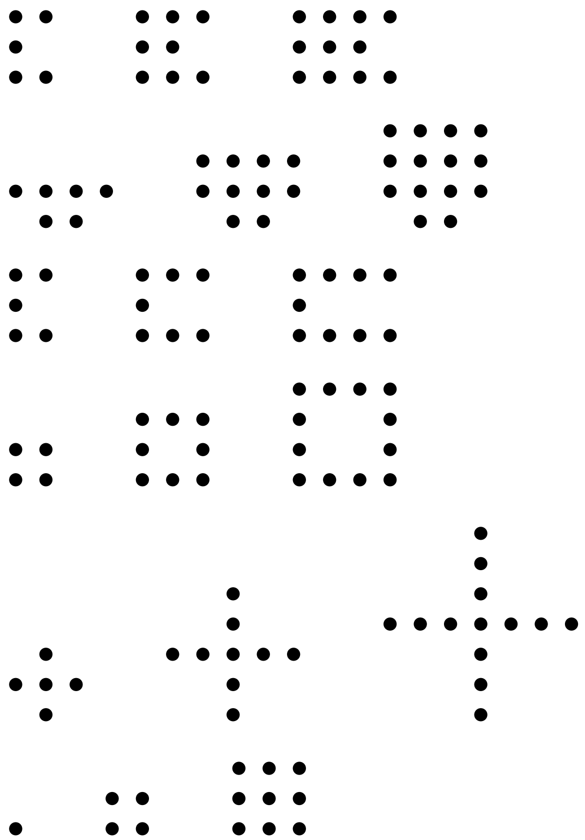


Abbildung 2

Insbesondere bei den letzten beiden Aufgaben gab es Schwierigkeiten: es war den Schülern zwar klar, dass hier nun keine Zeichnung mehr helfen würde, dennoch fehlte den Schülern eine bestimmte Zahl. Dies äußerte sich meist durch direkte Fragen nach einer Zahl bzw. Bildnummer. Wenn nun eine bestimmte Bildzahl genannt wurde, konnten alle Schüler die Punktanzahl (arithmetisch) ausrechnen und es wurde deutlich, dass die Bilder an Wichtigkeit für die Schüler verloren haben, da die Berechnung ohne jegliche Visualisierung geschah. Um den Bildindex stärker in den Fokus zu rücken, wurde eine Umkehrung der üblichen Frage gestellt: wann sind es 101 Punkte? Diese Frage konnte durch Rückwärtsrechnung oder (geschicktes) Ausprobieren gelöst werden, dabei wurde keinerlei Notation einer Gleichung bei den Schülern benutzt. Bei der Rückkehr zur Frage nach der Punktanzahl in einem beliebigen Bild, fingen die ersten nach einer Weile an, ein Blank „_" bzw. ein Fragezeichen „?" als einen Platzhalter zu nehmen, um so dieses Rezept zur Berechnung der Anzahl der Punkte aufzuschreiben. Hier wurden dann auch die ersten Gleichungen aufgestellt und das Rückwärtsrechnen wurde deutlicher. Schließlich hat sich die Klasse auf den Platzhalter „x" verständigt, der hier immer die Bildnummer symbolisiert hat. Durch verschiedene systematische Abzählungen des Bildes konnten verschiedene Rezepte zur Berechnung der Anzahl der Punkte aufgestellt werden. Eine gewisse Gleichheit dieser Terme war für die Schüler instinktiv klar, doch es fiel zu dem Zeitpunkt noch schwer diese zu explizieren. Die Schüler haben zur Überprüfung einzelne Zahlen eingesetzt und dabei vernachlässigt, dass die Terme vom gleichen Bild abstammen. Um hier den Figurierungen eine größere Überzeugungskraft zu verleihen, wurden diese im Folgenden zunächst weggelassen und danach als Entscheidungshilfe wieder eingeführt.

Das Vorgehen wurde nun umgekehrt in dem Sinne, dass Zahlenfolgen in arithmetischer Darstellung Thema waren und diese schließlich in Figurierte Zahlen mündeten. Mit diesen arithmetischen Folgen wurde ähnlich verfahren wie mit den Punktmustern. So besprach die Klasse unter anderem die Folge $1, 3, 5, \ldots$ und erkannte, dass sukzessive 2 addiert wird. Auf Nachfrage, ob die Schüler diese fortgesetzte Folge kennen würden, waren die Schüler ratlos: der Begriff der (un)geraden Zahl war weder in Deutsch noch in der jeweiligen Muttersprache bekannt. Es wurden dann drei Rezepte für die Berechnung eines bestimmen Folgenglieds vorgeschlagen. Um die Richtigkeit dieser Formeln zu plausibilisieren wurden dann die Figurierte Zahlen zu Rate gezogen. Die Diskussion dabei war sehr anregend, da verschiedene Schüler ihre selbst angefertigten Figurierten Zahlen vorgestellt und diese dann auch verteidigt haben. Die Figurierten Zahlen hatten für die Schüler eine andere, persönlichere Bedeutung. Die Diskussion, welche der Figurierungen passend sei, endete mit der Einigung auf eine Normalform (wie in Abbildung 3). Weitere Details finden sich dazu in Sauerwein (2017). Mit Hilfe dieser Normalformen konnten dann erste Regeln für Termumformungen abgeleitet werden, wie z. B. $x + x = 2x$.

$3x + 2$:

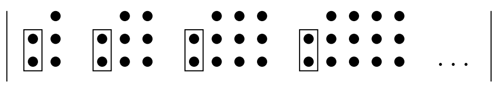


Abbildung 3

Besonderheiten der Lernumgebung und Fazit

Insgesamt zeichnet sich die Lernumgebung in verschiedenen Dimensionen durch eine gewisse Knappheit aus:

- voraussetzungsarm: hinsichtlich der Sprache ist die Lernumgebung direkt zugänglich, da wenige Wörter zur Einleitung gebraucht werden und eine starke operative Komponente vorhanden ist. Im weiteren Verlauf wird die Sprachentwicklung unterstützt.
- schwierigkeitsarm: die vorkommenden Figurierten Zahlen sind fast ausschließlich lineare Progressionen. Dreieckszahlen und viele andere Figurierte Zahlen sind ebenfalls interessant, aber

der Fokus lag nicht auf der Lösung von einzelnen Problemen, sondern auf der Begründung bzw. Ableitung von Termumformungen. Daher war unser Ziel zunächst viele verschiedene Terme zu generieren, um diese in Beziehung setzen zu können.

- informationsarm/reizarm: die zentralen Objekte sind unmittelbar präsent. Weder Einkleidungen noch digitale Medien wurden hier benutzt, sodass es wenig Ablenkung vom mathematischen Inhalt gab. Aufgrund des Alters der Schüler sowie der Einschätzungen der beiden Autoren bezüglich der individuellen Vorlieben der Schüler wurde sich gegen einen enaktiven Ansatz mittels haptischer Objekte entschieden.

Im Folgenden wollen wir auf die Begriffs- und Sprachentwicklung bei den Schülern fokussieren und skizzieren dabei kurz verschiedene Entwicklungsphasen.

- Der Beginn der Einheit, in dem vor allem die Punktmuster dominierten, gab Anlass eben diese Muster in deutsch zu beschreiben. Dabei wurden Worte wie Spalte oder Zeile gebraucht. Obwohl auf die Visualisierung zurück gegriffen werden konnte, wurden im Verlauf auch Wörter wie rechts, links, oben und unten verwendet und daher auch eingeübt. Solche Worte waren bei vielen Schülern vorher nicht bekannt oder eher im passiven Wortschatz.
- Nach dem Beschreiben der Muster, wurden die einzelnen Bilder abgezählt und miteinander in Verbindung gebracht. Die Veränderungen wurden meist damit erklärt, dass etwas dazu kommt. Diese Aussagen eröffneten Möglichkeiten, Begriffe wie Addition, Summe, etc. einzuführen. Ähnlich verhielt es sich für die Multiplikation bei Mustern, in denen Rechtecke erkannt und deren Anzahl der Punkte berechnet wurden.

Diese beiden Sprachregister der Schüler wurden dann in Argumentationen gemeinsam verwendet, wobei meist die deutsche Sprache in den Beschreibungen benutzt wurde, bevor dann Schlüsse in mathematik-spezifischer Sprache gezogen wurden.

Zusätzlich fand bei dem mathematischen Begriff der Gleichheit eine Ausschärfung statt. Das Konzept der Gleichheit tritt an mehreren Stellen auf und wird dort unterschiedlich behandelt. Zu Beginn hat die Lehrkraft vorgeschlagen einzelne Punkte in den Punktmustern geringfügig zu verschieben. Dies stieß auf Widerstand seitens der Schüler, da dies das Muster verändern wurde: Punktmuster wurden zunächst als sehr starr wahrgenommen (konkrete äußere Gleichheit). Nachdem dann verschiedene Zählterme auf dem Tisch waren, konnte auch dort wieder das Konzept der Gleichheit thematisiert werden. Hierbei wurde genau genommen aber erst vom Begriff der Ungleichheit gesprochen, als z. B. für eine bestimmte, eingesetzte Zahl ein unterschiedlicher Wert herauskam (nicht wertgleich). Leider konnte die Gleichheit nicht mehr durch Einsetzen gezeigt werden, und die Figurierungen kamen wieder ins Spiel. Interessant ist hier der Aspekt, dass die Schüler die Terme trotz unterschiedlicher Gestalt als gleich wahrnehmen konnten, wenn sie für einige eingesetzte Zahlen wertgleich waren. Eine Gestaltveränderung wurde bei den Punktmustern noch strikt abgelehnt. Ein nächster Entwicklungsschritt war dann mit den (verschiedenen) Figurierungen für die Zahlenfolgen erfolgt: Muster, die durch Drehungen und Verschiebungen in Relation zueinander stehen, hat die Klasse als gleich angesehen und es wurde schließlich eine Standardanordnung ausgehandelt (gleich im Sinne einer Äquivalenzrelation).

Verschiedene Schüler konnten diese Entwicklungsstufen während dieser Lerneinheit durchlaufen. Es sollte nochmals betont werden, dass der mathematische Inhalt wie auch die Sprache für die Schüler einen nicht zu unterschätzenden Lerninhalt darstellte. Dementsprechend wurde die Unterrichtsreihe zeitlich länger gestaltet als dies am Anfang erwartet wurde. Insbesondere für die Punktmuster haben viele Schüler Zeit gebraucht, um diese zu verstehen und sich dann in einem nächsten Schritt auch darüber auf deutsch zu unterhalten. Beide Entwicklungen sind zeitintensiv und wurden daher aufgrund ihrer späteren Wichtigkeit nicht überstürzt.

Seit kurzem wird diese Unterrichtsreihe auch in einer deutschen Klasse 7 durchgeführt.[5] Dabei wurde die (eindeutige?) Figurierte Zahl aus Abbildung 1 von einer Schülerin auch so interpretiert, dass das dritte Bild die Summe aus den beiden vorhergehenden ist. Dadurch hat sie zum einen den bisher nicht von den Schülern aufgeworfenen Aspekt der eindeutigen Fortsetzbarkeit thematisiert und zum anderen die (dreifachen) Fibonaccizahlen konstruiert und zur weiteren Diskussion ins Spiel gebracht. Ohne eine genauere Analyse wird dennoch schon deutlich, dass dieselben Arbeitsmaterialien und Unterrichtseinstiege zu deutlich differenzierteren und präziseren Beschreibungen der Punktmuster anregen können. In diesem Sinne kann die Unterrichtseinheit unter Umständen einen Beitrag zur Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht leisten.

[5] Diese Durchführung dauerte zu Redaktionsschluss noch an.

In dem Beitrag *Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten* in den Mitteilungen der GDM 102 (Oswald, 2017) wird ein Projekt beschrieben, bei dem im ergänzenden Mathematikunterricht Flüchtlingen bestimmte Bilder bzw. Visualisierungen von Beweisen innerhalb einer Unterrichtsstunde vorgelegt werden. Die drei Bilder sind die klassischen Visualisierungen der 3. Binomischen Formel, der Summe der ungeraden Zahlen[6] sowie der Dreieckszahlen jeweils in einer starren und nicht dynamischen Form. Zu den Bildern gibt es jeweils die gleiche Frage (Welche mathematischen Beziehungen kann man aus dem Bild herleiten?). Diese Frage muss den Schülern dann (bei Bedarf) durch die Lehrkraft erklärt werden, um sprachliche Barrieren auszuschließen.

Eine der beiden Hauptthesen des Beitrags ist, dass Beweise ohne Worte als ergänzender Lernstandstest bzw. zur Einschätzung des tatsächlichen Mathematikverständnisses dienen können, da sie ohne zusätzliche irritierende Sprachbarrieren auskämen. Diese deckt sich bei weitem nicht mit den Eindrücken aus unserer mehrwöchigen Unterrichtseinheit. Insbesondere wurden die Figurierten Zahlen von den Schülern erst als mathematik-frei und als zu einfach betrachtet. Erst nach einiger Zeit der intensiven Auseinandersetzung konnte mit den Figurierten Zahlen Mathematik betrieben werden und diese für Argumentationen oder Beweise eingesetzt werden. Bevor die Schüler dazu in der Lage waren, haben Sie aber viele Figurierte Zahlen selbst zeichnen und damit operieren müssen. Die Figurierten Zahlen konnten anfänglich nur als Lernmedium eingeführt werden, bevor sie dann erst im weiteren Verlauf als Werkzeug für mathematische Entdeckungen und Grundlage für Beweise fungieren konnten. Daher ist es auch fraglich, ob Kinder, die diese Visualisierungen zum ersten Mal sehen, hiermit gleich komplexe Beweise führen können, sind ihnen doch schon wesentlich elementarere mathematische Tätigkeiten nicht vertraut. Abschließend ist noch festzuhalten, dass in der hier beschriebenen IVK unabhängig vom individuellen Leistungsvermögen der Schüler eine sehr hohe Wertschätzung für Mathematik zu finden ist und gerade dies den dortigen Unterricht zu etwas Besonderem macht.

Danksagung
An dieser Stelle möchten die Autoren sich bei der Klassenlehrerin und Initiatorin Frau Dr. Coester für das großartige Engagement für die IVK bedanken.

Literatur

Oswald, N. M. R. (2017). Beweise ohne Worte mit jugendlichen Geflüchteten. GDM-Mitteilungen, 102, 5–11.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015). "x-arbitrary means any number, but you do not know which one" – The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In: Halai, A. & Clarkson, P. (Eds.), Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for Policy, Practice and Teacher Education. Rotterdam, the Netherlands: Sense, 89–108.

Sauerwein, M. (2017). Figurierte Zahlen als Zugang zu Termumformungen. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag (in Vorbereitung)

Malte Mink, Otto-Kühne-Schule Godesberg
Email: maltemink@googlemail.com

Marc Sauerwein, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Email: sauerwein@math.uni-bonn.de

[6] Der Beweis beruht auf der Erkenntnis, dass der Unterschied zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen eben eine ungerade Zahl ist. Hierfür muss aber die Folge der ungeraden Zahlen als solche erkannt werden, bevor eine Identität aus dem Bild abgeleitet werden kann.

Anmerkungen zur Struktur der GDM-Jahrestagungen

Peter Bender

Vorausschicken möchte ich, dass ich seit über vierzig Jahren Mitglied der GDM, seit fast dreißig Jahren Mitglied der DMV bin, mich in beiden Vereinen gut aufgehoben fühle, aber meine wissenschaftliche und soziale Heimat zuvörderst in der GDM sehe.

Nach langjähriger herzlicher Abneigung arbeiten die beiden Verbände seit einiger Zeit konstruktiv zusammen. Aber es erschließt sich mir nicht, warum sie ihre Jahrestagungen gleichzeitig am selben Ort ("gemeinsam") veranstalten sollen. Besonders die Jahrestagung der GDM hat sich zu einer Mammutveranstaltung mit, zuletzt 2017 in Potsdam, 650 Teilnehmern entwickelt, und die Veranstalter haben zunehmend Schwierigkeiten, diese logistisch zu stemmen. In Potsdam griff man schon zu dem Instrument der unsäglichen Zehn-Minuten-Vorträge.

Dann kommen also noch 400 bis 500 DMV-Interessenten dazu. Das Problem wird dadurch etwas abgemildert, dass die beiden Teiltagungen i. W. isoliert voneinander ablaufen. Aber Raum-, Verpflegungsangebot u. ä. werden knapp, so dass es sich eigentlich anbieten würde, gezielt unterschiedliche Orte und/oder Zeiten zu wählen. Aber es geht ja auch darum, ein Symbol der Freundschaft zu setzen.

Und nicht zu vergessen: es ist eine gegenseitige *inhaltliche* Befruchtung gewünscht. In der Tat: Nachdem die mathematikdidaktische Kommunität in den 1970er und 1980er Jahren viel Mühe hatte, den Einfluss einer bourbakistisch geprägten, verdünnten Universitätsmathematik einzudämmen, ist inzwischen das Pendel in die andere Richtung ausgeschlagen und mathematikdidaktisches Tun in Schule und Wissenschaft hat sich arg weit vom mathematischen Kern (da, wo der gesunde Menschenverstand herrscht!) entfernt.

Ob „die" Universitätsmathematiker (abgesehen von einer Handvoll Ausnahmen) die Mathematikdidaktik befruchten können, bezweifle ich. Und ob „die" Mathematikdidaktiker die Universitätsmathematik befruchten können, bezweifle ich erst recht. Bei den beiden bisherigen gemeinsamen Bundestagungen konnte ich solche gegenseitigen inhaltlichen Befruchtungen jedenfalls nicht beobachten. Nun werden zwar in Paderborn 2018 einige Hauptvorträge zu GDM- und DMV-gemeinsamen Programmpunkten zusammengefasst, und ich begrüße solche Symbole der Gemeinschaft ausdrücklich. Aber dafür müsste man nicht zwei ganze Tagungen zusammenlegen, sondern man könnte die Vortragenden auch einzeln gegenseitig einladen. Auch für das schmale Gebiet der Hochschulmathematikdidaktik müsste man nicht über tausend Menschen zusammenführen.

Umgekehrt kann man natürlich fragen: Wenn denn ein Ausrichter es sich zutraut, warum soll er dann nicht eine gemeinsame GDMV-Jahrestagung veranstalten? Zurzeit fördert bei meinen Paderborner Kollegen von der Universitätsmathematik und von der Mathematikdidaktik die gemeinsame Organisationsarbeit durchaus ein institutionelles Zusammenwachsen. So könnte man vermutlich noch allerlei positive Kleinigkeiten aufzählen. Und dass sich inhaltlich wenig tut, ist ja noch kein Schaden.

Es sind nicht nur die Inhalte (und Forschungsmethoden), sondern auch die (Tagungs-) Kulturen, in denen sich GDM und DMV erheblich unterscheiden. Bei der GDM-Tagung ist der soziale Charakter viel stärker ausgeprägt; es kommt die halbe GDM; es gibt einen Gesellschaftsabend; an dem nimmt ein Drittel GDM teil; es gibt einen Tagungsband mit den Vierseiten-Beiträgen; abgesehen von ein paar statistischen Besonderheiten kann man in jedem Vortrag grundsätzlich Alles verstehen. Dagegen werden auf DMV-Tagungen nach meinem Eindruck eher spezielle Felder von Spezialisten beackert, und wenn man (auch als Universitätsmathematiker) in ein „falsches" Minisymposium gerät, versteht man wenig von diesem.

Bei „uns" bietet sich die durchgängige Gliederung der Tagung in Minisymposien weniger an; denn das Spezialistentum ist bei uns viel geringer ausgeprägt als in der DMV. Trotzdem haben wir uns in den letzten Jahren diese Struktur der DMV-Tagungen zum Vorbild genommen, mit dem Motiv, dass die Qualität unserer Vorträge dadurch steigen könnte. Ich bezweifle diesen Effekt und sehe als möglichen Nachteil ein Auswalzen gewisser Themen. In der Vergangenheit habe ich immer wieder auch Vorträge innerhalb von Minisymposien besucht, weil diese sich ja an das allgemeine Zeitraster hielten und damit prinzipiell zeitlich anschlussfähig an andere Veranstaltungen waren, so dass man störungsfrei hinein- und herauswechseln konnte. Dieses Prinzip soll 2018 auf der Tagung in Paderborn leider aufgehoben werden: die Leiter eines Minisymposiums sind innerhalb eines vorgegebenen Zeitfensters von 90 Minuten mit dessen Aufteilung auf die Beiträge frei, gegebenenfalls auch noch einmal in einem zweiten solchen Zeitfenster.

Nachdem wir schon zum dritten Mal die DMV veranlasst haben, von ihrem üblichen September-Termin abzuweichen und sich unserem Frühjahrstermin anzuschließen, haben „wir" nun ein schlechtes Gewissen und meinen, wir müssten bei der nächsten gemeinsamen Tagung einmal (oder ab dann immer, wegen der vielen gemeinsamen Tagungen, die dann noch kommen werden) auf den September gehen. Nun ist die DMV gewöhnt, mit anderen Gesellschaften gemeinsam zu tagen (immer wieder mit der GAMM, aber auch mit den Schwestergesellschaften in Österreich oder Polen o.ä.), und scheint sich häufiger nach den anderen zu richten. Der DMV fallen solche Wechsel offensichtlich leichter, und „wir" bräuchten eigentlich kein schlechtes Gewissen zu haben. Trotzdem wäre es eine Sache des guten Stils, sich auch einmal der DMV anzuschließen.

Als Motiv für einen dauerhaften Wechsel zum September genügt mir die Freundschaft zur DMV aber nicht. Und, jawohl, ich bringe das Un-Argument: Wir waren schon immer auf Ende Februar/Anfang März, und es ist kein ernsthafter Grund für diesen Wechsel in Sicht. Einige Arbeitskreise müssten aber von ihren angestammten Terminen weichen, viele Kollegen müssten ihre Jahresplanung umstellen, und der inzwischen allein übrig gebliebene Monat im Jahr, in dem man einmal außerhalb der Schulferien an einem etwas längeren Stück frei machen könnte, wäre auch noch angeknabbert (das betrifft hauptsächlich die paar Kollegen ohne Schulkinder und ohne Lehrer-Partner).

Bei der GDMV-Tagung 2018 in Paderborn werde ich an der Herausgabe des GDM-Tagungsbands wesentlich mitarbeiten. Über die formalen Layout-Vorgaben hinaus möchte ich um die Beachtung folgender Punkte bitten:

1. Immer wieder – jedenfalls in den gedruckten Bänden – kann man eingebundenen Grafiken das Wesentliche nicht entnehmen, weil (i) die Schrift viel zu klein und/oder (ii) der Hintergrund zu dunkel und/oder (iii) die Druckfarbe zu blass und/oder (iv) kein Kontrast zwischen den Grautönen vorhanden ist. – Am besten drucken Sie vorher einmal Ihre herrlich bunten DIN-A4-Vorlagen unter Realbedingungen aus, d. h. verkleinert auf DIN A5 in schwarz-weiß, und gestalten gegebenenfalls die Grafiken neu oder lassen sie weg.
2. Immer wieder verlängern Autoren ihren Beitrag, indem sie ihn am Ende der vier Seiten abbrechen und dazu schreiben, man könne den Rest bei ihrer Mail-Adresse abrufen. Zugegeben, bei diesem Rest handelt es sich regelmäßig um das Literaturverzeichnis. Aber dieses ist ebenfalls integraler Bestandteil eines jeden wissenschaftlichen Artikels, und man muss dann so kürzen, dass auch es unter Beachtung der Layout-Vorgaben auf die vier Seiten passt. Das sollte bei einem 30-Minuten-Vortrag als Grundlage immer möglich sein.

Peter Bender, Universität Paderborn
bender@math.upb.de

Schlechte Diagramme

Martin Brunner

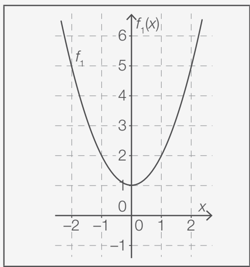
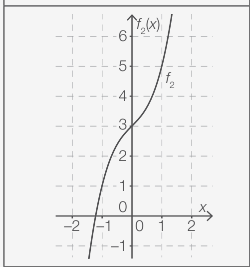
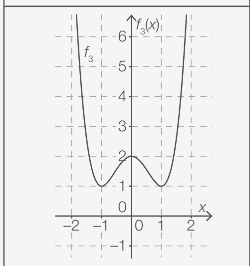
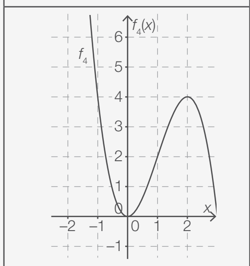
Die typische Verwendungsweise mathematischer Inskriptionen ist durch den Begriff „Diagramm" nach Ch. S. Peirce gut beschreibbar (vgl. etwa Hoffmann, 2005; Dörfler, 2006; Brunner, 2009). Im Normalfall sind mathematiküblich Inskriptionen auch gut als Diagramme verwendbar. Dies gilt aber nicht für viele in jüngster Zeit entwickelte mathematische Aufgabenformate. Solche Aufgabenformate werden im Folgenden als „schlechte Diagramme" bezeichnet. Als Demonstrationsbeispiel für ein solches „schlechtes Diagramm" wird im vorliegenden Aufsatz eine konkrete Aufgabe aus der österreichischen standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung 2016 (die Reifeprüfung wird in Österreich auch Matura, in Deutschland Abitur genannt) verwendet. Der angeführte Aufgabentyp ist in den Maturen und Modellschularbeiten des Österreichischen Kompetenzmodells (ÖKM) prominent vertreten. Er wurde etwa in der Modellschularbeit 2014 (Aufgabe 6), in der Probeklausur 2014 (Aufgabe 7), in der Matura 2016 (Aufgabe 15) oder in der Matura zum Nebentermin 2017 (Aufgabe 16) jeweils im Schultyp „Allgemein bildende höhere Schule" (Gymnasium) verwendet. Aufgabentypen wie der der in Abb. 1 angeführte dienen im ÖKM der Festigung und Testung von Grundkompetenzen.

Funktionen und Ableitungsfunktionen

Links sind die Graphen von vier Polynomfunktionen (f_1, f_2, f_3, f_4) abgebildet, rechts die Graphen sechs weiterer Funktionen (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Polynomfunktionen f_1 bis f_4 ihre jeweilige Ableitungsfunktion aus den Funktionen g_1 bis g_6 (aus A bis F) zu!

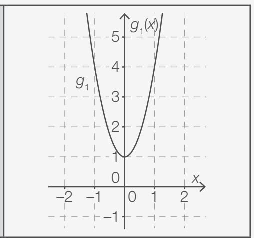
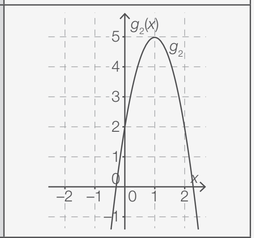
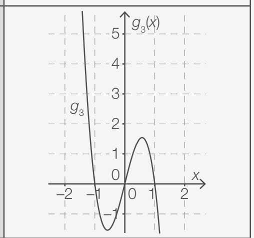
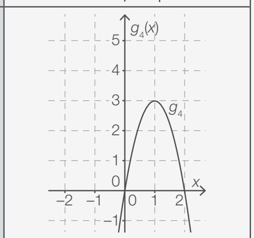
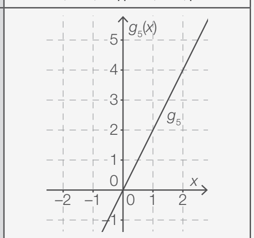
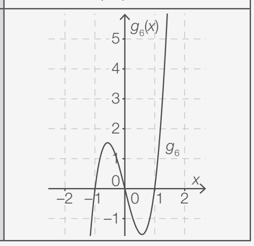
A	
B	
C	
D	
E	
F	

Abbildung 1. Das angeführte Beispiel wurde in der Reifeprüfung 2016 (Aufgabe 15) verwendet (Quelle: https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Matura_2015-16/12_MAT/KL16_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU.pdf)

N E W
N E W
N E W

Abbildung 2. Aus einem Extremum der Funktion wird in der ersten Ableitung eine Nullstelle, aus einem Wendepunkt entsprechend in der ersten Ableitung ein Extremum und in der zweiten Ableitung eine Nullstelle.

Im Folgenden wird der angeführte Aufgabentyp mithilfe des Diagrammbegriffs untersucht. Mathematische Inskriptionen tragen ihre Bedeutung nicht automatisch mit sich. Eine Wellenlinie kann etwa als Zeichen für „Trennung“, „Auf und ab“, „Vagheit“, „Wellen“ oder „Wasser“ gebraucht werden. Man kann sie aber nach den entsprechenden Regeln auch als „Sinusfunktion“ verwenden. Inskriptionen werden also nur durch deren Verwendung nach festgelegten Regeln zu mathematischen Zeichen. Wie eingangs erwähnt ist die typische Verwendungsweise mathematischer Inskriptionen durch den Begriff „Diagramm“ gut beschreibbar. Ein Diagramm ist eine Inskription mit einer wohldefinierten Struktur. Es gelten Schreibregeln und festgelegte Beziehungen zwischen den verschiedenen Teilen. Diagramme sind eng miteinander vernetzt und in so genannten Diagrammsystemen organisiert. In den Diagrammen und Diagrammsystemen gelten Regeln für erlaubte Operationen, Transformationen, Zerlegungen, Kompositionen und Kombinationen. Lernt man Inskriptionen als mathematische Zeichen zu verwenden, so lernt man sie in diesem Sinne als mathematische Diagramme zu gebrauchen. Neben dem Diagrammbegriff bilden Aspekte der beobachtbaren Sichtweise des ÖKM auf Sinn und Bedeutung der so genannten mathematischen Darstellungen die Basis der folgenden Untersuchung. Im ÖKM geht es neben der Kompetenzorientierung um einen weitreichenden Paradigmenwechsel, der auch in der „Erstellung oder Veränderung von Aufgaben“ besteht (vgl. Broschüre des zuständigen österreichischen Bundesinstituts „Bifie“ 2011, S. 109). Im Zentrum des ÖKM steht ein Katalog von Grundkompetenzen. Zentrales Anliegen des ÖKM ist nach eigener Diktion der „Aufbau mathematische Kompetenz“. Darunter sei „die Fähigkeit zu verstehen, mathematisches Denken zu entwickeln und anzuwenden, um Probleme in alltäglichen Situationen zu bewältigen“ (Liebscher u. a., 2014, S. 3). Es wird nun ausgehend von dieser Grundposition auch der Frage nachgegangen, inwieweit man mit Aufgabenformaten wie dem angeführten von Lernenden erworbenes „mathematisches Denken“ zu entwickeln und zu überprüfen imstande ist.

Ein wesentliches Anliegen des ÖKM ist es nach eigenen Grundsätzen, das rein algorithmische Rechnen und Operieren in den Hintergrund zu drängen und mathematisches Problemlösen vor allem in deskriptiven Zusammenhängen in den Vordergrund zu stellen. Im Praxishandbuch, Teil 2 (Breyer u. a., 2013, S. 37) heißt es etwa: „Als Problemlösen wird die Fähigkeit bezeichnet, auch mit jenen Aufgaben erfolgreich umgehen zu können, deren Lösungsweg nicht unmittelbar ersichtlich ist. Mathematische Probleme sind dadurch charakterisiert, dass ihr Lösungsweg nicht offensichtlich ist: es steht kein unmittelbar zum Ziel führendes Rezept – etwa in einer Formel oder eines Algorithmus – zur Verfügung.“ Wenn die angeführte Aufgabe als so genannte Typ1-Aufgabe in erster Linie auch nur als Diagnoseinstrument der Überprüfung von Grundkompetenzen dienen mag, sie wird den angeführten Ansprüchen nicht gerecht. Gerade bei derartigen Aufgabenformaten ist es leicht, einen Algorithmus bzw. einfache Regeln zu deren Lösung anzugeben. Solche Regeln können etwa lauten: „Hat die Funktion f n Nullstellen, so hat die zugehörige Ableitung f' $(n-1)$ Nullstellen“, „Hat f an der Stelle x_0 ein Extremum, so hat f' an dieser Stelle eine Nullstelle“, „Hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, so hat f' an dieser Stelle ein Extremum“, „Ist f im Intervall $I[a, b]$ linksgekrümmt, so ist f' in I streng monoton steigend“, usw. Unter den Lernenden und im Internet kursieren im Hinblick auf die Lösung derartiger Aufgaben übrigens Regeln wie die in Abb. 2 abgebildete.

Hinzu kommt, dass bei den Reifeprüfungen elektronische Werkzeuge wie etwa GeoGebra verwendet werden dürfen. Es ist nicht schwer, die angegebenen Funktionsgrafen mithilfe von GeoGebra einzugeben. Die entsprechenden Ableitungen können in der Folge mittels eines einfachen Befehls leicht ermittelt werden

Für die Lösung von Aufgaben wie der angeführten muss man kein adäquates Begriffsverständnis entwickelt haben. Streng genommen kann man obige Aufgabe rein *figürlich* lösen. Es reicht, Hoch- oder Tiefpunkte als Kurvenberge oder -täler, Wendepunkte als „Lenkradumsetzpunkte“, Kreuzungspunkte von entsprechenden Linien als Nullstellen usw. zu betrachten. Wie eingangs erwähnt sind Inskriptionen ja nicht automatisch mathematische Zeichen. Sie sind es nur, wenn man in der Lage ist, Inskriptionen als mathematische Diagramme zu verwenden. Hierfür muss man durch intensives Training Vertrautheit mit den entsprechenden mathematiküblichen Inskriptionsverwendungen und Regeln aufgebaut haben. Essentiell ist dabei die relationale Verwendung der Inskriptionen. Verwendet man Inskriptionen rein figürlich, so wird im Sinne von Dawydow (1977) der Übergang von der empirischen zur theoretischen Begriffsbildung erschwert. Verwendet man beispielsweise einen Kreis rein als Figur, so ist er etwa bei Verwendung der

Maximumsmetrik von einem Quadrat nicht unterscheidbar. Ein Kreis ist aber mathematisch durch eine Relationalität bestimmt. Er ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die einen konstanten Abstand zu einem vorgegebenen Punkt dieser Ebene (dem Mittelpunkt) haben. Ohne theoretische Begriffsbildung ist es nach Dawydow (1977) nicht möglich, mathematische Begriffe adäquat zu bilden. Durch eine auf Figürlichkeit gründende Begriffsbildung wird der Übergang von einer empirischen zur theoretischen Begriffsbildung erschwert (vgl. auch Dörfler, 1988; Peschek 1989). Hinzu kommt, dass mathematische Begriffe letztlich durch die Erfindung und Beschreibung von Diagrammen entstehen (Dörfler, 2006, S. 202). Begriffe wie „Steigung" beziehen sich auf mehrere Diagramme wie „Funktionsgleichung", „Funktionsgraf", „rechtwinkliges Dreieck", „Tangens" usw. Man kann Begriffe wie „Steigung" nur auf der Basis von großer Vertrautheit mit den entsprechenden Diagrammen und ihrem Zusammenwirken korrekt bilden. Die involvierten Diagramme „Funktionsgleichung" und „Funktionsgraf" wirken etwa im Zusammenhang mit dem Differentialquotienten gegenseitig stabilisierend. Ohne Vertrautheit mit dem algebraischen Diagramm „Differentialquotient" ist es etwa nicht möglich, regelkonform Bedeutung im Zusammenhang mit den Diagrammen „Funktionsgraf" und „Tangente" zu konstruieren (vgl. Brunner, 2015, 2017) und in der Folge die erste Ableitung f' als Funktion der Steigungen der Funktion f zu begreifen. Mithilfe von Aufgabenformaten wie dem angeführten kann nicht getestet werden, ob Lernende zu korrekter Bedeutungsbildung im Zusammenhang mit den entsprechenden Begriffen in der Lage sind.

Das angeführte Aufgabenformat ist vollkommen statisch. Es verlangt generell keinerlei Kompetenz im Zusammenhang mit der aktiven operativen Verwendung der jeweiligen Diagramme. Da es zudem mithilfe einfacher Regeln lösbar ist, kann damit auch nicht die Fähigkeit zur mathematiküblichen Interpretation der Diagramme geprüft werden. Es wird aber an Aufgaben wie der obigen eine bestimmte Sicht des ÖKM auf Sinn und Bedeutung der mathematischen Diagramme und des mathematischen Wissens erkennbar: Im ÖKM werden Diagramme als Darstellungen von implizit existierenden abstrakten Objekten betrachtet. Dies kommt auch in einer Aussage im Zusammenhang mit den elektronischen Werkzeugen zum Ausdruck (Liebscher u. a., 2014, S. 75): „Die Möglichkeit der grafischen Darstellung abstrakter Objekte ist für die Kompetenzentwicklung im Allgemeinen und für alle Phasen des Problemlöseprozesses im Besonderen von Bedeutung [...]". Man betrachtet mathematische Inskriptionen also als Repräsentationen nicht wahrnehmbarer abstrakter Objekte. Im Sinne des hier erkennbaren Platonismus versucht man mit Aufgabenformaten wie dem angeführten vermutlich, das Wissen der Lernenden über die involvierten abstrakten Objekte zu überprüfen. „Wissen" und „Kennen" ist aber etwas anderes als mathematisches „Können" im Sinne des operativen Herleitens von Kenntnissen und des nachvollziehbaren Begründens der Richtigkeit von Behauptetem. Aber auch wenn man diese platonistische Sichtweise auf mathematische Inskriptionen teilt – wie kann man ohne die Fähigkeit zur Verwendung der involvierten Inskriptionen als Diagramme (d. h. als mathematische Zeichen) und in der Folge durch entsprechende Operationen etwas über die nicht wahrnehmbaren abstrakten Objekte erfahren? Verständnis im Sinne des mathematischen Kenntniserwerbs und des mathematischen Begründens fußt auch im Falle einer platonistischen Sichtweise auf der Fähigkeit, mathematikübliche Inskriptionen nach den mathematiküblichen Regeln zu verwenden. Will man in diesem Sinne mathematisches Verständnis überprüfen, so muss man die mathematische Handlungsfähigkeit testen.

Wie eingangs erwähnt geht es im ÖKM vor allem auch um die Entwicklung von „mathematischem Denken" und um Problemlösen. Während man im ÖKM bei der Definition dieser Begriffe vage bleibt, lässt sich diagrammatisch relativ präzise formulieren, was man darunter versteht. Es geht um eine bestimmte Art des Denkens, welche häufig als „diagrammatisches Denken, diagrammatisches Schließen oder diagrammatisches Begründen" (z. B. Hoffmann, 2005; Dörfler, 2006) bezeichnet wird. Kenntniserwerb und Nachvollziehbarkeit erfordern in der Mathematik systematisches Experimentieren und die Untersuchung und Exploration der involvierten Diagramme. Mathematische Tätigkeit hat nach dieser Sicht eine konkrete handwerkliche Dimension, sie wird zu einem Arbeiten mit materiellen, wahrnehmbaren und veränderbaren Inskriptionen (vgl. etwa Dörfler, 2006, S. 211). Dies bedeutet, dass dem Aufbau von Vertrautheit mit den Diagrammen, Diagrammverwendungen (Operationen, Transformationen usw.) und Diagrammsystemen zentrale Bedeutung im Mathematikunterricht zukommt. Die angesprochene Vertrautheit muss durch intensive Zeichenpraxis selbst erworben werden. Auch Problemlösen ist in der Mathematik ein Prozess des Schreibens und Denkens und nicht des Denkens allein. Dies betont auch Rotman (2000) mit seiner Einheit von „scribbling/thinking". Man wählt ein Diagramm – denkt – operiert bzw. transformiert – wählt unter Umständen andere Diagramme – denkt – operiert usw. Mit dem angeführten Aufgabenformat kann all dies nicht entwickelt oder getestet werden. Man muss keinerlei Rechtfertigung für die durch die jeweiligen Einsetzungen behaupteten Zusammenhänge erbringen. Es müssen Diagramme nicht geschickt gewählt werden, es muss nicht operiert und mathematisch argumentiert werden. Das „Multiple Choice Format" des Beispiels führt zusätzlich zu bekannten Problemen wie etwa jenem, dass die Beweggründe für bestimmte Entscheidungen nicht offengelgt werden müssen und so die Qualität des Arguments nicht zählt. Betrachtet man noch, dass diese neuen Aufgabenformate eigene unvertraute Regelsysteme darstellen, die im Unterricht auch entsprechend geübt werden müssen und dadurch Zeit für den Erwerb von Vertrautheit mit erprobten mathematiküblichen Diagramme genommen wird, so sind Vorteil und Sinn derartiger Aufgabenformate nur schwer erkennbar. Diese neuen Beispiele werden jedenfalls den eingangs angeführten theoretischen Ansprüchen nicht gerecht.

Literatur

Bifie (2011). *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis*. http://www.bifie.at/system/files/dl/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf.

Breyer, G., Heugl H., Kraker, M., Liebscher, M., Liegl I., Preis, Siller H., Stepancik E., Svecnik, E. (2013). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe, Teil 2*. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/Publikationen/srdp_ma_praxishandbuch_mathematik_teil2_2013-12-23.pdf.

Brunner, M. (2009). Lernen von Mathematik als Erwerb von Erfahrungen im Umgang mit Zeichen und Diagrammen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30 (3/4), 206-231.

Brunner, M. (2015b). Bedeutungsherstellung als Lehr- und Lerninhalt. *mathematica didactica* 38, 199-223.

Brunner, M. (2017). Die Rollen der Inskriptionen als nützliche Sichtweise im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, doi:10.1007/s13138-017-0114-z .

Dawydow, W. (1977). *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht*. Berlin: Volk und Wissen.

Dörfler, W. (1988). Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung von empirischem und theoretischem Begriff. In: Brender, P. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*, 29–36. Berlin: Cornelsen.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 27 (3/4), 200–219.

Hoffmann, M. (2005). *Erkenntnisentwicklung, Philosophische Abhandlungen Bd. 90*. Frankfurt a. M.: Klostermann.

Liebscher, M., Breyer, G., Fürst, S., Heugl, H., Kraker, M., Preis, C., Svecnik, E., Liegl., I., Plattner, G. (2014). *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe, Teil 1. Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung. Teil 1*. Graz: Leykam.

Peschek, W. (1989). Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Lernprozess. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10 (3), 211–285.

Martin Brunner, Bundesrealgymnasium Lienz
und Universität Salzburg, Österreich
Email: martin.brunner2@sbg.ac.at

Schöne neue Mathewelt – eine Klarstellung

Christian Dorner und Stefan Götz

Auch auf die Gefahr hin den Leser bzw. die Leserin mit einem weiteren Diskussionsbeitrag zur (österreichischen) Zentralmatura zu langweilen, fühlen wir uns verpflichtet, offensichtliche Missverständnisse im Artikel von Kühnel und Bandelt ([5]) auszuräumen.

Die Feststellung der beiden Autoren „Es ist wohl recht selten, dass aus der didaktischen Fachwelt heraus überhaupt etwas zu Abituraufgaben gesagt wird" ([5], S. 16) kann für Österreich dahingehend kommentiert werden, dass die fachdidaktische Community für Mathematik sehr klein ist im Vergleich zu der Zahl an Universitäten tätigen Mathematikern und Mathematikerinnen. Die Arbeitsbelastung ersterer ist dementsprechend.

Weiterhin schreiben sie eine Mathematikaufgabe könne prinzipiell nicht beleidigt werden, etwa dadurch, dass sie als „Pippi-Langstrumpf-Aufgabe" bezeichnet wird ([5], S. 16). Das ist sicher richtig, gemeint ist aber, dass jene, die die Aufgabe geschrieben haben bzw. jene, die ihre Auswahl zu verantworten haben, beleidigt sein könnten. Hier findet also eine Übertragung statt, die sicher leicht nachvollziehbar ist. Wenn Autoren bzw. Autorinnen ihre Werke mit dem Zusatz „. . . für Dummies" kennzeichnen (vgl. [5], S. 16), dann ist das sicher anders zu bewerten, als wenn jemand von außen eine solche Charakterisierung vornimmt. Insgesamt geht es hier wohl nicht um unterschiedliche Vorstellungen oder gar Empfindsamkeiten in Deutschland und Österreich, sondern um stark differierende Einschätzungen bzw. Beurteilungen von Kühnel und Bandelt einerseits und Dorner und Götz andererseits. Die offenen Worte deuten wir nicht als Angriff, sondern als bloße tendenzielle Meinungsdarstellungen von zwei Mathematikern.

Das saloppe Umgehen von Kühnel und Bandelt ([5], S. 16) mit der Zuordnung der 2015 gegebenen Aufgabenstellungen zu NMS oder darüber hinaus (Tabelle 1 in [4], S. 32) verschleiert einen unserer wesentlichen Punkte in [2]. Bei einer sorgfältigen, den Lehrplan genau beachtenden Zuordnung bleiben höchstens zwei Typ-1-Aufgaben übrig, die der NMS zuordenbar sind. Zählt man Aufgaben hinzu, die der neunten Schulstufe (AHS 5) zuordenbar sind, ergeben sich insgesamt sieben von 24 Aufgaben. Für eine positive Beurteilung sind allerdings 16 Punkte notwendig (pro gelöster Typ-1-Aufgabe gibt es einen Punkt). Zur Erinnerung: in Österreich gibt es keine Mittelstufe. Von einer Absenkung des Abiturniveaus auf das des mittleren Schulabschlusses kann also definitionsgemäß keine Rede sein, sondern der Stoff der Oberstufe (neunte bis zwölfte Schulstufe) wurde in mindestens 22 von 24 Typ-1-Aufgaben abgeprüft.

Die Kernthese von Kühnel und Bandelt vermittelt den Eindruck, dass Aufgaben aus der neunten bzw. zehnten Schulstufe weniger wert sind als solche aus der elften bzw. zwölften Schulstufe. In [1], S. 4 heißt es:

> So werden in vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens Meinungen (von Expertinnen und Experten) eingeholt oder man wird selbst mit Meinungen von Expertinnen und Experten konfrontiert, die verstanden, bewertet und zur eigenen Erfahrungswelt in Beziehung gesetzt werden müssen, um letztlich Entscheidungen treffen zu können. Die Maturantinnen und Maturanten können hier eine wichtige Vermittlerrolle erhalten, da sie in der Lage sein sollten, Meinungen einzuholen, diese zu verstehen, Expertisen verständlich zu erklären und Vorschläge für die Bewertung und Integration solcher Meinungen zu entwickeln, sodass sie als *„höher gebildete Laien“* fungieren können.

Daraus lässt sich ableiten, dass eine Aufgabe zu einer linearen Funktion (neunte Schulstufe) dieselbe Berechtigung hat abgeprüft zu werden wie eine Aufgabe, in der ein bestimmtes Integral interpretiert werden muss (zwölfte Schulstufe). Eine strikte gleichmäßige Verteilung der Aufgaben auf die vier Jahrgangsstufen ist wohl nicht intendiert und auch vom Konzept her nicht zwingend notwendig.

Unsere Feststellung

> Die früheren Maturaaufgaben, die aus dem Stoff des gesamten Lehrplans der Oberstufe konzipiert werden konnten, waren daher tatsächlich zum Teil erheblich komplexer (und mathematisch anspruchsvoller) als die aktuellen. ([2], S. 27)

wurde von Kühnel und Bandelt unvollständig zitiert, sodass unsere Absicht nicht mehr erkennbar ist. Die Fortsetzung lautet nämlich:

> Allerdings kann man in den Jahresberichten der einzelnen Gymnasien durchaus unterschiedliche Anspruchsniveaus der Aufgabenstellungen erkennen, wobei natürlich die jeweilige Vorbereitung mit in Betracht zu ziehen ist. Gleichwohl, hier Vergleichbarkeit herzustellen war ein wesentliches Motiv für die Einführung der Zentralmatura. Davor machte schon die Vertrautheit mit den Formulierungen in der Aufgabenstellung oft nach ein paar (Signal-)Wörtern klar, was zu tun ist. Jetzt ist ein tieferes Verständnis der Begriffe und Konzepte nötig, um flexibel mit ihnen in einfacheren, aber nicht vertrauten Situationen umgehen zu können. ([2], S. 27)

Derart komplexe Aufgaben konnten im Allgemeinen nur mit entsprechender Vorbereitung im Unterricht erfolgreich bearbeitet werden, wie es früher „die Spatzen von den Dächern pfiffen“ (vgl. [5], S. 17). Die bei der Zentralmatura gestellten Aufgaben dagegen entbehren prinzipiell jeder „A-priori-Vertrautheit“ seitens der Reifeprüfungskandidaten und -kandidatinnen.

Dazu äußert sich auch der Fachmathematiker (!) Reinhard Winkler folgendermaßen:

> Doch rufen wir uns die frühere Form der Matura selbst in Erinnerung. Zur Vorbereitung reichte es aus, im Unterricht sechs bis acht Aufgabentypen zu trainieren. Der Klassenlehrer stellte ein paar Aufgaben zusammen, und die Schulbehörde wählte davon vier aus. So konnten Überraschungen, auf die mit echtem Stoffverständnis oder gar mit Ansätzen selbständigen Denkens zu reagieren gewesen wäre, von vornherein ausgeschlossen werden. Brave Schüler bekamen gute Noten, weniger brave, sofern sie nicht mit rarer mathematischer Begabung gesegnet waren, weniger gute.

und weiter

> Eine wesentliche Schwäche der früheren Matura lag in dieser Einheit von Lehrer und Prüfer. Unweigerlich entstanden Potemkinsche Dörfer, wo als Fassade eine Komplexität mathematischen Wissens vorgetäuscht wurde, der keinerlei fachliche Substanz entsprach. ([8], S. 132)

Es sei nicht verschwiegen, dass auch er Kritikpunkte an der Zentralmatura anzubringen hat, aber ganz andere als Kühnel und Bandelt.

Trotz sorgfältiger Analyse der Matura 2016 (Haupttermin) konnten wir nur dann elf Punkte der Prozentrechnung zuordnen ([5], S. 17), wenn wir eine ganze Typ-2-Aufgabe (acht Punkte, davon sind allerdings sieben für das Bestehen der Matura nicht relevant!) dazurechnen. Sie handelt vom neuen Einkommensteuergesetz in Österreich, ein aktuelles Thema, das der von Kühnel und Bandelt als Kronzeuge angeführte Rudolf Taschner ([5], S. 17 und S. 18) ausdrücklich lobt:

> Die Matura sei nicht zu schwer und nicht zu leicht gewesen, manche Aufgaben sehr interessant: das Beispiel zum österreichischen Steuersystem etwa. ([6])

Für Schülerinnen und Schüler (nicht deutscher Muttersprache) ist es natürlich schwer, komplexere Texte so zu lesen, dass ihnen ihr mathematischer Gehalt klar wird. Gerade das verlangt aber das Konzept der Typ-2-Aufgaben:

> Die Präsentation der Aufgabe erfolgt durch einen einleitenden Text, der das Thema der Aufgabe darlegt. Der Text hat informativen (erklärenden) Charakter. Er kann auch Informationen und Aussagen enthalten, die für die Lösung der Fragen nicht unmittelbar von Bedeutung sind. ([1], S. 24)

Im Sinne der Lebensvorbereitung ist es doch sehr sinnvoll Fragestellungen in einem kontextbehafteten Zusammenhang mathematisch zu bearbeiten. Die Einkommensteuer ist nun mal eine komplexe Materie, die aber viele Menschen betrifft bzw. (Reifeprüfungskandidaten und -kandidatinnen) betreffen wird!

Es gibt dazu allerdings keinerlei empirische Befunde, dass Schüler und Schülerinnen mit nicht deutscher Muttersprache Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Aufgaben haben, die Kühnel und Bandelt oder jedenfalls der von ihnen zitierten Gymnasialdirektorin offenbar zu textlastig („viel Text enthaltend“ laut Duden) sind ([5], S. 17), im Allgemeinen sind das Typ-2-Aufgaben. Die Muttersprache wird bei der Erhebung der Lösungsquoten pro Schüler bzw. Schülerin nämlich nicht miterhoben. Es handelt sich daher um bloße Mutmaßungen und keine wissenschaftlich belegten Aussagen. Es könnte natürlich auch sein, dass Schüler und Schülerinnen mit geringer Sprachkompetenz – unabhängig von ihrer Muttersprache – Schwierigkeiten bei der Bearbeitung längerer Textpassagen haben (vergleiche die Gruppe der „Risikoschüler und Risikoschülerinnen“ bei den PISA-Testungen). Aber auch dafür gibt es keinerlei Befunde, da auch die Sprachkompetenz im Rahmen der Reifeprüfung in Mathematik nicht extra erhoben wird. Zudem sei hier wieder das Argument angeführt ([2], S. 27), dass für das Antreten zur schriftlichen Reifeprüfung eine positive Absolvierung der Abschlussklasse nötig ist, also auch ein positiver Abschluss im Unterrichtsgegenstand Deutsch. Texte erfassen sollten daher alle Kandidatinnen und Kandidaten bei der Matura bereits können.

Rückmeldungen, wie jene von Kühnel und Bandelt zitierte zu einer angeblich zu großen Textlastigkeit, beziehen sich zudem meistens auf Typ-2-Aufgaben, die aber – abgesehen von den Ausgleichspunkten – für eine positive Beurteilung nicht relevant sind, sondern „nur“ für die Noten Befriedigend, Gut und Sehr gut. Für eine positive Beurteilung sind eben (bis auf die Ausgleichspunkte) ausschließlich die (zumindest bei den letzten beiden Hauptterminen) überwiegend kurzen Typ-1-Aufgaben von Bedeutung. Bei ihnen ist eine Textlastigkeit also i. Allg. nicht gegeben.

In diesem Zusammenhang ist die Lösungsquote der (gar nicht so kurzen, also fast schon textlastigen) Typ-1-Aufgabe „Lorenz-Kurve“ aus dem Haupttermin 2015 von 92 % interessant ([3], S. 64). Trotz des sicher nicht für alle Schüler und Schülerinnen vertrauten Kontextes und der für die Beantwortung der Aufgabenstellung zweimaligen Transferleistung erreichte diese Aufgabe eine der fünf besten Lösungsquoten dieses Klausurtermins ([3], S. 64 f.).

Die Nichtexistenz eines mittleren Schulabschlusses in Österreich haben wir schon angesprochen, daher greift der in diesem Zusammenhang geäußerte Kritikpunkt von Kühnel und Bandelt an der österreichischen Zentralmatura nicht.

An Spekulationen, dass die Politik eine Erhöhung der Abiturquote um jeden Preis wünscht, wie sie Kühnel und Bandelt bezüglich eines vermeintlichen Niveauverlustes im vorletzten Absatz von [5] (S. 17 f.) äußern, wollen wir uns nicht beteiligen. Jedenfalls können wir im Ersetzen von eintrainierten, komplexen Aufgaben durch einfachere, die in den Reifeprüfungskandidaten bzw. -kandidatinnen nicht vertrauten Situationen angesiedelt sind, keinen solchen erkennen, ganz im Gegenteil!

Und nein, wir haben keine wissenschaftliche Kritik der Matura in [2] geboten ([5], S. 18), sondern eine fundierte Antwort auf den im Jubiläumsheft der GDM-Mitteilungen erschienenen Artikel von Kühnel und Bandelt [4]. Das ist daher auch keine „Rechtfertigung des status quo“ ([5], S. 18). Warum aus der Aufzählung von bildungswissenschaftlichen Begriffen wie „Kompetenzstufenmodell“ oder „bildungstheoretische Orientierung“ keine „unabhängige wissenschaftliche Beurteilung der Matura zu erwarten ist“ ([5], S. 18), können wir allerdings einerseits nicht klären (ist die Mathematik die allein zuständige Wissenschaft für ein gesellschaftlich so relevantes Konzept, wie es eine Zentralmatura darstellt?), andererseits geht es weder in [2] noch in [7] um eine Beurteilung, sondern um eine reflektierte Beschreibung des zugrundeliegenden Konzepts und erster Ergebnisse der österreichischen Zentralmatura an Gymnasien in Mathematik. Mehr ist nach nur zwei Durchgängen auch noch gar nicht möglich.

Literatur

[1] *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik – Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen* (Stand: Oktober 2015). Projektteam: V. Aue, M. Frebort, M. Hohenwarter, M. Liebscher, E. Sattlberger, I. Schirmer, H.-S. Siller, G. Vormayr, M. Weiß, E. Willau. Redaktionelle Änderungen für die Neuauflage: G. Gurtner, S. Kramer, G. Steinlechner-Wallpach. https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf

[2] Dorner, Christian und Götz, Stefan (2016): Schöne neue Mathewelt?! In: *GDM-Mitteilungen* 101, S. 25–27.

[3] Kramer, Sonja und Sattlberger, Eva (2016): Habuemus Haupttermin – die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015 – wie war's und wie geht's weiter? In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 49, S. 60–73.

[4] Kühnel, Wolfgang und Bandelt, Hans-Jürgen (2016): Schöne neue Mathewelt der österreichischen Zentralmatura 2015. In: *GDM-Mitteilungen* 100, S. 30–34.

[5] Kühnel, Wolfgang und Bandelt, Hans-Jürgen (2017): Noch einmal: Schöne neue Mathewelt. In: *GDM-Mitteilungen* 102, S. 16–18.

[6] *Mathematik-Matura: „Den Schülern durchaus zuzutrauen"*. Die Presse Online-Ausgabe vom 11.5.2016, http://diepresse.com/home/bildung/schule/4986303/MathematikMatura_Den-Schuelern-durchaus-zuzutrauen

[7] Sattlberger, Eva und Steinfeld, Jan (2016): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an Gymnasien in Österreich. In: *GDM-Mitteilungen* 101, S. 18–25.

[8] Winkler, Reinhard (2016): Zentralmatura – quo vadis? In: *Schriftenreihen zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 49, S. 131–144.

Christian Dorner, Universität Wien, Österreich
Email: christian.dorner@univie.ac.at

Stefan Götz, Universität Wien, Österreich
Email: stefan.goetz@univie.ac.at

Zum ursprünglich intendierten Charakter der GDM

Heinz Griesel

In dem Aufsatz *Ergänzungen zur frühen Geschichte der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* behauptet Gert Schubring (Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 102, Januar 2017, S. 20):

> Der intendierte Charakter für die neue Vereinigung war also eine kleine und illustre Gruppe – oder sollte man sie eine Honoratioren-Vereinigung nennen?

Diese Behauptung ist völlig falsch. Dies muss so hart formuliert werden. Keiner der Wissenschaftler, welche die Gründung der GDM damals initiiert haben, wollte so etwas.

Die Behauptung ist so absurd, dass man eine Scherzdarstellung vermuten könnte. Dann hätte man herzhaft lachen können. Doch scheint der Autor keinen Scherz im Sinn gehabt zu haben.

Es gibt keine Quelle weder aus der Gründungszeit der GDM noch sonst, aus der hervorgehen könnte, die GDM sei als Honoratioren-Vereinigung intendiert gewesen. In der Begründung seiner Behauptung stützt sich Schubring allein auf eine damals im Satzungsentwurf formulierte Bedingung für die Aufnahme: Die Didaktik der Mathematik in Forschung oder Lehre zu vertreten.

Schubring schreibt (a. o. a. O., S. 20):

> Die Formulierung ein Fach in Lehre oder Forschung zu vertreten, war – und ist – die Kennzeichnung der Position eines Professors – und keineswegs jeden Professoren-Ranges, sondern der Position eines ordentlichen Professors, eines H4-Professors, C4-Professors und wie sich die Bezeichnungen inzwischen entwickelt haben.

Auch das ist nicht zutreffend. Richtig ist: *Ein Fach in Forschung* und *Lehre zu vertreten, kennzeichnet die Position eines Professors in Deutschland, der an einer Institution mit Universitätsrang tätig ist*. Das literarische Organ des deutschen Hochschulverbandes, der Berufsvertretung der Universitätsprofessoren in Deutschland, trägt bewusst den Titel: *Forschung und Lehre*. Das alles gilt auch für H3- bzw. C3- bzw. W2-Professoren, also nicht nur für die höchste Besoldungsstufe. Universitätsrang haben bzw. hatten in der BRD neben den klassischen Universitäten auch die technischen Hochschulen, die Gesamthochschulen, die medizinischen Hochschulen und die Pädagogischen Hochschulen. Universitätsrang bedeutet das Recht zur Promotion und Habilitation und die Verpflichtung zu Forschung und Lehre.

Der jedem Mathematiker vertraute Unterschied zwischen *und* bzw. *oder* ist von Herrn Schubring offenbar übersehen worden.

Das oder im Satzungsentwurf war dabei selbstverständlich – wie in der Mathematik üblich – im einschließenden Sinne gemeint.

Es gab damals eine Reihe von Kollegen, welche die Didaktik der Mathematik nur in der Lehre vertraten. Nach ihrer Stellenbezeichnung wurden sie unterschiedlich *Lehrbeauftragte, Dozenten, Studienräte, Assistenten, wissenschaftliche Bedienstete, akademische Räte, hauptamtliche Lehrerfortbildner, Fachleiter am Studienseminar*, usw. genannt. Zu allen diesen Beispielen kann ich Namen aus der damaligen Zeit nennen. Allen diesen Wissenschaftlern stand die GDM offen. Als erster Vorsitzender der GDM habe ich damals um diese Kollegen geworben. Im ersten Beirat der GDM waren sie auf meinen Vorschlag hin durch Herrn Böddecker vertreten, der u. a. in der Lehrerfortbildung in NRW und auch einige Jahre als Lehrbeauftragter an der Universität Bochum tätig war.

Willkommen waren von Beginn an auch *Doktoranden* und *Post-Doktoranden* sowie *Habilitierende* und *Privatdozenten* in Didaktik der Mathematik. Abgesehen von den Privatdozenten waren sie nicht zur Lehre sondern zur Forschung verpflichtet.

Mitarbeiter des IDM (Bielefeld) und des IPN (Kiel) waren i. a. nur der Forschung verpflichtet. Ihre Mitgliedschaft in der GDM war selbstverständlich sehr erwünscht. Herr Steiner vom IDM (Bielefeld) wurde während der Gründungsversammlung in den Beirat gewählt.

Um jeden, der die Didaktik der Mathematik in Forschung *oder* Lehre vertrat und damit ein aktives Bemühen um den Aufbau dieser Wissenschaft erkennen ließ, sollte geworben werden. Das war die Zielgruppe, die den Kern der GDM bilden sollte. So ist überhaupt zu verstehen, weshalb in dem Satzungsentwurf gerade diese Aufnahmebedingungen formuliert wurden. Als die GDM etabliert war, konnten sie gestrichen werden.

Die GDM sollte Dienstleistungen für ihre Mitglieder erbringen. Wenn ein Mathematikdidaktiker erkenne oder erhoffe, dass die GDM ihm Assistenz biete, werde er i. a. auch Mitglied werden, so die Einschätzung von Vorstand und Beirat der GDM. Diese Beurteilung hat sich i. W. bestätigt.

Ich selbst habe mich vor, während und nach Gründung der GDM immer für eine weite Auslegung der Aufnahmebedingungen ausgesprochen. Daher habe ich mich auch während der Gründungsversammlung deutlich dafür eingesetzt, jedem der Anwesenden die Mitgliedschaft anzubieten.

Hätte man tatsächlich eine „kleine, illustre Honoratioren-Vereinigung“ gewollt, so hätte man das nach §3, II. der Satzung von 1975 erreichen können. Dort heißt es: „Die Aufnahme neuer Mitglieder erfolgt auf Antrag durch Beschluss des Vorstandes.“ Der Vorstand hätte dann eben nur Honoratioren aufnehmen müssen, was natürlich nicht geschah.

Allerdings war ein spezifischer Qualitätsanspruch für mathematikdidaktische Forschung, Lehre und Publikation dringend geboten und unabdingbar. Das Wort „hervortreten“ (a. a. O., S. 20), so stellt Schubring zutreffend fest, sollte den Qualitätsanspruch zum Ausdruck bringen. Die Überwindung der damals noch enormen Gegnerschaft der Mehrheit der DMV war nur durch Qualität zu erreichen. Heute haben wir eine Zusammenarbeit zwischen GDM und DMV, sogar gemeinsame Jahrestagungen, was damals noch unmöglich war. Offensichtlich ist jetzt eine Mehrheit der DMV-Mitglieder von der Qualität der mathematikdidaktischen Forschung und Lehre überzeugt und erhofft wechselseitige Anregung bei den gemeinsamen Jahrestagungen. Qualität der Forschung und Lehre war und ist auch unabhängig von den Beziehungen zur DMV ein unbedingtes Ziel der GDM und für die Herausbildung eines anzustrebenden eigenständigen mathematikdidaktischen Wissenschaftsverständnisses unabdingbar.

Zur Frage, ob die GDM eine deutsche Gesellschaft ist: Es gab zu keinem Zeitpunkt die Auffassung, nur deutsche Staatsangehörige könnten Mitglied der GDM sein. Deshalb wurde die GDM bewusst nicht als deutsche Gesellschaft gegründet. Offenheit, insbesondere im europäischen Raum, war stets vorhanden. Schon kurz nach der Gründung wurden Österreicher in großer Zahl Mitglied. Einzelne Belgier und Nordeuropäer traten bei. Später kamen Schweizer hinzu, sogar als Landesgruppe. Herrn Kollegen Sill, eine „expansive Mission … nach Osteuropa“ (a. a. O. S. 20) zu unterstellen, ist absurd. Er wusste: Ungarn z. B. kann gar nicht missioniert werden. Es verfügt bereits über eine mathematikdidaktische Tradition mit internationaler Reputation, die auf den deutschen Sprachraum ausstrahlt. Man denke u. a. an Polya, Varga und Dienes. Sill plädierte dafür, den osteuropäischen Mathematikdidaktikern Hilfestellung durch die GDM zu geben, aber auch deren Eigenständigkeit zu respektieren. Heute existiert eine Arbeitsgruppe Ungarn in der GDM. Das finde ich großartig.

Eine sehr wichtige, aber auch schwierige Aufgabe der GDM war damals, zu den Kollegen in der DDR Kontakt aufzunehmen. Ich habe darüber in der Arbeit Griesel (2000) im Abschnitt 3.5 berichtet.

Literatur

Griesel, H. (2000). Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) – Gründung, Vorgeschichte und Entwicklung 1975 bis 1979, *Mitteilungen der GDM*, (70), 14–31.

Schubring, G. (2017). Ergänzungen zur frühen Geschichte der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (102), Januar 2017, 19–20.

Toepell, M. und Vohns, A. (2016). Zur Gründung und Entwicklung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, *Mitteilungen der GDM*, (101), 12–17.

Heinz Griesel, Kassel
Email: hgriesel@web.de

„Grenzwertfreie Analysis" in der Schule via „Nonstandard Analysis"?

Horst Hischer

In Heft 102 der GDM-Mitteilungen bedauern Peter Baumann und Thomas Kirski in ihrem Beitrag „Analysis ohne Grenzwert!" eine zu geringe Resonanz bezüglich ihres zuvor in Heft 100 unter dem Titel „Analysis mit hyperreellen Zahlen" erschienenen Basisartikels. Zugleich bitten sie darum, jenen noch einmal zu lesen. Dieses Anliegen ist gerechtfertigt, denn in den *Mitteilungen der GDM* ist eine konstruktive Diskussion und Reaktion auf Beiträge wünschenswert und angebracht.

Zunächst ist hervorzuheben, dass mit diesem Beitrag in der Fülle aktueller mathematikdidaktischer Publikationen ein weiterer erschienen ist, der in Richtung der oft abfällig „stoffdidaktisch" genannten Aspekte des Mathematikunterrichts zeigt: So stellen die Autoren in ihrem Basisartikel – didaktisch motiviert – ein wohl für den bisherigen Mathematikunterricht ungewöhnliches bzw. meist unbekanntes Thema vor, das erst vor rund 50 Jahren Einzug in die Mathematik gehalten hat.

Der zugrundeliegende mathematisch-didaktische Ansatz sei kurz kritisch-konstruktiv betrachtet. Der Basisartikel kann dabei jedoch in diesem Rahmen nur marginal herangezogen werden.

Ausgangslage

Die Schwierigkeit der Analysis kommt von den Quantoren, deren Gebrauch sie erzwingt.
Georges Papy, 1970

Die Autoren legen ihrem Vorschlag zur Behandlung der Analysis in der Schule via „Nonstandard Analysis" u. a. folgende Feststellung zugrunde (siehe Baumann & Kirski 2017, 15):

> Nun wissen alle Mathematiklehrerinnen und -lehrer aus eigener Erfahrung, welche Mühe es bereitet, jungen Menschen im Alter von 16 Jahren den Grenzwert zu vermitteln.

Das „alle" mag stören, weil es wohl auch andere, positive Erfahrungen gibt, jedoch liegt der Grund dieser Feststellung spekulativ in Folgendem:

Begriffe der Analysis wie etwa Grenzwert, Stetigkeit und Konvergenz *nur durch verbale Beschreibungen* erfassen und präzisieren zu wollen, ist wohl nicht nur in dieser Altersgruppe ein gewagtes (oder hier gar zum Scheitern verurteiltes?) Unterfangen, sondern auch im Studium. Und das zeigt sich ähnlich bei typisch mathematischen Floskeln wie „hinreichend" und „notwendig" – während sich hier überall der Schleier schlagartig zu lüften vermag, sobald man grundlegende Elemente der Logik eingeübt hat und sie verwendet.

So wird bei der Verwendung von Quantoren (endlich) klar, was etwa der Unterschied zwischen „Konvergenz" und „gleichmäßiger Konvergenz" ist: Die *Reihenfolge der Quantoren* macht's!

Zugleich schreiben die Autoren zuvor a. a. O.:

> Wir wollten deutlich machen, *dass die Analysis völlig ohne Grenzwert auskommt*.

In der Tat ist dies möglich, und so hat bereits 1973 Detlef Laugwitz analysiert,

> inwieweit für die Analysis des Schulunterrichts der Grenzwertbegriff wirklich erforderlich ist.

Die didaktisch bedeutsame Frage ist nun aber keinesfalls nur, ob im Analysisunterricht der Grenzwertbegriff *erforderlich* und damit eine „grenzwertfreie" Behandlung der Analysis im Mathematikunterricht *möglich* ist, sondern vielmehr ist zu erörtern, ob ein solcher Weg *sinnvoll* oder gar *wünschenswert* ist.

Von „New Math" in den 1970ern zu „No Math"

… so kann man nun eher von einer No-Math Bewegung sprechen, die ihr Heil in antididaktischen Omissionen sucht.
Rainer Kaenders, 2006

Einer der Schwerpunkte mathematikdidaktischer Diskussionen und Publikationen war seit 1968 vor allem und zunächst die *Präzisierung* unterrichtsrelevanter mathematischer Begriffe, Verfahren, Sätze und Beweise und deren Veranschaulichung. Die „Strukturmathematik" war für diese Ende der 1960er Jahre einsetzende Entwicklung mit ihren grundlegenden Säulen aus Logik und Mengenlehre zugleich ein wichtiger Motor.

Dabei ist zu betonen, dass für den Mathematikunterricht niemals „Mengenlehre" als Leitfaden angesagt war (was auch heute für das Studium leider oft nur marginal gilt), sondern dass es nur um eine präzisierende „Mengensprache" ging, allenfalls um „Mengenalgebra" – und das in Verbindung mit Elementen der formalen Logik. Das führte dann u. a. auch zu einer neuen Gleichungslehre mit „Grundmenge" und „Lösungsmenge".

Bei der Umsetzung dieser „mengensprachlich" und „logisch" orientierten Entwicklung „vor Ort" mögen – bedingt durch manche Lehrkräfte – Fehler gemacht worden sein, jedoch vermag ich diesen Weg weiterhin nicht zu verurteilen, und ein später hastig erfolgtes administratives Verbot von „Mengenlehre im Mathematikunterricht" habe ich nie verstehen können. So begann der Weg von der „New Math" zur „No Math" als *„antididaktische Omission"* gemäß Kaenders (2006, 48) als

> ... Lösung mathematikdidaktischer Probleme durch Weglassen der damit verbundenen Lehrinhalte.

Rainer Kaenders präzisiert dies auf S. 48 f.:

> Über den Zahlbegriff hinaus gibt es weitere antididaktische Omissionen bei grundlegenden Konzepten: Aussagenlogik, elementare Sprache von Strukturen und Mengen, Abbildungsbegriff, lineare Algebra, Definitheit, Monotonie, infinitesimale Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit, Asymptote, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit etc. wie auch echte Anwendungen, die ohne mathematisches Grundgerüst nicht zu behandeln sind. Mathematische Konzepte selbst, mit entsprechenden Definitionen, werden in den großen Schulbuchserien nicht mehr entwickelt oder als solche betrachtet.

Als persönliche Erfahrung aus den 1970ern bis in die 1980er hinein, die ich mit manchen meiner damaligen Kollegen teile, kann ich über die damalige unterrichtliche Einbettung der von Kaenders angedeuteten Konzepte einschließlich der konsequenten Verwendung von Quantoren positiv berichten – schon für die mittleren Jahrgangsstufen, jedoch auch und insbesondere für den Analysisunterricht, der konsequent und behutsam über einen Einstieg mit Folgen und Reihen und entsprechenden Konvergenzfragen aufgebaut wurde. Das damals vielfach nicht vorhandene Zentralabitur und eine somit noch nicht vorhandene Omission durch ein „Teaching to the Test" machten dies möglich. Damit zeigt sich, dass ein solcher Unterricht nicht an sich nicht möglich ist, sondern dass die Rahmenbedingungen hinreichend *offen* sein müssen (was sie heute leider nicht mehr sind).

Der Feststellung im erstgenannten Zitat von Baumann und Kirski vermag ich somit nicht grundsätzlich zuzustimmen.

Verzicht auf „Grenzwert"?

In ihrem Artikel von 2017 begründen die Autoren ihren Vorschlag zum Verzicht auf die Betrachtung von Grenzwerten u. a. wie folgt (siehe dort S. 15):

> Zum Beispiel sah der frühere Berliner Lehrplan [...] ein Vierteljahr allein für das Thema „Folgen und Grenzwerte" vor [...]. Trotzdem haben viele Schülerinnen und Schüler das Wesen des Grenzwertes nicht verstanden, was sich aber kaum als nachteilig erwies, da man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte [...].

Das mag so sein, aber dann ist zunächst zu fragen, warum es denn nicht gelungen sei, das „Wesen des Grenzwerts" in einem Vierteljahr zu vermitteln. Meine oben angedeuteten Erfahrungen zeigen hingegen, dass dies möglich ist.

Nachdenklich stimmen sollte dann aber vor allem der Hinweis, dass *„man Grenzwerte beim praktischen Rechnen gar nicht mehr brauchte"*. Kann denn dies ein triftiger Grund dafür sein, den Grenzwertbegriff *nicht* mehr zu behandeln? Immerhin würde ein solches Argument an den Fundamenten des Mathematikunterrichts rütteln, und vieles Nichtkalkülhafte würde konsequenterweise inhaltlich obsolet werden, so z. B. Irrationalität oder Intervallschachtelungen. Und selbst Kalküle müsste man in ihrer Funktionsweise nicht mehr verstehen, sondern diese nur noch beherrschen.

Dass jedoch sogar die Autoren selber derartige Konsequenzen für den Mathematikunterricht nicht goutieren, machen sie anschließend deutlich:

> Mit der Verkürzung der Schulzeit bis zum Abitur an den Gymnasien gibt es nun keine Zeit mehr, den Grenzwert zu behandeln. In Mathematik-Grundkursen soll man sich sogar damit begnügen, mittels dreier Testeinsetzungen den Grenzwert zu vermuten. Was solches Vorgehen noch mit Mathematik zu tun haben soll, erschließt sich uns jedoch nicht, denn Mathematik bzw. mathematisches Denken wird auf diese Weise gerade nicht vermittelt.

Und ähnlich schreiben sie schon 2016 auf S. 6:

> Überhaupt scheint es angesichts der Verkürzung der Schulzeit eine Tendenz zu geben, auf Begründungen zu verzichten. Dagegen finden wir, dass im Mathematikunterricht – und nicht nur dort – Begründen gelernt werden muss, um studierfähig zu werden.

Den beiden letztgenannten Resümees der Autoren ist gewiss voll zuzustimmen, jedoch weisen diese Resümees zugleich auf eine (latent vorhandene?) didaktische Bankrotterklärung hin, der seitens der Fachdidaktiken und ihrer Verbände deutlich zu begegnen ist: Administrativ verordnete, sowohl fachlich als auch fachdidaktisch unsinnige *antididaktische Omissionen* sind nicht akzeptabel!

(Vielleicht tragen auch manche Aktivitäten der Mathematikdidaktik eine Mitschuld an solchen Entwicklungen, wenn etwa neue thematische Bereiche im Curriculum verankert worden sind? Waren bzw. sind dann derartige thematische Neuerungen nur um den Preis einer antididaktischen Omission zu haben?)

Die Autoren führen allerdings noch eine weitere, ihnen wohl wesentlich erscheinende Begründung für den Verzicht auf eine Behandlung des Grenzwertbegriffs an, indem sie nämlich vorschlagen, im Mathematikunterricht anstelle der üblichen „Reellen Analysis" (von ihnen „Grenzwertanalysis" genannt) die auf „hyperreellen Zahlen" beruhende „Nonstandard Analysis" zu verwenden (siehe Baumann & Kirski 2017, 15):

> Im Gegensatz zur Grenzwertanalysis kann man wirklich Regeln errechnen. Man braucht sie nicht mehr zu vermuten, um sie danach mit einem Grenzprozess zu bestätigen.

Das „braucht sie nicht mehr" ist ein „unterrichtsökonomisches" Argument, das aber ihrem Petitum in obigen Zitaten zu „mathematischem Denken" und „Lernen des Begründens" widerspricht:

Denn das „Vermuten" wird hier indirekt didaktisch abgewertet, jedoch ist es nicht nur im Mathematikunterricht wesentlich für kreatives Handeln, sondern es ist und war dies schon immer auch in der Wissenschaft Mathematik: Im Mathematikunterricht ist es wesentlich und vor allem unverzichtbar für „entdeckendes Lernen".

Grenzwert vs. Nonstandard Analysis?

Anstelle einer „Grenzwertanalysis" schlagen die Autoren also einen Weg über die von Abraham Robinson 1966 in seinem Lehrbuch vorgestellte „Nonstandard Analysis" vor, in der die von Leibniz „intuitiv" verwendeten (aber nicht streng definierten infinitesimalen) Größen wie z. B. dx als „infinitesimale Zahlen" auftreten, mit denen konkret *gerechnet* werden kann, so dass die Bezeichnung „Infinitesimal*rechnung*" auch ihre didaktische Berechtigung erfährt – was erfreulich ist![1]

In dieser Theorie – und damit in der zugrunde liegenden Modellvorstellung – sind die Beträge „infinitesimaler Zahlen" größer als Null und dennoch kleiner als jede positive reelle Zahl (wie die negativen reellen Zahlen „finite Zahlen" genannt), und die Beträge der Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind „infinite Zahlen": Die „hyperreellen Zahlen" bestehen aus allen finiten (also reellen) und allen infinitesimalen und infiniten Zahlen.

Bereits 1973, also sechs Jahre nach Erscheinen von Robinsons Buch, hat Detlef Laugwitz in den *Jahresberichten der DMV* – und damit adressiert an die Community der Mathematiker! – unter dem Titel „Ein Weg zur Nonstandard-Analysis" eine Beschreibung dieser neuen Theorie und ihrer Wurzeln und einen Ausblick zur Weiterentwicklung skizziert, die er – ganz im Sinne von Baumann und Kirski – wie folgt beginnt:[2]

> Die Nonstandard-Analysis ist eine Theorie, welche die Infinitesimalrechnung und andere Gebiete der Mathematik unter Verwendung von unendlichen großen und unendlich kleinen Zahlen behandelt. Das kommt den intuitiven Ideen der Begründer der Infinitesimalrechnung nahe.

Im Basisartikel Baumann & Kirski (2016) wird gezeigt, wie man auf diese Weise z. B. durch Vergrößerung mit einem „infinitesimalen Faktor" lokale Tangentensteigungen (und damit Ableitungen) ohne einen Grenzwertprozess *errechnen* kann (also durch einen Kalkül [2]). Doch um welchen Preis wird dies möglich? Zwar deuten die Autoren an, dass dies erfolgreich im Unterricht möglich sei, belegen dies aber leider nicht. So beginnen sie diesen Artikel im Vorwort wie folgt:

> *Hyperreelle Zahlen werden seit Jahrzehnten erfolgreich eingesetzt.*

Und auf derselben Seite liest man später:

> Manche Lehrkraft wird sich fragen, wie Studierende der Mathematik, die in der Schule Analysis mit hyperreellen Zahlen gelernt haben, damit an der Universität klar kommen, wenn dort

[1] Der Leibniz'sche „Differentialkalkül" wird exemplarisch z. B. in Hischer (2016a, 337 ff.) dargestellt.

[2] Siehe dazu Laugwitz (1973b, 66). Laugwitz geht auf S. 68 darauf ein, dass W. A. J. Luxemburg schon seit 1961 vor Robinson versucht habe, eine „Nonstandard Analysis" mit Hilfe von Ultrafiltern und Ultraprodukten zu beschreiben, dass aber die Modelle von sowohl Luxemburg als auch Robinson nichtkonstruktiv seien, er sich aber erhoffe, *„daß jemand zu einer konstruktiven Nonstandard-Analysis angeregt wird"*, denn *„Erst ein Kalkül macht ein mathematisches Gebiet für den Praktiker brauchbar"*.

> Grenzwert-Analysis betrieben wird. Alle bisherigen Rückmeldungen haben klar gezeigt, dass dies kein Problem darstellt.

Zu beiden Zitaten würde man gerne Belege sehen.

So bleibt hier vorläufig nur die Möglichkeit einer spekulativen Antwort, die sich auf die bereits erwähnte grundsätzliche Kritik der Autoren an der „Grenzwert-Problematik“ und auf ihren Vorschlag zur alternativen grundlegenden Behandlung „hyperreeller Zahlen“ bezieht.

Schon auf S. 6 ihres Artikels von 2016 verkünden die Autoren mit einem Paukenschlag:

> Um es klar zu sagen: Der Grenzwertbegriff ist für die Schule ungeeignet, er war schon immer zu schwierig.

Es sei dahingestellt, ob dies mit überwältigender Mehrheit empirischer Erhebungen belegbar ist, jedoch sind Zweifel bezüglich dieser Feststellung angebracht,[3] die dann im Übrigen durch Einbeziehung weiterer Themen des Mathematikunterrichts spekulativ ergänzt werden könnten. Und insbesondere galt bekanntlich die Analysis selber bei ihrer Etablierung im Mathematikunterricht Anfang des 20. Jhs. noch als *viel zu schwer für den Unterricht*.

Gleichwohl muss es der Anspruch mathematikdidaktischer Konzepte sein, die jeweiligen Themen altersgerecht behandeln zu können: sowohl gemäß Arnold Kirsch stets „intellektuell ehrlich“ als auch gemäß Jerome S. Bruner „spiralig“ im Sinne der von ihm so genannten „basalen Ideen“!

Und schließlich ist anzumerken, dass die in der Mathematikdidaktik diskutierten „fundamentalen Ideen“ neben anderen als ein wichtiges Kriterium die „Historizität“ aufweisen:[4]

So wurde zwar der Grenzwertbegriff erst Anfang des 19. Jhs. im Rahmen der „exakten Grundlegung der Analysis“ durch Cauchy eingeführt, denn seine

> Geheimwaffe [...] zur Grundlegung der Analysis waren Grenzwerte [...]. (Sonar 2011, 507)

Doch gleichwohl vermögen wir die *Idee* eines Grenzwerts vorläuferhaft und schemenhaft bereits in der griechischen Antike zu sehen, so insbesondere bei Archimedes mit seiner „Exhaustionsmethode“ zur Berechnung des Flächeninhalts unter einer Parabel oder der Approximation von π über die ersten Glieder zweier Folgen ein- und umbeschriebener regelmäßiger Polygone, die den Umfang eines Kreises approximieren.[5]

Und bereits weit vor der Präzisierung des Grenzwertbegriffs durch Cauchy finden wir bei dem schottischen Mathematiker und Astronomen James Gregory (1638–1675) die *Idee eines Grenzwerts*: Er definiert für einen Kreis (sogar allgemein für Kegelschnitte) mittels zweier verschachtelter Folgen um- und einbeschriebener regulärer Polygone einen genialen Algorithmus, mit dem der Flächeninhalt dieses Kreises erfasst wird. Er prägt dafür in diesem Zusammenhang erstmalig in der Mathematik den Terminus „Konvergenz“:

> Series polygonorum convergens, cujus terminatio est circulus. (Zitiert nach: Hischer 2016b, 1)

Der Mathematikhistoriker Moritz Cantor schreibt hierzu:

> Der Kreis ist also die Grenze, welcher beide Vielecksreihen zustreben, und zwar unter Anwendung eines Namens unserer Neuzeit als harmonisch-geometrisches Mittel. (Cantor 1892, 655 f.)

Die Ideen „Grenzwert“ und „Konvergenz“ gehören also ideengeschichtlich organisch zusammen. Ihren Ursprung finden wir in der *Idee der Approximation zunehmender Güte*, die in die griechische Antike zurückreicht. Die Entstehung der Analysis ist also unmittelbar mit den Ideen der sich historisch zunehmend entfaltenden Begriffe von „Grenzwert“ und „Konvergenz“ verbunden, und hiermit wird der o. g. Aspekt der „Historizität“ einer fundamentalen Idee angesprochen.

Rettet die Ideen!

Dieser eindringliche Appell Hans-Joachim Vollraths von 1978 sei in diesem Kontext in Erinnerung gerufen. So schreibt er u. a. (konträr zum Plädoyer von Baumann und Kirski, Grenzwerte in der Reellen Analysis nicht zu vermuten, sondern diese stattdessen mit Hilfe der Nonstandard Analysis mittels eines Kalküls direkt zu berechnen):

> Nach wie vor besteht die Gefahr, daß der Kalkül die Ideen im Mathematikunterricht überwuchert. Unser Bemühen sollte daher auf die unmittelbare Erschließung bedeutender mathematischer Ideen für den Unterricht gerichtet sein. (Vollrath 1978, 452) [...]

[3] Vgl. dazu auch meine zuvor angedeuteten dazu konträren subjektiven „Erfahrungen“. Insgesamt wären konkrete empirische Erhebungen zu Rate zu ziehen.

[4] Siehe z. B. Hischer (2012, 19 ff.) und Hischer (2016a, 138 f.).

[5] Siehe z. B. die Darstellungen in (Hischer & Scheid 1995).

> Das Schicksal vieler mathematischer Inhalte besteht darin, daß sie zunächst im Unterricht ihrer Ideen beraubt werden, dann als bloßer Kalkül einige Schülergenerationen zermürben, um schließlich bei einer Reform aufgegeben zu werden. (Vollrath 1978, 454)

Dem Plädoyer bezüglich eines Verzichts auf die Behandlung des mit „Grenzwert" verbundenen Begriffs im Mathematikunterricht zugunsten einer Priorisierung der Nonstandard Analysis vermag ich daher mit Blick auf die grundlegende Bedeutung der *Idee „Grenzwert"* nicht zu folgen.

Reelle Zahlen vs. Hyperreelle Zahlen?

Der Basisartikel (Baumann und Kirski 2016) mag vielleicht zunächst den Eindruck erwecken, dass die Autoren für eine Behandlung der hyperreellen Zahlen im Unterricht anstelle der reellen Zahlen plädieren, jedoch geschieht dies nirgends explizit. Es wäre im Sinne eines (zumindest anzudeutenden) Aufbaus des Zahlensystems auch didaktisch abwegig.

Ganz in diesem Sinn hat Helmut Wunderling 1992 in einem Vortrag an einem Beispiel deutlich gemacht, wie hyperreelle Zahlen im Unterricht behandelt werden können (siehe Wunderling (1993, 55) im letzten „Konstruktion hyperreeller Zahlen" überschriebenen Abschnitt):

> Auf Leistungskursniveau ist es möglich, nicht nur eine brauchbare Vorstellungswelt und eine verständliche Arbeitsweise hinsichtlich der hyperreellen Zahlen zu erreichen, sondern auch weitere Einblicke zu erarbeiten. Dabei ziehe ich eine konstruktive einer axiomatisch fordernden vor.
> Zu den unverzichtbaren Dingen des Mathematikunterrichts (gerade im Zeitalter von Algebrasystemen) gehört der Zahlbegriff. Wenn auch derzeitige Lehrpläne auf den „Aufbau des Zahlsystems" verzichten, ist es eine Bereicherung, wenn die Konstruktion hyperreeller Zahlen eingebettet wird in die davor liegenden Stufen.

Dem ist zuzustimmen, denn der „Aufbau des Zahlensystems"[6] ist besser zu würdigen, wenn deutlich wird, dass mit den reellen Zahlen (als eine die Zahlengerade füllende Punktmenge) nicht „Schluss" ist (obwohl in der Schule nur ein sehr oberflächlicher Einblick in das „Wesen" der reellen Zahlen möglich und sinnvoll ist):

So kann einerseits eine mögliche Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bis hin zu den komplexen Zahlen unter *Preisgabe der Anordnung* angedeutet werden, verbunden mit dem Hinweis, dass auch damit nicht Schluss sein muss, weil z. B. die Quaternionen folgen können.[7]

Oder man betrachte (unter Beibehaltung der Ordnungsrelation und bei *Preisgabe der Archimedizität*) eine Erweiterung von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ zu den hyperreellen Zahlen. Ein einfaches Modell entsteht z. B. bereits aus dem Körper $(\mathbb{Q}(x), +, \cdot)$ aller rationalen Polynomquotienten, in dem man eine geeignete Ordnungsrelation als Fortsetzung der Ordnungsrelation in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$definiert. Dieser einfach vorzustellende Körper ist dann nicht archimedisch angeordnet und besitzt deshalb sowohl infinitesimale als auch infinite Elemente, und das geht entsprechend auch für $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.[8]

Die *Idee hyperreeller Zahlen* ist so auch ohne Bezug auf die Nonstandard-Analysis vermittelbar.

Schluss

Die von den Autoren dargestellte, auf den hyperreellen Zahlen basierende Nonstandard Analysis scheint *kein geeigneter Ersatz* für die auf den reellen Zahlen basierende, explizit den Cauchyschen Grenzwertbegriff einbeziehende Standard-Analysis zu sein. Konkrete, von den Autoren nicht referierte bzw. noch ausstehende empirische Untersuchungen mögen ggf. das Gegenteil belegen.

Gleichwohl ist es – u. a. im Sinne des Historizitätsaspekts fundamentaler Ideen – geboten, eine Behandlung des Grenzwertbegriffs im Unterricht (in welchem Umfang auch immer) fest zu verorten, weil mit ihm ein für die Analysis und die gesamte Mathematik ideengeschichtlich wesentlicher Begriff vorliegt.

Jedoch könnte der (grenzwertfreien) Nonstandard Analysis durchaus ein Platz im Lehramtsstudium eingeräumt werden, damit künftige Lehrkräfte deutlich über den Tellerrand der Lehrpläne hinausschauen können. Hierzu gehören auch die oben angedeuteten Möglichkeiten unterschiedlicher Erweiterungen des (archimedisch angeordneten) Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ – nicht nur zum (nicht angeordneten) Körper der komplexen Zahlen, sondern auch zu dem (nicht archimedisch angeordneten) auf den hyperreellen Zahlen basierenden Körper oder zu dem z. B. aus $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ gebildeten (s. o.).

Schon in den 1970er Jahren wurde auch ohne Bezug zur Nonstandard Analysis untersucht, in

[6] Nicht „Zahlsystem", was in den Bereich der Waren-Wirtschaftssysteme gehören würde.
[7] Andeutungen dazu in Hischer (2012, 360 ff.)
[8] Siehe die Darstellung in Hischer (2012, 324 ff.).

welchem Umfang im Unterricht auf den Grenzwertbegriff verzichtet werden kann. So sei daran erinnert, dass Hermann Karcher (parallel zu (Laugwitz 1973a)) im ersten Heft der neuen Zeitschrift „Didaktik der Mathematik“ ein auf der (globalen) Lipschitz-Stetigkeit beruhendes (an der Hochschul-Mathematik orientiertes) Analysis-Konzept präsentierte. Er schreibt zu Beginn:

> Wir geben im folgenden einen detaillierten Aufbau der Analysis bis hin zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir gehen von einem Grundbegriff aus, der wesentlich einfacher ist als der klassische Cauchysche Stetigkeits- bzw. Grenzwertbegriff. Wir arbeiten dann mit einer entsprechend eingeschränkten Funktionenklasse, genannt gutartige Funktionen. Diese Klasse enthält alle bisher auf der Schule behandelten Funktionen, ebenso alle in Anwendungen der Mathematik auf Nachbarwissenschaften vorkommenden Funktionen. Die Analysis kann auf diese Weise mit wesentlich einfacheren Beweisen behandelt werden als bisher; gleichzeitig haben die gutartigen Funktionen der Anschauung zugänglichere Eigenschaften als die (Cauchy-)stetigen Funktionen. Daher kann man mehr Schülern als bisher verständlich machen, worum es in der Analysis geht; wegen der kürzeren Beweise treten die Grundideen besser hervor – z. B. daß differenzierbare Funktionen im kleinen als linear vorgestellt werden können. (Karcher 1973, 46)

Leider ist z. B. $x \mapsto \sqrt{x}$ im Intervall nicht gutartig (wegen senkrechter Tangente bei $x = 0$). Mein Vorschlag „(lokaler!) Differenzierbarkeit als (Lipschitz-)Stetigkeit der Sekantensteigungsfunktion“ von 1975 scheint unterrichtsnäher zu sein als Karchers Ansatz mittels „globaler“ Stetigkeit.

Wenn auch die Nonstandard Analysis als Alternative zur Reellen Analysis unterrichtsfern erscheinen mag, so könnte sie im Lehramtsstudium – so etwa in Seminaren oder Studienarbeiten – einen Platz finden, um den Blick öffnen zu helfen.

Literatur

Baumann, Peter & Kirski, Thomas (2016): Analysis mit hyperreellen Zahlen. *In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 100/2016, 6–16.

— (2017): Analysis ohne Grenzwert! *In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Heft 102/2017, 15–16.

Hischer, Horst (1975): Differenzierbarkeit als (Lipschitz-)Stetigkeit der Sekantensteigungsfunktion. In: *Praxis der Mathematik*, **17**(1975)7, 177–184.

— (2012): *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2012.

— (2016a): *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

URL hat sich leider kürzlich geändert, bitte jetzt:

— (2016b): *James Gregory und „Konvergenz“ – auf den Spuren zu seinem Algorithmus.* Als „Preprint Nr. 379“ erschienen in: www.math.uni-sb.de/CMS/index.php/preprint-list. Druckausgabe in: Krohn, Th. & Schöneburg, S. (Hrsg.): Mathematik von einst für jetzt. Hildesheim: Franzbecker 2016, 61–86.

Hischer, Horst & Scheid, Harald (1995): *Grundbegriffe der Analysis. Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht*. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1995. (Neubearbeitung von *„Materialien zum Analysisunterricht“*, Freiburg: Herder, 1982.)

Kaenders, Rainer (2006): Zahlbegriff, zwischen dem Teufel und der tiefen See. In: *Der Mathematikunterricht*, **52**(2006)5, 46–60.

Karcher, Hermann (1973): Analysis auf der Schule. In: *Didaktik der Mathematik*, **1**(1973)1, 46–69.

Laugwitz, Detlef (1973a): Ist Differentialrechnung ohne Grenzwertbegriff möglich? In: *Mathematisch Physikalische Semesterberichte*, **20**(1973), 189–201.

— (1973b): Ein Weg zur Nonstandard-Analysis. In: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **75**(1973), 66–93.

Papy, Georges (1970): *Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts*. Erschienen in der Reihe: Kirsch, Arnold & Steiner, Hans-Georg (Hrsg.): Moderne Mathematik in elementarer Darstellung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1970. (Übersetzung des 1968 erschienenen französischen Originals «Le premier enseignement de l'analyse» durch Joseph Hallé und Helmut Wunderling.)

Robinson, Abraham (1966): *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1966.

Sonar, Thomas (2011): *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen.* Berlin / Heidelberg: Springer, 2011.

Vollrath, Hans-Joachim (1978): Rettet die Ideen! In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **31**(1978), 449–455.

Wagenschein, Martin (1976): Rettet die Phänomene! (Der Vorrang des Unmittelbaren). In: *Scheidewege*, **6**(1976)1, 76–93. Gekürzter und ergänzter Nachdruck in: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **30**(1977), 129–137.

Wunderling, Helmut (1993): *Der Begriff „Standardanteil einer hyperreellen Zahl“ und DERIVE*. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? (Tagungsband 1992: Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 25. bis 27 September 1992 in Wolfenbüttel.). Hildesheim: Franzbecker, 1993, 52–56.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
Email: hischer@math.uni-sb.de

Zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts

Stellungnahme von DMV, GDM und MNU

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) haben vor fünf Jahren die Mathematik-Kommission „Übergang Schule–Hochschule“ gegründet und begleiten seither u. a. die politische Diskussion um die Ausbildung in Mathematik an deutschen Schulen und ihre Eignung zur Vorbereitung zukünftiger Studienanfänger an Hochschulen. DMV, GDM und MNU begrüßen daher, dass dieses wichtige Thema durch die aktuelle Diskussion u. a. im Kontext eines offenen Briefes zu „Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung“ [z. B. Offener Brief,[1] Stellungnahme von MathematikdidaktikerInnen,[2] Tagesspiegel-Artikel 1,[3] Tagesspiegel-Artikel 2,[4] Tagesspiegel-Artikel 3[5]] stärker in den Fokus der öffentlichen Aufmerksamkeit rückt.

Aus Sicht der Fachgesellschaften werden in der gegenwärtigen Diskussion jedoch einige Aspekte verzerrt oder verkürzt dargestellt. Für DMV, GDM und MNU stellen sich die Probleme, ihre Ursachen und sinnvolle Lösungsansätze wie folgt dar.

An deutschen Hochschulen verzeichnet man seit mehr als einer Dekade den alarmierenden Befund, dass einem Großteil der Studierenden bei Studienbeginn viele mathematische Grundkenntnisse und -fertigkeiten sowie konzeptuelles Verständnis mathematischer Inhalte fehlen. Die Lehrenden an den Hochschulen stellen fest, dass diese Mängel sowohl bei der Oberstufenmathematik als auch bei den in der Mittelstufe behandelten Themen auftreten – etwa bei Bruchrechnung oder den Potenzgesetzen. Auch die Behandlung von Funktionentypen in der Schule ist mittlerweile so ausgedünnt, dass eine Ausbildung in höherer Mathematik als Teil etwa eines Ingenieurstudiums nicht mehr darauf aufbauen kann.

Dieses Problem hat viele Ursachen. Unstrittig ist der Beitrag der Reduktion des Mathematikunterrichts in den Stundentafeln der Länder in den vergangenen Dekaden, die zudem sehr heterogen sind [Schiemann, *Mitteilungen der DMV* 2014[6]]. Darauf haben DMV, GDM und MNU bereits in der Vergangenheit hingewiesen [Stellungnahme 2012 an KMK[7]]. Hinzu kommt der Wegfall der Möglichkeit der Schwerpunktsetzung etwa durch Leistungskurse mit deutlich höherer Zahl von Unterrichtsstunden.

Berücksichtigt werden muss ferner, dass heute ein wesentlich höherer Anteil einer Alterskohorte Abitur macht und die Vermittlung einer breiteren Allgemeinbildung im Spannungsfeld zur Vorbereitung auf mathematikhaltige Studiengänge steht. In diesem Zusammenhang sind neue, wichtige und unverzichtbare Themen für die breite Studienvorbereitung und Allgemeinbildung dazugekommen – etwa die Stochastik –, sodass für die zu behandelnden Themen und deren Einübung und Festigung jeweils deutlich weniger Zeit vorgesehen ist.

In der öffentlichen Diskussion werden auch andere Faktoren aufgezählt, die DMV, GDM und MNU jedoch für weniger bedeutend halten und die von möglichen Lösungsansätzen eher ablenken: Dazu zählt erstens die Kompetenzorientierung, d. h. die Formulierung von Lernzielen durch zu erwerbende inhalts- und prozessbezogene Kompetenzen. Zweitens wird der Einsatz von Taschenrechnern oder anderen digitalen Werkzeugen genannt, die vermeintlich verhindern, dass Schülerinnen und Schülern auch händisches Rechnen flüssig beherrschen. Drittens stehen Textaufgaben in der Kritik, die fiktive Alltagsprobleme mathematisch modellieren und dabei oft unrealistisch sind und künstlich wirken. Ein viertes Monitum betrifft die häufig sehr umfängliche Formulierung solcher Textaufgaben, die oft zu ihrem mathematischen Gehalt im Missverhältnis steht. DMV, GDM und MNU bedauern, dass sich die öffentliche Diskussion momentan vor allem auf diese Punkte konzentriert, denn unabhän-

1 www.tagesspiegel.de/downloads/19549926/2/offener-brief.pdf
2 www.tagesspiegel.de/downloads/19590132/1/mathematiker-distanzieren-sich-vom-mathematiker-brandbrief.pdf
3 www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html
4 www.tagesspiegel.de/berlin/streit-um-bildungsstandards-50-professoren-verurteilen-mathe-brandbrief-als-schaedlich/19590112.html
5 www.tagesspiegel.de/wissen/streit-um-den-matheunterricht-mathe-richtig-durchdringen/19593046.html
6 www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Materialien/PDF/dmvm-2013-0087.pdf
7 www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/stellungnahme-mathematik-kommission-kmk-iqb.pdf

gig davon, ob man diese Kritikpunkte als berechtigt betrachtet oder nicht, sind es vor allem andere Ursachen, die als wesentlich anzusehen sind.

Ähnlich verhält es sich mit den Bildungsstandards. 2012 wurden durch die KMK Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife veröffentlicht, und in der aktuellen Diskussion werden diese neuen Bildungsstandards als wesentliche Ursache obiger Probleme dargestellt. Auch DMV, GDM und MNU haben im Zuge dieser Reform mehrere Punkte kritisiert [Stellungnahme 2012 an KMK[0]]. Es ist jedoch bei all dieser Kritik nicht zu bestreiten, dass mit den Bildungsstandards der richtige bildungspolitische Weg eingeschlagen wurde, der es ermöglicht, bundesweit bislang stark unterschiedliche Bestimmungen besser aufeinander abzustimmen. DMV, GDM und MNU sehen den wesentlichen Mangel der KMK-Bildungsstandards in ihrer geringen Verbindlichkeit und ungenügend konkreten Formulierung, die der Suche nach Kompromissen in der KMK geschuldet ist [Pressemitteilung 23. 10. 2012[8]]. Diese beiden Faktoren führen zu sehr unterschiedlichen Umsetzungen in den Bundesländern.

Aus der obigen Analyse und Wertung der Ursachen lassen sich folgende Maßnahmen zur Lösung der Probleme ableiten.

- Die Stundentafeln sollten im Bereich der mathematischen Schulbildung ausgedehnt werden; es ist eine Illusion zu glauben, man könne mehr Themen in kürzerer Zeit behandeln. Zweitens sollten vertiefende Zusatzangebote, die Studieninteressierte im MINT-Bereich unterstützen, (wieder) eingeführt werden. Umgekehrt sollten sich auch die Hochschulen bewegen und sich auf die heterogenere Zusammensetzung der Kohorten von Studienanfängerinnen und -anfängern und die geänderten Rahmenbedingungen adäquat einstellen.
- Die Länder streben einen gemeinsamen Prüfungsteil im Zentralabitur in Mathematik an. Wir begrüßen diese Entwicklung ausdrücklich – leider wird sie in der öffentlichen Diskussion kaum gewürdigt. Wir gehen aber noch weiter und fordern eine größere Verbindlichkeit, mit der die Länder agieren müssten. Die Aufgaben aus dem zentralen Abiturprüfungsteil sollten ausschließlich aus dem bundesweiten Aufgabenpool genommen werden – dies ist nicht zuletzt die Grundidee eines Pools, der mehr Aufgaben enthält, als minimal nötig und dadurch Wahlmöglichkeiten bietet. Mathematik sollte zudem verbindliches Prüfungsfach im schriftlichen Abitur sein.
- Die Bildungsstandards fordern zu Recht „Die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen sind unverzichtbare Grundlage für die Arbeit in der Sekundarstufe II. Sie werden dort beständig vertieft und erweitert und können damit auch Gegenstand der Abiturprüfung sein". Dies muss aber verbindlicher in der Schulpraxis und im Abitur realisiert werden. Die Bildungsstandards betonen zu Recht die wichtige wichtige Kompetenz des Modellierens. Selbstverständlich müssen die Verantwortlichen aber auf ein ausgewogenes Verhältnis zwischen textreichen Modellierungsaufgaben und innermathematischen Aufgaben achtgeben. Bei Modellierungsaufgaben sind verständliche Formulierungen und ungekünstelte Kontexte anzustreben.
- Die Sicherung und der Ausbau der Qualität des Mathematikunterrichts erfordern eine wissenschaftsbasierte Curriculumentwicklung, die bisher nur ansatzweise realisiert wurde. Hier sollte die Expertise der Fachgesellschaften in verbindlichen Kooperationen umfassender als bisher genutzt werden.
- Die Lehrkräfte sind die wichtigsten Akteure. Daher muss die Politik dafür sorgen, dass die Lehrkräfteausbildung und auch die Lehrerfortbildung intensiviert werden, um die Erteilung qualitätsvollen Unterrichts in allen Schulformen und allen Phasen der Lehreraus- und fortbildung zu befördern. Daneben müssen auch Seiteneinsteiger intensiv unterstützt werden und fachfremder Unterricht sollte vermieden werden.

DMV, GDM und MNU haben bereits in gemeinsamen Aktivitäten (Stellungnahmen, Tagungen, Kommissionen, Projekte) signalisiert, dass sie ihre Expertise für qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht in Deutschland auch in Zukunft einbringen werden. Dafür steht die gemeinsame Mathematik-Kommission „Übergang Schule–Hochschule" der Politik gerne mit Rat und Tat zur Seite.

Prof. Dr. Wolfram Koepf Sprecher der Kommission Übergang Schule–Hochschule	Prof. Dr. Michael Röckner Präsident der DMV	Prof. Dr. Andreas Eichler 1. Vorsitzender der GDM	Gerwald Heckmann Bundesvorsitzender der MNU

8 www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Aktuelles/pdf/121023_pm_kommission_bildungsstandards.pdf

Die Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft

Eine Chance für den fachdidaktisch reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht

Positionspapier der GDM

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) begrüßt die im Herbst 2016 von Bund und Ländern initiierte „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ mit ihrem Ziel, Bildung unter den Bedingungen und Möglichkeiten einer digital geprägten Welt neu zu konkretisieren. Mit der allgegenwärtigen Präsenz digitaler Medien in Ausbildung, Beruf und Alltag ist deren sinnstiftende und verantwortungsvolle Nutzung mittlerweile ebenso als Kulturtechnik zu begreifen wie das Lesen und das Schreiben. Für den Fachunterricht bedeutet dies: Es geht auch hier nicht mehr um die Frage, ob digitale Medien bzw. Werkzeuge benutzt werden sollen oder nicht, sondern allein um das Wie. Damit muss die medienpädagogische und -didaktische Perspektive, wie sie das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) und die Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder (KMK) in ihren Strategiepapieren[1] zur Umsetzung der Bildungsoffensive zum Ausdruck bringen, durch eine dezidiert fachdidaktische Perspektive ergänzt werden.

Die GDM fordert daher Bund und Länder auf, die fachdidaktische Expertise für das Lehren und Lernen von Mathematik mit digitalen Medien in den geplanten Maßnahmen zur Umsetzung der Bildungsoffensive zu integrieren. In einer sieben Jahre zurückliegenden gemeinsamen Stellungnahme[2] der GDM und des Lehrerverbands MNU zur verbindlichen Nutzung von digitalen Mathematikwerkzeugen in den MINT-Fächern wurde schon darauf hingewiesen, dass der Einsatz neuer Technologien das Lernen nicht per se verbessert, sondern es neben der curricular verbindlich festgeschriebenen Nutzung digitaler Werkzeuge fundierter didaktischer Konzepte für Unterricht, Prüfung und Lehreraus- und -fortbildung bedarf. Diese Forderungen gelten auch heute noch.

Im Folgenden informieren wir über die Maßnahmen zur Umsetzung der digitalen Bildungsoffensive, wie sie in den beiden Strategiepapieren des BMBF und der KMK konkretisiert werden. Danach verdeutlichen wir, wie die fachdidaktische Expertise in den anvisierten Maßnahmen sichtbar werden muss, wenn das Lernen mit digitalen Medien aus fachspezifischer Sicht gelingen soll.

Hintergrund der Stellungnahme: Die digitale Bildungsoffensive des Bundes und der Länder unter dem „Primat der Pädagogik“

In ihren beiden Strategiepapieren konkretisieren das BMBF für den Bund und die KMK für die Länder Maßnahmen zur Umsetzung der Bildungsoffensive. Die Handlungsfelder im BMBF-Papier umreißen die Ziele (BMBF, S. 12 ff.): Es geht um die Vermittlung digitaler Bildung, den Ausbau leistungsfähiger digitaler Infrastrukturen, die Schaffung eines zeitgemäßen Rechtsrahmens für die Nutzung digitaler Bildungsangebote, die Organisationsentwicklung von Bildungseinrichtungen zur Umsetzung digitaler Bildung und die Nutzung der Potenziale der Internationalisierung. In beiden Strategiepapieren wird die Umsetzung der digitalen Bildungsoffensive übereinstimmend unter ein sogenanntes „Primat der Pädagogik“ (BMBF, S. 3) bzw. „Primat des Pädagogischen“ (KMK, S. 9) gestellt. Das bedeutet, dass jede Maßnahme daran zu messen ist, ob sie die Lernenden zu einer selbstbestimmten und verantwortungsvollen Teilhabe an der digital geprägten Welt befähigt.

In beiden Papieren findet sich dieses Primat in einer Reihe von Einzelmaßnahmen abgebildet. Unter diesen sind aus fachdidaktischer Sicht die sinnvolle Verknüpfung digitaler Bildungsmedien und -konzepte mit traditionellen Formen des Lehrens und Lernens und eine angemessene Ausbildung digitaler Kompetenzen sowohl bei Lernenden als auch bei Lehrkräften nachdrücklich zu unterstützen. Zur Integration digitaler Bildungsmedien kündigen BMBF und KMK die Schaffung von Qualitäts- und Rechtsstandards für die Auswahl und Nutzung insbesondere öffentlich zugänglichem Lernmaterials (Open Educational Resources: OER) an. Die Ausbildung digitaler Kompetenzen konkretisiert die KMK durch einen Kompetenzrahmen, der seine curriculare

[1] Für das BMBF: http://]www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf
Für die KMK: http://www.kmk.org/presse/pressearchiv/mitteilung/strategie-bildung-in-der-digitalen-welt.html

[2] http://www.madipedia.de/images/4/40/Stellungnahme-GDM-MNU-2010.pdf

Verankerung in den fachspezifischen Lehrplänen der Länder erfahren soll. Die zur Umsetzung der Vorgaben offensichtlich notwendigen Maßnahmen in der Aus- und Fortbildung der Lehrkräfte werden mit „hoher Priorität“ (KMK, S. 28) in den Blick genommen. Den Hochschulen wird hierbei eine zentrale Rolle beigemessen:

> Der Motor dieser Entwicklung müssen die lehrerbildenden Hochschulen sein. Entsprechende Unterrichtsforschung, die Entwicklung neuer fächerbezogener und fächerübergreifender didaktischer Modelle sind Aspekte, die von den Ländern und dem Bund unterstützt und gefördert werden können. (KMK S. 52)

Die Position der GDM zur digitalen Bildungsoffensive des Bundes und der Länder

Die GDM begrüßt die hier deutlich werdende Priorisierung sowohl der Ausbildung digitaler Kompetenzen bei Lehrkräften als auch die zugewiesene Rolle der lehrerbildenden Hochschulen für die forschungsbasierte Entwicklung geeigneter Unterrichtskonzepte und die Vermittlung entsprechender Kompetenzen in der Lehreraus- und -fortbildung. Während in beiden Strategiepapieren von BMBF und KMK die digitalen Kompetenzen als im wesentlichen allgemeine medienpädagogische und -didaktische Aspekte verstanden werden, bleiben spezifische Kompetenzen für ein gelingendes fachliches Lehren und Lernen mit digitalen Medien unscharf. Hier sieht die GDM ihre Aufgabe, den Kompetenzrahmen mathematikspezifisch zu konkretisieren, um die Lehrplanentwicklungen der Länder zu unterstützen und den Prozess forschend zu begleiten. Im Folgenden wollen wir am Beispiel einer zentralen Maßnahme der digitalen Bildungsoffensive – die Formulierung von Qualitätsstandards für Open Educational Resources – die Unverzichtbarkeit einer mathematikdidaktischen Expertise für die Umsetzung der Bildungsoffensive begründen.

BMBF und KMK weisen auf das große Potential der Open Educational Resources (OER) für ein ortsunabhängiges, individuelles und differenziertes Lehren und Lernen hin und stellen gleichzeitig die Notwendigkeit für ein allgemeines, an pädagogischen Kriterien orientiertes „Qualitätssiegel“ heraus. Angesichts der großen Bandbreite an offenen netzbasierten Lernangeboten – beginnend mit kurzen Onlinetutorials für die Bearbeitung elementarer Rechenaufgaben bis hin zu vollständigen Kursformaten mit Abschlusszertifikat (z. B. MOOCs) – ist diese Maßnahme zu begrüßen. Allerdings reicht es unseres Erachtens nicht aus, bestehende Kriterienkataloge für nicht-digitale Lernumgebungen – worunter auch fachliche Korrektheit gezählt wird – um „digitale“ Merkmale wie Multimedialität, Interaktivität etc. zu erweitern, wie es die KMK (S. 31) vorschlägt. Vielmehr müssen diese und weitere Merkmale hinsichtlich ihrer Potentiale und Grenzen für ein fachspezifisches Lehren und Lernen und insbesondere für den fachadäquaten Wissensaufbau hin analysiert werden und in die Formulierung möglicher Qualitätsstandards einfließen:

- Zur Multimedialität digitaler Medien: Die Möglichkeit zur multimedialen Darstellung von Informationen kommt dem verständigen Zugang zu mathematischen Inhalten entgegen. Mathematische Begriffe und Verfahren sind im Wesentlichen abstrakt. Ein verständiger Zugang gelingt nur über Repräsentationen dieser Inhalte, wobei Verstehen sich unter anderem dadurch äußert, dass die verschiedenen Repräsentationsformen desselben Begriffs oder Verfahrens miteinander verknüpft werden können. Prinzipiell unterstützen digitale Lernmaterialien das Nutzen multipler Repräsentationen von mathematischen Sachverhalten. Aber Repräsentationen mathematischer Inhalte sind nicht selbsterklärend, der Umgang mit ihnen muss gelernt werden. Hinzu kommt, dass ein Zuviel an Visualisierungen Lernende überfordern kann. Es muss also darum gehen, das hierbei technisch Mögliche mit dem didaktisch Sinnvollen in Einklang zu bringen.
- Zur Dynamisierung in digitalen Medien: Eine wesentliche Neuerung der Digitalisierung von Lernmaterial ist die Dynamisierung von Bild- und Textinformationen. Insbesondere für die Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge zwischen Zahlen und Größen sowie die Darstellung geometrischer und stochastischer Sachverhalte ist dies ein großer Gewinn. Wir beobachten aber auch, dass bewegte Bilder missverstanden werden können. Auch aus diesem Grund muss es darum gehen, das Lernen von Mathematik mit dynamisierten Lernumgebungen weiter zu untersuchen und entsprechende Ergebnisse in die Gestaltung und Bewertung von digitalen Bildungsangeboten einfließen zu lassen.
- Zur Interaktivität in digitalen Medien: Die Digitalisierung des Lernmaterials erlaubt die aktive Auseinandersetzung mit Texten und Bildern, etwa das gezielte Aktivieren oder das systematische Ändern von einzelnen Elementen des Materials mittels Maus oder Touchpad. Dabei kann aber auch ein Zuviel an Interaktivität zu Orientierungslosigkeit führen und einen Lernfortschritt verhindern. Offene digitale Bildungsmedien müssen sich daran messen lassen, inwieweit sie eine passende Balance zwischen Führung und Offenheit erlauben, so dass auch bei unterschiedlichen Lernvor-

aussetzungen ein sinnvolles Lernen ermöglicht wird.

- Zu Feedbackfunktionen in digitalen Medien: Das BMBF stellt das hohe Potenzial von digitalen, netzbasierten Medien für ein ortsunabhängiges, individuelles und differenziertes Lernen heraus (BMBF, S. 8). Ermöglicht wird dies insbesondere durch die Bereitstellung von Feedbackfunktionen im Lernmaterial, das sich den individuellen Bedürfnissen der Lernenden anpasst. Zur Entwicklung solcher Lernangebote bedarf es aber eines fachdidaktischen Wissens um die Vielfalt möglicher Lern- und Irrwege, die ein Lernender in der Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten nehmen kann. Lernen wird dann effektiver, wenn das Feedback situativ optimiert wird, das potentielle Leistungsvermögen auf der Grundlage von Erkenntnissen aus der fachdidaktischen Forschung antizipiert wird und damit Rückmeldungen passend zum individuellen Leistungsstand gegeben werden können.
- Zu digitalen Medien in Prüfungen: Sollen digitale Medien in Lernsituationen verwendet werden, dann sollten sie auch in Prüfungen – zumindest teilweise – verbindlich sein. Die KMK fordert in diesem Zusammenhang die Entwicklung neuer Aufgaben- und Prüfungsformate (KMK, S. 14). Wir unterstützen den Vorstoß der KMK und regen an, verschiedene Prüfungsformate mit digitalen Technologien im nationalen und internationalen Bereich zu analysieren.
- Zum Gebrauch der Fachsprache: Mit dem Einsatz digitaler Medien sind neuen Formen der Versprachlichung von Mathematik zu beobachten. Lernende nutzen beispielsweise Rechnersymbole statt konsolidierter Fachsymbole, um Ideen und Lösungen zu beschreiben. Hierdurch entstehen neue Anforderungen, den notwendigen fachspezifischen Sprachgebrauch auch bei Nutzung digitaler Werkzeuge zu befördern. Wie sich die medial geprägte Sprache und die Fachsprache zueinander verhalten müssen, ist Gegenstand aktueller Forschung. Sie kann Empfehlungen für den Gebrauch der Fachsprache in verschiedenen Situationen eines Lernprozesses geben.
- Zur Aufgabenkultur: Hier gilt, was auch für klassische Lern-, Übungs- und Prüfungsaufgaben zu fordern ist: Je nach Zielsetzung und Platzierung von Aufgaben in einer spezifischen Unterrichtsphase erfüllen die Aufgaben selbst wie auch die begleitenden Medien unterschiedliche Funktionen. Die verschiedenen Rollen digitaler Werkzeuge werden in den Bildungsstandards der KMK für Mathematik in der gymnasialen Oberstufe spezifisch ausgewiesen: Sie sind bedeutsam sowohl beim Lernen und Verstehen von Mathematik in Phase des Erkundens und Explorierens als auch beim Anwenden von Mathematik beim Modellieren und Problemlösen.

Zusammenfassend formulieren wir für die digitale Kompetenz der Fachlehrkraft in Ergänzung zum Primat des Pädagogischen ein Primat des Fachdidaktischen: Der Einsatz digitaler Medien für den Fachunterricht ist immer auch daran zu messen, inwieweit er den verständigen Zugang zu mathematischen Begriffen und Verfahren befördert und festigt. Die Auflistung der digitalen Kompetenzen für Lehrkräfte im Strategiepapier der KMK (S. 25 f.) bleibt mit dem Blick auf den gesamten Fächerkanon fachunspezifisch. Durch die fachdidaktische Perspektive erhalten die dort formulierten medienpädagogischen und -didaktischen Kompetenzen eine notwendige Ergänzung für das fachliche Lehren und Lernen. In diesem Sinne fordert die GDM das BMBF und die Länder dazu auf, in den kommenden Ausschreibungen die fachdidaktische Expertise sichtbar mit einzufordern.

In seiner Saarbücker Erklärung 2016 „Lernen und Handeln in der digitalen Welt“[3] ruft der 10. Nationale IT Gipfel des Bundesministeriums für Wirtschaft und Energie unter Verweis auf das Strategiepapier des BMBF zu einem „Schulterschluss aller am Bildungsprozess beteiligten Akteure“ auf. Die GDM zählt sich mit Blick auf die zahlreichen Beiträge ihrer Mitglieder zur Forschung und Praxis des fachlichen Lehrens und Lernens mit digitalen Medien zu den wichtigen Akteuren und stellt ihre Expertise für die Gestaltung der Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft unter dem „Primat der Pädagogik“ zur Verfügung.

Basierend auf einem Textentwurf einer Autorengruppe des GDM-Arbeitskreises „Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge“ mit Prof. Dr. Guido Pinkernell (Pädagogische Hochschule Heidelberg), Prof. Dr. Bärbel Barzel (Universität Duisburg-Essen), Henning Körner (Studienseminar Oldenburg), Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp (Universität Potsdam), Dr. Jörg Meyer (Studienseminar Hameln), Prof. Dr. Florian Schacht (Universität Duisburg-Essen), Prof. Dr. Hans-Georg Weigand (Universität Würzburg).

[3] www.de.digital/DIGITAL/Redaktion/DE/IT-Gipfel/Publikation/2016/it-gipfel-2016-gipfelbroschuere.html

Fachdidaktik für den inklusiven Mathematikunterricht

Orientierungen und Bemerkungen

Positionspapier der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der GDM, DMV und MNU

Veränderungen im Rahmen schulischer Bildung – wie die Umsetzung eines inklusiven Unterrichts – eröffnen pädagogische und fachdidaktische Perspektiven. Die Grenzen der Umsetzbarkeit werden insbesondere durch Rahmenbedingungen und Ressourcen gesteckt. Es sei dem Positionspapier vorangestellt, dass keine Lösungsansätze für problematische Rahmenbedingungen und Grenzen vorgelegt werden, sondern aus der Perspektive der Mathematikdidaktik ein Beitrag zur zielgerichteten Ausgestaltung in Anerkennung der Grenzen.

1 Fachliches Lernen als eine unter mehreren Herausforderungen inklusiven Unterrichts

Inklusiver Unterricht zielt sowohl auf die derzeit zunehmende Beschulung der etwa 5–6 % der Kinder und Jugendlichen mit offiziell zugeschriebenem sonderpädagogischen Förderbedarf (Klemm 2015) als auch auf Unterrichtskonzepte, die Diversität der Lernendenprofile in ganzer Breite adressieren und dabei individuelles und gemeinsames fachliches Lernen ermöglichen. Die zu fokussierenden Heterogenitätsaspekte beziehen sich nicht nur auf körperliche, emotional-soziale oder kognitive Beeinträchtigungen, sondern auf alle Diversitätsaspekte wie z. B. Lernstände, Zugangsweisen, Geschlecht, Migrationshintergrund, Alter, Sprachkompetenzen u. v. m. (vgl. z. B. Buholzer & Kummer Wyss 2010).

Inklusiver Unterricht stellt Lehrkräfte vor viele Herausforderungen, nicht nur in *fachdidaktischer* Hinsicht, sondern auch in *schulpädagogischer* (Umgang mit Unterrichtsstörungen, Bedarf an Zusatzbetreuung durch Schulbegleitung etc.), *rechtlicher* und *struktureller* (Unsicherheiten und zum Teil unklare Rahmenbedingungen je nach Bundesländern und Schulformen, vgl. Bartnitzky 2013; auch Wember 2013; Gebhard et al. 2014), und vor allem auch *personeller* Hinsicht (durch systematische Unterausstattung an Betreuungskapazitäten).

Da die letztgenannten Herausforderungen nicht durch fachdidaktische Ansätze zu lösen sind, ist in Aus- und Fortbildung nach wie vor eine gewisse Dominanz fachunabhängiger Perspektiven festzustellen (z. B. Heinrich et al. 2013). Dieses Positionspapier plädiert darüber hinaus dafür, konsequent auch das *fachliche Lernen* aller Schülerinnen und Schüler in den Blick zu nehmen und hierzu fachdidaktische Orientierungen systematisch zu ergänzen. Dazu passt die Charakterisierung der „Lehrerbildung für eine ‚Schule der Vielfalt‘ [... als] Querschnittsaufgabe, der sich die Bildungswissenschaften, Fachdidaktiken und Fachwissenschaften im lehramtsbezogenen Studium für alle Lehramtstypen gemeinsam und aufeinander abgestimmt widmen müssen“ (KMK 2015a, 3).

Welchen Beitrag die Mathematikdidaktik zu diesen Ausbildungs- und Fortbildungsaufgaben leisten kann, wird in diesem Positionspapier skizziert.

2 Vorgaben der KMK-Standards für die mathematikdidaktische Ausbildung

Die KMK legt für die mathematikdidaktische Ausbildung mit Blick auf Inklusion folgende ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen fest: Absolventinnen und Absolventen

- können fachdidaktische Konzepte und empirische Befunde mathematikbezogener Lehr-Lern-Forschung nutzen, um individuelle, heterogene Vorstellungen, Denkwege und Fehlermuster von und bei Schülerinnen und Schülern zu analysieren, ihren Lernstand und Potenzial einzuschätzen, sie für das Lernen von Mathematik zu motivieren und bei ihren individuellen Lernwegen zu begleiten sowie individuelle Lernfortschritte zu fördern und zu bewerten,
- können differenzierenden Mathematikunterricht auf der Basis fachdidaktischer Konzepte analysieren und planen sowie auf der Grundlage erster reflektierter Erfahrungen exemplarisch durchführen,
- können auf der Grundlage ihrer fachbezogenen Expertise hinsichtlich der Planung und Gestaltung eines inklusiven Unterrichts mit sonderpädagogisch qualifizierten Lehrkräften und sonstigem pädagogischen Personal zusammenarbeiten und mit ihnen gemeinsam fachliche Lernangebote entwickeln (KMK 2015b, 33).

3 Anknüpfen an Vorarbeiten der Mathematikdidaktik

Für jeden dieser Bereiche liegen aus der mathematikdidaktischen Forschung und Entwicklung substantielle Vorarbeiten vor, so dass die fachspezifischen Herausforderungen im Mathematikunterricht durch mathematikdidaktisch-fundierte wissenschaftliche Ansätze bearbeitet werden können. Denn entgegen des zuweilen verbreiteten Eindrucks, die Inklusion brächte vollkommen neue

Anforderungen mit sich, zu der es noch keinerlei Konzepte gäbe, ist der Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht ein bereits gut entwickeltes Feld, an das nun angeknüpft werden kann. Dies ermöglicht, die Vielfalt der Diversitätsaspekte im Blick zu behalten, anstatt den Fokus ausschließlich auf die sonderpädagogischen Förderbedarfe zu richten.

3.1 *Fachdidaktische Orientierungen zur Begründung unterrichtsmethodischer Entscheidungen*

Oftmals wird ‚Individuelle Förderung' und ‚Individualisierung' mit isoliertem Lernen gleichgesetzt und das soziale Lernen gerät aus dem Blick (vgl. Krauthausen & Scherer 2014, 25 f.; Scherer 2015). Prengel (2013, 17) spricht von der Fehlentwicklung der Inklusion durch klasseninterne Separation. Um dagegen eine geeignete *Balance von individuellem und gemeinsamem Lernen* zu finden, sind mathematikdidaktische Orientierungen wichtig, verschiedene Unterrichtsmethoden und Sozialformen mathematikdidaktisch begründet zu verbinden, etwa im Hinblick auf die Unterrichtsphasen, Lerninhalte, Gesprächsbedarfe und kognitiven Gehalte (Scherer 2015, 2017; Korff 2015; Häsel-Weide & Nührenbörger 2013; Leuders & Prediger 2016).

3.2 *Fachdidaktisch fundierte Ansätze für gemeinsames Lernen*

Gemeinsam erlebte Inhalte sind notwendig, da individuelle Lernprozesse in der Mathematik soziale Interaktion der Aushandlung bzgl. Fachwissen benötigen. Im gemeinsamen Lernen kann und muss die Lehrperson auf der Grundlage ihres mathematischen Fachwissens die Lernprozesse der Kinder strukturierend begleiten (Krauthausen & Scherer 2014, 26 f.).

Die Mathematikdidaktik hat spätestens seit den 1980er Jahren vielfältige Vorschläge für Mathematikunterricht in heterogenen Lerngruppen – insbesondere in der Primarstufe – erarbeitet, erprobt und evaluiert. Chancen und Möglichkeiten des aktiv-entdeckenden Lernens (in Abgrenzung zum gleichschrittigen Lehrgang) sind herausgestellt worden und allgemein anerkannt (z. B. Winter 1991; Wittmann 1990). Vielfältige, wissenschaftlich fundierte Antworten liegen ebenso zu Fragen der Form der Differenzierung vor. Mathematikdidaktisch sinnvoll ist nicht die individualisierte Inselbeschulung, sondern die natürliche Differenzierung durch substanzielle (mathematisch reichhaltige) Lernumgebungen (vgl. Krauthausen & Scherer 2014; Hengartner et al. 2006; Hirt & Wälti 2008).

Fachdidaktische Konstrukte wie das der fundamentalen Ideen haben sich bewährt, um gemeinsame Lernsituationen über ganz unterschiedliche Lernstufen hinweg zu konstruieren (Bikner-Ahsbahs et al. 2016). Die mathematische Reichhaltigkeit der Lernangebote stellt sich dafür immer wieder als zentrales Kriterium heraus (Nührenbörger & Pust 2006; Käpnick 2016; Peter-Koop et al. 2015).

Die Sicht auf Mathematik orientiert sich dabei nicht mehr vornehmlich an Regel- und Faktenwissen, sondern betont das Betreiben von Mathematik als aktive Tätigkeit und Geisteshaltung (Freudenthal 1982) und inszeniert gerade den Austausch zu verschiedenen Lernwegen als Moment, in dem Vielfalt zur Chance werden kann (Selter 1993; Nührenbörger & Pust 2006; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner-Merz 2010; Leuders & Prediger 2016).

3.3 *Fachdidaktisch fundierte Ansätze für fokussiertes individuelles Lernen*

Individuelles Lernen ist nicht per Sozialform bereits ein Qualitätskriterium an sich, sondern muss sich fokussiert und adaptiv an den individuellen fachlichen Lernbedarfen der Lernenden ausrichten (Scherer & Moser Opitz 2010). Fokussiert heißt dabei auch, fachdidaktisch treffsicher z. B. nicht an Fehlerphänomenen, sondern ihren Ursachen zu arbeiten und insbesondere Verstehensgrundlagen systematisch aufzuarbeiten (Moser Opitz 2007; Prediger et al. 2013).

Dies erfordert eine gezielte Diagnostik von Schwierigkeiten, dazu liegen für viele mathematische Themen fundierte Ansätze vor, die insbesondere Prozessdiagnostik und die individuelle Förderung aller Kinder favorisieren (z. B. Schipper 2008; Rottmann 2009). Diese Sichtweise wird auch im Kontext der Leistungsmessung und -feststellung zunehmend bedeutsam (z. B. Sundermann & Selter 2013; Hirt & Wälti 2008) und ist tragfähig sowohl für zielgleichen als auch für zieldifferenten, inklusiven Unterricht. Beispiele für durch intensive fachdidaktische Entwicklungsforschung ausgearbeitete Konzepte und Materialien zur individuellen, diagnosegeleiteten Förderung bieten etwa Selter et al. (2014).

3.4 *Fachdidaktisch fundierte Ansätze für den Umgang mit anderen Diversitätsaspekten*

Auch für andere Diversitätsaspekte wurden allgemeinpädagogische und fachübergreifende Ansätze aufgegriffen und im Hinblick auf die fachspezifischen Anforderungen ausgearbeitet, bspw. zum Diversitätsaspekt Geschlecht bei Jahnke-Klein (2001) oder hinsichtlich des sozialen Milieus bei Leufer (2016). Die jeweils notwendigen intensiven Analysen zur Ermittlung der fachspezifischen Anforderungen greifen dabei auf bewährte mathematikdidaktische Prinzipien zu wie Sinnstiftung bei Jahnke-Klein oder Realitätsbezüge bei Leufer zurück. Diese vernetzenden Perspektiven in die Lehre einzubinden, kann beispielgebend sein für die Notwendigkeit von Kooperation in multiprofessionellen Teams (vgl. auch Heinrich et al. 2013).

Der Diversitätsaspekt Sprachkompetenz hat in den letzten Jahren besonders intensive Aufmerksamkeit erlangt, nicht nur in Bezug auf den Umgang mit Textaufgaben (Duarte et al. 2011), sondern auch bzgl. der Sprachproduktionen in kognitiv anspruchsvollen Lernsituationen wie das Finden und Beschreiben von Mustern (Götze 2015) oder dem Bedeutungserklären beim Aufbau inhaltlicher Vorstellungen (Wessel 2015; Prediger 2016). Die Forschung und Entwicklung zeigt wiederum, wie wichtig die fachspezifische Bearbeitung und fachdidaktische Analyse ist, da fachübergreifend naturgemäß eher an Oberflächenstrukturen gearbeitet wird.

Etliche weitere, mathematikdidaktische Arbeiten, die sich mit den spezifischen mathematischen Bedürfnissen von Lernenden mit sonderpädagogischem Förderbedarf beschäftigen, z. B. zum Förderschwerpunkt Lernen (Scherer 1999; Moser Opitz 2007), Sehen (Leuders 2012) und geistige Entwicklung (Ratz 2010; Garrote et al. 2015), liegen vor und bieten empirische Basis für kooperative Auseinandersetzungen. Die fachdidaktischen Vorarbeiten und Ergebnisse zum Umgang mit Heterogenität liefern wichtige Kriterien, müssen allerdings für die sehr individuellen Voraussetzungen einzelner Kinder in der Praxis jeweils ausdifferenziert werden. Dieses Zusammenspiel von allgemeinpädagogischen und fachspezifischen Herausforderungen erfordert Kooperationsbereitschaft und Kooperationsmöglichkeiten sowie spezielle Expertise – auch und gerade im fachdidaktischen Bereich – bei allen Regelschullehrkräften und Sonderpädgoginnen und -pädagogen, die in allen Phasen der Lehrerbildung adressiert werden müssen.

4 Perspektiven

Die Mathematikdidaktik verortet ihre Aufgabe darin, vorliegende Konzepte und Antworten auf Fragen zum Umgang mit der Herausforderung Heterogenität und Inklusion in Forschung und Lehre darzustellen und bewusst auszuarbeiten. Empirische qualitative und quantitative Untersuchungen zu Effektivität und Praktikabilität entworfener Unterrichtssettings im Fokus der Inklusion von heterogenen Lerngruppen (in der gesamten Breite) müssen in Zukunft durchgeführt werden.

Zudem ist Forschung im Bereich der Dokumentation, Adaption sowie kritischen Prüfung und Überarbeitung vorliegender, wissenschaftlicher Antworten der Sonderpädagogik und Sprachdidaktik bzw. weiterer Bezugsdisziplinen aus mathematikdidaktischer Perspektive zu intensivieren. Konkret müssen hier zunächst verstärkt konstruktive Forschungsprojekte zur Erarbeitung von Hypothesen und geeigneten Lernumgebungen, Aufgabenformaten, Settings und Materialien durchgeführt werden, um dann tragfähige Konzepte in die Lehreraus- und -weiterbildung zu implementieren (zahlreiche weitere Ansätze für die Aus- und Fortbildung in Leuders et al. 2017).

5 Notwendige Ressourcen

Um die aufgezeigten Elemente systematisch in den Unterricht und die fachdidaktische Lehrerbildung zu integrieren und sie klug mit den pädagogischen und sonderpädagogischen Ausbildungselementen zu verbinden, sind erhebliche Anstrengungen und Ressourcen notwendig, sowohl in den Schulen als auch den ausbildenden Institutionen.

Während Universitäten mit sonderpädagogischen Studiengängen dabei auch auf die Expertise der Sonderpädagogik zugreifen und arbeitsteilig vorgehen können, ist dies bei den meisten Standorten nicht möglich, weil hier keine Sonderpädagogik existiert. Trotzdem müssen die Standorte sonderpädagogische Elemente in ihre Curricula integrieren und allgemeine mit fachspezifischen Aspekten verbinden (vgl. z. B. Wolfswinkler et al. 2014).

Darüber hinaus müssen die Universitäten mit höchst unterschiedlichen Ressourcenzuweisungen der Länder bzgl. der Herausforderung Inklusion umgehen. Diese reicht in einem breiten Spektrum von Universitäten, die zwar Ergänzungen vornehmen sollen, aber keinerlei zusätzliche Stellen oder Mittel erhalten (z. B. Bayern, NRW), bis hin zu Universitäten, bei denen neue Professuren speziell für das Themenfeld Inklusion errichtet werden (einige Standorte in NRW, PH Freiburg u. v. m.). Eine wirkungsvolle und didaktisch angemessene Umsetzung kann ressourcenneutral nicht gelingen.

Mit der Novellierung der Standards für die Lehrerbildung ist das Thema Inklusion prominent verankert, verortet einerseits in den Bildungswissenschaften, andererseits in den Fachdidaktiken. Sofern Ressourcen bereitgestellt werden, sind also auch Fragen der Verortung der neuen Stellen virulent, die zielangemessen zu diskutieren sind.

Literatur

Bartnitzky, H. (2013). Inklusion – die Lehrkräfte allein können es nicht richten. Grundschule aktuell, (123), 2.

Bikner-Ahsbahs, A., große Kamphake, L., Büssing, J., Dittmer, J., & Wieferich, A. (2016). Mathematikunterricht inklusiv gestalten: Die Drei-Elemente-Methode. In Beiträge zum Mathematikunterricht. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/35278/1/BzMU16%20BIKNER%20Inklusiv.pdf

Buholzer, A., & Kummer Wyss, A. (2010). Heterogenität als Herausforderung für Schule und Unterricht. In A. Buholzer & A. Kummer Wyss (Hrsg.), Alle gleich – alle unterschiedlich! Zum Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht (S. 7–13). Leipzig: Klett.

Duarte, J., Gogolin, I., & Kaiser, G. (2011). Sprachlich bedingte Schwierigkeiten von mehrsprachigen Schülerinnen und Schülern bei Textaufgaben. In S. Prediger & E. Özdil (Eds.), Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit (S. 35–53). Münster: Waxmann.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. Die Grundschule, 14(4), 140–142.

Fritz, A. & Schmidt, S. (Eds.) (2009). Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim und Basel: Beltz.

Garrote, A., Moser Opitz, E., & Ratz, C. (2015). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Eine Querschnittstudie. Empirische Sonderpädagogik, 7(1), 24–40.

Gebhard, S., Wollenweber, K. U., & Castello, A. (2014). Rahmenbedingungen gemeinsamen Unterrichtens in inklusiven Unterrichtssettings. Zeitschrift für Heilpädagogik, 65(2), 60–65.

Götze, D. (2015). Sprachförderung im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Mathematiklernen im Spiegel von Heterogenität und Inklusion. Mathematik differenziert, 4(2), 6–8

Heinrich, M., Urban, M., & Werning, R. (2013). Grundlagen, Handlungsstrategien und Forschungsperspektiven für die Ausbildung und Professionalisierung von Fachkräften für inklusive Schulen. In H. Döbert & H. Weishaupt (Hrsg.), Inklusive Bildung professionell gestalten – Situationsanalyse und Handlungsempfehlungen. (S. 69–133). Münster: Waxmann.

Hengartner, E., Hirt, U., & Wälti, B. (2006). Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Zug: Klett und Balmer.

Hirt, U., & Wälti, B. (2008). Lernumgebungen im Mathematikunterricht: Natürliche Differenzieung für Rechenschwache bis Hochbegabte. Seelze: Klett Kallmeyer.

Jahnke-Klein, S. (2001). Sinnstiftender Mathematikunterricht für Mädchen und Jungen. Hohengehren: Schneider.

Käpnick, F. (2016). Verschieden verschiedene Kinder: Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Klett Kallmeyer.

Klemm, K. (2015). Inklusion in Deutschland. Daten und Fakten. Gütersloh: Bertelsmann Stiftung.

KMK (2015a). Lehrerbildung für eine Schule der Vielfalt. Gemeinsame Empfehlung von Hochschulrektorenkonferenz und Kultusministerkonferenz (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 12. 3. 2015/ Beschluss der Hochschulrektorenkonferenz vom 18. 3. 2015).

KMK (2015b). Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. Beschluss d. KMK v. 16. 10. 2008 i. d. F. v. 11. 6. 2015.

Korff, N. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe: Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen. Baltmansweiler: Schneider Hohengehren.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

Leuders, J. (2012). Förderung der Zahlbegriffsentwicklung bei sehenden und blinden Kindern. Empirische Grundlagen und didaktische Konzepte. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Leuders, J., Leuders, T., Prediger, S., & Ruwisch, S. (Hrsg.). (2017). Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen – Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung. Wiesbaden: Springer.

Leuders, T., & Prediger, S. (2016). Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leufer, N. (2016). Kontextwechsel als implizite Hürden realitätsbezogener Aufgaben. Wiesbaden: Springer.

Lütje-Klose, B. (2011). Inklusion – Welche Rolle kann die Sonderpädagogik übernehmen? Mitteilungen des vds, 49(4), 8–21.

Meyer, M., & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. Praxis der Mathematik in der Schule, 45, 2–9.

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern: Haupt.

Nührenbörger, M., & Pust, S. (2006). Mit Unterschieden rechnen: Lernumgebungen für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik. Seelze: Kallmeyer.

Peter-Koop, A., Rottmann, Th., & Lüken, M. (Hrsg.) (2015). Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Prediger, S. (2016). Wer kann es auch erklären? Sprachliche Lernziele identifizieren und verfolgen. Mathematik differenziert, 7(2), 6–9.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Optiz, E., & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur – Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. Praxis der Mathematik in der Schule, 55(51), 12–17.

Prengel, A. (2013). Inklusive Bildung in der Primarstufe. Eine wissenschaftliche Expertise des Grundschulverbandes. Frankfurt/M.: Grundschulverband.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner-Merz, C. (2010). Mathematiklernen in der jahrgangsübergreifenden Eingangsstufe: Gemeinsam, aber nicht im Gleichschritt. München: Oldenbourg.

Ratz, C. (2010). Fachorientierung im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung am Beispiel von mathematischem Lernen. Sonderpädagogische Förderung, 55(2), 147–165.

Rottmann, Th. (2009). Diagnose von Rechenstörungen. Möglichkeiten und Grenzen von Diagnoseverfahren im Mathematikunterricht. MNU Primar, 1(2), 49–52.

Scherer, P. (1999). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte – Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. 2. Auflage. Heidelberg: Edition Schindele.

Scherer, P. (2015). Inklusiver Mathematikunterricht der Grundschule – Anforderungen und Möglichkeiten aus fachdidaktischer Perspektive. In T. Häcker & M. Walm (Eds.), Inklusion als Entwicklung – Konsequenzen für Schule und Lehrerbildung (S. 267–284). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Scherer, P. (2017). Gemeinsames Lernen oder Einzelförderung? – Grenzen und Möglichkeiten eines inklusiven Mathematikunterrichts. In F. Hellmich & E. Blumberg (Eds.), Inklusiver Unterricht in der Grundschule (S. 194–212). Stuttgart: Kohlhammer.

Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). Fördern um Mathematikunterricht der Primarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, W. (2008). Rechenstörungen als schulische Herausforderung: Handreichung zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen. Herausgegeben vom Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM). Verfügbar unter: http://www.uni-bielefeld.de/idm/serv/handreichung-schipper.pdf

Selter, C. (1993). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2014). Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Berlin: Cornelsen.

Sundermann, B., & Selter, Ch. (2013). Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin. Cornelsen.

Wember, F. B. (2013). Herausforderung Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. Zeitschrift für Heilpädagogik, 64(10), 380–388.

Wessel, L. (2015). Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding. Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff. Heidelberg: Springer Spektrum.

Winter, H. (1991). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der ‚bunten Hunde' und der ‚grauen Päckchen': Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1 (S. 152–166). Stuttgart: Klett.

Wolfswinkler, G., Fritz-Stratmann, A., & Scherer, P. (2014). Perspektiven eines Lehrerausbildungsmodells „Inklusion". Die Deutsche Schule, 106(4), 373–385.

Dieses Positionspapier wurde federführend von Anna Susanne Steinweg und Petra Scherer entworfen und mit den Beiträgen vieler Beteiligter ergänzt und modifiziert.

Es wurde im Mai 2017 einstimmig verabschiedet von der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der drei mathematischen Berufsverbände, Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Deutsche Mathematiker-Vereinigung und Verein zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Angebote der GDM-Nachwuchsvertretung im Rahmen der 51. Jahrestagung der GDM

Potsdam, 16. 2.–3. 3. 2017

Andreas Frank, Kerstin Hein und Petra Tebaartz

In diesem Jahr konnte die Nachwuchsvertretung der GDM wieder ein umfassendes Programm für die Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler anbieten.

Zum *Nachwuchstag*, der traditionell am Sonntag vor der Tagung beginnt und am Montag unmittelbar vor der offiziellen Tagungseröffnung endet, meldeten sich in diesem Jahr 95 Personen an. Erfreulicherweise konnte allen die Teilnahme ermöglicht werden. Dabei war es jedem der 85 Nachwuchstag-Neulinge möglich, alle gewünschten Angebote wahrzunehmen. Zehn weitere Personen nahmen zum zweiten Mal am Nachwuchstag teil. Um ein effektives und produktives Arbeiten innerhalb der angebotenen Workshops zu gewährleisten, musste hier jeweils eine Teilnehmerhöchstzahl eingehalten werden, so dass in diesen Fällen leider nicht alle Wünsche erfüllt werden konnten und die Neulinge bevorzugt behandelt wurden.

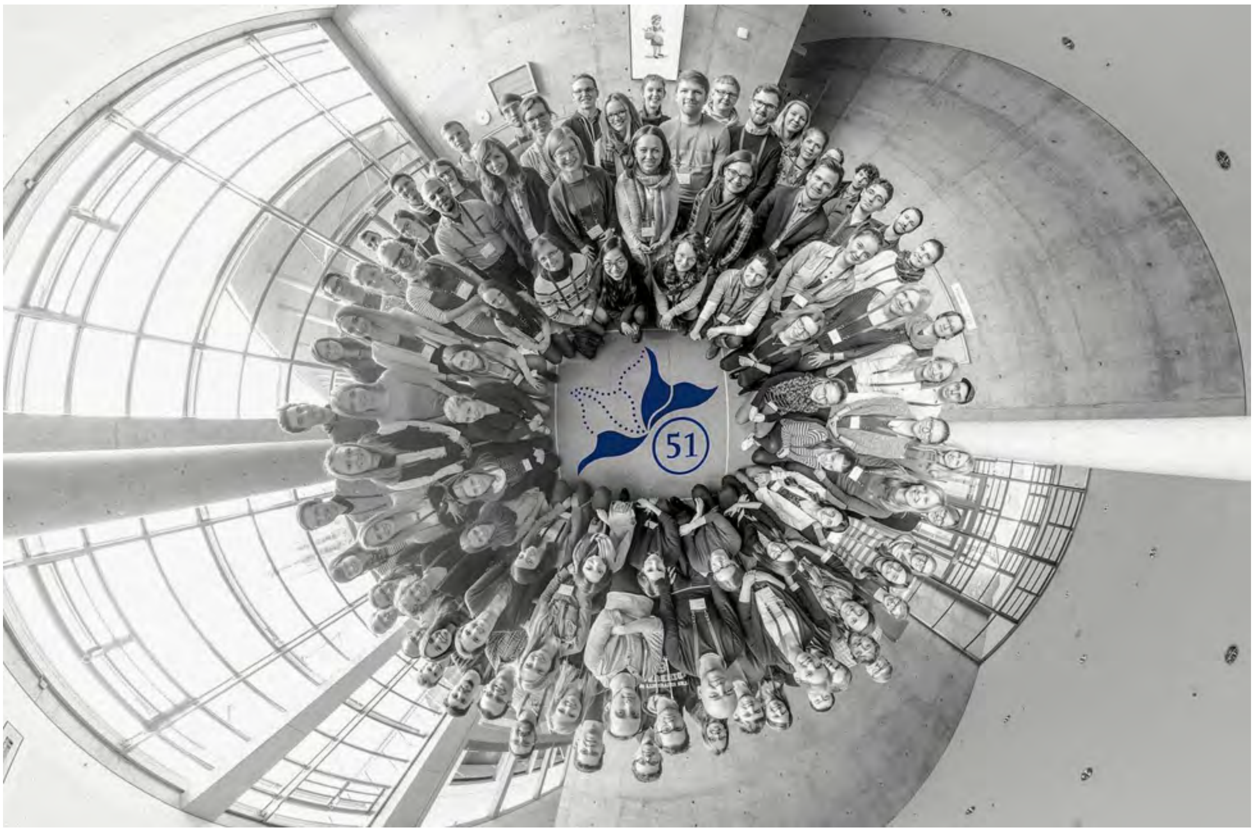
Die Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler konnten sich bereits bei der Ankunft mit Suppe, Brezeln, Obst, Kaffee und Tee stärken. An beiden Tagen stellte das Organisationsteam Potsdam in allen Pausen Getränke und Verpflegung bereit, was von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern dankend angenommen wurde. So konnte auch die Pause intensiv zum Networking genutzt und sich gleichzeitig für das weitere Programm gestärkt werden.

Das Programm des Nachwuchstages begann diesmal am Sonntag, den 26. Februar 2017, um 13.30 Uhr mit einer kurzen Begrüßung, an die sich wie im letzten Jahr das *Thematische Networking* anschloss. Dazu wurden kleinere Gruppen gebildet, deren Mitglieder jeweils einem übergreifenden, gemeinsamen Forschungsgebiet zuzuordnen waren, z. B. „Übergang Schule–Hochschule“, „Sprache im Mathematikunterricht“, „digitale Medien“ oder „Lehrerprofessionalität“. Die hierfür notwendigen Informationen zu den einzelnen Promotionsthemen wurden vorab gesammelt. Innerhalb dieser Gruppen hatten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Möglichkeit, erste Kontakte zu Personen zu knüpfen, die in demselben Themenbereich arbeiten, sowie weitere mathematikdidaktische Forschungsthemen kennenzulernen.

Im Anschluss daran startete das *Workshop-Angebot*. Dieses Jahr konnten die Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler zwischen vier Workshops wählen: Zeit- und Arbeitsmanagement, Umgang mit Literatur, Vorträge halten und Wissenschaftliches Schreiben. Wir versuchten, in den von uns selbst gestalteten Workshops eine ausgewogene Balance zwischen Input und Aktivierung herzustellen und dabei sowohl unsere eigenen Erfahrungen als auch die der Teilnehmerinnen und Teilnehmer einfließen zu lassen.

Neben den Workshops bestand während des Nachwuchstages für alle die Möglichkeit, einen *Probevortrag* zu halten. Es konnten alle 15 Anfragen im Programm berücksichtigt werden, so dass diese Personen ihren GDM-Vortrag vorab in einem geschützten Rahmen proben konnten. Eine Zuhörerschaft von ca. 15 Personen gab jeweils konstruktive Rückmeldung zu inhaltlichen Aspekten, zur Foliengestaltung oder zum Auftreten. Neben vielen nützlichen Ratschlägen lernten die Vortragenden auch, ihr Zeitgefühl besser einzuschätzen, und konnten ihre Nervosität ein wenig abmildern. Zusätzlich profitierten besonders diejenigen davon, die zum ersten Mal die GDM besuchten. Sie konnten sehen, wie ein Vortrag gehalten werden und die anschließende Diskussion aussehen kann. Die Probevorträge wurden daher nicht nur von den Vortragenden selbst, sondern auch vom Publikum als äußerst hilfreich empfunden.

Ein neues Format waren in diesem Jahr *Diskussionen in Kleingruppen* mit je fünf bis acht Personen. Diese Gespräche fanden teilweise zeitgleich zu den Probevorträgen statt. Die Idee hierbei war, den Beteiligten einen zusätzlichen zeitlichen Rahmen zu bieten, um sich über spezielle Themen oder Probleme auszutauschen, jeweils unter Begleitung eines Mitglieds unserer Nachwuchsvertretung. Auch hier wurden die relevanten Informationen im Vorfeld des Nachwuchstags abgefragt und die Kleingruppen entsprechend eingeteilt. Dieses Angebot wurde sehr rege wahrgenommen. Die Möglichkeit, mit anderen über ähnliche Themen in kleinem Rahmen intensiv zu diskutieren, über Schwierigkeiten zu sprechen und neue Ideen und Sichtweisen einzuholen, wurde von den Teilnehmenden durchweg



Die Teilnehmer(inn)en des Nachwuchstags in Potsdam (Foto: Chris Dohrmann)

positiv bewertet. Das Format soll in jedem Fall beibehalten werden. In der zeitlichen Gestaltung sowie der personellen Betreuung der Kleingruppen sehen wir noch Verbesserungsbedarf.

Das Feedback des Nachwuchstags insgesamt zeigte, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit dem inhaltlichen Angebot und dem zeitlichen Rahmen sehr zufrieden waren. Zusätzlich zu der guten Organisation und der kulinarischen Versorgung vor Ort wurden insbesondere die Formate zum Kennenlernen von und Austauschen mit anderen Doktorandinnen und Doktoranden als besonders positiv hervorgehoben. Hier wurde auch mehrfach der Wunsch nach noch mehr Zeit geäußert.

Direkt im Anschluss an den Nachwuchstag fand die *Talkrunde* statt, die sich stets auch an andere Interessierte des wissenschaftlichen Nachwuchses richtet. Dieses Jahr konnten wir Jun. Prof. Dr. Stefanie Rach von der Universität Paderborn und Jun. Prof. Dr. Michael Besser von der Leuphana Universität Lüneburg für uns gewinnen. Beide berichteten von ihrem individuellen Werdegang, von den Hürden und Stolpersteinen auf dem Weg zu einer Professur und davon, wie sie mit diesen Herausforderungen umgegangen sind. Das Publikum empfand die Informationen und Berichte als sehr hilfreich und interessant für den weiteren beruflichen Weg.

Die Nachwuchsvertretung der GDM organisierte neben dem Nachwuchstag und der Talkrunde noch verschiedene weitere Angebote während der GDM-Jahrestagung 2017. So fanden sich beim *Kneipenabend* mehr als 100 Personen in einem Lokal nahe der Innenstadt ein, wo wir einen wunderbaren Abend verbringen und sich alle in einem etwas weniger offiziellen Rahmen kennenlernen konnten.

Weiterer Bestandteil unseres Angebots war die *Expertinnen- und Expertensprechstunde*. Insgesamt fragten uns zwölf Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler an und suchten das Gespräch mit einer Expertin bzw. einem Experten ihrer Wahl. Die Nachwuchsvertretung der GDM stellte die Kontakte her und konnte so alle Anfragen erfolgreich vermitteln.

Außerdem informierten wir im *Nachwuchsforum* über die GDM, die GDM-Mitgliedschaft, die Beiratswahl sowie die Nachwuchskonferenz 2017 in Essen.

Auch für die erfahrenen Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler wurde ein spezielles Programm veranstaltet. Prof. Dr. Aiso Heinze (IPN Kiel) bot im Namen des JMD-Herausgeberteams einen Workshop zum Akademischen Schreiben an, um Informationen zum Publizieren in Zeitschriften zu vermitteln sowie Tipps und Tricks zum Schreiben weiterzugeben. Die Folien zu diesem Workshop können auf unserer madipedia-Nachwuchsseite heruntergeladen werden. Vielen Dank für diesen sehr guten Einblick!

Das *Postdoc-Forum* diente dem internen Austausch von Postdoktorierenden und Junior-Professorinnen und -Professoren. Nach einem kurzen, inhaltlichen Input wurde gemeinsam diskutiert, welche Bedürfnisse an Fortbildungsmöglichkeiten vorliegen, z. B. zu Aspekten wie Bewerbungsprozessen, Projekteinwerbungen oder Mentoring. Durch diese Absprache kann bei der nächsten GDM-Tagung auch für die erfahrenen Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler wieder ein passender Workshop angeboten werden; durch die Einrichtung eines Mail-Verteilers kann der Austausch gefördert werden.

Das vielfältige Nachwuchs-Programm, die Einladung von Expertinnen und Experten sowie der große Andrang an Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftlern am Nachwuchstag führten dazu, dass hierfür einige Ausgaben getätigt werden mussten (Arbeitsmaterial für die Workshops, Geschenke für die Gastvortragenden, Bereitstellung von Verpflegung). Wie im letzten Jahr wurde der Nachwuchsvertretung auch diesmal vom GDM-Organisationsteam ein finanzielles Budget eingeräumt, mit dem genau diese Kosten abgedeckt werden konnten.

An dieser Stelle möchten wir uns für dieses finanzielle Budget, für das liebevolle Buffet während der Pausen und die unkomplizierte Organisation vor Ort ganz herzlich bedanken. Unser besonderer Dank gilt dabei dem gesamten GDM-Organisationsteam in Potsdam. Außerdem bedanken wir uns bei allen weiteren Beteiligten, die zum Gelingen des Nachwuchsprogramms beigetragen haben, und bei allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern für ihre rege Teilnahme.

Derzeit besteht die Nachwuchsvertretung aus: Georg Bruckmaier, Andreas Frank, Kerstin Hein, Raja Herold-Blasius, Marcel Klinger, Mona-Lisa Maisano, Angel Mizzi, Ralf Nieszporek, Julia Ollesch, Stefanie Rach, Sebastian Schorcht, Alexander Schüler-Meyer, Petra Tebaartz, Daniel Thurm und Holger Wuschke.

Aktuelle Informationen zur Nachwuchsvertretung und zum Programm finden sich unter madipedia.de/wiki/Nachwuchsvertretung_der_GDM.

Andreas Frank, Universität Regensburg
Email: andreas.frank@ur.de

Kerstin Hein, Technische Universität Dortmund
Email: kerstin.hein@mathematik.tu-dortmund.de

Petra Tebaartz, Justus-Liebig-Universität Gießen
Email: petra.c.tebaartz@math.uni-giessen.de

Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 2. 3. 2017 in Potsdam

Zeit: 16.30–18.30 Uhr
Ort: Universität Potsdam

Rudolf vom Hofe begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an die seit der letzten Mitgliederversammlung verstorbenen Kolleg(inn)en:

- Christine Keitel-Kreidt (2016)
- Eberhard Lehmann (2016)
- Helmut Schütz (2016)
- Barbara Ringel (2016)
- Heinrich Wippermann (2016)
- Josef Lauter (2016)
- Antje Hoffmann (2017)

TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Die in Heft 102 der Mitteilungen veröffentlichte Tagesordnung wird dahingehend abgeändert, dass als TOP 6 ein Punkt „Gemeinsame Jahrestagung der GDM und DMV 2018“ eingefügt wird. Die geänderte Tagesordnung und das in Heft 101 der Mitteilungen veröffentlichte Protokoll der Mitgliederversammlung vom 10.03.2016 in Heidelberg werden einstimmig angenommen.

TOP 2: Bericht des Vorstands

2.1 *Wahrgenommene Termine im Rahmen der Vorstandstätigkeit* (Ort und wahrnehmende Personen jeweils in Klammern)

20.03.2016	MNU Bundestagung (Leipzig, R. v. Hofe)
23./24.05.2016	GFD Mitgliederversammlung (Berlin, R. v. Hofe)
SoSe 2016	GDM/DMV Tagung 2018: Abstimmungsgespräche, Einrichtung Programmkomitee (Bielefeld, Paderborn, R. v. Hofe)
24./27./31.07.	ICME-13 Eröffnung, Begrüßung Lehrertag, Abschlussveranstaltung (Hamburg, R. v. Hofe)
10./11.09.	Verleihung der Ehrenmitgliedschaft an Hans Schupp (Saarbrücken, R. v. Hofe)
01.10.	125 Jahre MNU Festakt (Recklinghausen, R. v. Hofe)
03./04.11.	Vorstands- und Beiratssitzung (Leipzig, R. v. Hofe, S. Ruwisch, Chr. Bescherer, A. Vohns)
29./30.11.	KMK Fachtagung zum Mathematik-Abitur (Dresden, R. v. Hofe)

2.2 *Nachwuchsförderung*

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Potsdam* (siehe Bericht in Heft 103 der Mitteilungen) geht Dank an die lokalen Organisator(inn)en und die aktuellen Mitglieder der Nachwuchsvertretung: Georg Bruckmaier, Andreas Frank, Kerstin Hein, Raja Herold-Blasius, Marcel Klinger, Mona-Lisa Maisano, Angel Mizzi, Ralf Nieszporek, Julia Ollesch, Stefanie Rach, Sebastian Schorcht, Alexander Schüler-Meyer, Petra Tebaartz, Daniel Thurm und Holger Wuschke.

Aiso Heinze berichtet über den *DFG-Antragsworkshop der GDM und GDCP* (8.–9. 12. 2016) am IPN Kiel. Es waren insgesamt 25 Personen angemeldet, darunter 19 potenzielle Antragstellende, von diesen 13 aus der Mathematikdidaktik. Beraten wurden diese durch neun Expert(inn)en: Stefan Ufer, Stanislaw Schukajlow, Anke Lindmeier, Aiso Heinze, Claudia von Aufschnaiter, Alexander Kauertz, Ilka Parchmann, Kerstin Schütte und Jan Retelsdorf. Trotz der hohen Zahl an Beratungspersonen war die Veranstaltung vergleichsweise kostengünstig, da viele Beratende am IPN beheimatet sind und daher keine Reise- und Unterkunftskosten zu zahlen waren. Aiso Heinze ist zuversichtlich, dass aus dem Workshop einige erfolgversprechende Anträge hervorgehen. Es geht Dank an Aiso Heinze für die Organisation und an ihn und die anderen Expert(inn)en für ihre Mitwirkung.

Andreas Eichler berichtet über die *Summerschool 2016* in Kassel (29.08.-02.09.2016). Es haben insgesamt 30 Teilnehmer(innen) von 18 verschiedenen Standorten aus drei Nationen teilgenommen. Dank geht an die Organisator(inn)en (Raja Herold-Blasis, Andreas Eichler, Katja Lengnink) und an die Expert(inn)en (Werner Blum, Nils Buchholtz, Sabine Fechner, Uwe Gellert, Stefan Krauss, Detlev Leutner, Susanne Prediger, Stephan Schreiber, Stefan Ufer, Bernd Wollring).

Rudolf vom Hofe erläutert, dass im Jahr 2017 erstmals eine Zusammenführung der etablierten Förderformate Summerschool und Doktorand(inn)enkolloquium in Form einer *Nachwuchskonferenz* erprobt wird, für deren Durchführung Kolleg(inn)en in Essen gewonnen werden konnten.

Benjamin Rott und Bärbel Barzel laden sodann zur *1. Nachwuchskonferenz 2017* im Jugendhaus St. Alfrid in Essen (18.–22. 9. 2017) ein, sie erläutern das aus Hauptvorträgen, vertiefenden Workshops und „runden Tischen" bestehende inhaltliche Konzept der Konferenz. Als Hauptvortragende konnten neben Benjamin Rott selbst Timo Leuders, Bettina Rösken-Winter, Detlev Leutner und Lieven Verschaffel gewonnen werden, die Organisation übernehmen neben den beiden Präsentierenden Raja Herold-Blasius, Julia Joklitschke, Marcel Klinger, Daniel Thum, Maximilian Pohl und Anna Vogtländer. Aufgrund des Einwerbens von Mitteln an der Universität Duisburg-Essen (genauer: am Interdisziplinären Zentrum für Bildungsforschung) kann der Teilnehmer(innen)beitrag mit 150 € (GDM-Mitglieder, 200 € Nicht-GDM-Mitglieder) erfreulich niedrig angesetzt werden. Nähere Informationen unter: http://udue.de/nwk2017

2.3 *Gemeinsame Kommissionen*

Kommission „Übergang Schule-Hochschule"

Gilbert Greefrath berichtet: In der Kommission Übergang Schule-Hochschule der drei Fachverbände DMV, MNU und GDM sind in der aktuellen Amtsperiode als Vertreter der GDM Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath tätig, Regina Bruder und Christina Drüke-Noe sind Stellvertreterinnen. Vom 29.–31. Mai 2017 wird die dritte Fachtagung der Kommission zum Thema: „Mathematik in Schule und Hochschule – Wie groß ist die Lücke und wie gehen wir mit ihr um?" stattfinden, eine Teilnahme ist nur auf persönliche Einladung hin möglich.

Kommission für Lehrerbildung
Timo Leuders erläutert zunächst den seines Erachtens komplementären inhaltlichen Auftrag der beiden Kommissionen und führt dann weiter aus: Aktuell sind (gewählt bis 2018) Timo Leuders, Susanne Prediger und Anna Susanne Steinweg als reguläre Mitglieder und Gabriele Kaiser, Jürgen Roth und Petra Scherer als stellvertretende Mitglieder gewählt. Die Aufgaben der Kommission bestehen grundsätzlich im Austausch über Entwicklungen in den einzelnen Bundesländern (z. B. zu Strategien der Länder zur Qualifizierung im Bereich Inklusion), der wissenschaftspolitischen Einflussnahme (z. B. in Form von Stellungnahmen und der Mitarbeit an Standardsetzungen) und in der Konzept-Arbeit (z. B. in Form von Fachtagungen und Publikationen). Die 5. Fachtagung zum Thema „Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung: Zielsetzungen und Konzepte unter heterogenen Voraussetzungen" wird am 24./25. 3. 2017 an der Universität Göttingen stattfinden. Ein Papier zur fachdidaktischen Dimension von Inklusion ist in Vorbereitung (nachrichtlich: Papier ist in diesem Heft abgedruckt).

2.4 Tagungen
Timo Leuders lädt zur *GFD-Fachtagung „Fachdidaktische Forschung zur Lehrerbildung"* (27.–29. 9. 2017, PH Freiburg) ein, die in diesem Jahr in Kooperation mit der KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz) stattfinden wird. Als Hauptvortragende aus der Mathematikdidaktik wurde Susanne Prediger mit einem Vortrag „Design Research in der Lehrerfortbildung" gewonnen.

Gabriele Kaiser berichtet über den vom 24.–31. 7. 2016 stattgefundenen *13th International Congress on Mathematical Education* in Hamburg (vgl. auch den ausführlichen Bericht in Heft 102 der Mitteilungen). Sie erläutert kurz die mit der Durchführung des Kongresses verbundenen finanziellen Aktivitäten: Bei einem Gesamtbudget von 2,4 Millionen Euro waren Einnahmen von Konferenzteilnehmer(innen) und Begleitpersonen in Höhe von 1,4 Millionen zu verzeichnen, der Rest der Mittel wurde durch Sponsoren (darunter 80.000 € Mittel aus Mitgliedsbeiträgen der GDM) und durch kleinere Einnahmen durch Standvermietung und Flyer-Verteilung aufgebracht. Insgesamt wurde kein Überschuss, aber auch kein Defizit gemacht. An die GDM zurückerstattet werden konnten daher nur die Anlaufkosten, die vor Gründung des Vereins zur Durchführung des ICME-13 vorgestreckt wurden, die aus dem ICME-Zuschlag auf die Mitgliedsbeiträge eingenommenen Mittel wurden verbraucht. Zur Sicherung der Nachhaltigkeit des Kongresses ist die Herausgabe von zwei Proceedings-Bänden und drei Bänden zum thematischen Nachmittag im Open-Access, sowie weiteren 20 Monographien aus den Topic Study Groups geplant. Gabriele Kaiser dankt allen am Kongress beteiligten Mitgliedern der GDM für ihre persönliche, sowie allen Mitgliedern der GDM für die finanzielle Unterstützung des ICME-13. Rudolf vom Hofe dankt Gabriele Kaiser und dem gesamten lokalen Organisationskomitee in Hamburg für die geleistete Arbeit.

Rudolf vom Hofe berichtet: Die *kommenden Jahrestagungen* finden in Paderborn (5.–9. 3. 2018) und Regensburg (2019) statt, für 2020 ist die Universität zu Köln angefragt.

2.5 Bericht der Schriftführung
Andreas Vohns berichtet über Stand und Entwicklung der Mitgliederzahlen (Stichtag: 24. 2. 2017): Die GDM verfügt derzeit über 1117 Mitglieder. Im Jahr 2016 sind regulär zum 31. 12. 2016 45 Personen ausgetreten, zum 1. 1. 2016 sind 57 Personen neu eingetreten, zum 01.01.2017 bislang 38 Personen. Trotz einer größer angelegten Adressrecherche im Sommer 2015 gibt es erneut etwa 15 Mitglieder, von denen aktuell keine korrekten Adressangaben vorliegen, was die Zustellung von JMD und MGDM verunmöglicht. Er bittet eindringlich, die eigenen Daten in der Datenbank aktuell zu halten, zur Erinnerung erfolgt zweimal jährlich eine Zusendung der aktuell gespeicherten Daten an die Mitglieder. Redaktionsschluss für die kommenden Hefte der Mitteilungen sind der 30. 5. und der 30. 11. 2017, eine Umstellung auf ein Online-Redaktionssystem mit Einreichungsfunktion ist in Vorbereitung.

TOP 3: Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

Bericht der Kassenführerin. Rudolf vom Hofe erläutert zunächst, dass Christine Bescherer den Kassenbericht in diesem Jahr nicht persönlich übernehmen kann, da sie aufgrund eines Achillessehnenabrisses derzeit nicht mobil ist.

Silke Ruwisch berichtet an ihrer Stelle: Die bereits in den letzten beiden Jahren festgestellte Entspannung der Kassenlage hat sich auch im Jahr 2016 bestätigt. Im Jahr 2016 standen Ausgaben in Höhe von € 70.922 Einnahmen in Höhe von € 128.597 gegenüber (Saldo: € 57.675), zum 21.02.2017 befanden sich € 80.932,05 auf dem Konto der GDM. Der deutlich höher als erwartet ausgefallene Überschuss erklärt sich vor allem durch die Rückzahlung der Anlauffinanzierung des ICME in Höhe von € 23.277 und das rückwirkend für die Jahre 2014–2016 gezahlte Editorial Stipend des JMD, sowie die aufgrund der Nichtdurchführung eines Doktorand(inn)enkolloquiums deutlich geringeren Kosten im Bereich Nachwuchsförderung. Sie erläutert ferner detaillierter die Zusammensetzung der

Ausgabenposten. Für das Jahr 2017 sind nach derzeitigem Planungsstand Ausgaben in Höhe von ca. € 73.500 € und Einnahmen in Höhe von € 82.000 zu erwarten. Silke Ruwisch weist darauf hin, dass der ICME-Zuschlag im Jahr 2017 bereits entfällt und somit die reinen Mitgliedsbeiträge (€ 100 regulär, € 90 reduziert, € 50 ermäßigt, € 25 Osteuropa) zu zahlen sind. Anträge auf Beitragsermäßigung (wg. Vollzeitstudium, Referendariat, maximal halbe Stelle als WM) sind rechtzeitig vor Beitragseinzug zu stellen und müssen jährlich erneut gestellt werden.

Silke Ruwisch bedankt sich bei Fritz Haselbeck, der die Kassenprüfung bis zum Jahr 2015 inne hatte, im letzten Jahr aber krankheitsbedingt nicht anwesend war.

Bericht des Kassenprüfers. Rudolf Sträßer berichtet: Der Jahresabschluss per 31. 12. 2016 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. (GDM) wurde von ihm am 1. 3. 2017 geprüft. Grundlage der Prüfung waren die von der Kassenführerin Christine Bescherer übersandten Unterlagen zum Jahresabschluss und die zugehörigen Konto- und Kostenbelege. Bei der Prüfung erfolgte auch eine stichprobenweise Prüfung einzelner Buchungen und der zugehörigen Belege. Die Buchführungsbelege wurden als in Ordnung befunden. Sie werden übersichtlich aufbewahrt. Die Kassenführerin hat auf Nachfragen bereitwillig und sachdienlich Auskunft gegeben. Leider lagen bei der Prüfung keine Belege für das Festgeldkonto des Vereins vor. Wegen der z. Zt. geringen Geldsumme auf diesem Konto (weniger als 700,- €) wird diese Prüfungseinschränkung nicht als gravierender Mangel bewertet. Die Prüfung ergab keinerlei Beanstandungen. Buchführung und Jahresabschluss entsprechen den gesetzlichen Vorschriften und der Vereinssatzung. Einnahmen und Ausgaben waren übersichtlich verbucht. Die auch summarisch geprüften Ausgaben dienten ausnahmslos dem Vereinszweck. Der Kassenführerin kann daher Entlastung erteilt werden. Er beantragt, dass die Mitgliederversammlung der Kassenführerin des Vereins Entlastung für das Geschäftsjahr 2016 erteilt.

TOP 4: Entlastung des Vorstands

Laut Satzung der GDM ist der Gesamtvorstand zu entlasten. Hedwig Gasteiger empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei drei Enthaltungen zugestimmt.

TOP 5: Wahlen

Kassenprüfer. Helmut Linneweber-Lammerskitten schlägt Gabriela Schürch vor. Gabriela Schürch wird per Akklamation gewählt, sie ist nicht anwesend, hat aber bereits schriftlich für den Fall der Wahl deren Annahme erklärt, die somit als angenommen gilt.

1. Vorsitz. Rudolf vom Hofe tritt nicht wieder zur Wahl an. Silke Ruwisch bedankt sich bei Rudolf vom Hofe für die zurückliegende gemeinsame Vorstandstätigkeit. Andreas Eichler wird zur Wahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Andreas Eichler wird gewählt (Ja-Stimmen: 124, Nein-Stimmen: 6, Enthaltungen: 2, Ungültige Stimmen: keine). Andreas Eichler nimmt die Wahl an.

Kassenführung. Christine Bescherer kann satzungsgemäß nicht erneut für die Kassenführung kandidieren. Andreas Vohns bedankt sich (in ihrer Abwesenheit) für die zurückliegende gemeinsame Vorstandstätigkeit. Torsten Fritzlar wird zur Wahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Torsten Fritzlar wird gewählt (Ja-Stimmen: 126, Nein-Stimmen: 3, Enthaltungen: 3, Ungültige Stimmen: keine). Torsten Fritzlar nimmt die Wahl an.

Beirat. Es scheiden regulär aus (Wiederwahl bei allen Personen möglich): Gabriella Ambrus, Bärbel Barzel, Michael Gaidoschik, Ulrich Kortenkamp. Zudem scheidet Andreas Eichler aufgrund seiner Wahl als 1. Vorsitzender aus. Zu wählen sind also 5 Personen.

Es kandidieren: Gabriella Ambrus, Bärbel Barzel, Michael Gaidoschik, Gabriele Kaiser, Ulrich Kortenkamp, Timo Leuders, Rudolf vom Hofe

Gewählt werden: Ulrich Kortenkamp (102 Stimmen), Rudolf vom Hofe (93 Stimmen), Bärbel Barzel (78 Stimmen), Timo Leuders (72 Stimmen) und Gabriele Kaiser (70 Stimmen).

Michael Gaidoschik (45 Stimmen) und Gabriella Ambrus (38 Stimmen) werden nicht gewählt.

Alle gewählten Personen nehmen die Wahl an.

JMD-Herausgeber(innen). Aiso Heinze scheidet zum 31. 12. 2017 aus dem Herausgeber(innen)gremium aus, Esther Brunner wurde im Beirat als seine Nachfolgerin gewählt.

TOP 6: MathEduc und Madipedia

Ulrich Kortenkamp berichtet: Mit 31. 12. 2016 hat das FIZ-Karlsruhe den mit der GDM geschlossenen Vertrag über *MathEduc* aufgekündigt (vgl. den Bericht im Rahmen des Vorworts des 1. Vorsitzenden in Heft 102 der Mitteilungen). MathEduc soll als Open-Access-Variante unter Federführung der GDM weitergeführt und in Madipedia integriert werden.

TOP 7: Zeitschriften

7.1 Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)
Aiso Heinze berichtet: Die Zahl erfolgreicher Downloadversuche von Einzelartikeln hat sich auch im letzten Jahr weiter erhöht. Nachdem im Jahr 2016 zwei Hefte mit spezifischem Themenschwerpunkt (1/2016: Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung (in memoriam Arnold Kirsch); 1a/2016: Subject matter analysis from a didactical perspective (Stoffdidaktik)) erschienen sind, ist das nächste derartige Heft für 2018 (1/2018: Psychologische Theorien in der Mathematikdidaktik) vorgesehen. Zur Erhöhung der Zahl qualitativ hochwertigerhoher Einreichung von insbesondere jüngeren Forscher(inne)n wurde auf der GDM Jahrestagung 2016 ein Workshop zur Manuskripterstellung durchgeführt, im Rahmen der Jahrestagung 2017 ein Workshop zum wissenschaftlichen Schreiben und Publizieren.

Rudolf vom Hofe dankt Aiso Heinze als scheidendem Herausgeber des JMD für seine Arbeit, Aiso Heinze bedankt sich bei seinen bisherigen Mitherausgeber(inne)n, insbesondere der Ende 2016 ausgeschiedenen Petra Scherer.

7.2 ZDM
Gabriele Kaiser informiert über die Entwicklungen beim ZDM: In das Editorial Board wurden zum Februar 2017 als Mitglieder aus dem deutschsprachigen Raum Susanne Prediger und Stanislaw Schukajlow neu aufgenommen. Sie berichtet zudem über die Entwicklung von Zugriffszahlen und weitere Metriken des Journals.

7.3 mathematica didactica
Andreas Eichler berichtet über Herausgabemodalitäten sowie Stand und Entwicklung der Beitragseinreichungen zu mathematica didactica: Im Jahr 2016/17 befanden sich 25 Einzelbeiträge im Verfahren. Aktuell werden Änderungen am Layout und Änderungen bei der Herausgabe auf verschiedenen Ebenen umgesetzt. Für 2017/8 sind zwei Themenhefte (Lehr-Lern-Labore (Herausgeberin: Katja Lengnink), Repräsentationen (Markus Vogel)) geplant. Die Herausgeber(innen) freuen sich auch über weitere freie Beiträge und Vorschläge für Themenhefte.

7.4 Der Mathematikunterricht (MU)
Stefan Deschauer berichtet: Der MU ist die älteste deutschsprachige Zeitschrift zur Mathematikdidaktik. Herausgeber sind Stefan Deschauer, Henning Körner und Jörg Meyer. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zur Unterrichtspraxis. Bis Anfang/Mitte 2018 ist man thematisch bereits ausgebucht, danach weiterhin an Gastherausgeber/innen interessiert.

7.5 MNU journal
Sebastian Kuntze berichtet: Die Zeitschrift des Vereins zur Förderung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) heißt seit Heft 3/2016 *MNU journal*. Sie publiziert unterrichtspraktisch orientierte Beiträge, Forschungsergebnisse mit Praxisrelevanz und interdisziplinäre Beiträge mit Bezug zu anderen MINT-Fächern. Jedes zweite Heft ist ein Themenheft, die nächsten Themenhefte behandeln die Themen: Bionik/ Neue Materialien, Visualisierung/ Präsentation/ Kommunikation, Diagnose und individuelle Förderung/Inklusion, Kochen und Genießen. Mathematikdidaktische Beiträge sind erwünscht, Kontakt unter sebastian.kuntze@mnu.de.

TOP 8: Verschiedenes

Katja Lengnink erinnert hinsichtlich der komfortablen finanziellen Situation des Vereins daran, dass zu hohe Rücklagen die Gemeinnützigkeit des Vereins bedrohen können und ermuntert den Vorstand, nach Möglichkeiten zu suchen, einen Teil des angesammelte Geld im Sinne der Zweckrichtung des Vereins auszugeben.

Protokoll: Andreas Vohns

Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

Einladung zur Herbsttagung in Münster, 13.–14. 10. 2017

Renate Motzer

Der GDM-Arbeitskreis „Frauen und Mathematik" lädt zur Herbsttagung am 13. und 14. 10. 2017 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster ein. Schwerpunkte werden sowohl in der Gestaltung eines „gendersensiblen" Mathematikunterrichts, auch und gerade vor dem Hintergrund des Umgangs mit Diversität, als auch in historischen und interdisziplinären Themen liegen.

Die Tagung wird am Freitag um 14 Uhr beginnen und am Samstag um spätestens 17 Uhr enden. Wir freuen uns unter anderem auf einen Eröffnungsvortrag von Renate Tobies zu einem historischen Thema sowie auf Beiträge von Corinna Hertleif und Nina Berlinger zu ihren aktuellen Forschungsarbeiten. Neben einem Diskussionsforum, das von Nikola Oswald organisiert wird, wird es außerdem eine Seminarveranstaltung für Studierende sowie eine „open-space"-Zeit für spontane Diskussionen geben. Weitere Beiträge aus dem Kreis der Teilnehmenden sind herzlich willkommen!

Das Tagungsprogramm und Anmeldemodalitäten werden bald auf der Homepage des Arbeitskreises veröffentlicht. Für Rückfragen wenden Sie sich bitte an die Arbeitskreissprecherin Renate Motzer oder den Organisator der Tagung Ralf Benölken (rben@wwu.de).

Renate Motzer, Universität Augsburg
Email: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis: Grundschule

Einladung zur Herbsttagung in Bad Salzdetfurth, 3.–5. 11. 2017

Elke Binner, Marcus Nührenbörger, Christof Schreiber und Sebastian Wartha

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule findet in diesem Jahr vom 3. 11. bis zum 5. 11. 2017 statt. Die Tagungsstätte ist in diesem Jahr wieder das relexa hotel Bad Salzdetfurth (www.relexa-hotel-bad-salzdetfurth.de/).

Das Thema der diesjährigen Tagung lautet „Mathematik und Sprache".

Nähere Informationen zur Anmeldung und dem Programm finden Sie unter
http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs.
Sprecherrat: Elke Binner, Marcus Nührenbörger, Christof Schreiber, Sebastian Wartha

Arbeitskreis: HochschulMathematikDidaktik

Würzburg, 9.–10. 12. 2016

Christine Bescherer, Cornelia Niederdrenk-Felgner, Walther Paravicini und Marc Zimmermann

Die mittlerweile siebte Herbsttagung des Arbeitskreises HochschulMathematikDidaktik fand vom 9. bis 10. Dezember 2016 an der Julius Maximilians-Universität Würzburg statt. Auch dieses Mal wurde die Tradition des Arbeitskreises fortgesetzt, dass Vertreter*innen aller Hochschularten sowohl als Teilnehmer*innen als auch als Vortragende beteiligt waren. Aufgrund des relativ späten Termins, war ein Bericht in den letzten Mitteilungen nicht mehr möglich.

Als Gastgeber eröffnete *Hans-Georg Weigand* die Tagung und begrüßte die Teilnehmer*innen. Unterstützt von *Anna-Katharina Roos* stellte er anschließend das *Ausbildungskonzept der Mathematikdidaktik* in Würzburg mit seinen zahlreichen Facetten vor. Im ersten Impulsvortrag berichtete *Ronja Kürten*, Universität Münster, über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt Rechenbrücke, das in Kooperation der Universität und der Fachhochschule Münster durchgeführt wird. Ausgehend von Ergebnissen aus Studien zu Vor- und Brückenkursen wurden Maßnahmen zur Unterstützung von Studierenden in Ingenieursstudiengängen der FH Münster entwickelt, umgesetzt, ausgewertet und im weiteren Projektverlauf angepasst. Damit wurde unter anderem die Wirksamkeit von Maßnahmen (Vorkurse, Tutorenschulungen, Lernräumen, etc.) untersucht, die an vielen Hochschulen derzeit durchgeführt werden. Der Vortrag fand große Resonanz bei den Tagungsteilnehmer*innen, und es schloss sich eine lebhafte Diskussion an. Diese der Aktionsforschung zuzuordnende Arbeit stellt einen sehr interessanten und weiterführenden Beitrag auf dem noch relativ jungen Gebiet der Hochschuldidaktik in Mathematik dar. Auf die Veröffentlichung der Dissertation und der Ergebnisse sind wir gespannt.

Anschließend wurden in fünf Kurzbeiträgen weitere Aspekte des Mathematikverstehens und -lernens auf Hochschulniveau angesprochen. *Alexander Börsch*, Universität Paderborn, stellte das online-*Lernprogramm VEMINT@NRW* vor, mit dem der Übergang in Mathematik an der Schnittstelle Schule-Hochschule geglättet werden soll. Der online-Kurs ist eine Weiterentwicklung aus dem VEMINT-Projekt (Virtuelles Eingangstutorium für MINT) und eignet sich sowohl für das Selbststudium als auch für die Integration in Vor- oder Brückenkurse. Der Kurs ist im Studieneingangsportal NRW frei verfügbar (www.studiport.de/mathematik). *Guido Pinkernell*, Pädagogische Hochschule Heidelberg, thematisierte die Frage, wie *Algebrakönnen aus fachdidaktischer Perspektive* gefasst werden kann. Im letzten Beitrag des ersten Tages stellte *Dimitri Nedrenco*, Universität Würzburg, sein Konzept für einen Zugang zum Thema Axiomatisierung vor: *Axiomatisieren lernen mit Papierfalten*.

Am zweiten Tag wurde im ersten Kurzbeitrag nochmals das Thema Vorwissen der Studierenden aufgegriffen. *Anna-Katharina Roos*, Universität Würzburg, berichtete aus ihrer Studie zum Thema *Vorwissen als Ursache für Probleme Studierender mit dem Begriff Extrempunkt*. Den Abschluss der Kurzvorträge bildete der Beitrag von *Christine Bescherer*, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, zum Thema *Mathematische Selbstwirksamkeitserwartung als Indikator für den Erfolg veränderter Lehrkonzepte*.

Den Impuls für den letzten Teil der Tagung, die Diskussion und Planung für die Weiterarbeit des AK, gab *Cornelia Niederdrenk-Felgner*, Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen, in ihrem Vortrag *Fünf Jahre AK HochschulMathematikDidaktik – Überblick über die bisherige Arbeit und zukünftige Schwerpunkte der Weiterarbeit*. Dieser Beitrag wird in einem separaten Artikel ausführlich dargestellt und vermutlich in der nächsten Nummer der Mitteilungen veröffentlicht.

Zum Abschluss der Tagung stand die turnusmäßige Wahl des Sprecherrats des AK an. Katja Eilers, Berlin, und Cornelia Niederdrenk-Felgner, Nürtingen, kandidierten beide nicht mehr. Als neuer Sprecherrat wurde daraufhin einstimmig Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Walther Paravicini, Universität Göttingen, und Marc Zimmermann, Hochschule Nürtingen-Geislingen, gewählt. Damit sind wieder alle drei Hochschularten im Sprecherrat vertreten.

Christine Bescherer bedankte sich sowohl persönlich als auch im Namen des AK bei ihren beiden Kolleginnen, Katja Eilerts und Cornelia Niederdrenk-Felgner, für die erfolgreiche und konstruktive Zusammenarbeit und sprach die Hoffnung aus, dass beide auch weiterhin dem AK verbunden bleiben. Ein Dank gilt auch den Kolleg*innen der Universität Würzburg für die hervorragende Organisation und die Betreuung während der Tagung.

Arbeitskreistreffen auf der GDM-Jahrestagung in Potsdam 2017

Auf der GDM-Jahrestagung 2017 in Potsdam traf sich der AK HMD am Montagabend zur Arbeitssitzung. Die neu gewählten Sprecher stellten sich den anwesenden Teilnehmer*innen des Arbeitskreises kurz vor und gaben einen kurze Zusammenfassung über die Vorträge und Aktivitäten des letzten Herbsttagung (s. o.).

Als Impulsvortrag stellte Pia Raab, Hochschule Mannheim, ihr Promotionsprojekt „Ein innovatives Lehr-/Lernkonzept an der HS Mannheim – Realisierung einer Mathematikvorlesung für Ingenieure mit Methoden aus dem Projektmanagement“ vor. Dabei wird eine Mathematikveranstaltung der Studieneingangsphase durch Methoden des agilen Projektmanagements angereichert und umgestellt. Zentrale Konzepte sind dabei eduScrum und problemorientiertes Lernen (PBL). Das methodische Vorgehen innerhalb des Projektes ist der Design-Based Research-Ansatz (DBR). Das Projekt selbst steht noch am Anfang, so dass die anschließende Diskussion weitere Ansätze und Ideen für die Realisierung lieferte.

In den letzten Jahren fand zur Herbsttagung des Arbeitskreises zeitnah auch das Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik statt. Diese Tagung hat ähnliche Schwerpunktthemen wie der Arbeitskreis, so dass das Teilnehmerfeld insgesamt auch ähnlich war und beide Veranstaltungen mehr oder weniger um diese Teilnehmer*innen „konkurrierten“. Mit der Wahl von Walther Paravicini (Mitorganisator des Hanse-Kolloquiums) in den Sprecherrat des AK, ergab sich die Möglichkeit, die Problematik mit zwei zeitlich und thematisch sehr ähnlichen Tagungen zu besprechen. Mit den anwesenden Mitgliedern des Arbeitskreises wurde intensiv diskutiert, ob man beide Veranstaltungen zukünftig gemeinsam ausrichten kann und soll. Insgesamt war der Tenor der Diskussion positiv hinsichtlich einer Zusammenlegung beider Tagungen, es wurde jedoch angemerkt, dass beide Formate (Beitragstagung bzw. Arbeitstagung) erhalten bleiben sollen. Ein Konzept für solch eine Tagung wird vom Sprecherrat gemeinsam mit den Organisatoren des Hanse-Kolloquiums ausgearbeitet. Diese gemeinsame Tagung wird am Freitag und Sonnabend, 10. 11.–11. 11. 2017, an der Universität Göttingen stattfinden. Die Schwerpunkte der Tagung werden zum einen die Lehr- und Lernziele von Mathematik im Studium sein. Dafür konnten als Hauptvortragende Frau Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker (Universität Duisburg-Essen), Herr Prof. Dr. Burkhard Alpers (HS Aalen) sowie Herr Prof. Dr. Preda Mihăilescu (Universität Göttingen) gewonnen werden. Zum anderen soll aber auch gemeinsame Aktivitäten für die GDMV-Tagung in Paderborn geplant werden. Eine genaue Tagungseinladung mit dem geplanten Ablauf folgt zeitnah auf der Homepage des AK.

Weitere Informationen über die folgenden und zurückliegenden Tagungen des AK – insbesondere alle Beiträge der Herbsttagung 2015 – sind auf der Madipedia-Seite des AK zu finden.

Marc Oliver Zimmermann, Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen
Email: marc.zimmermann@hfwu.de

Cornelia Niederdrenk-Felgner, Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen
Email: cornelia.niederdrenk-felgner@hfwu.de

Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Email: bescherer@ph-ludwigsburg.de

Arbeitskreis: Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in Österreich

Einladung zur Herbsttagung in Linz, 16.–17. 11. 2017

Günter Maresch und Edith Lindenbauer

Die Herbsttagung des Arbeitskreises findet von Donnerstag, 16.11., 10.00 Uhr, bis Freitag, 17.11.2017, 13.00 Uhr, an der Universität Linz, Science Park 2, statt.

Geplantes Programm
Donnerstag, 16.11.

10:00 Eröffnung, Begrüßung

Aktuelle Forschungsprojekte
10:30 *Beatrix Hauer, PHDL Linz:* Forschendes Lernen im Mathematikunterricht – Der Einsatz des AuRELIA-Konzeptes in der Lehrer/innenbildung

11:00 *Judith Hohenwarter, JKU Linz:* Math Teachers' Adventure of ICT Integration – vom Online Kurs zur Online Teacher Community

11:30 *Jürgen Maaß, Universität Linz:* Modellieren im Mathematikunterricht

12:15 Mittagessen

14:30 *Gritt Steinlechner-Wallpach, bmb:* Aktuelles zur standardisierten Reife- und Diplomprüfung

Dissertationsvorhaben
15:00 *Simon Plangg, Universität Salzburg:* Mathematikunterricht im Wandel – Ergebnisse einer qualitat. Studie

15:30 *Florian Stampfer, Universität Innsbruck, Tobias Hell, Universität Innsbruck und Pädagogische Hochschule Tirol:* Der Natural Number Bias bei Primarstufenstudierenden – Herausforderungen und Chancen an der Nahtstelle von Primar- und Sekundarstufe

16:30 Berichte aus den einzelnen Institutionen (bis 18.00 Uhr)

Freitag, 17.11.

Keynote

09:00 *Silke Ladel, Universität Saarbrücken:* Tragfähige Grundvorstellungen zum Stellenwert, anschließend Diskussion

Forschungsprojekt

11:00 *Anne Fellmann, Pädagogische Hochschule Salzburg:* Entwicklung eines Verständnisses für Brüche als besondere Darstellungen von Bruchzahlen von Schülerinnen und Schülern an der Schnittstelle Primar- und Sekundarstufe

Dissertationsvorhaben

11:25 *Martina Greiler-Zauchner, Pädagogische Hochschule Kärnten:* Halbschriftliches Multiplizieren im dritten Schuljahr

11:50 Aktuelles
Abschluss der Tagung (Termine, . . .)

Die Abstracts zu den Vorträgen und weitere Details zu der Tagung finden Sie unter https://goo.gl/cR98Xq.

Programmplanung:
Günter Maresch (Universität Salzburg) und
Edith Lindenbauer (PH Oberösterreich)

Günter Maresch, Universität Salzburg
Email: guenter.maresch@sbg.ac.at

Edith Lindenbauer, PH Oberösterreich
Email: edith.lindenbauer@ph-ooe.at

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Einladung zur Herbsttagung in Rostock, 7.–8. 9. 2017

Henrike Allmendinger, David Kollosche und Eva Müller-Hill

Im Namen des GDM-Arbeitskreises „Mathematik und Bildung“ laden wir Sie herzlich zur diesjährigen Herbsttagung am 7. und 8. September 2017 an der Universität Rostock ein. An den beiden Tagen wollen wir die folgenden beiden Themen diskutieren:

1. Welche Bildung brauchen Mathematiklehrinnen und Lehrer? – Der Arbeitskreis ‚Mathematik und Bildung‘ hat seine bildungstheoretischen Fragestellungen bisher auf mathematische Bildung in der allgemeinbildenden Schule bezogen. In den letzten Jahren kam es jedoch zu vielen Umbrüchen in der Lehrerbildung im Fach Mathematik (Bologna-Prozess, Verlängerung des Studiums des Primarstufenlehramts, zuweilen Einführung eines mathematischen Pflichtteils, Einführung des Praxissemesters u. a.), die prinzipiell die Frage aufwerfen, was mathematische Bildung *für Lehrende* ausmacht. Wir freuen uns hier sowohl auf Erfahrungsberichte zu konkreten Forschungs- und Lehrprojekten, als auch auf Betrachtungen allgemeinerer Natur.
2. Matheabi – ist das noch Bildung? – Die aktuellen Brand- und Löschbriefe zum Mathematikabitur sind die Spitze des Eisbergs eines gewachsenen Unmuts über die mathematischen Anforderungen in der Reifeprüfung. In Vorträgen und Diskussionen sollen Vorschläge zur Natur einer erweiterten mathematischen Allgemeinbildung und Vorstellungen zu einer dazu passenden Abiturprüfung dem real existierenden Mathematikabitur gegenübergestellt werden.

In beiden Themenfeldern sind Interessierte herzlich eingeladen, Vorschläge für Beiträge zu unterbreiten. Bezüglich des Formats sind wir dabei offen; denkbar sind beispielsweise neben klassischen Vorträgen auch Kurzvorträge und Workshops. Ihre Beitragsanmeldung richten Sie bitte möglichst bis zum 31. Juli 2017 per E-Mail an David Kollosche (kollosche@mathematik.uni-frankfurt.de).

Eine Anmeldung zur Herbsttagung ist ab sofort unter Angabe Ihres Namens und Ihrer E-Mail-Adresse per E-Mail an David Kollosche (kollosche@mathematik.uni-frankfurt.de) möglich. Zur effizienten Planung wird um frühe Anmeldungen, spätestens aber bis zum 20. August 2017, gebeten.

Aktuelle Informationen zur Herbsttagung sowie Reiseinformationen finden Sie in Kürze auch unter https://tinyurl.com/y7pfsj2v. Wir freuen uns auf Ihren Besuch in Rostock!

Eva Müller-Hill (lokale Organisation), Henrike Allmendinger und David Kollosche (für den Arbeitskreis)

Henrike Allmendinger, Pädagogische Hochschule Luzern
Email: henrike.allmendinger@phlu.ch

David Kollosche, Goethe-Universität Frankfurt
Email: kollosche@mathematik.uni-frankfurt.de

Eva Müller-Hill, Universität Rostock
Email: eva.mueller-hill@uni-rostock.de

Arbeitskreis: Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge

Einladung zur Herbsttagung in Heidelberg, 22.–24. 9. 2017

Guido Pinkernell und Anselm Lambert

Beherrschendes Thema des Arbeitskreistreffens im Rahmen der Jahrestagung der GDM 2017 in Potsdam war die im Herbst 2016 von Bund und Ländern initiierte „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“. Der Arbeitskreis hat sich zu verschiedenen Gelegenheiten zu dieser sogenannten digitalen Bildungsoffensive positioniert. Ein Textentwurf des Arbeitskreises war Grundlage des Positionspapiers der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, das während der Tagung in Potsdam von Vorstand und Beirat der GDM verabschiedet wurde. Hierzu unten mehr. Die Herbsttagung des Arbeitskreises wird die Diskussion um die Bildungsoffensive aus fachdidaktischer Sicht weiterführen.

Einladung zur Herbsttagung 2017 in Heidelberg

Unter dem Motto „Digital und offensiv? Mit neuen Medien und Werkzeugen im Mathematikunterricht“ findet die Herbsttagung am traditionell letzten Septemberwochenende vom 22. bis zum 24. September an der Pädagogischen Hochschule in Heidelberg statt. Ziel ist es, das Potenzial digitaler Werkzeuge und Medien für das Lehren und Lernen von Mathematik aus fachdidaktischer Perspektive konzentriert zu reflektieren und diskutieren. Geplant sind Vorträge aus Forschung und Praxis, Workshops für die regionale Lehrerfortbildung sowie ein „Markt der Möglichkeiten“, der forschungsbasierte und praxiserprobte Beiträge der Fachdidaktik zur Umsetzung der Maßnahmen der digitalen Bildungsoffensive versammelt.

Weitere Informationen finden sich laufend aktualisiert auf der Website des AK: www.madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Mathematikunterricht_und_Digitale_Werkzeuge

Zur digitalen Bildungsoffensive von Bund und Ländern

Das BMBF und die KMK haben in ihren Ende 2016 veröffentlichten Strategiepapieren[1] Maßnahmen zur Umsetzung der zuvor von der Bundesregierung vereinbarten „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ formuliert. Ziele sind die Vermittlung digitaler Bildung, der Ausbau leistungsfähiger digitaler Infrastrukturen, die Schaffung eines zeitgemäßen Rechtsrahmens für die Nutzung digitaler Bildungsangebote, die Organisationsentwicklung bei Bildungseinrichtungen zur Umsetzung digitaler Bildung und die Nutzung der Potenziale der Internationalisierung. Dabei ist jede Maßnahme daran zu messen, ob sie die Lernenden zu einer selbstbestimmten und verantwortungsvollen Teilhabe an der digital geprägten Welt befähigt. In beiden Papieren findet sich dieses sogenannte „Primat der Pädagogik“ in einer Reihe von Einzelmaßnahmen abgebildet, darunter z. B.:

- eine sinnvolle Verknüpfung digitaler Bildungsmedien und -konzepte mit traditionellen Formen des Lehrens und Lernens

[1] www.bmbf.de/files/Bildungsoffensive_fuer_die_digitale_Wissensgesellschaft.pdf
www.kmk.org/presse/pressearchiv/mitteilung/strategie-bildung-in-der-digitalen-welt.html

- Schaffung von Qualitäts- sowie Rechtsstandards für die Auswahl und Nutzung insbesonders öffentlich zugänglichem Lernmaterials (Open Educational Resources: OER)
- eine angemessene Ausbildung digitaler Kompetenzen sowohl bei Lernenden als auch bei Lehrkräften, und zwar „mit hoher Priorität“
- curriculare Verankerung digitaler Kompetenzen in den fachspezifischen Lehrplänen der Länder

Position der GDM zur Bildungsoffensive

Aus den Kompetenzbeschreibungen sowohl für Lernende als auch für Lehrende (siehe insb. das Strategiepapier der KMK) wird deutlich, dass man in der Bildungsoffensive derzeit nur mediendidaktisch denkt. Was der Einsatz digitaler Medien für das fachliche Lehren und Lernen bedeuten soll, wird – trotz der beabsichtigten Verankerung digitaler Kompetenzen in den Fachcurricula – nicht ersichtlich. Man kann sich aber vorstellen, dass die Bildungsoffensive im Fachunterricht kaum greifen wird, wenn Potentiale und Grenzen des Einsatzes digitaler Medien für das fachliche Lernen nicht abgebildet ist.

Das von Vorstand und Beirat der GDM in Potsdam verabschiedete Papier findet sich unter der Rubrik „Aktivitäten“ in dieser Ausgabe der Mitteilungen. An dieser Stelle sei aus der begleitenden Pressemitteilung der GDM zusammenfassend zitiert:

> Wir erachten die Aufgeschlossenheit der Lehrkräfte für den Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge in ihrem Fachunterricht als wesentliche Voraussetzung dafür, dass die Bildungsoffensive in Schulen und Hochschulen gelingt. Für diese Akzeptanz braucht es eine Lehrerbildung, die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Medien und Werkzeuge für das fachliche Lernen und Lehren forschungsbasiert und praxisorientiert thematisiert. Auch für die Formulierung qualitätssichernder Standards für fachbezogene digitale Bildungsangebote ist es essentiell, Erkenntnisse aus fachdidaktischer Forschung und Praxiserfahrung zum Medieneinsatz heranzuziehen. Die GDM fordert daher Bund und Länder auf, die fachdidaktische Expertise für das Lehren und Lernen von Mathematik in die geplanten Maßnahmen zur Bildungsforschung zu integrieren und insbesondere zur Umsetzung der Bildungsoffensive zu nutzen.

Guido Pinkernell, Pädagogische Hochschule Heidelberg
Email: pinkernell@ph-heidelberg.de

Anselm Lambert, Universität des Saarlands
Email: lambert@math.uni-sb.de

Arbeitskreis: Ungarn

Potsdam, 28. 2. 2017

Gabriella Ambrus

Die Sitzung des Arbeitskreises während der 51. Jahrestagung der GDM am 28. 2. 2017 in Potsdam widmete sich zunächst bisherigen Ergebnissen und zukünftigen Plänen und dann dem Hauptthema *Complex Education of Mathematics in the 21st Century*, dem neuen von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (MTA) geförderten mathematikdidaktischen Projekt. Ödön Vancsó und Csaba Csapodi hielten dazu einen Vortrag (aus Sprachgründen in Englisch). Über dieses Projekt finden Sie einen ausführlichen Bericht im Magazinteil der aktuellen Ausgabe der Mitteilungen (s. S. 6 ff.).

Das nächste Treffen wird in Budapest stattfinden. Der Arbeitskreis Ungarn und die Promath Gruppe werden gemeinsam tagen, und zwar an der Universität Eötvös Loránd vom 30. 8. bis zum 1. 9. 2017.

Die Organisatoren der Tagung laden herzlich zur Teilnahme ein. Die Anmeldung ist bis Ende Mai möglich. Das Thema lautet: *Problem Solving Teaching – Research and Practice*. Weitere Informationen sind zu finden unter: http://promath.org/meeting2017.html.

Ich möchte darauf hinweisen, dass der Arbeitskreis vornehmlich deutschsprachig ist. Weitere interessierte Kolleginnen und Kollegen sind zur Mitarbeit herzlich eingeladen.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität Budapest
Email: ambrusg@cs.elte.hu

Arbeitskreis: Vernetzungen

Magdeburg, 21.–22. 4. 2017

Astrid Brinkmann, Matthias Brandl und Thomas Borys

Die 10. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht" fand an der Universität Magdeburg am 21. und 22. April 2017 statt und wurde von Brigitte Leneke perfekt organisiert. Das Vortragsangebot war wieder sehr vielfältig und interessant. Es wurde über Forschungsarbeiten und Projekte berichtet; spezielle Methoden für einen vernetzenden Mathematikunterricht sowie Beispiele für inhaltliche Vernetzungen wurden vorgestellt und diskutiert; und Michael Bürker hat mit Unterstützung einiger Studierender eine Lesung aus seinem mathematik-historischen Roman als Rollenspiel geboten.

Die Vorträge mit Abstracts des Tagungsprogramms waren:

Frank Bünning (Magdeburg), vorgetragen von Marcus Röhming (Magdeburg): Potentiale und Einsatzmöglichkeiten von Lehr- und Lernplattformen im Unterricht

Auf der Grundlage der Forschungsarbeiten der Cognition and Technology Group at Vanderbilt (CTVG), die am Beispiel des Einsatzes von situierten Lernumgebungen im Unterrichtsfach Mathematik positive Einstellungsänderungen nachweisen konnte, wurde an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg die prototypische, multimediale Lehr-Lernplattform „Cognito" entwickelt, die das Konzept des situierten Lernens für den Technikunterricht nutzbar macht.

Im Rahmen des Vortrages wird der konzeptionelle Ansatz der Lehr-Lernplattform „Cognito" und deren Einsatzmöglichkeiten vorgestellt, sowie kritisch diskutiert.

Christian Barthel (Planegg): Anwendungen von GeoGebra zur Vernetzung in der Oberstufe

Die dynamische Geometriesoftware GeoGebra bietet die Möglichkeit Lernumgebungen zu erstellen, die weit über einzelne Anschauungs– oder Anwendungsbeispiele im Unterricht hinausgehen und eine selbstständige Auseinandersetzung mit Mathematik ermöglichen. Im Rahmen des Vortrags werden Lernumgebungen vorgestellt, die von Lehrer/-innen verwendet werden können, um Themen im Unterricht zu veranschaulichen und Schüler/-innen durch differenzierende Hilfestellungen darin unterstützen Inhalte zu wiederholen, besser zu verstehen und anzuwenden [https://www.geogebra.org/christian+barthel]. Die Applets sind auf der bayerischen Lernplattform mebis gebündelt, um den Zugang für alle Schüler/-innen zu gewährleisten. In Kombination mit mebis ergeben sich für GeoGebra weitere Einsatzmöglichkeiten, die kurz vorgestellt werden.

Wolfgang Pfeffer (Passau), vorgetragen von Matthias Brandl (Passau): Begriffsbildung in der Studieneingangsphase: Entwicklung des mentalen Modells hinsichtlicher zentraler mathematischer Begriffe

Im Fokus steht die Begriffsentwicklung von Studienanfängerinnen und -anfängern hinsichtlich zentraler mathematischer Begriffe in der Studieneingangsphase. Hierzu wurde eine qualitative Längsschnittstudie mit 31 Studierenden durchgeführt, die zu vier unterschiedlichen Zeitpunkten mittels leitfadengestützten Interviews befragt wurden. Im Rahmen des Vortrags werden Methodik und Ergebnisse der Studie präsentiert. Weiter wird eine Klassfikation und Erläuterung von Fehlvorstellungen hinsichtlich dieser Begrffe vorgenommen, die insbesondere im Hinblick auf die praktische Lehrtätigkeit hohe Relevanz besitzen.

Michael Bürker (Tübingen): Berechnungen an Himmelskörpern im historisch-didaktischen Kontext

Wir betrachten Probleme antiker und neuzeitlicher Mathematiker und Astronomen, die mit Größen- und Abstandsberechnungen von Himmelskörpern zu tun haben. Insbesondere sollen die Größen und Entfernungen von Erde, Mond und Sonne daraufhin untersucht werden, in wie weit sie im Mathematikunterricht der Sekundarstufen verwendet werden können. Dabei sind auch historische und philosophische Fragen impliziert, insbesondere die Frage nach dem geometrischen bzw. heliozentrischen Weltbild. Das letztere ist bereits von Aristarch von Samos im 3. Jahrhundert v. Chr. vertreten worden. Letztlich stellen wir fest, mit welch bescheidenen Mitteln die Mathematiker vor der Einführung des Teleskops ihre Beobachtungen dank der hoch entwickelten Geometrie in weitrechende Aussagen umsetzen konnten.

Patrick Fesser (Magdeburg): Frauen in der Mathematikgeschichte: Vernetzter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II

„Wer war der Mann, der ums Leben kam, weil er sich nicht bei der Beschäftigung mit einem mathematischen Problem stören lassen wollte? Warum sieht das Integralzeichen wie ein langgestrecktes S aus und gab es eigentlich auch Frauen in der Mathematik?“ Diese und viele weitere Fragen können sich Schüler und Schülerinnen im Laufe ihrer Schulzeit stellen, doch nur wenige Aspekte der Historie werden von Lehrkräften im Mathematikunterricht mit mathematischen Inhalten vernetzt. Der Vortrag informiert einerseits über den Nutzen der Implementierung von mathematisch-historischen Aspekten in den Mathematikunterricht und zeigt andererseits Realisierungsmöglichkeiten für die Sekundarstufe II.

Regina Bruder (Darmstadt): Überblick zu den Ergebnissen des Projekts LEMAMOP zum langfristigen Kompetenzaufbau

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Organisatorisches:

Planung der nächsten Tagungen:
Renate Motzer übernimmt die Organisation der 11. Tagung des Arbeitskreises, die am 13. und 14. April 2018 an der Universität Augsburg stattfinden wird. Bei dieser Tagung soll ein Lehrerfortbildungsprogramm angeboten werden. Nähere Infos sind zu finden unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ (siehe: www.aulis.de/items/view/mathe-vernetzt.html) des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann:

- Die bislang fünf beim Verlag Aulis erschienenen Bände der Schriftenreihe werden umstrukturiert und als sechs Bände bei der MUED neu veröffentlicht.
- Die Schriftenreihe soll fortgeführt werden; die neuen Bände sollen dann bei der MUED verlegt werden.
- Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html.

Das gesamte Vortragsprogramm der 10. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ und weitere Informationen zu den Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ findet man unter www.math-edu.de/Vernetzungen.html. Interessierte sind als weitere Mitglieder stets herzlich willkommen.

Astrid Brinkmann, Universität Münster
Email: astrid.brinkmann@math-edu.de

Matthias Brandl, Universität Passau
Email: matthias.brandl@uni-passau.de

Thomas Borys, Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Email: borys@ph-karlsruhe.de

Gemeinsame Jahrestagung GDMV 2018

Paderborn, 5.–9. 3. 2018

Die 3. gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), findet vom 5.–9. März 2018 an der Universität Paderborn statt.

Die Tagung gliedert sich in Hauptvorträge (GDM, DMV, Schnittstellenvorträge, Tandemvorträge), Minisymposien und Sektionen. Weiterhin umfasst die Tagung drei Tagungsstränge

– Mathematik (DMV),
– Mathematikdidaktik (GDM),
– Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik (Hochschuldidaktik Mathematik, Lehrerbildung Mathematik, Geschichte und Philosophie der Mathematik),

die sich in allen wissenschaftlichen Programmelementen wiederfinden.

Alle Vorträge werden in Minisymposien und Sektionen gegliedert, um der zu erwartenden großen Vielfalt eine Struktur zu geben. Das wissenschaftliche Programm kann von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern durch die Einreichung von Minisymposien, Vorträgen in Minisymposien und Vorträgen in Sektionen mitgestaltet werden.

Im Vergleich zu alleinigen GDM-Tagungen bittet das Organisationsteam dringend darum, die wesentlich früheren Termine für die Einreichung von Vorträgen und Minisymposien zu beachten. Aktuell und noch bis zum 31. 7. 2017 können Minisymposien eingereicht werden, während das Anmeldetool für Vorträge in diesen Minisymposien und in Sektionen ab dem 1. 10. 2017 freigeschaltet wird.

Alle Informationen zum Programm und zur Anmeldung finden sich auf der Tagungshomepage www.gdmv2018.de

ISTRON-Gruppe

Einladung zur Herbsttagung in Hamburg, 16.–17. 11. 2017

Gilbert Greefrath, Gabriele Kaiser, Hans-Stefan Siller, Katrin Vorhölter

Die Sprecher der ISTRON-Gruppe freuen sich sehr, in diesem Jahr zur Herbsttagung der ISTRON-Gruppe herzlich nach Hamburg einladen zu dürfen. Traditionell findet im Rahmen der Herbsttagung eine Tagung der ISTRON-Gruppe gefolgt von einem großen Fortbildungstag für Lehrkräfte statt. Der Fortbildungstag steht in diesem Jahr unter dem Motto „Mathematik – praxisnah und realitätsbezogen“ und findet unter der Schirmherrschaft von Senator Ties Rabe im Landesinstitut Hamburg statt. Er wird von Gabriele Kaiser und Katrin Vorhölter (Universität Hamburg) sowie Karsten Patzer (Landesinstitut Hamburg) organisiert.

Im Laufe der ISTRON-internen Tagung am 16. 11. 2017 beschäftigt sich die ISTRON-Gruppe mit aktuellen Projekten zum Modellieren. So werden wir ausführlich über Forschungsprojekte im Zusammenhang mit Modellierungsaktivitäten diskutieren. Wir beschäftigen uns mit Ergebnissen einer Interventionsstudie zum Einsatz eines Lösungsplans sowie dem Einfluss mathematischen Vorwissens auf Modellierungskompetenzen. Das Rahmenprogramm im Hamburg bietet außerdem auch die Möglichkeit für den informellen Austausch.

Der ISTRON-Fortbildungstag am 17. 11. 2017 ist öffentlich und gibt vor allem Lehrkräften die Möglichkeit, an einem sehr vielfältigen Fortbildungsprogramm teilzuhaben. Als Hauptvortragender wird Prof. Dr. Werner Blum, der Gründer der ISTRON-Gruppe, über „Mathematisches Modellieren – ein substantieller Beitrag zum Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts“ sprechen. Im Vortrag wird herausgearbeitet werden, welche Rolle das Herstellen von Bezügen zur Realität, d. h. das mathematische Modellieren zum Erwerb von Allgemeinbildung spielen soll und kann. Insbesondere wird aufgezeigt werden, wie Modellierungskompetenz(en) bei Schüler/innen langfristig aufgebaut werden können, und anhand von Unterrichtssequenzen wird konkretisiert, wie solche Kompetenzen wirksam gefördert werden können. Der Vortrag schließt mit Bedingungen, die gegeben sein müssen, damit die dargestellten Intentionen und Vorschläge tatsächlich umgesetzt werden können. Im zweiten Hauptvortrag knüpft Prof. Dr. Regina Bruder mit ihrem Vortrag zu „Kompetenztrainings zum Modellierenlernen von Klasse 5 bis 12“ direkt an diese Thematik an. Es werden Ergebnisse des niedersächsischen Projektes LEMAMOP (Lerngelegenheiten zum mathematischen Argumentieren, Modellieren und Problemlösen) vorgestellt. Anhand von Beispielen aus den praxiserprobten Vorschlägen für Klasse 5–12 wird ein pragmatisch angelegtes langfristiges Kompetenzentwicklungsmodell zum mathematischen Modellieren entworfen werden.

Das Programm der ISTRON-Tagung können Sie auf der Homepage der ISTRON-Gruppe unter www.istron-gruppe.de/Tagungen finden. Hier finden sich auch weitere Informationen zur Anmeldung sowohl zum internen Tag als auch zum Fortbildungstag. Hamburger Lehrkräfte melden sich bitte über TIS an.

Für die Tagung fallen keine Tagungsgebühren an. Verpflegungs- bzw. Übernachtungskosten tragen die Teilnehmenden selbst.

Gilbert Greefrath, Universität Münster
Email: greefrath@uni-muenster.de

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg
Email: gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Hans-Stefan Siller, Universität Koblenz-Landau
Email: siller@uni-koblenz.de

Katrin Vorhölter, Universität Hamburg
Email: katrin.vorhoelter@uni-hamburg.de

Waltz und Deterding (Hrsg.): The Gameful World Maurer und Wittberger: eSquirrel: Maturatraining Mathematik – Algebra und Geometrie

Rezensiert von Andreas Vohns

Solange Menschen andere Menschen (oder ihre Haus- und Nutztiere) dazu bringen wollten, etwas Bestimmtes, bisweilen jene nicht unbedingt intrinsisch Motivierendes zu tun – z. B. irgendetwas von außen Vorgegebenes zu lernen, dürfte ihnen in den Sinn gekommen sein, die Wahrscheinlichkeit des erwünschten Verhaltens durch Belohnungen zu verstärken bzw. die Wahrscheinlichkeit unerwünschten Verhaltens durch Bestrafung zu senken. Bekanntlich wurden diese Prinzipien der Verhaltenssteuerung in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ausgehend von Arbeiten Iwan P. Pawlows vor allem durch John B. Watson und Burrhus F. Skinner zum Kernbestandteil des Paradigmas derjenigen lernpsychologischen Richtung erhoben, die man übergreifend als *Behaviorismus* bezeichnet und deren Stern im pädagogischen und fachdidaktischen Kreisen seit den 1970er Jahren deutlich im Sinken begriffen sein dürfte, obwohl diese Richtung in anderen Bereichen durchaus weiter floriert (etwa in der Verhaltenstherapie oder der Verhaltensökonomik).

Vermutlich nicht sehr viel jünger dürfte die Idee sein, die zur Verhaltenssteuerung etablierten Systeme von Regeln, Belohnungen und Bestrafungen äußerlich als *Spiele* zu rahmen. Jedenfalls darf das Spielen wohl beinahe als Proprium des Menschen, womöglich sogar der Mathematik gelten. Den *homo ludens* und das Spielen findet man etwa im mathematikdidaktischen Bereich sowohl in Heinrich Winters „allgemeinen Lernzielen“ (Winter, 1975) als auch in Alan Bishops „kulturübergreifenden Basisaktivitäten“ (Bishop, 1988, S. 42–47) ausdrücklich als Ursprünge und Anknüpfungspunkte mathematischen Denkens und Lernens benannt.

Bei dem, den Gipfel seiner Popularität im angloamerikanischen Raum etwa um das Jahr 2011 erreichenden, Schlagwort (Neusprech: Hype) *Gamification* geht es nun allerdings typischerweise nicht um die mathematische oder mathematisierende Analyse der Regel- und Auszahlungssysteme von Spielen[1], sondern ganz im Sinne des einleitenden Abschnitts im Kern darum, Systeme der Belohnung erwünschten Verhaltens und der Kundenbindung, wie sie insbesondere für zeitgenössische Videospiele[2]. und Videospiel(vertriebs)plattformen (z. B. Xbox Live, Playstation-Network oder Steam[3]) typisch sind, auf im weitesten Sinne „spielerische“ Weise mit eher mundanen und bisweilen lästigen Aktivitäten wie der Trennung von Müll, der Erfüllung beruflicher Routineaufgaben, dem schulischen Lernen – ja sogar der Patriotismus fördernden Rezeption von Kriegspropaganda[4] zu verknüpfen.

Mit einiger Verzögerung hat dieses Schlagwort nun auch massiv den deutschsprachigen Raum erreicht. So sollen etwa *Gamification* und *Serious Games* potentiell zukunftsträchtige Berufsfelder der Absolventen des unlängst an meiner Universität eingerichteten Master-Studiengangs *Game Studies and Engineering* sein. Gamification wird einem darüber hinaus sowohl im Kontext von Ansätzen der elektronisch unterstützten Hochschullehre als auch für den schulischen und außerschulischen Unterrichts- und Nachhilfeunterrichtsbetrieb im Fahrwasser der „digitalen Bildung“ zunehmend angepriesen. Der Hersteller der hier im zweiten Teil rezensierten Software-Plattform *eSquirrel* (österreichisch in etwa: elektronisches Eichkatzerl) wirbt etwa damit, dass im abgelaufenen Schuljahr bereits rund 2000 Schülerinnen und Schüler die zugehörige App zum Matura-Training genutzt haben. An wenigstens einer Hochschule im deutschsprachigen Raum konnte ich ein eigenes Seminar zum Thema „Gamification im Mathematikunterricht“ ausfindig machen. Eine kritisch-analytische Diskussion des Konzepts dürfte zumindest im Rahmen der Mathematikdidaktik noch weitgehend ausstehen, gewisse Pionierarbeit leisten hier Jablonka und Bergsten (2016) sowie Jablonka (2017).

1 Devlin (2011) dürfte diesbezüglich eher die Ausnahme als die Regel darstellen.
2 Sowohl auf PCs, als auch auf dedizierten Spielkonsolen und zunehmend auf den ubiquitären Smartphones und Tablets.
3 *Im Sinne der vollständigen Offenlegung*: Der Rezensent ist mit Commodore 64, Nintendo Entertainment System und Sega Mega Drive groß geworden und besitzt noch heute je ein halbwegs aktuelles Videospielsystem der großen drei Hersteller, verfügt somit zumindest hinsichtlich dieses Aspekts des Themas vermutlich über einen tendenziell atypisch großen Erfahrungshintergrund.
4 Ein eindrückliches Extrembeispiel, das die Herausgeber des ersten hier rezensierten Titels bringen, s. goo.gl/ztpYec.

Das mag als Motivation genügen, sich von mathematikdidaktischer Seite intensiver mit diesem Konzept, seinen theoretischen Hintergründen, implizit oder explizit referenzierten Lernverständnissen und erwünschten und unerwünschten Folgen für die Praxis mathematischen Lehrens und Lernens auseinanderzusetzen – mithin weit mehr als eine Rezension zu leisten vermag. Ich wähle daher hier das Format einer Doppelrezension, die einerseits einen Sammelband vorstellt, der sich aus unterschiedlichen Perspektiven dem Konzept *Gamification* nähert und andererseits eine Software-Anwendung für den Mathematik(nachhilfe)unterricht betrachtet, welche mit diesem Konzept assoziierte Design-Prinzipien geradezu prototypisch inkorporiert.

Steffen P. Walz und Sebastian Deterding (Hrsg.): The Gameful World: Approaches, Issues, Applications

Der erste hier zu rezensierende Titel ist der knapp unter 700 Seiten umfassende, 2014 im Verlag des renommierten Massachusetts Institute of Technology erschienene Sammelband "The Gameful World". Dessen Untertitel "Aproaches, Issues, Applications" gibt direkt die Gliederung des Bandes in entsprechend betitelte drei Hauptteile wieder. Jeder der drei Hauptteile enthält sechs bis zehn längere Einzelbeiträge, die von jeweils drei bis fünf kürzeren „Position Statements“ unterbrochen werden. Die inhaltliche Bündelung ist in den einzelnen Hauptteilen eher lose, die angesprochenen Thematiken zwischen den Teilen nicht disjunkt, so besprechen etwa Beiträge des Teils "Approaches" notgedrungen sehr wohl auch Problemfelder und Anwendungsmöglichkeiten. Die Einzelbeiträge variieren in der Darstellung irgendwo zwischen gehoben-populärwissenschaftlichem Sachbuchstil und um Allgemeinverständlichkeit bemühten Fachaufsätzen. Eine gewisse Affinität zu Videospiel- und Internet-Thematiken ist nicht ganz unhilfreich bei der Lektüre, die Texte sollten – soweit ich das einschätzen kann – wohl auch ohne diesbezügliche Kenntnisse gewinnbringend lesbar sein. Obwohl sich die Beiträge zum Teil wechselseitig aufeinander beziehen sind alle Einzelbeiträge einzeln lesbar und müssen in keiner vorgegebenen Reihenfolge gelesen werden. Durch die Breite der eingeworbenen Beiträge gelingt es den Herausgebern, Einseitigkeiten zu vermeiden, das Buch ist so weder Bibel für Fortschrittsgläubige noch Schwarzbuch für Technopaniker.

Es dürfte nahezu ausgeschlossen sein, ein derart umfangreiches und in den einzelnen Beiträgen hinsichtlich disziplinärer Herkunft der Autor(inn)en, verwendeter theoretischer Analysehintergründe und individuellem Schreibstil heterogenes Werk erschließend mit Blick auf alle enthaltene Einzelbeiträge zu rezensieren. Ich wähle hier daher den ganz bewusst subjektiven Zugang, aus jedem der drei Hauptteile wenigstens einen Aufsatz etwas näher zu besprechen, insgesamt solche, bei denen ich selbst beim Lesen stärker hängen geblieben bin und die u. U. auch für den zweiten Teil dieser Rezension eine gewisse Bedeutung haben und/oder deutliche Bezüge zu mir bekannten pädagogischen und/oder mathematikdidaktischen Arbeiten erkennen lassen.

Den ursprünglichen Anlass, mir dieses Buch zu besorgen, stellte der etwas derb betitelte Aufsatz *Why Gamification is Bullshit* des amerikanischen Technikphilosophen und Videospieleentwicklers Ian Bogost dar. Bogost hatte es bereits 2010 mit *Cow Clicker* in einschlägigen Kreisen zu einer gewissen Berühmtheit gebracht, einer spielbaren, metafiktionalen Satire auf Facebook-Spiele à la FarmeVille[5]. Bogost betrachtet vor allem Anwendungen von Gamification im Bereich Managment und Consulting, sein Zugang zu Gamification ist dabei zunächst der eines Videospielliebhabers und -entwicklers, der darauf hinweist, dass die typischerweise von Gamification-Apologet(inn)en aufgezählten, auf nicht-spielerische Kontexte zu übertragenden Merkmale von Videospielen (Echtzeit-Feedback, Münzverstärkungs-Systeme, Stufenaufstiege, Wettbewerbscharakter) gar nicht die Essenz *guter* Videospiele darstellen, sondern vielmehr im Bereich von Videospielen weitläufig adaptierte Anwendungen der Verhaltensökonomik (behavioral economics), die dort als zusätzliche Motivationsquellen den eigentlichen spielerischen Inhalten an die Seite gestellt werden und nun als spielerische Elemente rekontextualisiert bzw. verkleidet in andere Bereiche des privaten und beruflichen Alltags zurückportiert werden sollen.

M. a. W.: Viele der unter dem Label *Gamification* firmierenden Maßnahmen stellen bereits im Bereich von Videospielen tendenziell eher Sekun-

5 Aus der Spielbeschreibung: "You get a cow. You can click on it. In six hours, you can click it again. Clicking earns you clicks. You can buy custom premium cows and timer overrides through micropayments. Cow Clicker is Facebook games distilled to their essence." (cowclicker.com).

därmerkmale dar, die sich erst im Zuge des Heranwachsens der Videospielbranche zu einem ernstzunehmenden Wirtschaftszweig zur längerfristigen Monetarisierung der Spiele etabliert haben und aus Sicht eines/einer Videospielers/in gerade nicht den Kern seiner/ihrer Begeisterung oder die Essenz von Videospielen ausmachen. Als akademisch-ausgebildeter Philosoph und vergleichender Sprachwissenschaftler versucht sich Bogost dann an einer Sprachkritik: Der Terminus "Gamification" sei ein doppelter Verharmlosungsversuch, denn "Games" weise zunächst auf etwas Unschuldiges, nicht primär ökonomisch Motiviertes hin und "-ification" impliziere einen völlig unkritischen Übertragungsprozess. Als Gedankenexperiment schlägt Bogost vor, statt von Gamification von "exploitationware" zu sprechen, denn diese Denomination

> strips "games" from the situation entirely and focuses instead on the consultant's gambit and his or her enterprise customer's desire to extract value in the form of meaningless engagement. Even its proponents have begun discussing the practice as a combination of "game design, loyalty, and behavioral economics," partly admitting that gamification has little in common with game design and development. (S. 72)

Die enge Verbindung von Gamification mit verhaltenspsychologischen Ansätzen wird in Conor Linehans, Ben Kirmans und Bryan Roches direkt folgendem Aufsatz *Gamification as Behavioral Psychology* aufgegriffen, hier aber eher nüchternpragmatisch gewendet. Zunächst weisen die Autoren auf deutliche Parallelen in den Zukunftsvisionen von Gamification-Vertreter(inne)n mit dem von B. F. Skinner 1948 vorgelegten utopischen Roman „Futurum Zwei/Walden Two" (Skinner, 1972) hin. Der weitere Text versucht die Überlegungen Skinners zur Verhaltens- und Lernpsychologie möglichst wertneutral einem mit diesen älteren Theorien vermutlich weniger vetrauten Publikum von "digital natives" näher zu bringen und als möglichen Theorierahmen für Gamification-Studien zu rehabilitieren (samt einer Zurückweisung des In-Verbindung-Bringens von Skinners Arbeiten mit Gehirnwäsche im Stile von Anthony Burgess' „Uhrwerk Orange").

Wo B. F. Skinner (1972) die Idee einer sich durch Anwendung verhaltenstheoretischer Prinzipien auf nachbarschaft- und staatsbürgerliche Pflichten insgesamt zum Besseren entwickelnden Gesellschaft als Utopie beschrieb, diskutieren sowohl Miguel Sicarts *Playing the Good Life: Gamification and Ethics* als auch Evan Selingers, Jathan Sadowskis und Thomas Seagers *Gamification and Morality* jeweils unter etwas anderen Vorzeichen die Frage, ob ein „gelingendes Leben" oder ein Wendung des Menschen zum Guten überhaupt durch extrinsische Anreizsysteme als solche verwirklicht und nicht aus sich selbst heraus entstehen müssten.

Wir sind damit im Hauptteil "Issues" angelangt, der Spielarten des Phänomens *Gamification* aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven kritisch beleuchtet, etwa aus neomarxistischer (*Gamification and Post-Fordist Capitalism* von PJ Rey) oder kulturvergleichender (*Gamification and Culture* von Rilla Khaled).

Hervorheben möchte ich aus diesem Teil vor allem den Beitrag *Focault's Fitbit: Governance and Gamification*. Jennifer R. Whitson arbeitet hier am Beispiel von Fitness-Tracking-Armbändern und der "quantified self"-Bewegung heraus, inwieweit Gesellschaftsdiagnosen Michel Focaults helfen können, solche Phänomene sozio-politisch einzuordnen und zu bewerten. Whitson wählt damit denselben Analyserahmen, der auch in den Beiträgen zu Gamification und Mathematikunterricht von Jablonka und Bergsten (2016) und Jablonka (2017) genutzt wird[6] und der von Kollosche (2015) vermutlich erstmals systematisch zur soziologischen Analyse des Mathematikunterrichts im deutschsprachigen Raum herangezogen wurde (vgl. meine Rezension in Heft 99 der Mitteilungen). In der Tat wirkt die Rahmung diverse Fitness-Tracking- und Selbstoptimierungs-Praktiken in Focault'schen Kategorien wie *Gouvernmentalität*, *Normalisierung*, *Selbstführung* und *Sorge-um-Sich* so eingängig, dass man diesem einen beinahe visionären Weitblick für seinerzeit noch gar nicht absehbare technologische Möglichkeiten der Selbstkasteiung zugestehen möchte.

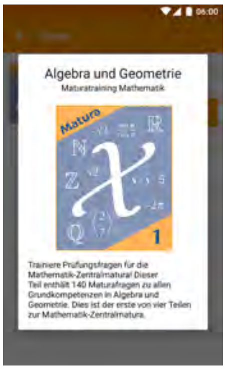
Im dritten und letzten Hauptteil "Applications" widmet sich der letzte Beitrag *Gamification an Learning* von Dennis Ramirez und Kurt Squire schließlich ausdrücklich der Adaption von Gamification-Prinzipien im Schul- und Unterrichtsbereich. Der Artikel greift die kritischen Beiträge von Bogost und Rey wieder auf und versucht die von Bogost als "exploitationware" bezeichnete Spielart von Gamification als ein zu vermeidendes Extrem zu charakterisieren und Möglichkeiten aufzuzeigen, wie eine behutsame Verwendung behavioristischer Gestaltungsmerkmale im Zusammenspiel mit einer Orientierung an Prinzipien des "situated learning" samt einer Orientierung an Primärmerkmalen guter

[6] Jablonka und Bergsten (2016) referenziert selbst einen anderen Text von Whitson.

Videospiele zur positiven Weiterentwicklung von Gamification im Bereich des Lernens genutzt werden kann. Der Beitrag fällt allerdings m. E. deutlich hinter das Reflexionsniveau der hier besprochenen Beiträge von Bogost und Whitson zurück.

Insgesamt liegt mit "The Gameful World" ein Werk vor, das auch hinsichtlich des fairen Preises für den stattlichen Gesamtumfang (ca. € 50 für die Druckfassung, ca. € 35 für das eBook) jedem/jeder am Thema interessierten Leser(in) relativ unabhängig vom Erfahrungshintergrund empfohlen werden kann.

Michael Maurer & Markus Wittberger: eSquirrel: Maturatraining Mathematik – Algebra und Geometrie



Mit der Rezension einer App sind gewisse Schwierigkeiten verbunden, u. a. weil diese anders als gedruckte Werke nicht über eine persistente Kennung wie die ISBN verfügen und eine längerfristige Verfügbarkeit derselben Version des rezensierten Objekts somit nicht gewährleistet ist. Grundlage der vorliegenden Rezension ist die App *eSquirrel* in der Version 1.2.2-RELEASE-e81e4d43 vom 27. 6. 2017 für das Betriebssystem Android. Die App ist auch für iOS-Geräte erhältlich und sollte i. W. denselben Funktionsumfang aufweisen. Die App ist somit auf verbreiteten Mobiltelefonen und Tablets lauffähig[7]. Hinsichtlich der App sind verschiedene Einsatzzwecke und Inhalte zu unterscheiden:

- eSquirrel ist zum Einen eine Plattform (Eigenbezeichnung: „eSquirrel-Ecosystem"), unter der kommerzielle Anbieter ebenso wie Privatanwender und Lehrpersonen beliebige Inhalte in Form von Tests/als Quiz anbieten können, die nach Auskunft der Anbieter Prinzipien des *Blended Learning* und der *Gamification* umsetzen oder unterstützen.
- Auf dieser Plattform tritt das zugehörige Unternehmen eSquirrel e. U. zum Anderen selbst als kommerzieller Anbieter von Lerneinheiten auf, insbesondere als Anbieter von insgesamt vier Kursen zur österreichischen AHS-Zentralmatura Mathematik, die nach eigener Auskunft in „mehr als 530 Prüfungsfragen alle 73 Grundkompetenzen aller Themengebiete vollständig"[8] abdecken.
- Zielgruppe besagter vom Hersteller der App selbst angebotener Kurse sind zum einen individuelle Schüler(innen) als direkte Endanwender, die diese Kurse eigenverantwortlich zur Maturavorbereitung nutzen können. Als weitere Zielgruppe sind sowohl für die Kurse zur Mathematikmatura als auch für die Plattform selbst vor allem Lehrpersonen als Multiplikator(inn)en angesprochen, die auf Basis der kommerziellen Kurse oder auf Basis selbst erstellter Materialien über die zugehörige Internet-Plattform virtuelle Schulklassen anlegen können und dort recht umfangreiche Einsicht in das Nutzungsverhalten der Lernenden in der App erhalten (m. a. W.: alle Lernendendaten landen in der Cloud und können auch von eSquirrel e. U. selbst analysiert werden).
- Zudem sind andere kommerzielle Anbieter angesprochen, etwa Schulbuchverlage, welche zu ihren Unterrichtswerken ergänzende Kurse innerhalb der eSquirrel-App anbieten können.

Der deutliche Fokus auf im öffentlichen Schulwesen tätige Lehrpersonen wird auch durch Rabattaktionen für zeitlich befristete Mehrplatzlizenzen des Maturatrainings deutlich. Die rechtliche Situation in Österreich würde es prinzipiell wohl auch zulassen, die dafür aufzuwendenden Mittel aus öffentlichen Geldern zu finanzieren, die Schülerinnen und Schülern verwaltet durch deren Schulen im Rahmen der sogenannten „Schulbuchaktion" zur Verfügung gestellt werden[9]. Es handelt sich also keineswegs um eine Anwendung, die nur auf den Nachhilfemarkt abzielt und eines prüfenden fachdidaktischen Blicks durchaus mehr als würdig erscheint.

Zum Zweck der Rezension wurde die Vollversion des Maturatrainings Mathematik „Algebra und Geometrie" erworben, zudem wurde ein Blick auf die kostenlosen Testversionen der anderen Teile dieses Trainings und eine kostenlos enthaltene grundlegende Einführung in eSquirrel geworfen, sowie Grundfunktionen der Internetplattform für Lehrpersonen ausprobiert (im reinen Selbstversuch, es kamen keine echten Kinder oder Jugendlichen zu Schaden).

Grundsätzlich sind alle Lektionen (in der App *Quests* genannt) unabhängig vom Inhalt gleich strukturiert: Etwa 5 bis 15 Fragen werden hintereinander gestellt. Zur nächsten Frage kommt man

7 Man kann sie zudem auf dem Umweg über ein virtualisiertes Android-Betriebssystem auf gewöhnlichen PCs zum Laufen bringen.
8 www.esquirrel.at/matura-mathematik/index.html
9 Vgl. www.schulbuchaktion.at

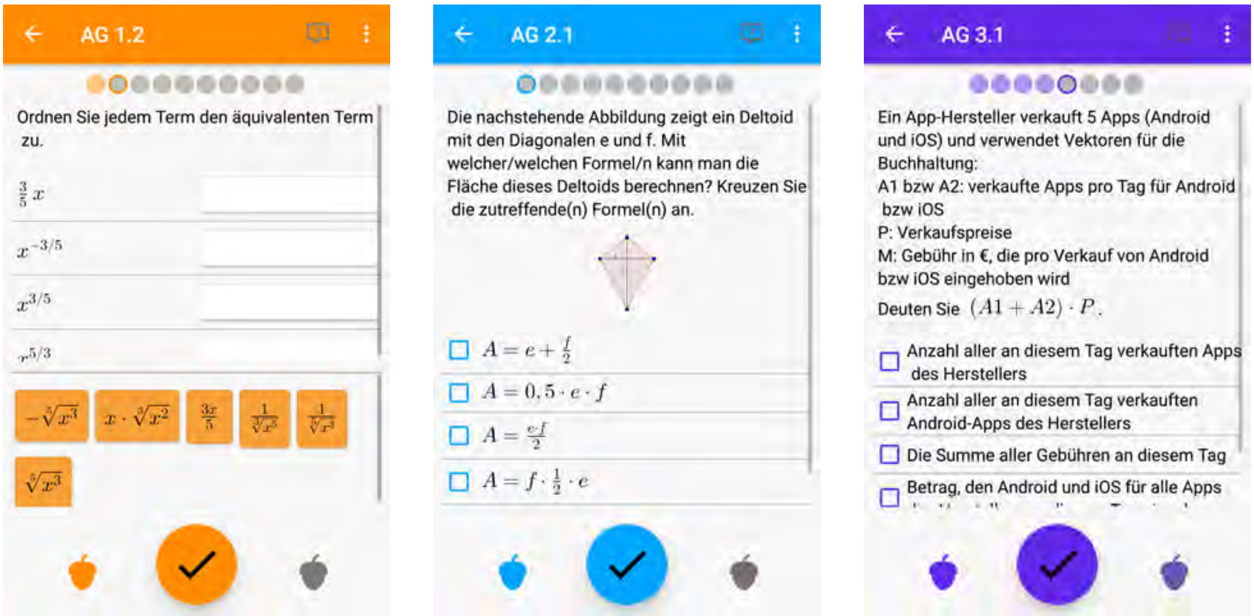


Abbildung 1. Drei Fragen aus unterschiedlichen Lektionen des Maturatrainings „Algeba und Geometrie"

nur, wenn man die aktuell vorliegende Frage beantwortet. Die Fragen sind in drei Schwierigkeitsgrade eingeteilt (leicht, mittelschwer, schwer). Es handelt sich (für alle von mir durchgesehenen Lektionen) durchgängig um geschlossene oder halboffene Fragen (verschiedene Multiple-Choice und Lückentext-Zuordnungsformate sowie numerische Kurzantworten, vgl. Abb 1). Man erhält nach erfolgter Antwort unmittelbar eine Rückmeldung, ob man falsch oder richtig geantwortet hat. Hat man falsch geantwortet, wird die betroffene Frage an das Ende der Lektion angehängt und muss dann nochmals beantwortet werden. Beantwortet man die Frage auch im zweiten Versuch falsch, wird kurz die korrekte Lösung eingeblendet, die Frage dann wieder ans Ende der noch nicht korrekt beantworteten Fragen angehängt.

Für jede beim ersten Versuch korrekt beantwortete Frage erhält man je nach Schwierigkeitsgrad 1, 2 oder 3 „Nüsse" (= positive Verstärkung), beantwortet man die Frage erst beim zweiten Versuch korrekt, bekommt man nur die halbe Anzahl an Nüssen, im dritten Versuch gibt es dann gar keine Nüsse mehr für die Frage. Abschließen kann man eine Lektion erst dann, wenn man alle Fragen korrekt beantwortet hat, ggf. direkt nachdem einem zuvor die korrekte Antwort angezeigt wurde. Versucht man, vorher aus der Lektion auszusteigen, weist eine Warnmeldung darauf hin, dass man alle in der Lektion erworbenen Nüsse verliert, wenn man vorzeitig abbricht (= negative Verstärkung).

Schließt man einen *Quest* das erste Mal erfolgreich ab, so wird einem für diesen Quest das *Level: Bronze* zugestanden. Um in das *Level: Silber* aufzusteigen, muss man diesen Quest innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, nicht zu bald nach dem ersten Versuch, aber auch nicht zu spät, wiederholen (bei meinem Versuch war eine Frist von 24 Stunden eingestellt, die ich mindestens warten sollte, 72 Stunden höchstens). Auch hier gilt: Fristgerechte Wiederholung wird durch einen höheren Level belohnt, nicht fristgemäße Wiederholung durch Rückstufung oder Aberkennung des erreichten Levels bestraft. Die App klinkt sich zudem in das Benachrichtigungssystem des Betriebssystems ein und erinnert einen im Zweifelsfall auch nach dem Verlassen der App daran, dass man doch bitte den Quest wiederholen möge, um seine Nüsse nicht zu verlieren. Der Anreiz zum Erreichen eines höheren Levels besteht darin, dass die zu erreichende Anzahl an Nüssen mit einem Multiplikator versehen wird (Silber: doppelt so viele Nüsse, Gold: dreimal so viele Nüsse, Vollendet: viermal so viele Nüsse). Jede Lektion Maturatrainings ist genau einer mathematischen Grundkompetenz zugeordnet. Lektionen sind weiters inhaltlich zu Kapiteln gebündelt, und wer alle Lektionen eines Kapitels abgeschlossen hat, bekommt eine *Medaille*. Gesammelte Medaillen und Nüsse lassen sich zudem in Online-Ranglisten mit Anderen vergleichen – außer eigenem Narzissmus oder sozialer Wertschätzung (falls sich eine solche mit mathematischen Leistungen in der eigenen Peer-Group erzielen lässt) kann mit den Nüssen und Abzeichen nichts weiter erreicht werden – außer natürlich sich selbst zum wiederholten Durchführung der immer gleichen Lektionen zu motivieren.

Die in eSquirrel angebotenen *Quests* sind damit letztlich eine Wiederkehr der Lehrmaschinen/des programmierten Unterrichts sensu Skinner (1965)[10], im Grunde paradigmatische Beispiele für Skinner-Boxen zum operanten Konditionieren und man könnte beinahe an eine gewisse Selbstironie der Programmierer glauben (oder ihnen eine gehörige Portion Chuzpe zugestehen), wenn diese bis hin zur Eichkatzerl-Nüsse-Begrifflichkeit metaphorische Anleihen bei den Versuchsaufbauten (Maus, Futter) von B. F. Skinner nehmen.

Die von mir durchgesehene Vollversion des Maturatrainings „Algebra und Geometrie“ ebenso wie die Testversionen der übrigen Themenbereiche des Maturatrainings und alle anderen derzeit kostenlos verfügbaren Inhalte stellen dabei reine Aufgabensammlungen dar, die in besagten Lektionen als sich selbst auswertende Tests organisiert sind. Man bekommt im wiederholten Fehlversuchsfall zwar die korrekte Lösung angezeigt, allerdings keinerlei Erklärung angeboten, was an der eigenen Lösung falsch oder warum die korrekte Lösung korrekt ist[11]. Wir haben es im Grunde mit der App-gewordenen Variante der bereits Anfang der 1990er Jahre von Günther Malle im Bereich der elementaren Algebra beredt kritisierten *Übungsideologie* zu tun:

> Sie besteht in der Annahme, daß man das Umformen von Termen und Gleichungen [...] allein durch *starres, stereotypes Üben* anhand einer großen Zahl von Übungsaufgaben erlernen kann [...].
> In der Unterrichtspraxis hat sich [...] die Übungsideologie hartnäckig erhalten. Sie beruft sich (meist implizit) auf behavouristische (sic!) Lerntheorien. Denn wie wird bei diesem Üben vorgegangen? Soferne (sic!) der Schüler alles richtig macht, wird er vom Lehrer in irgendeiner Weise „belohnt“ (oder zumindest in Ruhe gelassen), wenn er Fehler macht, wird er in irgendeiner Weise „bestraft“. (Malle, 1993, S. 22)

In *eSquirrel* braucht es dabei die Lehrperson als belohnendes und bestrafendes Gegenüber nun gar nicht mehr zwingend, das können die Lernenden technologieunterstützt ganz im Sinne der Focault’schen Selbstführung auch in die eigene Hand nehmen – gewissermaßen das Fitbit für den Mathematikunterricht, um den Rezensierten auch mal ein aus dem Kontext gerissen zitierwürdiges Testimonial für ihre Homepage anzubieten.

Denjenigen Lehrpersonen, die der Selbstführung weniger trauen und auf der zugehörigen Internetplattform virtuelle Klassenzimmer anlegen

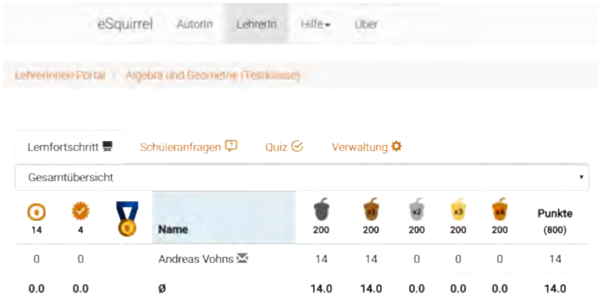


Abbildung 2. Lehrpersonenportal zu eSqurirrel

und dort ihre realen Lernenden registrieren, bieten sich, was deren Übungsverhalten angeht, flankierend bislang kaum geahnte Möglichkeiten der Verhaltensüberwachung. Vorbei ist es mit den Zeiten, wo man sich damit herausreden konnte, der Hund habe die Hausübungen bzw. die „Nüsse“ gefressen, denn über deren Anzahl pro Schüler(in) kann sich die Lehrperson nun jederzeit und detailliert informieren (s. Abb. 2). Zudem kann die Lehrperson in der App gewisse, im Unterricht noch nicht thematisierte Inhalte sperren und kann aus den Fragen der einzelnen Lektionen auch selbst kleine Tests und Prüfungen zusammenstellen, die die Lernenden dann innerhalb eines bestimmten Zeitfensters zu absolvieren haben.

Eine mathematikdidaktische Rezension sollte wohl auch auf die fachinhaltliche Qualität des bereitgestellten Übungsmaterials eingehen. Hier bietet die App aus meiner Sicht ein ambivalentes Bild: Zunächst einmal ist festzuhalten, dass die Zuordnungen der Aufgabenstellungen zu den Grundkompetenzen der österreichischen Zentralmatura hier überwiegend stimmig erscheinen. Die App dürfte hier im Mittel nicht schlechter oder bedeutend besser aufgestellt sein, als analoge Aufgabensammlungen in Buchform. Vom Schwierigkeitsgrad dürfte ein nicht unerheblicher Teil der Aufgaben eher jenseits dessen liegen, was realistischerweise wirklich Gegenstand der Zentralmatura werden kann, ohne einen erneuten Aufschrei aufgrund zu hoher (gefühlt: mehr als 10 Prozent) Durchfallquoten zu riskieren – aber ein höheres Anspruchsniveau beim Üben muss ja kein Nachteil sein.

Problematischer erscheint dann schon der Umstand, dass mit solchen Häppchen-Aufgaben allein wohl schwerlich der Appetit für Mathematik angeregt oder etwas weniger blumig: kaum sinnstiftendes Lernen initiiert werden kann. So gilt es auch und gerade unter Befürworter(inne)n von Kompe-

[10] Zu deren Kritik sei exemplarisch auf Wittmann (1990) und Brügelmann (2005, S. 60–63) verwiesen.
[11] Ist der Lernende in einer virtuellen Klasse registriert, kann er online eine Frage an die Lehrperson richten – das wäre offline mit einem gedruckten Buch allerdings auch nicht anders.

tenzorientierung, Bildungsstandards und zentralen Prüfungen für gewöhnlich als ausgemachte Sache, dass man zwischen *Aufgaben zum Lernen* und *Aufgaben zum Leisten* strikt zu trennen habe (vgl. Büchter und Leuders, 2005). Ein reines Training von Prüfungsaufgaben gilt gemeinhin als verpöntes *teaching to the test*, eine Steuerung des Unterrichtshandelns mit dem Ziel, die gewünschten Kompetenzen im Rahmen eines fachdidaktischen und pädagogischen Normen entsprechenden „guten Unterrichts" anzubahnen, der sich gerade nicht auf deren unmittelbares Training beschränkt, hingegen als dessen erklärtermaßen gewünschte Form (vgl. Peschek, 2012).

Mit dieser Trennung geht bisweilen auch eine gewisse innere Gespaltenheit bezüglich der zur Rechtfertigung des „Da so, dort anders" herangezogenen lerntheoretischen Ansätze einher. Wo eben noch konstruktivistisch an reichhaltigen, intentionalen Problemen gelernt werden durfte, soll sich sogleich klassen-, schul-, ja länder- und kulturübergreifend punktgenau ein Bündel von fünfzig bis hundert diffizil ausbaldowerten Teilkompetenzen überprüfen lassen, die sich aber bitte letztlich wieder zu einem eindimensional Rasch-konform messbaren „mathematischen Fähigkeitssyndrom" (Büchter und Pallack, 2012, S. 67) zusammenfassen lassen.

Skeptiker der Kompetenzorientierung könnten sich durch Anwendungen wie *eSquirrel* hingegen darin bestätigt sehen, dass eben jene Focault'schen Gesellschaftsdiagnosen (Kontrolle, Normalisierung, Selbstführung, Sorge-um-sich) trotz anderweitiger fachdidaktischer Beteuerungen und Wünsche im real existierenden Bildungssystem genau den Nährboden ausmachen, auf dem sich der Kompetenzbegriff überhaupt erst zum pädagogischen Leitbegriff entwickeln konnte (vgl. Gelhard, 2011) und hier mit strikt behaviouristisch implementierter *Gamification* und zentralen Prüfungen, Standards und Kompetenzorientierung einfach nur zusammen wächst, was faktisch ohnehin zusammengehört.

Steffen P. Walz und Sebastian Deterding (Hrsg.) (2014). *The Gameful World. Approaches, Issues, Applications*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
ISBN (Print): 978-0-26202800-4, 676 S., $ 53
ISBN (eBook) 978-0-26232570-7, $ 37.

Michael Maurer und Markus Wittberger (2017). *eSquirrel: Maturatraining Mathematik – Algebra und Geometrie*. Android-Version: goo.gl/ciz7q8,
iOS-Version: goo.gl/eMJgUd, € 5,49.

Literatur

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dodrecht: Kluwer.

Brügelmann, H. (2005). *Schule verstehen und gestalten: Perspektiven der Forschung auf Probleme von Erziehung und Unterricht*. Konstanz: Libelle Verl.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). Standards für das Leisten brauchen Aufgaben für das Lernen! *PM : Praxis der Mathematik in der Schule*, *47*(2), 32–38.

Büchter, A. & Pallack, A. (2012). Methodische Überlegungen und empirische Analysen zur impliziten Standardsetzung durch zentrale Prüfungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 59–85.

Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. Hoboken: Taylor and Francis.

Gelhard, A. (2011). *Kritik der Kompetenz*. Zürich: Diaphanes.

Jablonka, E. (2017). Gamification, Standards and Surveillance in Mathematics Education: An Illustrative Example. In A. Chronaki (Hrsg.), *Mathematics Education and Life at Times of Crisis* (Bd. 2, S. 544–553). Volos: University of Thessaly Press. Zugriff unter http://mes9.ece.uth.gr/portal/images/proceedings/MES9_Proceedings_low_Volume2.pdf

Jablonka, E. & Bergsten, C. (2016). The role of digital tools in practices of surveillance in mathematics education: Paper presented at The Third Manchester Conference on Mathematics Education and Contemporary Theory. Zugriff unter http://www.esri.mmu.ac.uk/mect3/papers_16/jablonka.pdf

Kollosche, D. (2015). *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts: Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung*. Wiesbaden: Springer.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.

Peschek, W. (2012). Aufgabenschwierigkeit und „teaching to the test": Anmerkungen mit Bezügen zur sRP-M im Schulversuch am 9. Mai 2012. Zugriff unter https://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Peschek_teaching_to_the_test.pdf

Skinner, B. F. (1965). Lehrmaschinen. In W. Correll (Hrsg.), *Programmiertes Lernen und Lehrmaschinen* (S. 37–65). Braunschweig: Westermann.

Skinner, B. F. (1972). *Futurum Zwei "Walden two": Die Vision einer aggressionsfreien Gesellschaft*. Reinbek: Rowohlt.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, (7), 106–116.

Wittmann, E. C. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 1, Vom Einspluseins zum Einmaleins* (S. 153–166). Stuttgart: Klett.

Andreas Vohns, Alpen-Adria Universität Klagenfurt
Email: andreas.vohns@aau.at

Heinrich Winter zum Gedenken

Peter Bender

Am 6. März 2017 verstarb der Praeceptor Germaniae der Mathematikdidaktik, Prof. Dr. Heinrich Winter, Emeritus der RWTH Aachen, Ehrendoktor der TU Dortmund und Ehrenmitglied der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, im Alter von 88 Jahren.

Heinrich Winter wurde am 20. Juli 1928 im thüringischen Buttlar geboren, auf dem Gebiet der späteren DDR, mit direktem Blick in den späteren Westen. Diese seine Herkunft prägte nicht nur seinen faktischen Lebenslauf, sondern auch seine Einstellung zu Menschen, Schule und Gesellschaft. Aus einfachsten Verhältnissen stammend, konnte er als katholischer Jugendlicher die Aufbauschule in der Bischofsstadt Fulda besuchen. Ein berufs- oder studiumsqualifizierender Abschluss dort war allerdings nicht möglich, weil nach dem Krieg der Schulbetrieb zum Erliegen kam und außerdem die Grenze zwischen der sowjetischen und der amerikanischen Besatzungszone den Schulweg abschnitt. Stattdessen wurde der 18-jährige Heinrich nach einem zehnmonatigen Lehrgang Volksschullehrer in einer einklassigen Dorfschule in Thüringen. Mit 23 Jahren konnte er nach einem Volkshochschulkurs in Erfurt das Abitur nachholen.

Wenig später verließ Heinrich Winter die DDR und fand in der alten Kaiserstadt Aachen eine neue Heimat. Dort gründete er eine Familie und bekam einen Sohn. Trotz vorhandener jahrelanger Schulpraxis musste er noch einmal an der damaligen Pädagogischen Akademie Aachen studieren, bevor er wieder Volksschullehrer sein durfte. In dieser Zeit legte er zusätzlich die Realschul- und Gymnasiallehrerprüfung ab und war danach noch zwei Jahre als Referendar und Studienassessor am Gymnasium mit den Fächern Mathematik und Geografie tätig, ehe schließlich 1962 die akademische Laufbahn als Assistent am mathematischen Seminar der PH Neuß begann.

1963 wurde Heinrich Winter an der TH Aachen mit einer Dissertation in Geografie zum Dr. rer. nat. promoviert. Ab dann, befreit von der Doppelbelastung durch Beruf und Weiterqualifikation, konnte er sich seinem eigentlichen Lebensthema – der Mathematik, dem Mathematikunterricht und der Mathematikdidaktik – mit voller Kraft widmen. Die weiteren Stationen waren: 1963 Dozent an der PH Rheinland Abt. Neuß, 1969 Ordentlicher Professor an der PH Ruhr Abt. Dortmund, 1973 PH Rheinland Abt. Neuß, 1978 PH Rheinland Abt. Aachen, 1980 TH Aachen (durch Einverleibung der PH), 1993 Emeritierung ebendort, 2005 Ehrenpromotion an der TU Dortmund, 2011 Johannes-Kühnel-Preis des Fördervereins MNU, schöpferisch tätig bis 2016.

Als in den 1960er Jahren das deutsche Bildungssystem eine umfassende Reform erfuhr, speziell der Mathematikunterricht in Form der „Neuen Mathematik“ und danach der sog. Strengewelle, stand Heinrich Winter als Fachdidaktiker mitten im Geschehen. In der anschließenden Konsolidierungsphase gelang es ihm, die Entwicklung des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik auf (wissenschafts-) organisatorischer, (schul-) administrativer und vor allem (fachdidaktisch-) inhaltlicher Ebene *prägend* mitzugestalten. Dabei waren Organisation und Verwaltung keineswegs seine Lieblingsgebiete. Aber er übte auch in diesen Bereichen einen starken Einfluss aus, indem er seine Gesprächspartner, Hörer und Leser mit seinen inhaltlichen Argumenten überzeugte und in den Bann zog, so dass diese gar nicht anders konnten, als seine Ideen in ihren Institutionen umzusetzen.

Heinrich Winter stellte sich aber den organisatorischen und administrativen Herausforderungen durchaus. So war er Mitglied in den Wissenschaftlichen Beiräten zahlreicher Institutionen. Insbesondere half er bei der schweren Geburt des Instituts für Didaktik der Mathematik (IDM) in Bielefeld. Er war Herausgeber einer Schulbuchreihe („Winter-Ziegler“), welcher allerdings wegen zu hoher Ansprüche an die Lehrer (!) kein langfristiger Erfolg beschieden war. Er war Mitgründer und langjähriger Mitherausgeber der Zeitschrift „mathematik lehren“, die sich dezidiert der Verbindung von Mathematikunterricht und dessen Theorie verschrieben hat.

Über das akademische Alltagsgeschäft hinaus hat Heinrich Winter zahllose Lehrerfortbildungen durchgeführt und, besonders hervorzuheben, 15 Jahre lang eine Arbeitsgemeinschaft „Mathematik in der Grundschule“ mit knapp fünfzig Grundschul(kon)rektoren im Regierungsbezirk Arnsberg betreut: Bei jedem der jährlich ein bis zwei Treffen hielt einer der gestandenen Schulleute eine Art Probestunde, und diese wurde dann – wie im Referendariat – ausführlich von der ganzen Gruppe analysiert. Wie in allen Vorträgen, Vorlesungen und Diskussionsrunden trat Heinrich Winter leise, ohne methodische Mätzchen, auf, und am Ende hatten alle Teilnehmer eine Menge gelernt. Die Lehrer waren im Bewusstsein gestärkt, selbst auch Didaktiker zu sein (wie zu anderen Gelegenheiten wiederum den Akademikern unaufdringlich deutlich gemacht wurde, dass ihre Arbeit etwas mit der Schulpraxis zu tun haben sollte).

Nicht zuletzt war Heinrich Winter Mitglied mehrerer Lehrplankommissionen in Nordrhein-Westfalen. Vor allem der Grundschullehrplan von 1985 trägt seine Handschrift. Dieser war und ist vorbildgebend für den Mathematikunterricht in der Grundschule in allen anderen Bundesländern und hat auch den Mathematikunterricht in den höheren Schulstufen bis hin zur Grundschullehrer(aus)bildung in erheblichem Maße beeinflusst, und zwar bis heute. Dieser (Wintersche!) Lehrplan stellt eine glückliche Verbindung zwischen grundsätzlichen, trotzdem praxisbezogenen, didaktischen Analysen und konkreten, gleichwohl theoretisch begründeten, Unterrichtsvorschlägen dar. Dabei sind Anwendungs- und Strukturorientierung durchgängige Prinzipien, insgesamt den Grundgedanken einer wohlverstandenen (und nicht überstrapazierten und auf Kosten handfester Fertigkeiten fehlverstandenen) Kompetenzorientierung vorwegnehmend.

Die oft unverbunden gesehenen und getrennt behandelten „Elemente“ (Theorie – Praxis; Fach – Unterricht – Didaktik; Bildung – Ausbildung; Stoff – Ziele/Kompetenzen; Zeitgenössisches – Historisches; Primarstufe – Sekundarstufen I und II; Schule – Hochschule; usw.) zu verbinden und in Beziehung zu einander zu setzen, ist charakteristisch für Heinrich Winter und konnte nur gedeihen auf der Basis vielfältiger Interessen, eines breiten Wissens und einer umfassenden Bildung.

Von der Gründung der GDM an war Heinrich Winter viele Jahre lang Mitglied ihres Wissenschaftlichen Beirats und von 1983 bis 1987 ihr Erster Vorsitzender. In der westdeutschen politischen Bildungslandschaft herrschte in den 1980er Jahren Stagnation, die Finanzminister gaben den Ton an. Zehn Jahre lang wurden in den Schulen fast keine Lehrer und in den Hochschulen keine Mathematikdidaktiker eingestellt. Unermüdlich warnte Heinrich Winter vor den Gefahren dieser Entwicklung für den Bestand der Mathematikdidaktik als Wissenschaft und für die Lehrer(aus)bildung. Zugleich machte er den Kollegen Mut, indem er das Arbeitsgebiet der Mathematikdidaktik absteckte, klärte, teilweise neu definierte. Er initiierte mehrere Stellungnahmen der GDM: zur Stellung der Mathematikdidaktik als Hochschuldisziplin, zur bedrohten Lage der Fachdidaktik oder zur Problematik „Computer und Unterricht“. Auch wenn der Computer nicht im Zentrum seines Interesses stand, so durchschaute er klar dessen didaktische Möglichkeiten und Grenzen und ließ sich weder von einer bei technischen Neuerungen immer wieder aufkeimenden Euphorie noch von einer ebenso häufigen Verteufelung blenden.

Für Heinrich Winter stand der Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden Schule, von der Eingangsstufe bis zur Sekundarstufe II – und darüber hinaus in der Lehrerbildung –, zuallererst im Dienste *mathematischer Bildung*. Diese ist Bestandteil einer Allgemeinbildung, die die Gesellschaft dem Individuum in der Schule angedeihen zu lassen hat. Darüber hinaus steht die mathematische Bildung im Dienste einer allgemeinen Lebensbewältigung der Schüler. Der Mathematikunterricht hat dabei nicht nur die Pflicht, technische Fertigkeiten bereitzustellen, sondern muss bei der Anwendung von Mathematik auch die Möglichkeiten des Missbrauchs deutlich machen und ist insofern Teil einer allgemeinen *Erziehung zur Sittlichkeit*.

Von daher war für Heinrich Winter nicht die sog. quantitative Bildungsforschung, sondern die auf die *philosophisch fundierte allgemeine Menschenbildung* zielende *Pädagogik* eine wichtige Bezugsdisziplin, deren Bedeutung in allen seinen Arbeiten durchscheint. Seine grundlegende und vielzitierte *Lernzielanalyse* bettete er ausdrücklich in einen umfassenden pädagogischen Zusammenhang ein, der durch die (Winterschen) „*Grunderfahrungen*“ beschrieben wird:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen (*Umwelterschließung*),
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen lernen und begreifen (*Strukturorien-*

tierung, Mathematik als Lehre von den Mustern),
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, erwerben (*heuristische Fähigkeiten*).

Es verwundert nicht, dass Heinrich Winter besonders diejenigen Schülergruppen am Herzen lagen, die der stärksten pädagogischen Zuwendung bedürfen und bei denen diese Zuwendung aber auch besonders ausgeprägte Erfolge zeitigen kann: die *Grund-* und die *Hauptschüler*. Auch wenn die Hauptschule inzwischen totgeredet ist und von der Bevölkerung mehrheitlich nicht mehr angenommen wird, gibt es „die" Hauptschüler nach wie vor. Sie haben einen gleichberechtigten Anspruch auf Bildung und bedürfen deshalb nach wie vor der besonderen Zuwendung. Und selbstredend käme es der Mehrzahl *aller* Schüler zugute, wenn sich der Mathematikunterricht bis hinauf in die Oberstufe, ja, bis ins Lehramtsstudium, in Vorgehensweisen, Begriffsverkörperungen usw. an den pädagogischen Prinzipien Heinrich Winters orientieren würde – und zwar substanziell, nicht nur in Form von Lippenbekenntnissen. Was dies konkret bedeutet, kann man seinen Arbeiten entnehmen, die sich konzeptionell immer auf alle Schulstufen beziehen und mit fundierten Praxisbeispielen auch alle Schulstufen abdecken.

In einem derart pädagogisch ausgerichteten fachdidaktischen Ansatz spielen naturgemäß *Humanwissenschaften* wie Psychologie, Kommunikationstheorie, Kognitionstheorie, Sprachwissenschaften usw. eine bedeutende Rolle. Besonders mit der Sprache im Mathematikunterricht befasste sich Heinrich Winter in vielen seiner Arbeiten, in einigen davon expressis verbis. Er unterlag allerdings nicht dem häufig anzutreffenden Fehler, die jeweilige Bezugswissenschaft zu verabsolutieren und in ihr zu dilettieren, sondern wertete deren Beiträge stets aus der Perspektive des Mathematikdidaktikers.

Aus Heinrich Winters Menschenbild und seiner pädagogisch-didaktischen Überzeugung ergaben sich zwei eng miteinander verschränkte Unterrichtsprinzipien, deren Popularität in der mathematikdidaktischen Kommunität vor allem *seinem* unermüdlichen Wirken zu verdanken ist. Der Unterricht muss erstens *Sinn stiften*. Dieser Sinn kann aber zweitens nicht einfach durch den Lehrer an die Schüler herangetragen werden, sondern sie müssen sich ihn, mit Unterstützung des Lehrers, selbst entdeckend erschließen. Der „Wintersche" Lehrplan führt dazu aus:

> Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozess aufgefasst wird. Der Unterricht muss daher so gestaltet werden, dass die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten:
> - Von herausfordernden Situationen ausgehen; die Kinder zum Beobachten, Fragen, Vermuten auffordern,
> - ein Problem oder einen Problemkomplex herausstellen; die Kinder zu eigenen Lösungsansätzen ermutigen; Hilfen zum Selbstfinden anbieten,
> - Ergebnisse mit bisherigem Wissen auf vielfältige Art in Verbindung bringen, Ergebnisse mehr und mehr so klar und kurz wie möglich darstellen, evtl. gedächtnismäßig verankern; die Kinder zum selbständigen Üben ermuntern,
> - über den Wert des neuen Wissens und über die Art seiner Aneignung sprechen (Rückbesinnung), dabei die Kinder auffordern, sich neue, verwandte Sachverhalte zu erschließen.
>
> Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist.

Das Prinzip des entdeckenden Lernens dient also nicht nur der Motivationsförderung. Es bedeutet auch keineswegs ein willkürliches Herumstochern in irgendwelchen Inhaltsbereichen, wie es oft durch den unreflektierten Einsatz der Neuen Medien evoziert wird. Seine Anwendung erfordert vielmehr solides Wissen im jeweiligen Bereich, sorgfältige Planung und ein gewisses Maß an Kreativität. Natürlich ist es mit Entdeckungen auf der Phänomenebene nicht getan. Dazu treten müssen die Abstraktion, die Systematisierung und die Reflexion; – wodurch sich der moderne Mathematikunterricht prinzipiell von der sog. „volkstümlichen Bildung" alten Stils unterscheidet.

Es ist typisch für Heinrich Winter, dass er das Prinzip des entdeckenden Lernens nicht an „Rosinen", sondern am „täglichen Brot" des Mathematikunterrichts, insbesondere der Arithmetik, und an einer scheinbar besonders trockenen Unterrichtsform, dem *Üben*, entwickelte. Aus Heinrich Winters umfassenden mathematikdidaktischen Werk ragen sein Aufsatz „Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht" und zahlreiche anschließende Artikel besonders heraus. Sie wurden in der Mathematikdidaktik breit rezipiert.

Bei all seiner Sensibilität für andere Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik betrachtete Heinrich Winter die *Mathematik* selbst als die *wich-*

tigste. Sein Werk verkörpert in mustergültiger Weise diejenige Richtung der Fachdidaktik, bei der das lebendige Fach der Ausgangspunkt aller Überlegungen ist. Er war selbst elementarmathematisch aktiv und erreichte darin ein hohes Niveau. Als Glanzpunkte seines Schaffens wären hier zu nennen seine Analyse des zwei-Quadrate-Satzes der Zahlentheorie, sein Poster „Kanon für den Geometrieunterricht an den Sekundarstufen", seine breiten Analysen zum Geldwesen (bis hin zum Verlauf von Aktienkursen und zu Strategien von Lebensversicherungen) oder sein Lehrbuch zum mathematischen Grundwissen für Biologen (entstanden im Zuge seiner Eingliederung in den mathematischen Fachbereich der TH Aachen). Ziel war dabei immer, den Lernenden Grunderfahrungen auf dem betreffenden Gebiet zu ermöglichen.

Noch in seinem letzten Lebensjahr war Heinrich Winter geistig rege. Er befasste sich insbesondere eingehend mit komplizierten Zerlegungen des Würfels, der Rekombination der Teile und Raumparkettierungen. So sehr ihn diese Aktivitäten *mathematisch* in den Bann zogen, er verfolgte dabei immer auch *didaktische* Interessen: die Förderung der Raumanschauung, die Entwicklung heuristischer Fähigkeiten, mögliche Anwendungen usw.

Zur „*Stoffdidaktik*" hat Heinrich Winter eine große Zahl fundierter Artikel veröffentlicht, die thematisch das ganze Spektrum der Schulmathematik vom Schulanfang bis zum Abitur füllen: Arithmetik, Geometrie, Algebra, Stochastik, Sachrechnen. Stets ging es dabei um grundsätzliche Fragen, wie z. B. Begriffslernen, Umwelterschließung, strukturiertes und strukturierendes Lernen, insbesondere auch die „algebraische Durchdringung der Arithmetik".

Besonders am Herzen lag ihm das *Sachrechnen*. Das Prinzip von der Sachsituation als Ausgangs- und Rückkehrpunkt für den Rechenunterricht war zwar schon von den alten Rechenmethodikern vertreten worden, und Heinrich Winter stellte sich bewusst in diese Tradition. Zugleich arbeitete er aber die Schwachstellen in Ansatz und Umsetzung heraus (zu enge Bindung an die Arithmetik, Überkanonisierung, Reduktion auf das „bürgerliche" Rechnen) und entwickelte das Sachrechnen praktisch und theoretisch deutlich weiter, kulminierend in der Identifikation der drei „Bildungsfunktionen" des Sachrechnens: Sachrechnen (besser vielleicht: Sachmathematik) ist zugleich Lern*stoff*, Lern*prinzip* und dient der *Umwelterschließung*. Als einer der ersten deutschen Mathematikdidaktiker stellte Heinrich Winter die Modellbildung als Herzstück des Sachrechnens heraus.

Heinrich Winter hinterlässt ein umfangreiches Werk, das in seiner allgemeinen Orientierung, seiner philosophischen Tiefe, seiner mathematischen Fundierung und seiner Bedeutung für die Praxis aller Stufen kaum überschätzt werden kann. Wer ernsthaft an der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts arbeiten möchte, wird sich mit diesem Werk umfassend auseinander setzen und den eigenen Standpunkt selbstkritisch daran prüfen müssen. Erste Referenz hierfür ist sein Buch „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik".

Peter Bender, Universität Paderborn
bender@math.upb.de

Verleihung des Förderpreises der GDM 2017 in Potsdam

Rudolf Sträßer

Der Förderpreis 2017 der GDM ergeht an Frau Dr. Kirstin Erath[1] für ihre Dissertation mit dem Titel *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens. Rekonstruktive Analyse von Unterrichtsgesprächen in unterschiedlichen Mikrokulturen*. Betreuerin und Erstgutachterin der Dissertation war Prof. Dr. Susanne Prediger. Weitere Gutachten kamen von Prof. Dr. Uta Quasthoff und Prof. Dr. Marcus Nührenbörger. Die Dissertation ist 2017 in der Reihe Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts in Wiesbaden im Verlag Springer Spektrum erschienen.

[1] Der Vortrag der Förderpreisträgerin wurde auf Video aufgezeichnet. Die Aufzeichnung ist über die Onlinefassung des Artikels als Zusatzmaterial zugänglich.

Laudatio

Wie der Titel der Arbeit bereits anzeigt, geht es in der Dissertation von Frau Erath darum, das Erklären im Mathematikunterricht durch Lernende zu beschreiben und zu verstehen – und zwar so, wie es im alltäglichen Unterricht durch Lehrende angeleitet wird. Die Arbeit wagt sich so in ein in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wenig erforschtes Gebiet, dessen Durchdringung den Einsatz verschiedener Teildisziplinen erfordert. Frau Erath geht diese Aufgabe mit einem Dreiklang unterschiedlicher Sichtweisen an: sie setzt diskursanalytische, interaktionistische und epistemologische Theorien ein, die sie zu einer interdisziplinären „epistemischen Matrix" verdichtet und so zur gegenseitigen Unterstützung nutzt. Diese theoriegesteuerte Sichtweise richtet sie nun auf durch Unterrichtsbeobachtungen gewonnene Fallstudien, die sie mit den Methoden der qualitativen Inhaltsanalyse zu Aussagen verdichtet. Diese Forschungen sollen die Erklärpraktiken im Mathematikunterricht und die darin praktizierten Prozesse von Wissenskonstruktion rekonstruieren und so die Verbindung von fachlichem Lernen mit der sprachlichen Praxis im Unterricht klären helfen.

Durch einen Vergleich der Erklärpraktiken in vier verschiedenen 5. Klassen von Gesamtschulen und Gymnasien entsteht ein Bild dieser für den Mathematikunterricht zentralen Tätigkeit. Gleichzeitig zeigt sich, dass Erklären in verschiedenen Klassen sehr verschieden sein kann (der "Kontingenzbefund" der Arbeit) – ein für das Lehren/Lernen in diesen Klassenstufen im Allgemeinen durchaus problematischer Befund. Es kann nicht von einem einheitlichen Verständnis von Erklären in dieser Klassenstufe ausgegangen werden. Neben dieser auf das Erklären in den Klassen gerichteten Forschung entwickelt Frau Erath individuelle Partizipationspotenziale von drei Jungen mit Migrationshintergrund, die jeweils in verschiedenen Klassen unterrichtet werden. Dabei zeigt sich im zeitlichen Verlauf eine geringe Entwicklungsdynamik. Oder anders gesagt: Der Mathematikunterricht nutzt mindestens bei diesen Lernenden allenfalls die (im Übrigen geringen) Potentiale der hier fokussierten Lernenden, entwickelt diese aber nicht merkbar weiter. Ein explizites, durch die Lehrenden initiiertes Lehren des Erklärens findet in den untersuchten Klassen nicht statt.

Für die mathematikdidaktische Forschung gewinnt man einige wichtige Folgerungen: Zunächst einmal ist festzuhalten, dass die von Frau Erath genutzte Forschungsmethode funktioniert, d. h. sie ist geeignet, unterrichtliches Erklären zu beschreiben und genauerer Analyse zugänglich zu machen. Die von ihr eingesetzten Methoden sind unzweifelhaft geeignet, auch in anderen Klassenstufen und bei anderen mathematischen Themenbereichen als dem Mathematikunterricht der 5. Klasse eingesetzt zu werden. Wenn es auch für die Bildung von Prototypen oder Idealtypen des Erklärens im Mathematikunterricht zu früh ist, so öffnen weitere Studien mit dem Instrumentarium der Dissertation von Frau Erath den Weg zu solchen wünschenswerten Erkenntnissen. Für die unterrichtliche Praxis ermöglicht die Dissertation eine Spezifizierung des Erklärens und detailliert so die Kompetenzfacetten „mathematisch argumentieren" und „kommunizieren" in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Gerade auch die individuellen Partizipationsprofile der Dissertation können die Lehrkräfte für die Beteiligung der Lernenden an Erklärprozessen sensibilisieren.

Preisverleihung (Foto: Chris Dohrmann)

Insgesamt handelt es sich bei der Dissertation von Frau Erath um eine innovative Arbeit, die eine Thematik aus dem Kern der Mathematikdidaktik bearbeitet, aber interdisziplinär verankert ist und eine Brücke zur pädagogisch interessierten Linguistik schlagt. Sie ist ohne Vorbilder. Dies gilt insbesondere forschungsmethodisch, indem sie zielführend eine Auswahl der „Fälle" und Analyseausschnitte auswählt, um zu einer interdisziplinären Exploration des Untersuchungsgegenstandes zu kommen. Mit der vorausgehenden theoretischen Analyse begibt sie sich auf den Stand der Forschung, um durch ihre Ergebnisse neue Erkenntnisse zu erzeugen, ohne die Grenzen der Studie aus den Augen zu verlieren. Schließlich ist die Arbeit gut strukturiert und gut lesbar geschrieben.

Die Jury schätzt die Arbeit als hoch relevant für die mathematikdidaktische Forschung und für den Mathematikunterricht ein. Sie hat außerdem klare Implikationen für die Erklärpraxis der Lehrenden und Lernenden sowie die im unterrichtlichen Beteiligung von Lernenden am Erklären.

Erath, Kirstin (2017). *Mathematisch diskursive Praktiken des Erklärens in unterschiedlichen Mikrokulturen. Rekonstruktive Analyse von Unterrichtsgesprächen*, Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Wiesbaden: Springer Spektrum (Dissertation TU Dortmund: 2016).

Rudolf Sträßer, Universität Gießen
Email: rudolf.straesser@math.uni-giessen.de

Zum neuen Internetauftritt und Redaktionssystem der Mitteilungen

Ein Blick vor und hinter die Kulissen

Andreas Vohns

Wie bereits im Editorial erwähnt, halten Sie mit der Nr. 103 das erste Heft der Mitteilungen in Händen, dessen Herausgabeprozess über unser neues Redaktionssystem abgewickelt wurde und das auf unserer neuen Internetseite (http://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm) erscheint. Die Umstellung auf ein Online-Redaktionsystem war bereits seit etwas über einem Jahr in Planung, motiviert vornehmlich durch zwei Erfahrungen:

- Zusendungen für die Mitteilungen der GDM sind bislang an den Schriftführer per Mail erfolgt, allerdings nicht immer an die korrekte Emailadresse (schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de) und es erfolgen auch an diese Mailadresse zahlreiche Zusendungen in Sachen Schriftführung, die ihrerseits nichts mit den MGDM zu tun haben. Wenn man da als Schriftführer nicht sehr diszipliniert ist und immer alles sofort im korrekten Ordner abspeichert, dann geht hin und wieder mal ein Beitrag verloren.
- Die Erfassung von essentiellen Metadaten (Name, Institution, Emailadresse der Autor(inn)en) gestaltete sich immer wieder als Suchaktion, da einigen Autor(inn)en nicht wirklich zu vermitteln ist, dass solche Angaben vollständig in das Manuskript gehören. Selbst wenn man als Herausgeber brav alles sofort im richtigen Ordner abgespeichert hat, geht dann nach Redaktionsschluss nochmal das muntere Suchen im Posteingang los, wenn man die Artikel mit den Kontaktdaten versehen will oder wenn man in Satz und Drucklegung doch noch einmal Fragen zum Artikel hat.

Daneben wurde die Liste der online veröffentlichten Mitteilungen auf der Internetseite der GDM immer länger, wobei sich die Suche nach Artikeln schwierig gestaltete: Im Zweifelsfall war in jedes Heft herein zu klicken, bis man den gesuchten Artikel fand.

Im Vorstand wurde daher im März 2016 beschlossen, den Herausgabe- und Online-Veröffentlichungsprozess auf ein System umzustellen, dass sowohl Online-Einreichungen der Beiträge ermöglicht als auch zur Publikation der Hefte in Form von Einzelartikeln geeignet erscheint. Die Entscheidung ist dabei auf das im Open-Access-Bereich weit verbreitete, quelloffene und kostenlos verwendbare *Open Journal Systems* (OJS)[1] gefallen.

OJS bietet über die oben genannten ursprünglichen Intentionen hinaus einige angenehme Nebeneffekte für alle Beteiligten – für Leser(innen), Autor(inn)en und die Redaktion.

Vor den Kulissen

Vorteile (nicht nur) für Leser(inn)en

Für Personen, die die Mitteilungen der GDM vornehmlich „analog“ lesen, weil sie das Heft ohnehin gedruckt zugesandt bekommen, besteht der erwartete Zusatznutzen vor allem in dem bereits benannten ersten Punkt: die Wahrscheinlichkeit sinkt erheblich, dass im Herausgabeprozess ein Artikel übersehen wird und unsere Leser(inn)en damit mit wenigstens halbjährlicher Verspätung erreicht.

Für Personen, die die Mitteilungen der GDM auch online lesen bzw. online Texte recherchieren, die in den Mitteilungen der GDM enthalten sind, gehen die Vorteile darüber deutlich hinaus:

- Auf der Internetseite sind die Artikel der aktuelleren Ausgaben in Form einzelner Artikel verfügbar. Dies soll Schritt für Schritt auch rückwirkend für alle online bislang nur als Gesamtheft verfügbaren älteren Ausgaben umgesetzt werden. Artikel können auf der Homepage nicht nur nach Ausgaben sortiert angezeigt werden, sondern auch nach Titeln, Autor(inn)en oder Rubriken. Auch eine entsprechende Suchfunktion ist verfügbar (s. Abb. 1, Ziff. 1).
- Diese Einzelerfassung führt zur besseren Auffindbarkeit in externen Suchmaschinen und Literaturdatenbanken. So werden die Mitteilungen der GDM bereits jetzt von Google Scholar, WorldCat und dem PKP-Index[2] indexiert und es erfolgt eine automatisierte Weitergabe der Metadaten an BASE (Bielefeld Academic Search Engine[3]), wo die Artikel dann jeweils mit Autor(inn)ennamen, Titel und (so vorhanden) Abstract erfasst und durchsuchbar sind. Die Aufnahme in weitere Fachdatenban-

[1] https://pkp.sfu.ca/ojs/
[2] http://index.pkp.sfu.ca/index.php/index
[3] www.base-search.net/about/de/index.php

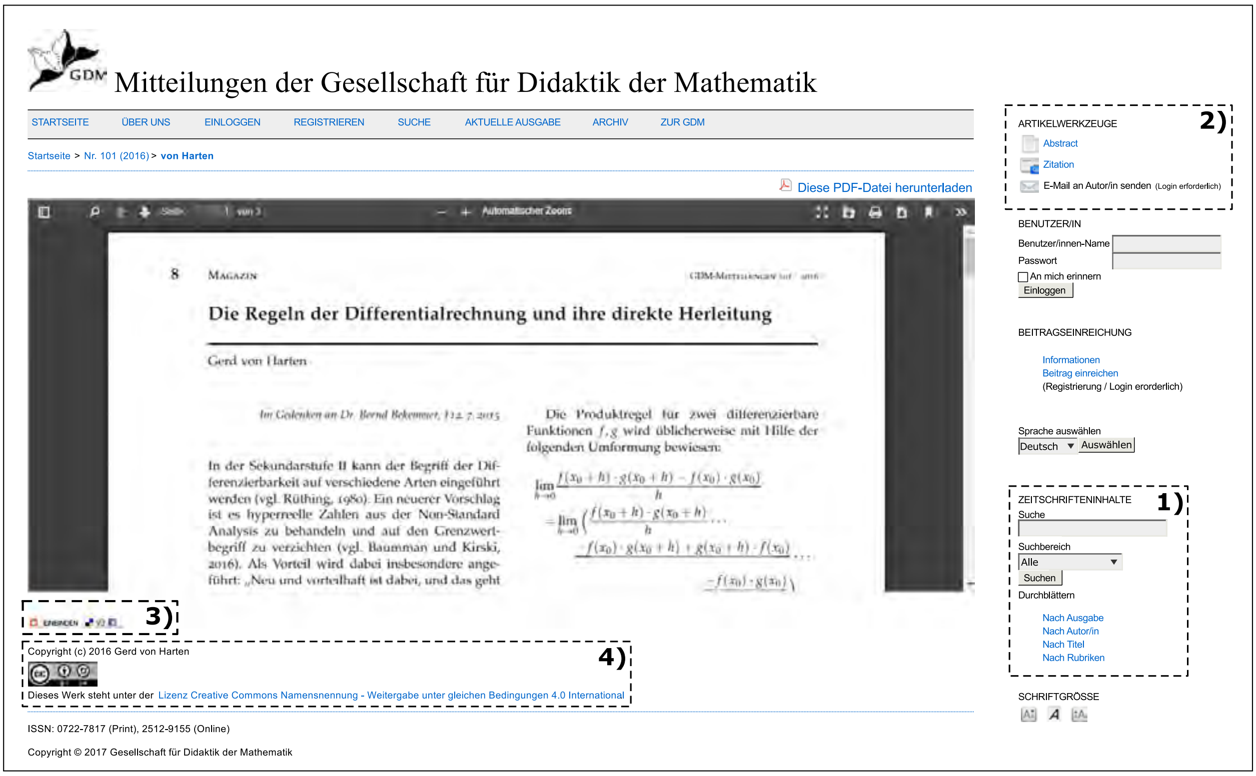


Abbildung 1. Ansicht eines Artikels auf der Homepage

ken (etwa MathEduc, FIS Bildung) ist in Planung/Vorbereitung.

- In der rechten Randspalte zu einem Artikel sind sogenannte „Artikelwerkzeuge“ verfügbar (s. Abb. 1, Ziff. 2). Zu diesen gehört zum einen die Möglichkeit des Exports der korrekten Zitationsangabe (auch für gängige Literaturverwaltungsprogramme). Zum anderen können den Artikeln Zusatzdateien beigefügt worden sein, die für den Abdruck im Heft selbst nicht geeignet waren (im vorliegenden Heft ist z. B. dem Magazin-Beitrag von Gabriella Ambrus und Ödön Vancsó ein eingesetzter Test für Schüler(inn)en im Orginalformat beigefügt, einem Artikel zum Thema dynamische Geometriesoftware könnten künftig z. B. GeoGebra-Dateien beigefügt werden).
- Interessante Artikel lassen sich direkt über die Internetseite in verschiedenen sozialen Netzwerken teilen oder Kolleg(inn)en mittels Email-Weiterleitung empfehlen (s. Abb. 1, Ziff. 3).
- Wer sich als „Leser(in)“ auf der Seite registriert, hat zusätzlich die Möglichkeit, sich per Email über neu erschienene Ausgaben informieren zu lassen und kann über die „Artikelwerkzeuge“ auch direkt über die Seite per Email die Autor(inn)en kontaktieren (deren Emailadressen zum Schutz vor Spam nicht direkt auf der Internetseite einsehbar sind).
- Selbst wenn die Internetseite der GDM einmal (vorübergehend oder – Gott bewahre – dauerhaft) offline gehen sollte: Die Langzeitarchivierung der Mitteilungen ist nun auch für die digitale Fassung sichergestellt. Wir haben eine eigene ISSN für die Online-Ausgabe erhalten und beliefern die Deutsche Nationalbibliothek jetzt auch mit digitalen Fassungen der Hefte, die somit auch im Volltext direkt über die Internetseite der Nationalbibliothek[4] verfügbar sind.

Vorteile speziell für Autor(inn)en

Die oben genannten Aspekte sind gleichermaßen vorteilhaft für Autor(inn)en: Neben dem ohnehin potentiell großen Leser(inn)enkreis der GDM-Mitglieder, welche die Mitteilungen gedruckt erhalten, ist eine bessere Auffindbarkeit der Artikel auch für Nicht-GDM-Mitglieder gewährleistet, Autor(inn)en können ihre frisch erschienenen Artikel in sozialen Netzwerken teilen und dort, wo dies sinnvoll erscheint, den Texten digitale Zusatzdateien beifügen. Hinzu kommen noch einige weitere Vorteile speziell für unsere Autor(inn)en:

- Sie können den aktuellen Status des eingegangenen Manuskripts jederzeit online verfolgen und

[4] www.dnb.de/DE/Home/home_node.html

die gesamte Kommunikation mit der Redaktion ist auch vor Ort archiviert.

- Während das Endkorrektorat (Druckfahnen) bislang dem Herausgeber oblag, haben wir nun auf ein Verfahren umgestellt, bei dem wir den Autor(inn)en Druckfahnen der gesetzten Artikel zur Kontrolle zukommen lassen, auch dies direkt über die Internetseite.
- Auf vielfachen Wunsch haben wir eine Manuskriptvorlage im Word-Format bereitgestellt. Die Mitteilungen werden seit 2006 professionell in LaTeX gesetzt und es gibt seit 2013 auch eine LaTeX-Manuskriptvorlage. Die neue Word-Vorlage dient hauptsächlich der einfacheren Längenabschätzung des Artikels und der Information über zu verwendende Formatierungen (Überschriften, Hervorhebungen, Bilder, Literaturangaben). Wenn nur die dort vordefinierten Formatvorlagen genutzt werden, ist zudem auch eine halbautomatische Konvertierung nach LaTeX leichter möglich[5], als wenn alle Autor(inn)en jeweils ganz eigene Vorlagen und Formatierungen nutzen (ein Vorteil für Satz und Layout).
- Die Veröffentlichung der Texte unter der für Open-Access üblichen Lizenz *Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen* (CC-BY-SA 4.0) ist nun direkt unter den Artikeln ersichtlich (s. Abb. 1, Ziff. 4) und die Rechteeinräumung wird bereits bei Einreichung der Beiträge kommuniziert: Unsere Autor(inn)en behalten das vollständige Copyright an ihren Artikeln und räumen uns ein nicht-exklusives, zeitlich unbefristetes Nutzungsrecht unter der o. g. Lizenz ein. Sie können zusätzliche Verträge für die nicht-exklusive Verbreitung desselben Artikels mit anderen Verlagen eingehen und werden ausdrücklich ermutigt, ihre Arbeit parallel zur Einreichung in unserer Zeitschrift online zu veröffentlichen (z. B. auf den Internetseiten von Institutionen oder auf ihrer eigenen Internetseite).
- Wer über eine ORCID-Kennung[6] verfügt, kann diese als Autor(in) angeben, damit der Artikel eindeutig der eigenen Person und keinem/keiner Namensvetter(in) zugeordnet wird.
- Wer in den Mitteilungen über ein EU gefördertes Projekt berichtet, kann den Drittmittelgeber OpenAIRE-konform über die Angabe der entsprechenden Grant-Number kenntlich und den Artikel über OpenAIRE recherchierbar machen.[7]

Hinter den Kulissen

Da der Posten der Schriftführung und Herausgabe der Mitteilungen der GDM nächstes Jahr aufgrund des endgültigen Auslaufens meiner Amtszeit (Wiederwahl nicht möglich) vakant wird, lohnt es sich vielleicht, den Herausgabeprozess der Mitteilungen allgemein und die nun erfolgten Umstellungen einmal öffentlich transparent zu machen.

Vom Manuskript zum veröffentlichten Beitrag
Der Weg eines Textes vom Manuskript zum gedruckten bzw. online veröffentlichten Beitrag ist in unserem neuen Online-Redaktionssystem in insgesamt fünf Schritte gegliedert, wobei je nach Manuskript nicht alle Schritte tatsächlich begangen werden.

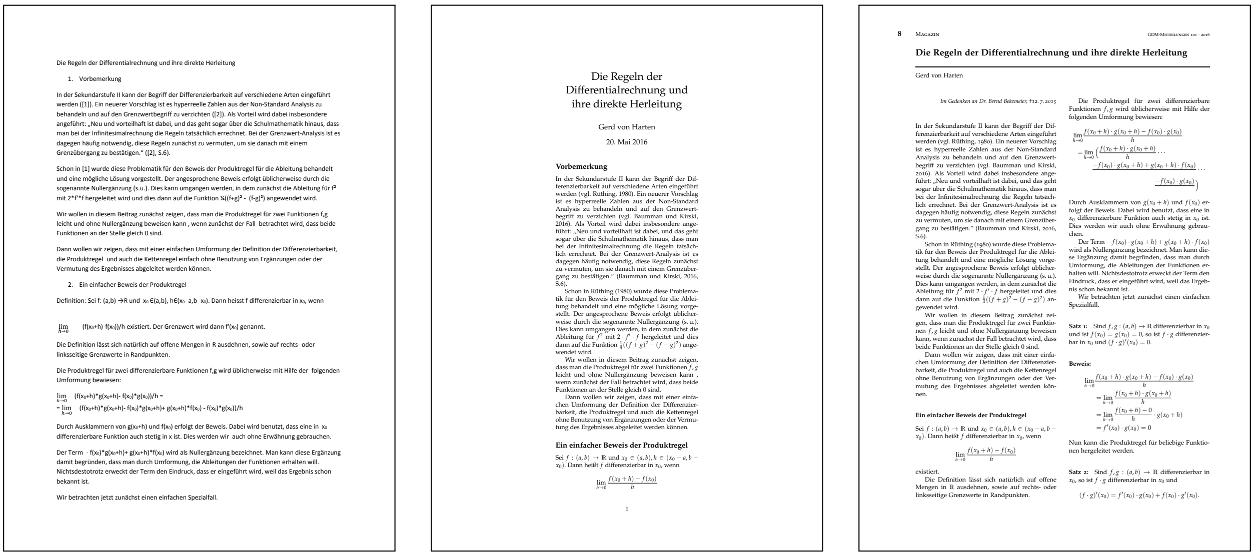
1. Schritt: Begutachtung
Eine *Begutachtung* im Sinne eines formellen Peer-Review-Verfahrens ist bei den Mitteilungen nicht vorgesehen, die Entscheidung über die Publikationswürdigkeit wird allerdings insbesondere in den Rubriken „Magazin" und „Diskussion" durch den Herausgeber vorab geprüft, der dazu in Zweifelsfällen ein Gutachten von einem oder zwei weiteren Mitgliedern des Vorstands einholt. Das von uns nun eingesetzte OJS enthält dabei die vollen Funktionalitäten für ein Peer-Reviewing (ganz ähnlich dem u. a. bei Springer eingesetzten, kommerziellen System *Editorial Manager*), wir verwenden es derzeit allerdings nur, um die Meinung der anderen Vorstandsmitglieder einzuholen. Im Falle von als heikel empfundenen Diskussionsbeiträgen kann in diesem Schritt auch die Entscheidung fallen, einer dritten Partei die Möglichkeit einer Erwiderung im selben Heft einzuräumen.

In 90 % aller Fälle wird der eingegangene Beitrag aber etwa binnen Wochenfrist als „angenommen" markiert und in den nächsten Schritt übergeleitet.

2. Schritt: Lektorat
OJS sieht nach der Entscheidung für die Annahme eines Beitrags auch die Möglichkeit eines inhaltlichen *Lektorats* sowohl durch ein Mitglied der Redaktion als auch durch die Autor(inn)en selbst vor.

Unser etablierter Herausgabeprozess sieht einen solchen Schritt schon aus Zeitgründen nicht als Regelfall vor. Ich nutze diesen Schritt allerdings gegebenenfalls, um Autor(inn)en auf solche Probleme mit dem Manuskript hinzuweisen, die mir bereits vor der Übergabe an Satz und Layout auffallen (z. B.

[5] Ich nutze dazu Pandoc, s. http://pandoc.org.
[6] Eine Art „Nummernschild"/ISBN für Personen, siehe https://orcid.org/
[7] Details zu OpenAire unter: https://blogs.openaire.eu/?p=1961



Die Regeln der Differentialrechnung und ihre direkte Herleitung

Die Regeln der Differentialrechnung und ihre direkte Herleitung

Gerd von Harten

20. Mai 2016

Die Regeln der Differentialrechnung und ihre direkte Herleitung

Gerd von Harten

Abbildung 2. Vom Manuskript (links) über die Layoutfassung (Mitte) zur Druckfassung (rechts)

Probleme mit Abbildungen, Formatierungen, kleinere inhaltliche oder stilistische Rückfragen).

Auch hier gilt: In 90 % aller Fälle geht der Artikel direkt in den nächsten Schritt über.

3. Schritt: Satz und Layout

Zunächst wird der Artikel einer kommenden Ausgabe zugewiesen und auch nochmals die Rubrik geprüft, sowie gegebenenfalls kleine Änderungen am Titel/Untertitel vorgenommen, um ein einheitliches Bild in den Rubriken zu gewährleisten.

Je nach meinen aktuellen zeitlichen Kapazitäten und je nach abzusehendem Aufwand erstelle ich persönlich[8] für Manuskripte, die nicht in der von uns bereit gestellten LaTeX-Vorlage eingehen, aus der Manuskriptversion eine *Layoutversion* (s. Abb. 2, Mitte). Die Layoutversion ist im Unterschied zur Druckfassung noch einspaltig und die Überschriften etwas anders formatiert, ermöglicht mir aber in der Heftplanung bereits eine sehr gute Abschätzung der endgültigen Beitragslänge.

Nach Redaktionsschluss gebe ich dann Christoph Eyrich Bescheid, der für uns bereits seit 2006 Satz und Layout der Mitteilungen und die Weiterleitung an die Druckerei übernimmt. Prinzipiell wäre über OJS auch eine Online-First-Erscheinungsweise zu realisieren, wir haben uns aber dazu entschieden, beim heftweisen Layouten und Veröffentlichen der Hefte zu bleiben, um den Arbeits- und damit verbundenen Kosten)aufwand nicht weiter zu erhöhen.

Herr Eyrich setzt die Texte in das finale Layout und kontrolliert dabei vor allem auch Tabellen und Bilder auf ausreichende Druckqualität. Daneben nimmt er meist auch bereits kleinere Korrekturarbeiten vor und liefert schließlich ein Endprodukt in Form von *Druckfahnen* für das gesamte Heft ab.

4. Schritt: Korrektorat

Bislang hat mir Herr Eyrich diese Druckfahnen für das gesamte Heft zugesandt und ich habe dann, z. T. unterstützt durch von der GDM finanzierte Hilfskräfte oder ehrenamtlich einspringende Kolleg(inn)en am Institut, das Korrektorat i. W. in Eigenregie übernommen.

Bei 64–96 Seiten pro Heft ist das allerdings eine Aufgabe, bei der man froh wäre, wenn man auf mehr als zwei Paare Augen zurückgreifen könnte. Mit der Umstellung auf OJS haben wir uns daher – wie bereits oben erwähnt – entschieden, den Autor(inn)en Druckfahnen zukommen zu lassen, mit der Bitte, selbst ein Korrektorat (binnen Wochenfrist) vorzunehmen. Inwiefern dies zur Hebung der Textqualität geführt hat, können Sie dem aktuellen Heft selbst entnehmen. Auch hier unterstützt uns das System, da der gesamte Emailverkehr im Zusammenhang mit den Korrekturfahnen über die Internetseite abgewickelt werden kann und Korrekturen alternativ auch direkt dort vermerkt werden können.

5. Schritt: Veröffentlichung und Versand

Vor Veröffentlichung des Hefts sind noch Bilder für das Titelbild aufzufinden, idealerweise aus dem Innenteil des Heftes, ansonsten nutze ich verschiedene Quellen für frei verwendbare Bilder im Internet.

[8] Um es deutlich zu sagen: Diese Satzarbeiten übernehmen zu können, ist keine Voraussetzung für die Übernahme der Herausgeber(innen)position.

Nach Einarbeitung der Korrekturen im Innenteil und endgültiger Freigabe des Heftes durch den Herausgeber leitet Herr Eyrich die Druckdaten an die Druckerei[9] und einen aktuellen Adressabzug aus der Mitgliederdatenbank der GDM (für den der Schriftführer verantwortlich ist) an die mit der Versandkonfektionierung und Postauflieferung beauftragte Firma[10] weiter. Gleichzeitig veröffentlichen wir das Heft auf der Homepage. Pflichtexemplare (digital und analog) des Heftes werden an die Nationalbibliothek übermittelt, ein gedrucktes Heft geht in das Archiv der GDM (das der Schriftführer betreut) und Belegexemplare werden an Autor(inn)en geschickt, die nicht Mitglied der GDM sind.

Unter der Haube

Zum Abschluss noch ein paar technische Details, für diejenigen, die so etwas interessiert: Das von uns eingesetzte *Open Journal Systems* (OJS) ist ein auf PHP basierendes, auf einer MySQL-Datenbank aufsetzendes, spezielles Content-Management-System für wissenschaftliche Zeitschriften, das vom kanadischen *Public Knowledge Projekt* entwickelt wird, einem Kooperationsprojekt mehrerer kanadischer Universitäten. Gehostet wird das System, wie auch die Homepage der GDM, auf einem Internetserver des DZLM, für dessen Unterstützung in Form der technischen Betreuung hier nochmals unser herzlicher Dank ausgesprochen sei.

Es waren für unsere Zwecke nur wenige Anpassungen an der Standardinstallation von OJS nötig – die oben genannten Funktionen für Leser(inn)en und Autor(inn)en sind größtenteils bereits in diesem System angelegt. Besonders beliebt ist *Open Journal Systems* im Open-Access-Bereich auch aufgrund seiner standardisierten Schnittstelle (OAI-PMH[11]) zur Weitergabe von Metadaten an Bibliothekskataloge, Datenbanken und Suchmaschinen. Neue Ausgaben müssen diesen Internetseiten nicht extra gemeldet werden, sondern werden durch diese automatisch in regelmäßigen Abständen „geerntet" (sog. *Metadata-Harvesting*).

Open Journal Systems wird aktiv weiterentwickelt, u. a. in Deutschland gefördert durch die DFG in Kooperation des Centers für Digitale Systeme der Freien Universität Berlin, der Universitätsbibliothek Heidelberg und des Kommunikations-, Informations, Medienzentrums der Universität Konstanz[12]. Wir sind daher zuversichtlich, eine auch für die Zukunft tragfähige Redaktions- und Publikationslösung gefunden zu haben.

Feedback zur neuen Internetseite und zum Redaktionssystem ist dabei ausdrücklich erwünscht an schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de.

Andreas Vohns, Alpen-Adria Universität Klagenfurt
Email: andreas.vohns@aau.at

[9] www.oktoberdruck.de
[10] www.bc-directgroup.de
[11] Details s. www.openarchives.org/pmh/
[12] Nähere Details unter: www.ojs-de.net

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

▪ ***Vorstand**. 1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel, Institut für Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel. Tel. 0561 . 804-4310 eichler@mathematik.uni-kassel.de
▪ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de
▪ *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31, 06110 Halle (Saale). Tel. 0345 . 5523-880, torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de
▪ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at
▪ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
▪ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

▪ Verleger: GDM ▪ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ▪ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ▪ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ▪ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.