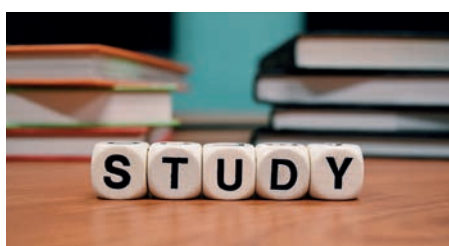


# MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK



3.14159265358979323846  
2643383279502884197169  
3993751058209749445923  
0781640628620899862803  
4825342117067982148086  
5132823066470938446095  
5058223172535940812848  
1117450284102701938521  
1055596446229489549303  
8196442881097566593344  
6128475648233786783165  
2712019091456485669234  
6034861045432664821339  
3607260249141273724587  
0066063155881748815209  
2096282925409171536436  
7892590360011330530548  
8204665213841469519415  
1160943305727036575959  
1953092186117381932611  
7931051185480744623799  
6274956735188575272489  
1227938183011949129833  
6733624406566430860213  
9494639522473719070217  
9860943702770539217176  
2931767523846748184676  
6940513200056812714526  
3560827785771342757789

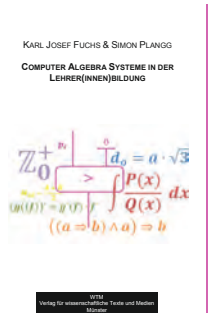


106  
Januar 2019

# Neuerscheinungen im WTM-Verlag 2018



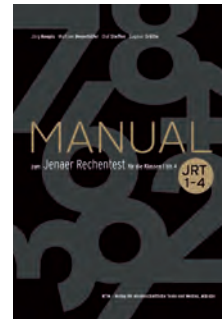
**Pfeifer, S.: Abstraktion und Emotion beim Problemlösen im Mathematikunterricht. Ein theoretischer Entwurf für die Praxis.** Münster 2018. Ca. 440 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-067-2 Print 44,90 €  
978-3-95987-068-9 E-Book 40,90 €



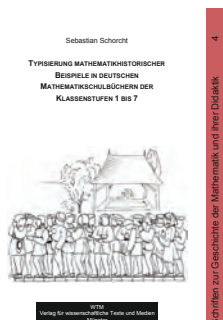
**Fuchs, K. J., & Plangg, S.: Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung.** Münster 2018. Ca. 110 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-084-9 Print 14,90 €  
978-3-95987-085-6 E-Book 12,90 €



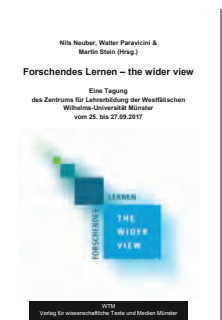
**Kortenkamp, U., & Kuzle, A. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2017.** Vorträge auf der 51. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 27.02.2017 bis 03.03.2017 in Potsdam. Münster 2018. Ca. 1630 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-071-9 Print 89,90 €  
978-3-95987-072-6 E-Book 59,90 €



**Kwapis, J., Meyerhöfer, W., Steffen, O., & Grütte, D.: Manual zum Jenaer Rechenfest für die Klassen 1 bis 4.** Münster 2018. Ca. 50 Seiten, DIN A4.  
978-3-95987-073-3 Print 29,90 €  
978-3-95987-074-0 E-Book 27,90 €

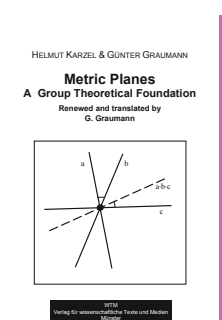


**Schorcht, S.: Typisierung mathemathistorische Beispiele in deutschen Mathematikbüchern der Klassenstufen 1 bis 7.** Münster 2018. Ca. 310 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-075-7 Print 36,90 €  
978-3-95987-076-4 E-Book 32,90 €



**Neuber, N., Paravicini, W. & Stein, M. (Hrsg.): Forschendes Lernen – the wider view.** Eine Tagung des Zentrums für Lehrerbildung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 25. bis 27.09.2017. Münster 2018. Ca. 520 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-087-0 Print 33,90 €  
978-3-95987-088-7 E-Book 30,90 €

**Newsletter des WTM-Verlags**  
Wenn Sie regelmäßig über die Neuerscheinungen von WTM informiert werden wollen, abonnieren Sie unseren Newsletter unter:  
[www.wtm-verlag.de/newsletter](http://www.wtm-verlag.de/newsletter)



**Graumann, G., & Karzel, H.: Metric Planes – A Group Theoretical Foundation.** Münster 2018. Ca. 100 Seiten, DIN A5.  
978-3-95987-069-6 Print 14,90 €  
978-3-95987-070-2 E-Book 12,90 €

## Editorial: Zahlenspielerei twenty-four und 106

Zum Zeitpunkt der redaktionellen Zusammenstellung und Überarbeitung der Ausgabe der *GDM Mitteilungen*, die Sie nun in der Hand halten, befanden wir uns mitten in der Vorweihnachtszeit. Wie in jedem Jahr zur Vorweihnachtszeit kommt mir immer wieder das im amerikanischen Raum sehr verbreitete Spiel „twenty-four“ in den Sinn. Ich persönlich habe es von Hartmut Spiegel kennen und lieben gelernt, der dieses Spiel aus Amerika nach Paderborn quasi importiert hatte (vgl. hierzu [math-www.uni-paderborn.de/~hartmut/Eigene\\_Texte/twenty-four.pdf](http://math-www.uni-paderborn.de/~hartmut/Eigene_Texte/twenty-four.pdf)). Das Spiel wurde 1988 von Robert Sun entwickelt und feierte damit in 2018 seinen 30. Geburtstag. Die Spielregel ist nahezu simpel: Man wähle vier einstellige Zahlen zwischen 1 und 9. Die Zahlen dürfen mehrfach vorkommen. Mögliche Zahlenkombinationen sind z. B. 2, 2, 3, 5 oder auch 4, 1, 6, 9 oder auch 2, 2, 2, 7 – um nur mal drei Beispiele zu nennen. Mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen kann man schnell feststellen, dass es insgesamt 495 solcher Zahlenkombinationen gibt. Die Aufgabe ist nun, diese vier Zahlen in beliebiger Reihenfolge möglichst schnell mit Hilfe der vier Grundrechenarten miteinander so zu verrechnen, dass als Ergebnis 24 herauskommt. Dabei dürfen Rechenoperationen auch mehrfach benutzt bzw. ausgelassen werden. Aber keine der vier Zahlen darf mehrfach genommen oder ausgelassen werden. Mittlerweile existieren sogar Apps und Online-Tools, gegen die dieses Spiel gespielt oder auch Lösungen für einzelne Zahlenkombinationen gefunden werden können. Aber die Lösungen selbstständig im Kopf zu berechnen, bereitet doch immer noch den größten Spaß. Nehmen wir die drei oben genannten Beispiele. Haben Sie schon eine Idee, wie man diese miteinander verknüpft, so dass als Ergebnis 24 herauskommt? Bevor Sie weiterlesen, nehmen Sie sich doch einmal ein bisschen Zeit.

Was halten Sie von diesen Lösungen?

$$(2 \cdot 5 - 2) \cdot 3 = 24$$

$$(9 - 4 - 1) \cdot 6 = 24$$

$$(7 \cdot 2 - 2) \cdot 2 = 24$$

Bei manchen Zahlenkombinationen lassen sich sogar mehrere wesentlich verschiedene Möglichkeiten finden (dabei ist mit „wesentlich verschieden“ gemeint, dass die vier Zahlen durch andere Verknüpfungen und nicht nur durch eine andere Reihenfolge der Verknüpfung 24 ergeben). So kann z. B. die Zahlenkombination 3, 4, 5, 5 wie folgt verknüpft werden:  $5 \cdot 5 - 4 + 3 = 24$  oder auch  $5 \cdot 3 + 4 + 5$ .

Spielt man dieses Spiel mit Kindern (oder auch mit Erwachsenen), so kann leicht ein regelrechtes Fieber auf der Suche nach der nächsten Lösung entstehen. Als Hartmut Spiegel und ich einst einer Schulklasse diese Spielidee umgesetzt in einem vorweihnachtlichen Adventskalender schenkten, waren – laut Aussage der Mathematiklehrerin – die Kinder morgens kaum zu bremsen. Sie wollten unbedingt die heutigen vier Zahlen wissen. Es gab für die Kinder aber noch eine Zusatzregel. Wurde z. B. das 10. Türchen geöffnet, mussten die Kinder aus den vier Zahlen hinter dem 10. Türchen zuerst die 24 erzeugen, anschließend die 10. Warum schreibe ich das nun in das Vorwort dieses Heftes? Denn schließlich ist die Vorweihnachtszeit schon lange vorbei. Aber wir sind mittlerweile beim Heft 106 angekommen. Insofern könnte man doch nun versuchen, die oben genannten Zahlenbeispiele 2, 2, 3, 5 und 4, 1, 6, 9 und 2, 2, 2, 7 so miteinander zu verknüpfen, dass als Ergebnis 106 rauskommt. Dafür gibt es allerdings eine Zusatzregel: Dabei darf jede Zahl maximal zweimal benutzt werden. Haben Sie schon eine Idee, wie Sie aus den genannten vier Zahlen die 106 erzeugen können? Und los geht es ...

Solange Sie noch überlegen, bleibt mir ein bisschen Zeit, etwas zu diesem Heft zu schreiben. Die Arbeitskreise waren im vergangenen Herbst erneut sehr aktiv. Zahlreiche Berichte der einzelnen Arbeitskreise mit teilweise sehr unterschiedlicher Ausrichtung und Zielsetzung sind in diesem Heft nachzulesen. Zudem gibt es einige Reaktionen auf den Diskussionsbeitrag von Reinhard Oldenburg aus den letzten *Mitteilungen* (Heft Nr. 105), aber auch ein paar neue Diskussionsbeiträge, die sicherlich Potential zum Weiterdenken und -diskutieren beinhalten. Und für die Zahlenspielerei von Marlene, der Enkelin von Horst Hischer, wird in diesem Heft ein erster systematischer Erkundungsversuch unternommen. Und ... was ist mit Ihrer Zahlenspielerei? Haben Sie schon Lösungen zur 106 gefunden? Ich gebe Ihnen mal mögliche Antworten:

$$(2 \cdot 5 \cdot 5 + 3) \cdot 2 \text{ und}$$

$$9 \cdot (6 + 4) + 1 + 9 + 6 \text{ und}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$(\text{Alternativ auch } 7 \cdot 7 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 + 2)$$

Möglicherweise haben Sie noch andere Lösungen als ich gefunden ...

Daniela Götze

## Inhalt

---

- 1 Editorial: Zahlenspielerei twenty-four und 106  
 4 Vorwort des 1. Vorsitzenden

### Magazin

- 6 *Renate Motzer*  
 Entdeckungen zu „Marlene und die Zahlen: Permutationen durch Variationen“

### Diskussion

- 8 *Peter Bender*  
 Diskussionsbeitrag zum Artikel „Altlasten des Mathematikunterrichts – eine Diskussion mit dem Ziel der Entschlackung“ von Reinhard Oldenburg in den *Mitteilungen der GDM* 105 (2018)  
 11 *Heinz Griesel*  
 Gehört der Begriff Größenbereich nach Kirsch zu den Altlasten des Mathematikunterrichts?  
 14 *Wilfried Lingenberg*  
 Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht  
 17 *Klaus Rödler*  
 Rechnen durch Handeln – 16 fachdidaktische Videos  
 21 *Hans-Dieter Sill*  
 Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells

### Aktivitäten

- 24 Landesverband GDM Schweiz – Jahresbericht 2018  
 26 *Katharina Kirsten, Johanna Rellensmann, Gilbert Greefrath und Stanislaw Schukajlow*  
 Bericht zur GDM Nachwuchskonferenz 2018 in Münster  
 28 Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 8. 3. 2018 in Paderborn  
 33 Einladung zur Mitgliederversammlung der GDM – Universität Regensburg, 7. 3. 2019

### Arbeitskreise

- 36 *Renate Motzer*  
 Arbeitskreis: Frauen und Mathematik  
 38 *Elke Binner, Marcus Nührenböcker, Barbara Ott und Elisabeth Rathgeb-Schnierer*  
 Arbeitskreis: Grundschule  
 39 *Gabriella Ambrus und Johann Sjuts*  
 Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn  
 41 *Guido Pinkernell und Florian Schacht*  
 Arbeitskreis: Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge  
 42 *Roland Rink und Daniel Walter*  
 Arbeitsgruppe: PriMaMedien  
 44 *Ana Kuzle, Inga Gebel und Benjamin Rott*  
 Arbeitskreis: Problemlösen  
 45 *Anke Lindmeier*  
 Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik  
 50 *Gert Kadunz, Barbara Ott und Christof Schreiber*  
 Arbeitskreis: Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik  
 51 *Susanne Schnell*  
 Arbeitskreis: Stochastik

- 53 *Wolfgang Weigel und Hans-Stefan Siller*  
ISTRON-Gruppe
- 54 *Ysette Weiß*  
Ankündigung Arbeitskreis: Mathematikgeschichte und Unterricht

### **Tagungseinladungen**

- 55 53. Jahrestagung der GDM 2019
- 56 *Tina Rudolph*  
Die Vielfalt der tutoriellen Lehre in einer Tagung

### **Rezensionen**

- 57 Tanja Hamann: Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht  
*Rezensiert von Henning Heske*

### **Personalia**

- 59 *Kristina Reiss und Stefan Ufer*  
Prof. Dr. rer. nat. h.c. mult. Rudolf Fritsch (1939–2018)
- 61 *Michael Fothe, Torsten Fritzlar, Frank Heinrich, Michael Schmitz, Kinga Szücs und Hartmut Rehlich*  
Nachruf auf Herrn Prof. i. R. Dr. Bernd Zimmermann

### **In eigener Sache**

- 64 Hinweise für Autor(inn)en
- 64 Die GDM/Impressum

## Vorwort des 1. Vorsitzenden

---

Liebe GDM-Mitglieder,

gut drei Jahre liegt der Beginn der Qualitätsoffensive Lehrerbildung des BMBF zurück. Die erste Phase der Qualitätsoffensive geht dem Ende zu, die zweite Phase steht vor dem Start und eine ergänzende und spezialisierende dritte Ausschreibung für die Bereiche Digitalisierung und Lehrerbildung für berufliche Schulen ist wenige Wochen alt. Von 2015 bis 2023 war und ist dem BMBF in diesem Programm die Lehrerbildung 500 Millionen Euro wert.

Das ist eine gewaltige Summe und man kann sicher feststellen, dass die Qualitätsoffensive Bewegung in die Lehrerbildung gebracht und Aufmerksamkeit für die Lehrerbildung erzeugt hat. Umfangreich ist auch das inhaltliche Spektrum, das sich in den 49 geförderten Projekten zeigt, wobei der Umgang mit Heterogenität, der Praxisbezug, die berufsbezogene Beratung, die Vernetzung von Fach, Fachdidaktik und Bildungswissenschaften und die Vernetzung der drei Phasen der Lehrerbildung tragende Konzepte der meisten Projekte darstellen.

Etwa die Hälfte der in der Lehramtsausbildung tätigen Hochschulen in Deutschland haben sich in der Qualitätsoffensive auf den Weg gemacht, um mit Bezug auf einen oder mehrere der oben genannten Aspekte die „Qualität und Attraktivität der Lehrerbildung zu steigern“ wie es in einer Zwischenbilanz des BMBF heißt. Was aber kann eine spezifisch mathematikdidaktische Zwischenbilanz der Qualitätsoffensive sein? Hier ist es gar nicht so einfach, einen schnellen Überblick zu bekommen. So gibt es Hochschulen, die an der Qualitätsoffensive beteiligt sind, in denen es aber kein spezifisches Projekt aus der Mathematik oder Mathematikdidaktik gibt. In anderen Hochschulen ist die Mathematikdidaktik zumindest beteiligt, während an einer dritten Sorte von Hochschulen die Mathematikdidaktik in spezifischen Projekten Konzepte für das Lehramtsstudium Mathematik entwickelt und erforscht.

Möchte man recherchieren, welche Maßnahmen für die Fortentwicklung der Lehramtsausbildung Mathematik angestoßen wurden und welche Ergebnisse diese Projekte haben, ist es möglich, über die Internetpräsenz der Qualitätsoffensive ([www.qualitaetsoffensive-lehrerbildung.de](http://www.qualitaetsoffensive-lehrerbildung.de)) die ein-

zelnen Standorte anzuwählen. Zwei kurze Beispiele, die mit einer vollkommen willkürlichen Auswahl die Seiten der Hochschulen des GDM-Vorstands betreffen, sollen andeuten, wie der Weg von den Projektseiten zur Information zum Einzelprojekt verläuft.

- Beim „Dortmunder Profil für inklusionsorientierte Lehrer/innenbildung (DoProfil)“ der Universität Dortmund ([www.doprofil.tu-dortmund.de/cms/de/DoProfil/index.html](http://www.doprofil.tu-dortmund.de/cms/de/DoProfil/index.html)) ist der Schwerpunkt Heterogenität – oder genauer Inklusion – offensichtlich. Unter den Projekten finden sich auch Überschriften, die einen mathematischen Schwerpunkt aufweisen. Folgt man beispielsweise dem Projekt „Empirische Studie zur Gestaltung von Reflexionsprozessen bei Lehramtsstudierenden im Kontext der Planung mathematischer Förderungen“ weiter, so stößt man bei Publikationen auf einen Beitrag in einem Sammelband, der nicht unmittelbar verfügbar ist.
- Bei der „Gießener Offensive Lehrerbildung (GOL)“ der Universität Gießen ([www.uni-giessen.de/fbz/zentren/zfl/projekte/gol](http://www.uni-giessen.de/fbz/zentren/zfl/projekte/gol)) ist beispielsweise ein Schwerpunkt in der Lehrerfortbildung gesetzt. Unter diesem wie auch den anderen als Maßnahmen bezeichneten Schwerpunkten, findet man Hinweise auf eine Beteiligung des Fachs Mathematik, aber keine spezifisch mathematikdidaktischen Maßnahmen oder Projekte.

Bei der Suche nach den konkreten Projektideen mit mathematikdidaktischer Beteiligung und der Suche nach entsprechenden Ergebnissen zur Qualitätsverbesserung des Lehramtsstudiums, unterliegt man also den üblichen Mühen einer Literaturrecherche in den auf den Internetseiten angegebenen Publikationen. Natürlich wäre es auch möglich, die Kolleginnen und Kollegen der Hochschulen dazu zu kontaktieren, welche mathematikdidaktische Beteiligung in den Hochschulprojekten innerhalb der Qualitätsoffensive vorhanden ist, welche Fragen verfolgt werden und welche Ergebnisse erzielt wurden. Ein Beitrag unserer Community könnte es aber auch sein, die Vernetzung der mathematikspezifischen Projekte zu fördern und zumindest

das Wissen voneinander anzustoßen, um an dem Reichtum der Ideen und Ergebnisse der beteiligten Projekte teilhaben zu können.

Dieses Ziel verfolgen wir in den *Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematikdidaktik (MGDM)* im folgenden Jahr und möchten hier die Vertreter der GDM an den Hochschulen, die an der Qualitätsoffensive beteiligt sind, dazu aufrufen, kurze Darstellungen von den mathematikspezifischen Projekten an den Hochschulen zu leisten, um einen schnellen und niederschweligen Überblick über den mathe-

matikdidaktischen Anteil an der Qualitätsoffensive zu ermöglichen. Dieser Aufruf wird in den kommenden Monaten sowohl per Rundmail wiederholt als auch direkt an Mitglieder der GDM an den beteiligten Hochschulen versendet. Damit hoffen wir, das im Zwischenfazit des BMBF postulierte Innovationspotential der Qualitätsoffensive auch für die Ausbildung im Lehramtsstudium Mathematik für unsere Community sichtbar zu machen.

Andreas Eichler  
(1. Vorsitzender der GDM)

## Entdeckungen zu „Marlene und die Zahlen: Permutationen durch Variationen“

Renate Motzer

Bezüglich der Fragestellungen, die Horst Hischer in den *GDM-Mitteilungen* 105 aufgetan hat, gibt es viel zu entdecken. Ein paar Entdeckungen will ich hier kurz als Erfahrungsbericht vorstellen. Seine Frage war, bei welchen Divisionsaufgaben die Ziffern nur permutiert werden. Als Beispiel gab Herr Hischer die Aufgabe  $9876543210 : 5 = 1975308642$  an.

Ich habe die Aufgabe als Multiplikationsaufgabe betrachtet. Es ist de facto gleichwertig, ob man die Divisionsaufgaben oder die zugehörigen Umkehraufgaben untersucht.

Zunächst weiß man, wenn man sich das Einmaleins von 1, 3, 7 oder 9 anschaut, dass jeweils alle Endziffern von 0 bis 9 vorkommen. Freilich bringen die „Überträge“ (die Zehnerstellen der Einmaleins-Aufgaben) alles „durcheinander“. Kann man das wieder ausgleichen?

Einfacher ist es, man untersucht zuerst die „mal 2“- und „mal 5“-Aufgaben.

Zunächst zu den „mal 5“-Aufgaben: Multipliziert man die Ziffern von 1 bis 9 mit 5, so erhält man an den Einerstellen fünfmal eine 5 und viermal eine 0. Als Überträge ergeben sich je zweimal die Zehnerziffern 1, 2, 3 und 4. Wenn man jetzt die Endnullen jeweils mit den Überträgen 1, 2, 3 und 4 kombiniert und die Fünfen genauso, dann erhält man alle Ziffern in der Ergebniszahl. Die letzte Ziffer im Ergebnis der Multiplikationsaufgabe ist die 5, die letzte Stelle des 1. Faktors (im Multiplikand) muss also eine ungerade Ziffer sein. Die erste Ziffer im 1. Faktor muss eine 1 sein, sonst würde das Ergebnis zu groß. Dazwischen müssen die Ziffern so aufgereiht werden, dass zu jedem der Überträge 1, 2, 3 und 4 einmal eine gerade, einmal eine ungerade Ziffer im 1. Faktor stehen muss. Dafür gibt es etliche Möglichkeiten.

Man könnte jeweils noch eine Null an den ersten Faktor hängen, dann würde diese auch im Ergebnis auftauchen. Man könnte sie aber auch an anderer Stelle unterbringen (siehe unten). Ob man auch andere Ziffern weglassen kann, die dann im Ergebnis ebenfalls nicht auftauchen, darüber habe ich noch nicht nachgedacht.

Zu den „mal 2“-Aufgaben: Die Einer der Vielfachen sind die geraden Zahlen, die Zehner (die zum Übertrag werden) sind fünfmal die 1 und sonst 0. Man kombiniere die Ziffernfolge also so, dass

von den beiden Ziffern, deren Doppelte sich um 10 unterscheiden, eine einen Übertrag erhält und die andere nicht (Beispiel siehe unten).

Ist das Ergebnis wieder von dieser Form, kann man es nochmal verdoppeln (also die Ausgangszahl mal 4 rechnen). Sollte das Muster immer noch passen, geht nochmaliges Verdoppeln (also der Faktor 8 für die Ausgangszahl). Wie viele Lösungen es dafür geben kann, hab ich noch nicht überlegt.

Nun zu „mal 6“:  $1302675489 \cdot 6 = 7816052934$

Bei „mal 6“ habe ich die Endziffern aus dem Einmaleins (also die geraden Zahlen) und die Überträge aufgeschrieben und versucht zu kombinieren. Außerdem war zu bedenken, dass es noch Überträge der Form „3 · 6 ist 18 plus Übertrag 3 gibt 21“ gibt, bei denen der Übertrag also noch um 1 größer wird als der Zehner der Malaufgabe. Wie oft solch ein erhöhter Übertrag vorkommen muss (bei „mal 2“ und „mal 5“ kommt er gar nicht vor), kann mit Hilfe von Quersummen errechnet werden. Die Quersumme des ersten Faktors und die des Ergebnisses sind ja gleich, nämlich 45. Die Summe der Einerstellen ist beim 6er-Einmaleins 40 und die Summe der Zehner ist 23. Die Gesamtsumme der Ziffern beträgt 63. Es muss also drei solche zusätzlichen Überträge geben (denn bei jedem solchen Übertrag wird die Summe der beteiligten Ziffern um 9 kleiner: zehn Einer werden zu einem Zehner oder zehn Zehner zu einem Hunderter usw.).

Ob man mit dieser Überlegung schneller zum Ziel kommt als einfach nur durch Probieren, weiß ich nicht. Meine Lösung für den Faktor 6 hab ich jedenfalls so gefunden.

Beim Faktor 3 habe ich auch solche Überlegungen angestellt: Die Einerziffernsumme ist schon 45. Die Zehnerziffernsumme ist 9, also ist ein besonderer Übertrag nötig. Meine Aufgabe, die ich schließlich gefunden habe:  $2145973860 \cdot 3 = 6437921580$ .

Eine Lösung zu 7 war leichter zu finden:  $1234567890 \cdot 7 = 8641975230$ . Ich habe aber auch noch eine andere gefunden:  $1023584976 \cdot 7 = 7165094832$  (hier habe ich die drei zusätzlichen Überträge bewusst eingespielt).

Bevor ich die Lösung zum Faktor 3 hatte, habe ich auch in anderen Systemen einiges probiert, z. B. ob es für den Faktor 3 eine Aufgabe im 4er-System



gibt (danach hab ich dann geglaubt, es könnte auch im 10er-System eine geben):  $1023_4 \cdot 3 = 3201_4$ .

Mit den größten Ziffern in anderen Systemen hab ich dann weitergesucht, um dem Faktor 9 im 10er-System näherzukommen:

Weil die Quersumme durch die höchste Ziffer teilbar sein muss (denn nach dem Äquivalent zur „Neunerprobe“ muss die Ergebniszahl ein Vielfaches der größten Ziffer sein, also auch eine entsprechende Quersumme besitzen), kann die Ziffer 2 im 5er-System nicht vorkommen. Eine passende Aufgabe im 5er-System heißt folglich:  $1034_5 \cdot 4 = 5301_5$ . Analogien zum 4er-System fallen auf.

Wie geht es weiter?  $103452_6 \cdot 5 = 531024_6$  im 6er-System (ein bisschen Rumprobieren war nötig). Dann  $1045627 \cdot 6 = 6410257$  im 7er-System (man muss die 3 weglassen).

Fürs 8er-System findet sich schließlich:  $10456372_8 \cdot 7 = 74105326_8$ . Die Übertragung ins 9er-System wollte nicht gelingen ...

Dann habe ich erstmal doch beim 10er-System weitergemacht. Also vielleicht  $1056 \dots 92 \cdot 9$ . Die 4 Ziffern dazwischen kann man durchprobieren (24 Aufgaben zu testen geht ja noch). Es fand sich:

$$1056384792 \cdot 9 = 9507463128.$$

Jetzt müsste sich die Lücke fürs 9er-System wohl auch noch schließen lassen. Es klappte irgendwie trotzdem nicht. Über die Divisionsaufgabe bin ich schließlich auf:  $10567482_9 \cdot 8 = 85106327_9$  gekommen. Eigentlich dürfte die 4 wegen der Quersumme nicht vorkommen. Im Ergebnis kommt sie auch nicht vor. Im 1. Faktor habe ich sie aber gebraucht. Die 4 aus dem Multiplikand muss also im Ergebnis der Malaufgabe durch 3 ersetzt werden. Nur so lässt sich die Lücke im Muster schließen. Auch interessant.

Und wenn man nicht alle Ziffern von 0 bis zur größten Ziffer bzw. von 1 bis zur größten Ziffer nimmt?

Bekannt ist mir nur die Periode von  $1/7$ :

$$142857 \cdot 2 = 285714,$$

$$142857 \cdot 3 = 428571,$$

$$142857 \cdot 4 = 571428,$$

$$142857 \cdot 5 = 714285,$$

$$142857 \cdot 6 = 857142$$

(und  $142857 \cdot 7 = 999999$ ).

142857 heißt deswegen auch „zyklische Zahl“.

Auf dem Feld, auf das uns Marlene, die Enkelin von Horst Hischer, geführt hat, gibt es sicherlich noch viel mehr zu entdecken.

Was die Fälle „mal 2“ und „mal 5“ angeht, kann man das Zusammenspiel von Einerziffern und Zehnerziffern des 2er- bzw. 5er-Einmaleins gut erkennen, wenn man die Malaufgabe mit Hilfe der Malstreifen (nach der Idee von J. Neper) malt. Hierzu jeweils ein Beispiel:

1	2	6	5	4	8	0	3	9	7		•
0	5	1	3	2	2	4	0	1	4	3	5
6	3	2	7	4	0	1	9	8	5		

1	5	7	6	4	8	9	0	3	2		•
2	1	4	1	2	8	6	1	8	0	6	4
3	1	5	2	9	7	8	0	6	4		

Hat jemand noch weitere Aufgaben gefunden oder allgemeinere Erkenntnisse gewonnen?

Renate Motzer, Universität Augsburg  
Email: [renate.motzer@math.uni-augsburg.de](mailto:renate.motzer@math.uni-augsburg.de)

## Diskussionsbeitrag zum Artikel „Altlasten des Mathematikunterrichts – eine Diskussion mit dem Ziel der Entschlackung“ von Reinhard Oldenburg in den *Mitteilungen der GDM* 105 (2018)

Peter Bender

Die Initiative von Reinhard Oldenburg (R.O.) ist sehr begrüßenswert, und ich gehe mit der Stoßrichtung und zahlreichen Einzelheiten konform. Allerdings geht es in seinem Artikel nicht um eine inhaltliche Veränderung des Mathematikunterrichts, sondern um die Hinterfragung von mathematischen Rede- und Schreibweisen. Manchmal prangert R.O. eine zu ausgeprägte Nachlässigkeit an; manchmal spricht er sich für eine großzügigere Handhabung aus; manchmal leuchtet die Argumentation direkt ein; manchmal ist sie etwas spitzfindig („übertrieben“, wie er selbst schreibt). Oft handelt es sich um eine Sache des Geschmacks bzw. des unterliegenden Bilds von der Mathematik bzw. der Lerngruppe bzw. der Unterrichtsziele, wie genau man den mathematischen Formalismus nimmt bzw. wo man die Grenze zur Unkorrektheit überschritten sieht. Ich selbst möchte es mit dem großen Mathematikdidaktiker und gewissenhaften Elementarmathematiker Arnold Kirsch (1922–2013) halten, dessen Arbeiten sich auf den Mathematikunterricht von der Grundschule bis zur Universität bezogen, mit seinem Plädoyer für eine gewisse Laxheit in der mathematischen Rede zum Zwecke der besseren Verständlichkeit, unter der Bedingung, dass keine begrifflichen Fehler auftreten und keine Missverständnisse entstehen.

Im Großen und Ganzen gehe ich gemäß der Reihenfolge vor, in der R.O. seine Items abgehandelt hat:

1. Während man z. B. dezidiert zwischen Winkel bzw. Radius als geometrischem Objekt und Winkelmaß bzw. Radius (-länge) als Maßzahl unterscheiden muss, erscheint mir die Verwendung desselben Buchstabens, z. B.  $\alpha$  bzw.  $r$ , für beide mathematische Objekte als durchaus akzeptabel, wenn keine Verwirrung möglich ist. Oder: eine abkürzende Schreibweise wie „die ermittelten Werte sind alle  $\leq 1$ “ ist völlig unschädlich, auch wenn der allein stehende Ausdruck „ $\leq 1$ “ aus formalistischer Sicht sinnlos ist. Die Zeiten der sog. „Neuen Mathematik“ von vor fünfzig Jahren, gemäß der man nicht sagen durfte: „auf dem Tisch liegen fünf Stifte“, sondern sagen sollte: „... liegt eine Menge von fünf Stiften“; diese Zeiten sind jedenfalls vorbei.

2. Bis heute konnte mir niemand erklären, was es mit der Schreibweise  $A(1 | 2)$  bzw.  $B(1;2)$  auf sich

hat. Um die Rede von einer Funktion aus der Menge der Paare reeller Zahlen in die Punkte-Ebene kann es sich jedenfalls nicht handeln. Da hätte ja jedes Argument seine eigene „Funktion“ mit eigenem Namen, – völlig sinnlos.

Warum schreiben wir nicht einfach  $A = (1;2)$  bzw.  $A := (1;2)$ ? Sobald wir der Ebene ein Koordinatensystem aufprägen, können wir doch die Punkte mit den Zahlenpaaren identifizieren (wie die Gerade mit  $\mathbf{R}$ ). Die Trennung ist in der Schule irrelevant und dort nicht wirklich verstehbar (s. a. 14.).

3. Eine Funktion wird nicht durch ihre Funktionsvorschrift allein konstituiert (oft in Form einer Funktionsgleichung), sondern es gehört die Angabe ihres Definitions- und ihres Wertebereichs wesentlich dazu. Dafür ist eine Schreibweise wie  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{E} : (x;y) \rightarrow f((x;y))$  genau passend (die verbreitete Schreibweise des zweiten Pfeils (zwischen den Elementen) mit einem kleinen Querstrich am Anfang ist eigentlich überflüssig).

Nun ist das Definitions-und-Wertebereich-Problem bei Geraden nicht existent, und es wäre übertrieben, wenn man bei jeder Nennung einer Geraden die beiden Bereiche mit angäbe. Offensichtlich ist eine Schreibweise wie „ $g : y = 2x + 1$ “ nicht nur formal fragwürdig, sondern auch für das lokale und globale Verstehen von Variablen, Funktionen und Algebra ungeeignet. Aber wer schreibt das denn so? Würde man die Leertaste zwischen „ $g$ “ und dem Doppelpunkt entfernen und den Abstand zwischen dem Doppelpunkt und „ $y$ “ noch etwas vergrößern, also „ $g : y = 2x + 1$ “, wäre die Lesart als Division noch abwegiger als m. E. so schon (s. a. meine Anmerkungen zu 7., 11. und 13.)

Die von R.O. vorgeschlagene Verwendung von Konstruktoren wie „Punkt<sup>-1</sup>(Schnittpunkt( $g_1;g_2$ ))“ ist für das Programmieren von Computern wohl unumgänglich, würde aber die (Schul-)Mathematik ungenießbar machen.

4. Man beachte bei der o. a. Angabe der Funktion  $f$  (am Anfang von 3.) die Doppelklammer beim Funktionswert; denn  $f$  wird ja nicht als Funktion in zwei Variablen  $x$  und  $y$ , sondern als Funktion in einer Variablen  $(x;y)$  aufgefasst (noch klarer wird diese Erfordernis, wenn der Vektor als Spalte geschrieben

ist). Auch wenn beide Auffassungen inhaltlich i. W. identisch sind, ist in der Schulmathematik wohl die Lesart mit einer Variablen angesagt (abgesehen davon, dass die o. a. Funktion  $f$  nicht gerade von Sinnhaftigkeit strotzt).

5. Das Setzen von Doppelpunkten bei der erstmaligen Verwendung eines Bezeichners befürworte ich unbedingt; denn dadurch wird deutlich, dass es nicht um eine naturgegebene oder irgendwie abgeleitete Gleichung geht, sondern um eine Festlegung.

6. In der Tat widerspricht es dem mathematischen Prinzip der freien Wählbarkeit von Namen für Variablen, wenn die Geradensteigung immer mit  $m$ , das Dreieck immer mit  $ABC$ , die Primzahl immer mit  $p$  usw. usf. und schließlich, weltweit am verbreitetsten, der Stichprobenumfang immer mit  $n$  bezeichnet wird; und es liegt auf der Hand, dass dieser Brauch einem falschen Variablenbegriff Vorschub leistet. Aber alle, auch die abgehobenen Universitätsmathematiker frönen ihm, ganz einfach weil er der Lesbarkeit mathematischer Texte sehr förderlich ist. Trotzdem kann man wenigstens in der Schule hin und wieder die eine oder andere maßvolle Variation anbringen.

7. Die Rechenregeln für gerade und ungerade Zahlen sind nichts anderes als die Verknüpfungstafel des Körpers  $K_2$  mit den beiden Elementen  $g (= 0)$  und  $u (= 1)$ , die man auch als Restklassen in  $\mathbf{Z}$  modulo 2 auffassen kann. Natürlich sind Restklassen ihrerseits Mengen und können durch jedes ihrer Elemente repräsentiert werden. Mit Recht weist R.O. darauf hin, dass in der Schule der Abstraktionsgrad nicht erreicht wird, der für ein entsprechendes Verständnis erforderlich wäre. Aber zu verstehen ist jedenfalls, dass die Variablen „gerade“ und „ungerade“ bzw. „ $g$ “ und „ $u$ “ nicht für Zahlen selbst, sondern für Eigenschaften von Zahlen stehen und die Regeln entsprechend zu lesen sind, nämlich als sinnvolle Abkürzungen für einen Satz wie: „Wenn man eine gerade Zahl mit einer ungeraden Zahl multipliziert, ist das Ergebnis eine gerade Zahl.“

Wenn jemand aus der Regel  $u \cdot g = g$  folgert, dass  $u = 1$  ist (noch sinnloser: dass aus  $g \cdot g = g$  folgt:  $g = 0 \vee g = 1$ ), so hat die Person sich die Gleichung allzu oberflächlich angeschaut und/oder sie verfügt über einen allzu engen Variablenbegriff, nämlich: Sobald sie einen Ausdruck mit mathematischen Zeichen und Buchstaben sieht, unterstellt sie einen Term, eine Aussage oder eine Aussagenform in der Grundmenge  $\mathbf{R}$  (oder einer Teilmenge), verzichtet auf jegliche Bemühung um Sinnhaftigkeit und fängt an umzuformen. – Wenn ein Schüler eine solche Haltung zur Mathematik entwickelt hat, hat der Lehrer etwas falsch gemacht.

8. Jawohl, statt  $3\frac{1}{2}$ ,  $2x$  und  $\sin x$  sollte  $3 + \frac{1}{2}$ ,  $2 \cdot x$  und  $\sin(x)$  geschrieben werden!

9. Das Verständnis der in der Physik wichtigen Funktion  $\sin^2$  als Hintereinanderausführung von Sinus und Quadrieren ist durchaus sinnvoll und naheliegender denn als Hintereinanderausführung von Sinus und noch einmal Sinus. Die Schwierigkeit liegt in der Schreibung der Polynomfunktionen (und allgemeiner: der gebrochen-rationalen Funktionen). Bei der Funktion  $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \rightarrow 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$  gibt es für  $p$  keinen treffenden Namen, sondern man muss die Funktionsvorschrift hinschreiben.

10. R.O.s Analyse des Satzes „die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  ist bei  $x = 0$  nicht definiert“ möchte ich um folgenden spitzfindigen semantischen Kritikpunkt ergänzen: Die Verwendung des Worts „Funktion“ beinhaltet, dass da bereits ein Definitionsbereich festgelegt ist, der ja die Stelle 0 nicht enthalten kann. *Insofern* stellt der Satz einen sinnleeren Pleonasmus dar („der Schimmel ist weiß“). Eine Aussage mit mehr Gehalt wäre: „Der Term  $\frac{1}{x}$  ist für  $x = 0$  nicht definiert“ („das Pferd ist weiß“), mit der Fortsetzung: „Soll er Term einer Funktion sein, kann deren Definitionsbereich die Stelle 0 nicht enthalten.“ – Zugegeben: Arg spitzfindig, insbesondere für Schülerinnen und Schüler.

11. Mit Recht charakterisiert R.O. seine Forderung, man müsse statt von „an der Stelle  $x = 0$ “ von „an der Stelle  $x$  mit  $x = 0$ “ sprechen, als „übermäßig korrekt“. In der Tat: Der „Gedanke“, dass „ $x = 0$ “ eine Gleichung und keine Stelle ist, kommt vielleicht einem Sprach-Automaten, aber keinem menschlichen Adressaten dieses Texts. – Noch einfacher wäre aber der Ausdruck „an der Stelle 0“.

12. Ein ähnliches Nicht-Problem ist der Satz „5 Geodreiecke kosten zusammen  $5 \cdot 2$  Euro = 10 Euro“. Wenn man meint, ihn korrigieren zu müssen, schreibt man einfach: „5 Geodreiecke kosten zusammen  $5 \cdot 2$  Euro (= 10 Euro)“. Die Klammersetzung macht die Gleichung zu einem eigenen Satz, nämlich: „und das sind 10 Euro“, und dann würden die Geodreiecke nicht den Wahrheitswert „wahr“ (der Gleichung „ $5 \cdot 2$  Euro = 10 Euro“) kosten. R.O.s Spitzfindigkeit richtet sich übrigens letztlich auch gegen seinen eigenen „korrigierten“ Satz: „... kosten zusammen  $5 \cdot 2$  Euro und  $5 \cdot 2$  Euro = 10 Euro“. Dieser ist dann nämlich auch zu lesen als: „... kosten zusammen  $5 \cdot 2$  Euro und ‚wahr‘“, weil nicht klar wird, dass mit dem „und“ ein neuer Hauptsatz beginnt. Hier hätte man günstigerweise ein Komma vor dem „und“ gesetzt, auch wenn dieses nach der Rechtschreibreform seit 1996 nicht mehr erforderlich ist.

13. Dem Vorschlag zur Streichung des Worts „unbestimmtes Integral“ und ausschließlichen Verwendung von „Stammfunktion“ an seiner Stelle schließe ich mich an. Allerdings wird das Integralzeichen für die Operation  $\int f$  des „Aufleitens“ (wie  $f'$  für das Ableiten) nach wie vor gebraucht. Es fungiert als (Aufleitungs-)Operator, der der Funktion  $f$  ihre (Klasse von) Stammfunktion(en)  $\int f$  zuordnet (wenn diese denn existiert) (entsprechend dem  $'$  für das Ableiten). Deswegen ist hier die Schreibweise  $\int f$  günstiger als  $\int f(x)dx$  (die jedoch bei Polynomen u. ä. nicht zu vermeiden ist; man könnte allerdings bei diesen noch das „dx“ weglassen; s. u.).

Wenn man aber letztere (für die Integralfunktion oder das bestimmte Integral) verwendet, sollte zwischen  $f(x)$  und  $dx$  kein Malpunkt gesetzt werden, weil hier keine Multiplikation vorliegt, sondern nur die Angabe der Integrationsvariablen (des Maßes), auch wenn die Physiker in ihrem Differenzial- und Integralkalkül doch multiplizieren.

Trivialerweise besteht beim Wort „Stammfunktion“ das Problem der Mehrdeutigkeit nicht weniger als beim Wort „unbestimmtes Integral“. Die Gleichung  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$  (bzw.  $\int x^2 = \frac{x^3}{3} + C$ ) ist wieder eine solche, die nicht oberflächlich als zwischen Funktionen (oder gar zwischen Funktionswerten) aufgefasst werden darf, sondern sie muss zwischen Funktionsklassen gesehen werden: Die Klasse (Menge) aller Stammfunktionen der Funktion  $x^2$  (natürlich ist dieser laxer Funktionsname nicht nur akzeptabel, sondern sogar angebracht), d. h. aller Funktionen, deren Ableitung die Funktion  $x^2$  ist, ist die Klasse (Menge) aller Funktionen  $\frac{x^3}{3} + C$ , wo für  $C$  jede reelle Zahl eingesetzt werden kann. – Wer seinen Schülern diese Sichtweise nicht zutraut, kann mit ihnen keine Integralrechnung treiben.

14. Womöglich liegt es an einem erfolgreichen universitären Studium der Linearen Algebra, dass man mit der Begrifflichkeit der Analytischen Geometrie in der Schule so seine Probleme hat. Jedenfalls war ich froh, als ich spät den Unterschied zwischen Punkten, Orts- und Richtungsvektoren verstanden hatte und sie trotzdem einheitlich als reelle  $n$ -Tupel auffassen durfte, ganz wie R.O. das sieht. Bei der Betrachtung von Nebenräumen (im Sinne der Linearen Algebra; also von Geraden, Ebenen im Sinne der Analytischen Geometrie) erscheint mir die Unterscheidung von Orts- und Richtungsvektoren durchaus als dem Verstehen dienlich. Ich sehe Ortsvektoren grundsätzlich an den Ursprung geheftet (außer vorübergehend zum Zwecke des Addierens) und somit direkt als Punkte interpretierbar, während für mich die Richtungsvektoren (Elemente des projizierten Unterraums) frei verschiebbar sind und somit eher den Charakter von Pfeilen haben (natürlich auch als Punkte verstanden werden können).

15. Ich schlage die dezidierte Verwendung folgender Begriffsnamen vor:

- Häufungswert (statt Häufungspunkt) passend zu „Grenzwert“ (Analysis)
- Translation und Rotation (statt Verschiebung und Drehung), um den Zuordnungscharakter zu betonen und die Assoziation mit kontinuierlichen Bewegungen zu verringern (deswegen auch nicht von Bewegungen, sondern von Kongruenzabbildungen oder Isometrien reden) (Abbildungsgeometrie)
- Ausfall (statt Ergebnis) wegen der Verwechslungsgefahr von „Ergebnis“ und „Ereignis“ (Wahrscheinlichkeitsrechnung)

16. Im Stochastikunterricht befürworte ich eine gediegene, formale Grundlage mittels Wahrscheinlichkeitstheorie, weil diese m.E. unerlässlich für stochastisches Denken ist und ohne sie die beurteilende Statistik, ob ohne oder mit Computer, nicht wirklich verständlich ist.

Ähnlich sieht es im Analysisunterricht aus: Ohne eine ordentliche Grundlegung des Grenzwertbegriffs (inklusive Stetigkeit zwecks Vorbereitung der Differenzierbarkeit!) ist infinitesimales Denken m.E. nicht möglich.

Ich weiß, dass für diese Grundlegung die Zeit bei Weitem nicht reicht, wenn man zu den sog. „interessanten“ Inhalten kommen möchte. Mir ist unklar, wie man mit diesem Dilemma umgehen soll. Aber da ich auch die Grundlagen als „interessant“ ansehe und ihnen einen ausgeprägten Bildungsgehalt zumesse, neige ich dazu, ihnen den notwendigen Raum zuzugestehen und die sog. „interessanten“ Inhalte kürzer zu fassen.

17. Solange in diskreten Räumen gearbeitet wird, ist nicht einzusehen, warum man, ganz in R.O.s Sinn, nicht auch den Ausfällen, die dort ja mit den Elementarereignissen praktisch identisch sind, Wahrscheinlichkeiten zuordnet, also beim Ausfall  $a$  von der Wahrscheinlichkeit  $p(a)$  spricht. Und wer bis zu kontinuierlichen Räumen vorstößt, benötigt eh eine erheblich tiefer gelegte Begriffsbildung und wird keine Probleme mit der veränderten Rolle von Ergebnissen (Ausfällen) und Elementarereignissen haben.

18. Die folgende Frage (von R.O. nicht behandelt) hängt äußerlich eng mit 17. zusammen, ist aber von etwas anderer Natur: Kann man statt  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  auch  $\mathbf{R} \setminus 0$  schreiben? – Jawohl, wenn man das Zeichen „\“ für die Mengensubtraktion etwas weiter auffasst und als Subtrahend zusätzlich zu Mengen auch Elemente zulässt. – Es ist jedoch didaktisch fraglich, ob man diese begriffliche Erweiterung einführt. Zumindest sollte die Lerngruppe über eine gewisse Souveränität in Sachen „Mengenlehre“ verfügen,

und die Schreibfigur sollte mit einer gewissen Häufigkeit auftreten.

19. Als Arnold Kirsch und Heinz Griesel sich vor etwa fünfzig Jahren an die Formalisierung des Begriffs „Größenbereich“ machten, hatten sie den Mathematikunterricht in der Primar- und in der Unterstufe der Sekundarstufe I, mit dem Sachrechnen, den proportionalen Beziehungen usw. vor Augen. Da ging es dezidiert nicht um negative Werte oder um Vektoren, sondern um für die Schüler reale Längen, Flächeninhalte, Volumina, Gewichte, Zeitspannen, Geldwerte, auch  $N$ , und alle möglichen basalen Tätigkeiten damit wie Zählen, Messen, Schätzen, Kennen von Maßsystemen, Größenvorstellungen, Darstellen (Modellieren, Zeichnen, Schematisieren, Symbolisieren), Sortieren, Rechnen. Alle diese Größen kann man zwar auch mit negativen Vorzeichen versehen oder um eine Größe 0 ergänzen, aber das war nicht das Thema, und von den den Schülern bekannten Größenarten musste eigentlich nur die Temperatur ausgenommen werden.

Im Stil der damaligen Zeit wurde der Begriff des Größenbereichs axiomatisch gefasst, wie der Begriff der Gruppe, des Vektorraums, der Wahrscheinlichkeit u. Ä. Kirschs Axiomensystem besticht durch seine Einfachheit und spiegelt mit seinen Axiomen das Wesentliche der für die genannten Schulformen und -stufen relevanten Größen sehr gut wider.

Viele der damals aktiven Grund-, Haupt- und Realschullehrer waren durch die Mathematisierung des Rechen- und Raumlehreunterrichts überfordert, und vermutlich hat ihnen trotz seiner Einfachheit Kirschs Axiomensystem wenig eingeleuchtet. Aber für die Lehrerbildung seitdem war es sehr hilfreich.

Natürlich hat R.O. mit seiner Kritik an der Enge dieses Größenbegriffs recht, und seine pragmatische Definition von Größen als Vektoren in einem Vektorraum mit den Einheiten als Basen und mit einer Interpretation in einer Anwendung erscheint sehr sinnvoll, „und mehr benötigt man ... nicht“. Aber man braucht das „Weniger“, einen Begriff für die Größen in der Primar- und der Unterstufe der Sekundarstufe I. Es ist etwas unglücklich, dass das Wort „Größe“ für diese vereinnahmt ist und es für den weiteren Begriff keine kurze, treffende Bezeichnung gibt. Vielleicht könnte man von Größen im engeren und solchen im weiteren Sinn sprechen? Damit wäre das von R.O. aufgeworfene Problem (angemessen) zu einem der Wortwahl zusammengeschrumpft und Kirschs angeblich „schweres Erbe“ müsste nicht „entsorgt“ werden.

Peter Bender, Universität Paderborn  
E-Mail: [bender@math.upb.de](mailto:bender@math.upb.de)

## Gehört der Begriff Größenbereich nach Kirsch zu den Altlasten des Mathematikunterrichts?

Heinz Griesel

Erweiterte Fassung eines Briefes vom 10. 9. 2018 an Herrn Kollegen Oldenburg.<sup>1</sup>

Lieber Herr Kollege Oldenburg!  
Sie werden verstehen, dass ich Ihren Aufsatz in den *Mitteilungen der GDM* (Nr. 105, 31–34, 2018) mit dem provozierenden Titel *Altlasten des Mathematik-*

*unterrichts* nicht unkommentiert lassen kann. Sie werden sicher auch verstehen, dass ich insbesondere Ihre Anmerkungen zu *Größen* kommentieren möchte, weil ich mich seit mehr als 50 Jahren mit mathematischen und didaktischen Problemen zum Thema *Größen* beschäftigt und dazu viel publiziert habe.

<sup>1</sup> *Vorbemerkung von Werner Blum:* Heinz Griesel ist am 26. November 2018 nach kurzer schwerer Krankheit verstorben. Dieser Brief war seine letzte schriftliche Äußerung. Wir haben uns über diesen Brief ausgetauscht, und Heinz Griesel hat mich gebeten, den Brief redaktionell zu bearbeiten, wenn er dazu nicht mehr in der Lage sein sollte. Die folgende Fassung ist eine minimal bearbeitete Version des ursprünglichen Briefs. Eine ausführliche Würdigung von Heinz Griesel und seines Werks wird in einer der nächsten *GDM-Mitteilungen* erscheinen.

Es dürfte Ihnen nicht entgangen sein, dass auch ich mich in dem Aufsatz *Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich* (GDM-Mitteilungen 98, 2015, S. 14–17) kritisch mit dem Begriff *Größenbereich nach Kirsch* auseinandergesetzt habe. Nach Kirsch sind Größen Elemente eines Größenbereichs. Sogar schon 1997 habe ich eine kritische Würdigung des Begriffs *Größenbereich* vorgenommen (Griesel, 1997, S. 259, S. 277 Abschnitt 11, S. 288 Abschnitt 14).

Sie weisen im Zusammenhang mit der Ablehnung des Begriffs *Größenbereich* darauf hin, dass fast keine „Größen“ der Physik *Größen im Sinne von Kirsch* sind, weil negative Werte vorkommen. Das ist völlig zutreffend. Noch gravierender ist, dass selbst eine „Größe“ der Physik wie die (*thermodynamische*) *Temperatur* (mit *Kelvin* als Einheit), die nur positive Werte hat, keinen Größenbereich im Sinne von Kirsch bildet, weil eine ontologisch gebundene Addition zwischen den Werten nicht definiert ist. Ähnliches gilt für die physiologische Größe *Lautheit*, die ich hier nur erwähnen und nicht weiter erklären möchte. Beide Größen werden in dem o. a. Aufsatz S. 15 erwähnt.

In dem o. a. Aufsatz gebe ich allerdings auch eine Würdigung des Begriffs *Größenbereich nach Kirsch*. Immerhin ist dieser Begriff mit dem Begriff *Größengebiet nach Frege* identisch. Frege hatte diesen Begriff in seinem epochalen, aber unvollendet gebliebenen Werk *Grundgesetze der Arithmetik* eingeführt, um einen *anwendungsorientierten Aufbau des Zahlensystems* vornehmen zu können. In mehreren Arbeiten habe ich das dargestellt und beleuchtet. Immerhin sind wir als Didaktiker gefordert, anwendungsorientierte Aufbauten des Zahlensystems zu entwickeln und deren Grundlagen zu erforschen, u. z. möglichst dicht beim Unterricht, wie er sich im Laufe der Zeit als praktikabel herausgebildet hat. Da ist gegenwärtig durchaus immer noch Forschungsbedarf. Die Bruchrechnung, wie sie gegenwärtig in Deutschland unterrichtet wird, ist in ihren mathematischen Grundlagen immer noch nicht völlig erforscht. Das Buch *Elementare Zahlen- und Größenbereiche* von Arnold Kirsch aus dem Jahre 1970, in welchem der Begriff *Größenbereich* eingeführt wurde, sollte damals einen Beitrag zu diesen Forschungen leisten.

Größenbereiche nach Kirsch bilden außerdem die Wertebereiche der wichtigsten Größen des täglichen Lebens, nämlich der Größen *Anzahl, Länge, Flächeninhalt, Volumen, Masse, Dauer, Geld*. Sie werden im Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 6 behandelt. Die Addition zwischen den Werten dieser Größen wird mit Hilfe der zwischen den Trägern der Größen partiell definierten Verknüpfung  $\circ$  (international *concatenate* genannt) eingeführt:  $w(\tau) + w(\tau') =_{\text{Def}} w(\tau \circ \tau')$ . Inhaltlich bedeutet diese Verknüpfung ein Zusammenfügen oder An-

einanderfügen dieser Träger. Ich habe diese partielle Verknüpfung  $\circ$  in Deutsch daher *Zusammenfügung* genannt und vorgeschlagen, dementsprechend statt von *Größenbereich* von *Zusammenfügebereich* zu sprechen (Griesel, 2016, S. 12/13; 2013a, S. 307–309, 2013b, S. 24/25). Die Wertebereiche von 5 der insgesamt 7 Basisgrößen des internationalen SI-Systems sind in diesem Sinne Zusammenfügebereiche. Das drückt die Bedeutung aus, die diesen Größen in der Physik zukommt. Auch die *Grundvorstellungen* zu Größen und deren Verknüpfungen, wie sie in den Schuljahren 1 bis 6 unterrichtet werden sollten, gelten für Zusammenfügebereiche. Speziell das Verteilen und das Aufteilen – die beiden Grundvorstellungen zur Division – beziehen sich auf Zusammenfügebereiche.

Ist das Messen mit Hilfe der partiellen Verknüpfung  $\circ$  definiert, so spricht man von *Fundamentalem Messen* (Griesel, 2016, S. 11; 2013a, S. 11; 2013b, S. 25).

Aus all diesen Gründen ist der Begriff *Größenbereich nach Kirsch* nach wie vor wichtig und gehört daher in keiner Weise zu den „Altlasten“ des Mathematikunterrichts.

Herr Kirsch hat meinen kritischen Überlegungen, wie sie oben skizziert sind, nicht widersprochen, sondern sie ausdrücklich unterstützt. Er war – ebenso wie ich – ohnehin der Meinung, der Begriff *Größenbereich* gehöre nicht in den Unterricht, sondern als Begriff didaktisch orientierter Sachanalysen in die Lehrerbildung.

Sie machen dankenswerterweise auch einen Vorschlag zur Größenbegrifflichkeit im Unterricht. Mein Vorschlag für die Grundvorstellungen und den Sprachgebrauch bezüglich Größen im Unterricht ist seit Jahren der folgende:

- (1) Man sollte zwischen *Größen* und *Größenwerten* unterscheiden. Die Größe *Länge* hat unendlich viele Größenwerte (Ausprägungen). Beispiele für Größenwerte sind: 5 m, 17 km, 4,5  $\mu\text{m}$ . Die Größe *Masse* hat z. B. 5 kg; 3,5 g; 8 mg als Größenwerte.
- (2) Es gibt u. a. *skalare* Größen und *vektorielle* Größen. Die Größe *Länge* ist eine skalare Größe, *Geschwindigkeit* ist eine vektorielle Größe.
- (3) Eine skalare Größe ist dadurch charakterisiert, dass ihre Werte *multiplikativ verglichen* werden können. 5 m bedeutet 5-mal so lang wie 1 m und 8 kg ist 4-mal so schwer wie 2 kg. Mit den Werten einer skalaren Größe kann man formal wie mit Zahlen rechnen. Dabei wird mit den Einheiten (wie kg, m, s) so umgegangen, als wenn es Variable für Zahlen wären. Diese Verfahrenspraxis wird *Größenkalkül* genannt. Beim Größenkalkül werden bei den Rechnungen die Einheiten mitgeführt.

- (4) Eine *vektorielle Größe* ist eine positive *skalare Größe*, für deren Werte *zusätzlich* eine *Richtung* definiert ist. Die positive skalare Größe heißt die *Betragsgröße der vektoriellen Größe*. *Positiv* heißt eine skalare Größe, wenn beim multiplikativen Vergleich ihrer Werte nur positive Zahlen als Vergleichsergebnisse vorkommen.

Der Inhalt dieser 4 Thesen sollte situativ in den Unterricht der Sekundarstufen einfließen.

Hier einige zusätzliche Anmerkungen zu den 4 Punkten:

Zu (1): Die Unterscheidung zwischen *Größe* und *Größenwerten* ist sehr wichtig. Man kann im Unterricht auch noch von *Trägern* der Größenwerte sprechen. Bei den *didaktisch orientierten Sachanalysen* ist das *unerlässlich*. Jeder Träger  $\tau$  „trägt“ einen Wert  $w(\tau)$ . Die Träger einer Größe kann man zu einer Menge  $T$ , der Trägermenge zusammenfassen. Die Abbildung  $\tau \rightarrow w(\tau)$  heißt *Skala der Größe*. Z. B. ist die Trägermenge der Größe *Länge* die Menge aller rektifizierbaren Kurven. Jede rektifizierbare Kurve  $\tau$  hat einen Längenwert  $w(\tau)$ .

Zu (3): Dass man die Werte multiplikativ vergleichen kann, ist das Definiens einer skalaren Größe. Das wird inhaltlich auch so in der DIN-Norm 1313 aus dem Jahre 1998 festgelegt. (Es ist auch die *Grundvorstellung* zum Begriff *skalare Größe*.) Eine Präzisierung des Begriffs *multiplikativer Vergleich* habe ich z. B. in Griesel (2015b, S. 15) geliefert.

Oft wird statt *skalare Größe* abgekürzt nur *Größe* gesagt. Auch ich habe das in diesem Brief oben sowie in Publikationen (z. B. Griesel 1997, 2016) getan. Das kann zu Missverständnissen führen und ist daher nur dann sinnvoll, wenn aus dem Kontext klar erkennbar ist, dass es sich um eine *skalare Größe* handelt.

Zum *Größenkalkül* möchte ich auf meine Arbeit Griesel (2015a) hinweisen. Dort findet sich eine Grundlegung des Größenkalküls. Dort ist auch der Begriff der *Dimension* definiert und insbesondere gezeigt, dass die Dimensionen einen (multiplikativ geschriebenen) reellen Vektorraum bilden, der zu dem (multiplikativ geschriebenen) reellen Vektorraum der zugehörigen kohärenten Einheiten isomorph ist. Diese Vektorräume werden z. B. benötigt, um das berühmte Pi-Theorem der Dimensionsanalyse zu beweisen.

Zu (2): Eine Präzision des *allgemeinen Begriffs Größe* steht noch aus. Die internationale *scientific community* sich verantwortlich fühlender Wissenschaftler hat sich bisher nicht einigen können. Der *allgemeine Begriff Größe* befindet sich seit Jahren im Status der

*Aushandlung*. Doch kann man damit durchaus leben. Für das Verständnis der Mathematik und ihrer Anwendungen z. B. in der Physik ist eine Präzisierung des allgemeinen Begriffs der Größe bisher nicht erforderlich gewesen. Strittig ist z. B., ob auch *Intervalmerkmale* wie der *Wasserstand eines Gewässers* als Größe bezeichnet werden sollen. Ich habe den Vorschlag gemacht, in diesen Fällen von *Niveau-Größen* zu sprechen. Soll man alle *Ordinalmerkmale* als Größen bezeichnen? Soll man bei der *Richterskala für die Erdbebenstärke*, bei der *Öchsleskala*, bei der *Oktanzahl* oder beim *PH-Wert* von Größen sprechen? Soll man *Größe* gar mit *Merkmal* identifizieren? Dann wäre auch das Merkmal *Regenbogenfarbe* eine Größe. *Merkmale sind mehrwertige Eigenschaften*. Das Merkmal *Regenbogenfarbe* hat die Werte (Farbwerte): rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett.

Ich persönlich neige zu der Auffassung, ein Merkmal immer dann eine Größe zu nennen, wenn zur Kennzeichnung der Werte des Merkmals Zahlen verwendet werden. Ein Wert des Merkmals *Wasserstand* z. B. wird in der Form 3 m ü. PNP angegeben. *Wasserstand* wäre dann eine Größe (*Niveau-Größe*) (PNP = Pegelnullpunkt), ebenso wie das Merkmal *Säure-Base-Gehalt einer wässrigen Lösung mit der PH-Wert-Skala*, das Merkmal *Erdbebenstärke mit der Richterskala*, das Merkmal *Dichte (Zuckergehalt) von Fruchtsäften mit der Öchsleskala* oder das Merkmal *Klopffestigkeit eines Kraftstoffes mit der Oktanskala*. Keine dieser Größen (vielleicht mit Ausnahme der zuletzt genannten) ist bezüglich der angegebenen Skala eine *skalare Größe*. Das Merkmal *Regenbogenfarbe* wäre *keine* Größe.

Physiker und Techniker legen großen Wert darauf, dass für die Werte der einzelnen Größen bestimmte Buchstaben als Variable vereinbart und in Normen festgelegt werden. Für die Werte der Größe *Masse* hat man den Buchstaben  $m$  festgelegt, für die Werte der Größe *Kraft* den Buchstaben  $F$ , für die Werte der Größe *Beschleunigung* den Buchstaben  $a$ . In der *mathematischen Logik* hat man dieses Wunschphänomen untersucht und *Variablensorten* unterschieden und der Festlegung von Zeichen für Variable eine wissenschaftliche Grundlegung gegeben. Es ist keineswegs „bedenklich, wenn immer feste Bezeichnungen verwendet werden“, wie Sie schreiben, sondern offensichtlich sehr hilfreich, allerdings nicht zwingend erforderlich. Letzteres sollte auch der Schüler wissen.

Ich möchte meinen Kommentar zu Ihrer Arbeit hier abbrechen. Ich hoffe, dass es zu einem Gedankenaustausch zwischen uns kommt, der zu einer Weiterentwicklung der angesprochenen Probleme und letztlich einer Verbesserung von Unterricht führt. Jedenfalls haben Sie eine für unsere Wissenschaft sehr wichtige Diskussion angestoßen. Das ist sehr verdienstvoll. Damit Sie nicht die von mir an-

gesprochenen Arbeiten aufspüren müssen, schicke ich Ihnen Sonderdrucke zu.

#### Oben angesprochene Literatur

- Griesel, H. (1997). Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 18(4), 259–284.
- Griesel, H. (2013a). Elementarmathematik als empirische Theorie der Lebenswirklichkeit. In M. Rathgeb u. a. (Hrsg.), *Mathematik im Prozess* (S. 305–318). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Griesel, H. (2013b). Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen. In M. Meyer u. a. (Hrsg.), *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik, Festschrift für Horst Struve* (S. 19–33). Hildesheim: Franzbecker.

- Griesel, H. (2015a). Der Größenkalkül als ein Rechnen mit Größenwerten. In G. Kaiser u. a. (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Unterricht, Festschrift für Werner Blum* (S. 187–201). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Griesel, H. (2015b). Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich. *GDM-Mitteilungen*, 98, 14–17.
- Griesel, H. (2016). Die Vergleichstheorie des Messens und ihre Anwendung in der mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. *Journal für Mathematikdidaktik* 37(1), 5–30.

Mit freundlichem Gruß  
Ihr Heinz Griesel

## Konvergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht

Wilfried Lingenberg

*Abstract.* For educational purposes a new non-standard definition of convergence and limit is proposed and shown to be equivalent to the standard definition: If all subsequences of a real sequence  $(a_n)$  have the same standard part then  $(a_n)$  is called *convergent* and  $\text{st}(a_n)$  the *limit* of  $(a_n)$ .

Die Nichtstandard-Analysis erfreut sich in jüngerer Zeit zu Recht steigender Beliebtheit. Eine wachsende Zahl von Kollegen macht die Erfahrung, damit den Schülern einen intuitiveren und in vieler Hinsicht einfacheren Zugang zur Differential- und Integralrechnung eröffnen zu können.<sup>1</sup>

Einer der wesentlichsten Vorzüge der Nichtstandard-Analysis besteht darin, dass sie ganz auf den notorisch schwierigen Begriff des Grenzwerts verzichten kann. Bis auf weiteres machen jedoch Lehrpläne und Zentralabitur die Beschäftigung mit dem Konvergenzbegriff unumgänglich. Zwar ist ohne weiteres möglich, dies ganz ans Ende eines Analysekurses zu verschieben, aber auch dann stellt sich die grundsätzliche Frage: Wie definiert man Kon-

vergenz und Grenzwert im nichtstandardbasierten Unterricht?

Ein Weg wäre ja, eine der herkömmlichen, auf  $\varepsilon$ -Umgebungen fußenden Definitionen vorzustellen. Einem überzeugten Nichtstandard-Verfechter mag das gegen den Strich gehen (und die klassische Epsilontik wird von Lehrplänen und Fachdidaktik ohnehin mehr und mehr aufgegeben); doch ließen sich auf dieser Grundlage interessante Vergleiche des Standard- und des Nichtstandard-Zugangs anstellen, vielleicht verbunden mit Ausflügen in die Geschichte der Analysis von Leibniz bis Cauchy.

Stimmiger bleibt die Darstellung aber in jedem Fall, wenn auch Konvergenz und Grenzwert konsequent auf Nichtstandardgrundlage eingeführt werden – was Vergleiche der eben beschriebenen Art vielleicht sogar noch eindrücklicher machen kann.

Wer sich jedoch danach in der Literatur umschaut, findet nur eine Definition, die mir für die Schule ungeeignet erscheinen will: *Die reelle Zahl  $a$  ist Grenzwert der Folge  $(a_n)$ , wenn  $a_\nu$  für alle infiniten hypernatürlichen  $\nu$  infinitesimal benachbart zu  $a$  ist.*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vgl. zuletzt das Plädoyer von Baumann und Kirski (2016) in dieser Zeitschrift. Weitere Literaturangaben und reichhaltiges Material bei Baumann, Kirski und Wunderling (2013).

<sup>2</sup> So sinngemäß beispielsweise bei Landers und Rogge (1994, 106 f.). Die praktische Anwendung dieses Kriteriums wird unten anhand des letzten Beispiels einmal durchgespielt.



Oh je. Dass eine Folge  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  hier erst einmal zu einer Folge  $*a_n : *\mathbb{N} \rightarrow *\mathbb{R}$  fortgesetzt werden muss, könnte man in der Schule zwar vielleicht noch diskret unter den Tisch fallen lassen, aber die Definition dreht sich auch in gewisser Weise im Kreise: Man benutzt zunächst Folgen, um den Raum  $*\mathbb{R}$  der hyperreellen Zahlen zu definieren (Genauerer dazu gleich), erklärt auf diesem  $*\mathbb{R}$  dann  $*\mathbb{N}$  Funktionen sowie als Spezialfall davon neue  $*\mathbb{N}$  Folgen und verwendet diese schließlich, um Folgen des Typs zu betrachten, von dem man ausgegangen war. Der so naheliegende und wichtige Zusammenhang, dass bei konvergenten Folgen der Standardbegriff ‚Grenzwert‘ mit dem Nichtstandardbegriff ‚Standardteil‘ zusammenfällt, wird gar nicht fruchtbar gemacht.

Viel eingängiger ist es, mit der Definition direkt bei den ursprünglichen Folgen anzusetzen. Im Folgenden formuliere ich deshalb eine allein auf schultaugliche Konzepte der hyperreellen Zahlen gestützte Definition und zeige dann ihre Gleichwertigkeit mit einer herkömmlichen standardbasierten. Dieser Nachweis arbeitet sozusagen den Kern der Beziehung zwischen Standard- und Nichtstandard-Analysis heraus, denn genau hier wird deutlich, dass es im Ergebnis dasselbe ist, ob beispielsweise die Ableitung über den Standardteil einer hyperreellen finiten Zahl oder über den Grenzwert einer reellen Folge definiert wird.

Zugrunde liegt die übliche Konstruktion der hyperreellen Zahlen: Das System aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$ , die ein nur endliches Komplement besitzen, bildet einen Filter auf  $\mathbb{N}$ , der zu einem Ultrafilter  $\mathcal{F}$  erweitert wurde (dieser Ultrafilter enthält dann auch Teilmengen mit einem unendlichen Komplement und ist bekanntlich weder eindeutig noch konkret angebar). Auf der Menge  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  der reellen Folgen ist dann eine Äquivalenzrelation  $\sim$  gegeben durch

$$(a_n) \sim (b_n) :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Die hyperreellen Zahlen sind die von dieser Relation induzierten Äquivalenzklassen:  $*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$ .

Die Verknüpfungen sind gliedweise erklärt, und die Anordnung wird wieder über den Ultrafilter definiert:

$$[(a_n)]_{\sim} \leq [(b_n)]_{\sim} :\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Beide Definitionen sind unabhängig von der Wahl des Repräsentanten einer Klasse.

Die reellen Zahlen sind über die konstanten Folgen in  $*\mathbb{R}$  eingebettet:  $r \in \mathbb{R}$  wird mit  $[(r)]_{\sim} \in *\mathbb{R}$  identifiziert. Eine hyperreelle Zahl, deren Betrag kleiner ist als jede positive reelle Zahl, heißt infinitesimal; ein von Null verschiedenes Beispiel ist  $\omega = [(\frac{1}{n})]_{\sim}$ , denn für jedes reelle, positive  $\varepsilon$  gilt

$\frac{1}{n} < \varepsilon$  auf dem Komplement einer endlichen Menge, also auf einer  $\mathcal{F}$ -Menge. Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind unendlich groß und heißen infinit. Jede finite (also nicht unendlich große) hyperreelle Zahl lässt sich in eindeutiger Weise als Summe einer reellen und einer infinitesimalen Zahl schreiben; die reelle Zahl in dieser Summe wird als der Standardteil der finiten Zahl, abgekürzt ‚st‘, bezeichnet.

Der in der folgenden Definition gebrauchte Begriff der Teilfolge stammt aus der Standardanalysis: Für eine reelle Folge  $(a_n)$  und eine nicht endliche Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{N}$  erhält man eine Teilfolge, indem man die Elemente von  $\{a_n \mid n \in M\}$  in der ursprünglichen Reihenfolge belässt und mit den natürlichen Zahlen neu durchnumeriert (eine formalere Definition liefert jedes Analysis-Lehrbuch). Für  $M = \mathbb{N}$  ergibt sich: Jede Folge ist auch Teilfolge ihrer selbst.

Nun also die neue

*Definition.* Wenn alle durch die Teilfolgen einer reellen Folge  $(a_n)$  definierten hyperreellen Zahlen finit sind und denselben Standardteil haben, so heißt die Folge  $(a_n)$  konvergent und  $\text{st}([(a_n)]_{\sim})$  der Grenzwert von  $(a_n)$ . Man schreibt dann statt  $\text{st}([(a_n)]_{\sim})$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ .

Für unterrichtliche Zwecke lässt sich noch wesentlich knapper formulieren: Wenn alle Teilfolgen einer reellen Folge  $(a_n)$  denselben Standardteil haben, so heißt ...  $\text{st}(a_n)$  ... Da jede Folge eindeutig einer Äquivalenzklasse zugeordnet ist, ist es ja legitim, vom ‚Standardteil einer Folge‘ zu sprechen; und die Existenz eines Standardteils impliziert bereits Finitheit.

Zu zeigen ist die Äquivalenz dieser Definition mit einer herkömmlichen standardbasierten. Von Bedeutung ist dabei, dass der Beweis nicht etwa von der Wahl des Ultrafilters abhängt, der zur Konstruktion von  $*\mathbb{R}$  benutzt wurde.

‚ $\Leftarrow$ ‘: Sei zunächst eine Folge  $(a_n)$  im gängigen Sinne konvergent; es gebe also eine reelle Zahl  $a$ , so dass für jedes reelle  $\varepsilon > 0$  „fast alle“ ( $:=$  alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  liegen. Nun sei  $(\bar{a}_n)$  eine beliebige Teilfolge von  $(a_n)$ ; aus der Standardanalysis weiß man, dass  $(\bar{a}_n)$  ebenfalls gegen  $a$  konvergiert. Alle Glieder der Folge  $(\bar{a}_n - a)$  sind dann auf dem Komplement einer endlichen Menge natürlicher Zahlen betragsmäßig kleiner als ein beliebig vorgegebenes  $\varepsilon$ . Da jedes solche Komplement schon in dem Filter liegt, aus dem  $\mathcal{F}$  durch Erweiterung gewonnen wurde, gilt für jedes reelle  $\varepsilon$  und unabhängig vom zugrundegelegten Ultrafilter  $|[(\bar{a}_n - a)]_{\sim}| < [(\varepsilon)]_{\sim}$ ; die hyperreelle Zahl  $[(\bar{a}_n - a)]_{\sim}$  ist also infinitesimal. Wegen  $[(\bar{a}_n)]_{\sim} = [(a)]_{\sim} + [(\bar{a}_n - a)]_{\sim}$  ist  $[(\bar{a}_n)]_{\sim}$  finit und besitzt den Standardteil  $[(a)]_{\sim}$ .

, $\Rightarrow$ ': Sei nun  $(a_n)$  konvergent im Sinne der obigen Definition und ein reelles  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Man setzt  $a = \text{st}([(a_n)]_{\sim})$ . Wenn es eine unendliche Teilmenge von  $\mathbb{N}$  gäbe, auf der alle Folgenglieder außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  lägen, würde durch diese Teilmenge eine Teilfolge  $(\bar{a}_n)$  von  $(a_n)$  definiert, die sich in jedem Folgenglied um mindestens  $\varepsilon$  von  $a$  unterscheidet:

$$|(\bar{a}_n - a)| \geq \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Andererseits hätte  $[(\bar{a}_n)]_{\sim}$  nach Voraussetzung den Standardteil  $a$ ; die Differenz von  $[(\bar{a}_n)]_{\sim}$  und  $[(a)]_{\sim}$  wäre infinitesimal und damit kleiner als jede reelle Zahl, insbesondere  $\varepsilon$ :

$$|[(\bar{a}_n)]_{\sim} - [(a)]_{\sim}| = |[(\bar{a}_n - a)]_{\sim}| < [(\varepsilon)]_{\sim}, \text{ also} \\ |(\bar{a}_n - a)| < \varepsilon \text{ auf einer } \mathcal{F}\text{-Menge.} \quad (**)$$

Da kein Filter oder Ultrafilter die leere Menge enthält, stehen  $(*)$  und  $(**)$  im Widerspruch zueinander. Es können also nur endlich viele Folgenglieder von  $(a_n)$  außerhalb der  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  liegen.  $\square$

#### Beispiele

a) Für jede Teilfolge  $(\bar{a}_n)$  von  $(\frac{1}{n})$  und alle  $n$  gilt  $0 < \bar{a}_n \leq \frac{1}{n}$ . Mit  $[(\frac{1}{n})]_{\sim}$  (siehe oben dazu) ist dann erst recht  $[(\bar{a}_n)]_{\sim}$  eine infinitesimale Zahl. Infinitesimale Zahlen haben den Standardteil 0;  $(\frac{1}{n})$  ist also konvergent mit Grenzwert 0. Die gleiche Überlegung gilt für die höheren Potenzen  $(\frac{1}{n^2})$ ,  $(\frac{1}{n^3})$  usw.

b) Die Folge  $(0; 1; 0; 2; 0; 3; \dots)$  ist nicht konvergent: Auf den ungeraden Platznummern ergibt sich die Teilfolge  $(0; 0; 0; \dots)$ , also die hyperreelle Null (finit, Standardteil 0), auf den geraden  $(1; 2; 3; \dots)$ , also die hyperreelle Zahl  $\Omega$  (infinite, kein Standardteil).

Welche hyperreelle Zahl im Übrigen durch die Folge selbst definiert wird, hängt vom zugrundegelegten Ultrafilter ab. Dieser enthält entweder die Menge der geraden oder die der ungeraden Zahlen; sind die geraden enthalten, so beschreibt die Folge die infinite Zahl  $\frac{\Omega}{2}$  und hat keinen Standardteil, enthält der Ultrafilter die Menge der ungeraden Zahlen, so ist sie äquivalent zu  $(0)$  und hat den Standardteil 0. Die zweite Möglichkeit zeigt, dass nicht etwa jede eine finite Zahl definierende Folge schon konvergent ist.

c) Eine Folge wie  $(1; 2; 1; \frac{3}{2}; 1; \frac{4}{3}; 1; \frac{5}{4}; \dots)$  zeigt, dass die Teilfolgen einer konvergenten Folge nur denselben Standardteil haben, nicht aber dieselbe finite Zahl beschreiben müssen. Offensichtlich wird schon in dieser Folge selbst jeder beliebig kleine Abstand zur Eins nur von endlich vielen Folgengliedern erreicht oder übertroffen, und das gilt erst recht für jede Teilfolge; jede Teilfolge hat also den

Standardteil 1. Auf den ungeraden Platznummern entsteht jedoch die Folge  $(1; 1; 1; \dots)$ , also die hyperreelle Eins, auf den geraden  $(\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \dots)$ , also die hyperreelle Zahl  $\frac{\Omega+1}{\Omega} = 1 + \frac{1}{\Omega} = 1 + \omega$ .

d) Eine Folge der Art  $(\frac{3n^3+2n^2+1}{4n^3+n})$  wird gemäß der in  ${}^*\mathbb{R}$  gegebenen gliedweisen Verrechnung zu  $\frac{(3n^3)+(2n^2)+(1)}{(4n^3)+(n)}$  umgeformt. 'Übersetzt' man konstante Folgen in reelle Zahlen und bezeichnet  $(n)$  wieder mit  $\Omega$ , so lässt sich der Bruch als  $\frac{3\Omega^3+2\Omega^2+1}{4\Omega^3+\Omega}$  schreiben. Einem Quotienten aus infiniten Zahlen sieht man noch nicht unmittelbar an, ob er einen finiten Wert und damit einen Standardteil besitzt, aber Erweitern mit  $\frac{1}{\Omega^3} = \omega^3$  ergibt  $\frac{3+2\omega+\omega^3}{4+\omega^2}$ , und dieser Bruch hat den Standardteil  $\frac{3}{4}$  (die Bildung des Standardteils ist mit den Grundrechenarten vertauschbar). Die Betrachtung der Teilfolgen erübrigt sich aufgrund von Beispiel a): In einer Teilfolge wäre lediglich  $\omega$  durch eine kleinere oder jedenfalls nicht größere positive infinitesimale Zahl ersetzt.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Grenzwertsätze im nichtstandardbasierten Unterricht nicht gebraucht werden, denn die erforderlichen Umformungsmöglichkeiten sind bereits durch die Konstruktion der hyperreellen Zahlen und die darin definierten Rechenarten gegeben – und zwar voraussetzungsfrei; die Grenzwertsätze sind ja bekanntlich erst anwendbar, wenn die Konvergenz aller Einzelfolgen sichergestellt ist.

e) Zum Schluss noch ein etwas struppigeres Beispiel. In der Folge  $(a_n)$  sei nach  $a_1 = 3$  das  $n$ -te Glied durch die  $(n-1)$ -te Nachkommastelle von  $\pi$  gegeben:  $(a_n) = (3; 1; 4; 1; 5; 9; \dots)$ . Da  $\pi$  nicht periodisch ist, gibt es mindestens zwei unterschiedliche Ziffern  $i$  und  $j$ , die unendlich oft vorkommen. Durch  $M_i = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = i\}$  und  $M_j = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = j\}$  werden zwei Teilfolgen definiert, nämlich die konstanten Folgen  $(i)$  und  $(j)$  mit den (unterschiedlichen) Standardteilen  $i$  und  $j$ . Die Folge ist also nicht konvergent.

Wollte man den Nachweis hier zur Abwechslung auch noch einmal über das oben aus der Literatur zitierte Kriterium führen, wären noch weitere Gedankenschritte notwendig:  $M_i$  und  $M_j$  müssten durch aufsteigende Durchnummerierung ihrer Elemente ihrerseits als Folgen aufgefasst werden, die zwei hypernatürliche Zahlen  $\mu_i$  und  $\mu_j$  definieren. Dann wäre  $a_{\mu_i} = (i)$  und  $a_{\mu_j} = (j)$ , also  $a_{\mu_i}$  nicht infinitesimal benachbart zu  $a_{\mu_j}$ .

In diesem Fall entspricht das Einsetzen einer infiniten hypernatürlichen Zahl in die Folge (genauer: in deren hyperreelle Fortsetzung) der Bildung einer Teilfolge. Allerdings können hypernatürliche Einsetzungen auch in Umordnungen oder mehrfachem Auftreten von Folgengliedern resultieren; das Literaturkriterium für Konvergenz verlangt also

so mehr als die hier vorgestellte Definition. Ein kleiner Stolperstein liegt zudem darin, dass das Einsetzen nicht mit jedem Repräsentanten einer Äquivalenzklasse praktisch durchführbar ist: So ist  $(1; 2; \sqrt{10}; 4; 5; \dots)$  ein gültiger Repräsentant der hypernatürlichen Zahl  $\Omega$ , taugt aber nicht dazu,  $a_\Omega$  konkret zu bestimmen, da ein  $\sqrt{10}$ -tes Glied der Folge  $(a_n)$  nicht definiert ist.

#### Schluss

Abgesehen vom Entfall der Grenzwertsätze erbringt der Nichtstandard-Ansatz bei Konvergenz und Grenzwert, anders als bei Ableitung und Integral, vielleicht keine wesentlichen Vereinfachungen für den Unterricht, und an der Überflüssigkeit des Grenzwertbegriffs in diesem Zusammenhang kann er schon gar nichts ändern, im Gegenteil: in der Formulierung „Statt  $st(a_n)$  schreiben wir dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ “ tritt diese ja glasklar zutage. Mir ging es

aber darum, zu zeigen, dass auch ein konsequent nichtstandardbasierter Unterricht den gegenwärtig gegebenen Erfordernissen von Lehrplänen und Zentralabitur uneingeschränkt gerecht werden kann.<sup>3</sup>

#### Literatur

Baumann, P. & Kirski, T. (2016). Analysis mit hyperreellen Zahlen. *Mitteilungen der GDM*, (100), 6–16.

Baumann, P., Kirski, T. & Wunderling, H. (2013). Nichtstandard Analysis für die Schule. [www.nichtstandard.de](http://www.nichtstandard.de). Zuletzt aufgerufen am 16. 8. 2018.

Landers, D. & Rogge, L. (1994). *Nichtstandard Analysis*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.

Wilfried Lingenberg, Pirmasens  
Email: [w.lingenberg@mx.uni-saarland.de](mailto:w.lingenberg@mx.uni-saarland.de)

## Rechnen durch Handeln – 16 fachdidaktische Videos

Klaus Rödler

Rechenprobleme einzelner Kinder scheinen zum Mathematikunterricht zu gehören, wie der graue Winterhimmel zu Deutschland. Beobachtbare Symptome dafür, sind unter anderem Schwierigkeiten bei der Ablösung vom zählenden Rechnen, bei der Subtraktion und bei Sachaufgaben. Verfestigungen des zählenden Rechnens werden diagnostiziert (Lorenz, 1998) sowie fehlende Kompetenz im ableitenden Denken (Gaidoschik, 2017). „Warum bleiben Kinder in der Sackgasse des zählenden Rechnens hängen?“, fragen Weisshaupt und Reuker (2009, S. 72) und diagnostizieren vor allem mangelhafte Zahlkonzepte: „Übereinstimmend mit Gester/Schultz (2000), Fritz/Ricken (2008) und Gaidoschik (2003) werden vor allem Schwierigkeiten in der Entwicklung des Anzahlverständnisses und des Teile-Ganzes-Verständnisses als Gründe für das Verharren in ineffektiven, fehlerhaften Strategien betrachtet“ (ebd.).

So unstrittig die Symptome zu sein scheinen, so unklar bleibt, wie genau auf diese Realität reagiert werden sollte. Die neue Leitlinie der DGKJP beschreibt das Problem, indem sie von einer behandlungswürdigen Rechenstörung des Kindes ausgeht.

Worum es mir geht, ist eher Meyerhöfers Frage, welcher Art Unterricht präventiv wirkt, indem er bei allen Beteiligten das Bewusstsein für die „stofflichen Hürden“ (Meyerhöfer, 2011) weckt, die es zu nehmen gilt, und indem er Handlungsalternativen an die Hand gibt, die diese stofflichen Hürden auch für unkonzentrierte Kinder, Kinder mit kognitiven Problemen, mit Problemen im Arbeitsverhalten und dergleichen bewältigbar macht. Wie Meyerhöfer bin ich der Meinung, dass ein Unterricht, der unterstellt, dass dies für ein bestimmtes Kind nicht zu leisten ist, diesem Kind eigentlich nicht zugemutet werden kann. Dabei stellen sich didaktisch Fragen wie die folgenden:

Wenn die Ablösung vom zählenden Rechnen auf dem Teil-Ganzes-Prinzip beruht, also auf dem Verständnis von Zahlbausteinen und deren Beziehung, wie kommt ein Kind zu derartigen, solchermaßen strukturierten Zahlen? – Durch Fingerbilder? Durch Rechenhandlungen? Durch die Strukturierung des Zahlenstrahls?

Wie entstehen strukturierte Rechenvorgänge? – Automatisch, wenn die Zahlen strukturiert sind? Mit ‚schönen Päckchen‘? Durch Schritte am Zah-

<sup>3</sup> Für hilfreiche Anmerkungen zum Manuskript dieses Beitrags danke ich herzlich Thomas Bedürftig und Peter Baumann.

lenstrahl? Oder Rechenstrich? Oder durch Rechenhandlungen? Wenn ja, welcher Art?

Wie kommen Kinder zu einem Verständnis des Stellenwertsystems? – Durch die Analogie von Zehner und Einer? Durch das Verständnis vom ‚reversiblen Zehner‘? Durch die Übersetzung der Zahlen an der Stellenwerttafel? Oder auch hier durch Rechenhandlungen?

Welche Rolle spielt die Art der Rechenhandlung? Und welche Rolle spielen Eigenproduktionen, halbschriftliche Notationen und schriftliche Rechenverfahren?

Die 16 Videos, auf die hier hingewiesen wird, geben in diesem Feld pointierte Antworten und zeigen an mehreren Stellen deutliche Alternativen zu den vertrauten Lehrgängen auf. Dabei richten sie sich an alle, die mit dem Problem vertraut sind: An Grundschul- und Förderschullehrkräfte, an Studierende mit dieser Berufsperspektive und Referendare mit Schwerpunkt Mathematik sowie auch an interessierte Eltern. Die Hochschulausbildung können sie aufgrund der unmittelbaren Verbindung von theoretischen Annahmen und praktischer Umsetzung bereichern. Daneben sind sie auch als Beitrag zur Fortentwicklung der Fachdidaktik im Grundschulbereich zu verstehen und können in Seminaren als Diskussionsanlass genutzt werden.

Die 16 Videos lassen sich in drei Gruppen einteilen: *Grundlagen des Konzepts*, *typische Probleme* sowie *präventiver Unterricht und fördernde Maßnahmen*.

### 1 Videos zu den Grundlagen des Konzepts

In Video 1 und 2 werden die Grundlagen des Konzepts *Rechnen durch Handeln* dargestellt (Abbildung 1). Es wird erläutert, wo die Idee herkam, den fachdidaktischen Lehrgang an der Kulturgeschichte der Zahl neu auszurichten und damit geht es insbesondere darum, die Frage ‚*Was ist eigentlich eine Zahl?*‘ unter diesem Blickwinkel neu zu beantworten. Indem die konkreten Zahlen der Steinzeit, aber auch die der Sumerer, unseren vertrauten Zahl-



Abbildung 1. Chinesische Schriftzeichen für das Wort „rechnen“ (Menninger, 1979, S. 118)

worten und Zahlzeichen gleichwertig zur Seite gestellt werden, wird deutlich, dass ‚die Zahl‘ letztlich ein Gedankenkonstrukt ist, das auf der Oberfläche der Kommunikation unterschiedliche Formen annehmen kann.

Die *innere Zahl*, die sich auf der Oberfläche der Gegenstände, Worte und Zeichen mitteilt, gilt es in den Blick zu nehmen und zu entwickeln. Es ergibt keinen Sinn auf der Oberfläche abstrakt zu werden, wenn das dafür notwendige Abstraktionsniveau im Innern noch nicht erreicht ist. Die intuitiven, an den inneren Konzepten orientierten, Modelle dominieren dann weiterhin das Denken, so dass zwischen dem, was wir im Unterricht zu behandeln meinen und dem, was das Kind in seinem Inneren damit macht, eine Lücke klafft.

Indem bei *Rechnen-durch-Handeln* der Unterricht durch Handlungsprozesse mit *konkreten* (vergegenständlichten) *Zahlen* ergänzt wird, rechnen die Kinder so, wie es alle Kulturen bis ins späte Mittelalter und teilweise bis ins 20. Jahrhundert hinein, getan haben. Dies erlaubt es den Kindern, an den im Abstraktionsniveau wechselnden Handlungsprozessen ihr eigenes Zahlkonzept in Richtung abstrakte Vorstellung allmählich zu entwickeln (Rödler, 1998, 2006, 2016a).

### 2 Videos zu typischen Rechenproblemen

Zwei andere Videos versuchen, die Sichtweise von Rechenanfängern und rechenschwachen Kindern auf Zahlen nachvollziehbar zu machen. In Video 3 (Warum mein Kind mit den Fingern rechnet?) und Video 10 (Was ist so schwer am Zehnerübergang?) wird dargestellt, warum ein Kind, das Zahlen vor allem in der Zahlwortreihe kennt, zählend rechnet und warum es im mehrstelligen Zahlenraum mit den Ziffern als Zahlen rechnet und Zehnerübergänge zu vermeiden versucht. Durch einen einfachen Trick, die Verwandlung der Zahlen und Ziffern in Buchstaben, werden die Probleme von Rechenanfängern und zählenden Rechnern hier sichtbar gemacht. Mit der Besonderheit der deutschen Zahlwörter bis 20 wird deutlich gemacht, warum die Thematisierung des Zehnerübergangs besser gelingt, wenn der zweistellige Zahlenraum – zumindest zählend – vollständig bekannt ist.

### 3 Videos zu präventivem Unterricht und fördernden Maßnahmen

Alle anderen Videos behandeln Einzelaspekte, mit denen vom zählenden und am ziffernorientierten Rechnen fort- und zu einem an kardinalen Grundlagen interessierten und Strukturen nutzenden Rechnen hingeführt werden kann. Dabei werden an mehreren Stellen Vorschläge unterbreitet, die herkömmliche Grundkonzepte infrage stellen. Ein Punkt, der

Abbildung 2. Rechenhandlung  $3 \cdot 4 = 12$  und  $12 : 4 = 3$ 

die wissenschaftliche Diskussion in diesem Bereich inhaltlich bereichert.

Das beginnt mit Video 5 (Durch Rechnen die Zahlen verstehen. – Wie wirken die vier Grundrechenarten?), in dem dargestellt wird, dass es sinnvoll ist, die vertraute Reihenfolge, mit der die vier Grundrechenarten in der Schule eingeführt werden, grundlegend zu verändern. Da es im Anfangsunterricht zunächst um die Entwicklung vom Denken in *kardinalen Zahlbausteinen* geht, welche die Grundlage für ein Denken im *Teile-Ganzes-Prinzip* (Gerster & Schulz, 2004) und damit die Ablösung vom zählenden Rechnen darstellen, wird die Subtraktion der Addition vorangestellt, und Multiplikation und Division werden als Einstieg ins handelnde Rechnen benutzt. Diese drei Operationen machen Zahlbausteine operative Zusammenhänge deutlich besser sichtbar als die Addition, die zu zählendem Rechnen verführt (siehe Abbildung 2). Der Einstieg über Multiplikation und Division wird auch mit dem inklusiven Anspruch des Lehrganges begründet, denn: *Was keiner kann, ist inklusiv!* Aufgaben wie  $3 \cdot 4 =$  oder  $12 : 3 =$  zwingen alle Kinder zum handelnden Lösen und sorgen von Anfang an für „*Kooperation am gemeinsamen Gegenstand*“ (Feuser, 2013).

Die Subtraktion hat gegenüber der Addition den Vorteil, dass durch das Wegschieben des Subtrahenden der Minuend zerlegt wird, was nicht nur den Blick auf Zahlbausteine lenkt, sondern zugleich den Zerlegungsaspekt markant ins Spiel bringt und den operativen Zusammenhang von Addition und Subtraktion als Gegenoperationen zeigt. Das bereitet einer Einführung der Addition den Weg, die zu diesem späten Zeitpunkt weniger zum zählenden Rechnen verführt und auf der Grundlage eines sich allmählich aufbauenden Zerlegungswissens erkannt und gelöst werden kann.

Zu diesem Video gehört unmittelbar Video 4, in dem der Frage ‚*Was ist eigentlich ein gutes Rechenmittel?*‘ für den Einstieg ins Rechnen nachgegangen wird. Es bedarf nämlich eines homogenen, frei hantierbaren Materials (Naturholzwürfel), um die beschriebenen Effekte zu erzielen und mit der Multiplikation einsteigen zu können. Video 8 zeigt, wie das notwendige Zerlegungswissen mit dem

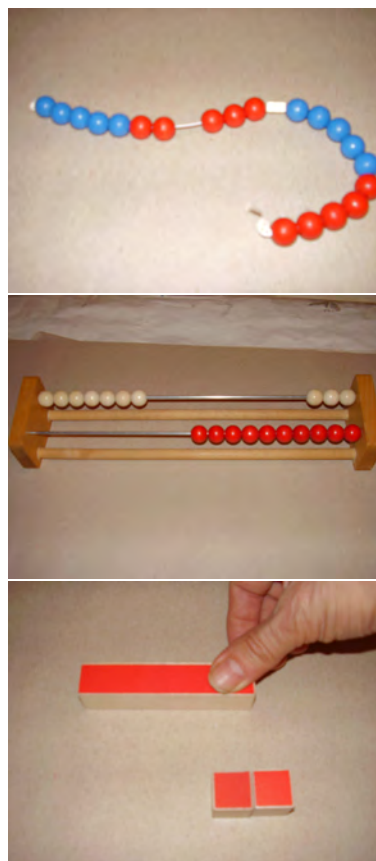


Abbildung 3. Konkrete Fünfer verändern die Handlungserfahrung

Rechnen in Verbindung gebracht und in diesem Zusammenhang gefestigt wird.

Ein zweiter wesentlicher Unterschied des hier vorgeschlagenen Lehrganges ist das Hinausschieben des Zehnerübergangs in das Ende der ersten Klasse und vor allem ins zweite Schuljahr. Dies geschieht hauptsächlich dadurch, dass der Zahlenraum bis 20 zunächst nicht auf Zehnerbasis, sondern auf der Basis von *konkreten Fünfern* geöffnet und bearbeitet wird (Video 11). Das macht möglich, dass die Zehner-Einer-Gliederung der Zahlen im zweiten Zehner, durch für alle Kinder verständliche Rechenhandlungen kennengelernt wird. Gleichzeitig sorgen die Fünferstangen, anders als Rechenmittel wie Perlenkette, Rechenrahmen oder Rechenschiffchen dafür, dass bei der Subtraktion im ganz kleinen Zahlenraum bis fünf ein Entbündelungsproblem entsteht, also das Denken und Rechnen in Schritten vorbereitet wird (siehe Abbildung 3).

Die in Video 13 gezeigte Einführung in den Zehnerübergang greift das auf. Wieder wird mit der Subtraktion begonnen, weil bei dieser – anders als bei der Addition – die Zehnergrenze materiell gegeben, also unausweichlich ist. Zumindest dann, wenn man mit *konkreten Bündelungen* rechnet, also mit Zehnerstangen und nicht mit abzählbaren Rechenmitteln. Bei der Subtraktion erfahren die

Kinder die Zehnergrenze und durch das virtuelle Entbündeln, das an der Fünferstange kennengelernt wurde, das Rechnen in Schritten.

An dieser Stelle zeigt sich die fachdidaktische Bedeutung, die das Konzept der *Zahlen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau* (siehe auch: Rödler, 2011) für den Lehr-/Lernprozess hat. Es erlaubt Rechenmittel in neuer Weise zu beurteilen und einzuordnen. Zumindest dann, wenn man der These folgt, dass das Abstraktionsniveau des Rechenmittels einen Einfluss auf die Rechenhandlungen und die Denkbewegungen des handelnd Rechnenden hat.

Die Videos 12 und 14 zeigen, wie diese Konzeption der *gestuften Rechenmittel* beim Aufbau des Zahlenraumes bis 100 und beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen genutzt werden kann und wie es hierdurch möglich wird, diesen Prozess ohne (!) äußere Differenzierung für alle Kinder einer inklusiven Klasse profitabel zu realisieren. Insbesondere wird gezeigt, wie die Logik des Zehnerübergangs nun im Hunderterraum aufgebaut werden kann und zu greifen beginnt.

Dieses handelnde Begreifen wird in Video 15 als Ausgangspunkt für die Entwicklung von unterschiedlichen Notationen genommen. Notationen, nicht im Sinne von ‚Verfahren‘, sondern als verschriftlichte Rechenhandlungen, sodass das möglich wird, was als „gestütztes Kopfrechnen“ (Schipper et al., 1999) beschrieben werden kann.

Zu diesen Videos, die sich um den Kern des Aufbaus von strukturiertem Rechnen unter Beachtung von Teile-Ganzes-Prinzip, Zehner-Einer-Gliederung und Zehnerübergang drehen, gibt es weitere, welche einerseits der Festigung von Grundlagen und andererseits der Vertiefung des Denkens in Wertebenen dienen:

Video 7 zeigt, wie Zahlen als Zahlbausteine an Gebäuden aus Würfeln kennengelernt und an die



Abbildung 4. Terme  $(3 \cdot 3/2 \cdot 4 + 1)$  als Bauanleitung

$35 - 3 = \underline{\quad}$	$35 - 3 = 32$
$35 - 6 = \underline{\quad}$	<input checked="" type="checkbox"/> $35 - 6 = \underline{\quad}$
$35 - 5 = \underline{\quad}$	$35 - 5 = 30$
$35 - 8 = \underline{\quad}$	<input checked="" type="checkbox"/> $35 - 8 = \underline{\quad}$

Rechne nur die leichten Aufgaben.  
Kreuze an, wo sich der Zehner verändert.

Abbildung 5. Filtern von gemischten Päckchen

sen Termen als mit speziellen Zeichen verschriftlichte Sprache entstehen, so dass Terme ebenso als Beschreibung eines Gebäudes dienen können wie auch als Bauanleitung (Abbildung 4). Ein Thema, das sich Anfang des 1. Schuljahres unmittelbar mit der frühen Behandlung der Multiplikation verbindet und als Anwendung der neu gelernten Operation verstanden werden kann.

Video 9 erläutert, warum es Sinn macht – anders als in Schulbüchern und Lehrgängen üblich – schon ab der ersten Klasse mit *gemischten Größen* zu rechnen, also die Einheiten bei Rechnungen oder Fragestellungen nicht getrennt zu verwenden. Die Notwendigkeit, den Zusammenhang von größerer und kleinerer Einheit zu beachten, zwingt zum Denken in Werten und Wertebenen. Werden dabei Größen mit dezimalem Aufbau verwendet, können diese als Modelle für Zehner, Hunderter und Tausender wirken: Eine Aufgabe wie  $5,2 \text{ cm} - 4 \text{ mm} = \underline{\quad}$  lässt sich beispielsweise durch die Zerlegung in die beiden Einheiten im Zahlenraum bis 10 lösen, bereitet aber zugleich den zweistelligen vor, weil sie zu der Aufgabe  $52 - 4 =$  strukturgleich ist.

Auch Video 16 (*Gemischte Päckchen nach Zehnerübergängen filtern*, Abbildung 5) bietet eine Alternative zu vertrauten Wegen. Zunächst wird erläutert, warum der übliche Einstieg in den zweistelligen Zahlenraum über Analogieaufgaben im 1. wie im 2. Schuljahr für rechenschwache Schüler deshalb kontraproduktiv ist, weil dieser es erlaubt, ohne Beachtung des Zehner-Einer-Zusammenhangs alleine mit Konzepten wie ‚vorne und hinten‘ zu richtigen Lösungen zu kommen, also falsche Vorstellungen durch richtige Lösungen festigen. Dann wird gezeigt, wie Rechenpäckchen, bei denen Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang gemischt sind, helfen, den Blick der Rechnenden auf die Zehnergrenze zu lenken und nach der Ursache für diesen am Ergebnis sichtbaren Unterschied zu forschen. Ist das klar, besteht fortan die erste Aufgabe bei diesen Päckchen im *Filtern*, das heißt im Aussondern der Aufgaben mit Zehnerübergang. Die Analogieaufgaben erscheinen unter diesem Blick ganz automatisch als die ‚leichten‘ Aufgaben, was nun aber unproblematisch ist, weil die Bedeutung des

Zehners beim vorangegangenen Filtern ja im Spiel geblieben ist.

Die insgesamt 16 Videos richten sich vorrangig an interessierte Lehrkräfte, die, weil sie in ihrem Unterricht vor Problemen stehen, nach Rat und Alternativen suchen. Sie suchen nach Alternativen, weil ihr Unterricht sie – warum auch immer – in eine Sackgasse geführt hat. Ihnen können die Videos neue Wege aufzeigen.

Gleichzeitig ermöglichen hier vertretene Grundsätze wie *Subtraktion vor Addition, keine Einführung neuer Zahlenräume über Analogieaufgaben oder Verwendung von Bündelungselementen bei der Thematisierung von Zehnerübergängen* es der fachdidaktischen Community, bestehende Theorien und Konzepte unter diesem Blickwinkel neu zu diskutieren.

#### 4 Literatur

- Feuser, G. (2013). Kooperation am gemeinsamen Gegenstand. In G. Feuser & J. Kutscher (Hrsg.), *Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik*, (Bd. 7) (S. 282–293) Stuttgart: Kohlhammer.
- Gaidoschik, M., Felmann, A., Guggenbichler, S., & Thomas, A. (2017). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(1), 93–124.
- Gerster, H-D., & Schulz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Verfügbar unter: <http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf> (Abruf am 2. 12. 2018).
- Lorenz, J-H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Göttingen: Hogrefe.
- Menninger, K. (1979). *Zahlwort und Ziffer – Eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau*, 65(4), 401–426.
- Rödler, K. (1998). Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen – Eine sozialkundliche Einführung in mathematisches Denken. *Grundschule*, 30(5), 45–48.
- Rödler, K. (2006). *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln*. Seelze: Kallmeyer.
- Rödler, K. (2010). Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten. *Sache-Wort-Zahl*, 36(114), 44–48.
- Rödler, K. (2011). Zahlen und Rechenvorgänge auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus. In M. Helmerich & K. Lengnink et al. (Hrsg.) *Mathematik verstehen* (S. 131–145). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Rödler, K. (2012). Frühe Alternativen zum Zählen. *Sache-Wort-Zahl*, 40(129), 9–16.
- Rödler, K. (2016a). *Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./2. Klasse*. Hamburg: aol Verlag.
- Rödler, K. (2016b). Ein Mathematikunterricht für alle! – 10 Bausteine für einen inklusiven MU. *Behinderte Menschen*, 38.
- Radatz, H., & Schipper, W. et al. (1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht 3. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.
- Von Aster, M., & Lorenz J.-H. (Hrsg.) (2005). *Rechenstörungen bei Kindern*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.
- Weißhaupt, S., & Peuckert, S. Entwicklung arithmetischen Vorwissens. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.) *Handbuch Rechenschwäche* (S. 52–76). Weinheim: Beltz Verlag.

Klaus Rödler  
E-Mail: [klaus.roedler@onlinehome.de](mailto:klaus.roedler@onlinehome.de)  
Homepage: [www.matheinklusiv.de](http://www.matheinklusiv.de)

## Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells

Hans-Dieter Sill

Eine Möglichkeit zum Modellieren des Lernens von Mathematik ist das konstruktivistische Lernmodell. Es lässt sich skizzenhaft durch folgende Merkmale beschreiben (s. z. B. Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin. Cornelsen Scriptor).

- Lernen ist eine aktive, autonome Konstruktion von Wissen. Jeder konstruiert sich sein eigenes

Bild von der Welt. Ein Vergleich dieses Bildes mit der wahren Beschaffenheit der Welt ist weder sinnvoll noch möglich.

- Wichtigste Vorbedingung für den Konstruktionsprozess ist die individuell erworbene kognitive Struktur des Lernens. Die vorhandene geistige Struktur des Lernenden ist die einzige relevante Größe für Verlauf und Ergebnisse des Lernens.

- Wichtigstes Kriterium für die Wirklichkeitskonstruktion ist die Viabilität. Der Lernende beobachtet seine Umwelt und beurteilt den Erfolg seiner Handlungen und Theorien. Erfolgreiche Strategien werden als viable Wege erfahren, um an sein Ziel zu kommen.

Aus diesem Lernmodell ergeben sich aus meiner Sicht unter anderem folgende Konsequenzen für den Mathematikunterricht, die wiederum nur stichpunktartig angegeben werden:

1. Es sind in Lehrplänen keine konkreten Zielangaben und Zeitrichtwerte möglich und sinnvoll. In Umsetzung dieser Doktrin wurden zum Beispiel in Nordrhein-Westfalen zu Beginn der 2000er Jahre alle bisherigen, in jahrzehntelanger Arbeit entstandenen Mathematiklehrpläne aller Schularten durch sehr kurzfristig entwickelte Kernlehrpläne ohne konkrete Inhalts- und Zeitangaben ersetzt.
2. Ein systematisches, fachorientiertes Lernen wird infrage gestellt. Der Unterricht wird projiziert als eine Aneinanderreihung von komplexen „Lerngelegenheiten“, in denen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen selbst konstruieren sollen.
3. Damit einher gehen sowohl eine stärkere Berücksichtigung schüleraktiver Arbeitsformen als auch eine stärkere Selbstverantwortung für den Lernprozess.
4. Die Lerngelegenheiten orientieren sich an Schülerinteressen und ihrer Erlebniswelt.
5. Es wird ein kumulatives Lernen projiziert, da das neue Wissen mit dem vorhandenen verknüpft werden soll.
6. Fehler von Schülern und Schülerinnen werden als Indikator von Schülervorstellungen verstanden und es wird ein konstruktiver Umgang mit Fehlern konzipiert.

Ein Beispiel für ein Unterrichtswerk, das diesen Prinzipien folgt, ist z. B. die Reihe „Mathewerkstatt“ im Cornelsen-Verlag, mit der sich Thomas Jahnke in den *GDM-Mitteilungen* Nr. 98 kritisch auseinandergesetzt hat. Ich möchte ergänzend anmerken: Das Bild von Mathematikdidaktik wird in der Schule vor allem durch Unterrichtsreihen geprägt. Wenn sich vier renommierte Mathematikdidaktikerinnen bzw. Mathematikdidaktiker zu einem solchen Projekt zusammenschließen und damit den Anspruch erheben, eine neue Form von Mathematikunterricht und seinen zentralen Planungsmitteln zu kreieren, übernehmen sie eine große Verantwortung. Es ist sehr anerkennenswert, dass sie die unendliche Mühe auf sich genommen haben, ein so komplexes in sich geschlossenes Unterrichtswerk zu entwickeln,

das auf einer einheitlichen theoretischen Grundlage basiert. Sie sollten aber die Konsequenz aufbringen, ihr eigenes Unterrichtswerk auch aus konstruktivistischer Sicht zu beurteilen. Wenn es sich für den Mathematikunterricht nicht als viabel erweist, müsste dies auch mit allen Konsequenzen von ihnen eingestanden werden, um Schaden von der Mathematikdidaktik abzuwenden.

Ich halte ein anderes Modell des Lernens von Mathematik, das ich in meinem Lehrbuch „Grundkurs Mathematikdidaktik“ ausführlich dargelegt habe, für viabler zur Gestaltung erfolgreichen Unterrichts (Sill, 2018). Die Konsequenzen (3) bis (6), die ich für sinnvoll halte, folgen auch aus meinem Modell.

Mögliche Fehlorientierungen, die sich aus dem konstruktivistischen Lernmodell ergeben, sind mir bei unseren Arbeiten zu einem Lehrbuch zur Didaktik der Stochastik in der Primarstufe aufgefallen, das demnächst erscheinen wird. Es betrifft das Lösen von kombinatorischen Aufgaben. Mit dem erklärten Ziel, die individuelle kognitive Struktur von Lernenden als entscheidende Voraussetzung für Verlauf und Ergebnisse des Lernens zu erforschen, wurden zwei umfangreiche empirische Untersuchungen in der Primarstufe durchgeführt (Hoffmann 2003; Höveler 2014). Beide Doktorandinnen haben das ihnen gestellte Ziel in wissenschaftlich akkurater Weise bearbeitet. Fragen nach dem eigentlichen Sinn ihrer Arbeit bezogen auf den Mathematikunterricht haben sie sich aber, zumindest in ihren Publikationen, nicht gestellt. Dazu gehören:

1. Was macht es für einen Sinn, Schülerinnen und Schüler anspruchsvolle Aufgaben lösen zu lassen, die noch nicht Gegenstand des Unterrichts waren?

In beiden Untersuchungen wurden Schülerinnen und Schüler der Primarstufe interviewt, bei denen im Unterricht das Lösen kombinatorischer Aufgaben noch nicht behandelt wurde. Nun kann man einwenden, dass die Kinder ja die mathematischen Voraussetzungen in Form des Könnens im Lösen der entsprechenden Rechenaufgaben hatten und ihnen auch die Sachverhalte vertraut waren. Schließlich müssen sie auch bei jeder Sachaufgabe ihr Wissen und Können in einem neuen Sachzusammenhang anwenden. Im Unterschied zum Lösen von „normalen“ Sachaufgaben stellt das Lösen kombinatorischer Aufgaben in bekannter Weise sehr hohe Anforderungen, denen selbst Lehramtsstudierende nach erfolgter mathematischer Ausbildung selten gewachsen sind. Das Konfrontieren von Kindern mit Anforderungen, denen sie überhaupt nicht gewachsen sind, ist eine Situation, die im Unterricht nicht auftreten sollte.



2. Was macht es für einen Sinn, die zahlreichen Lösungsversuche und auch sinnvollen Lösungs-ideen der Schülerinnen und Schüler akribisch zu untersuchen und zu klassifizieren?

Die beeindruckende Zahl von Möglichkeiten der Bearbeitung der Aufgaben und der dabei entwickelten Ideen und Lösungsstrategien sind für den Unterricht von marginaler Bedeutung. Die Untersuchungen beweisen ja gerade, dass es ausgeschlossen ist, dass Schülerinnen und Schüler von alleine auf die entsprechenden Möglichkeiten zum Lösen der Aufgaben kommen. Nach den ersten Instruktionen und Übungen im Unterricht haben sich die individuellen Voraussetzungen zum Lösen der nächsten Aufgaben grundlegend geändert und die Untersuchungsergebnisse sind kaum noch relevant.

3. Was macht es für einen Sinn, Kinder mit Aufgaben zu konfrontieren, die aus didaktischer Sicht kein Inhalt des Unterrichts in der Primarstufe sein sollten?

Bei den Aufgaben, mit denen die Schülerinnen und Schüler konfrontiert wurden, waren alle Haupttypen kombinatorischer Aufgaben vertreten. Es zeigte sich, dass bei den Aufgaben, die nicht alleine durch Multiplikation lösbar waren, die meisten Fehler auftraten. Genauso wenig wie alle Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen bereits in der Primarstufe uneingeschränkt ausgeführt werden sollten, ist es auch nicht erforderlich, dass bereits alle kombinatorischen Aufgaben gelöst werden müssen. Eine Beschränkung auf Aufgaben, die nur durch Multiplikation, also durch Anwendung des Kreuzproduktes oder der Produktregel lösbar sind, ist eine didaktisch sinnvolle Entscheidung, die dann auch das Untersuchungsfeld der beiden Forschungsarbeiten wesentlich eingeschränkt hätte.

4. Was macht es für einen Sinn, immer wieder etwas zu untersuchen, was längst bekannt ist?

Spätestens seit den empirischen Untersuchungen der Didaktikerin Lyn D. English seit Beginn der Neunzigerjahre ist bekannt, was erfahrene Praktiker schon längst wussten, nämlich welche erheblichen Probleme Lernende beim Lösen kombinatorischer Aufgaben haben und welche unterschiedlichen Strategien dabei auch von Unerfahrenen zur Anwendung kommen.

Angesichts der zahlreichen, noch nicht wissenschaftlich untersuchten Fragen, die von entscheidender Bedeutung für den Erfolg eines Unterrichts zur Kombinatorik sind, stellen für mich die genannten Untersuchungen eine Verschwendung von Forschungsgeldern dar. Zu den offenen Fragen gehören unter anderem:

- Wie lösen Lehrpersonen in der Primarstufe kombinatorische Aufgaben und wie können sie in effektiver Weise befähigt werden, dies zu tun?
- Wie können Schülerinnen und Schüler in der Primarstufe befähigt werden
  - systematisch beim Finden von Möglichkeiten vorzugehen,
  - mit kombinatorischen Baumdiagrammen zu arbeiten oder
  - die Produktregel anzuwenden?

Zur wissenschaftlichen Beantwortung all dieser Fragen sind Materialentwicklungen und empirische Untersuchungen zur Durchführung und Nachhaltigkeit des entsprechenden Unterrichts erforderlich. Es müssen Varianten des Vorgehens erprobt und miteinander verglichen werden. Es müssen Typen von Lehrpersonen hinsichtlich ihrer fachlichen und didaktischen Befähigung unterschieden werden.

Am Rande sei noch bemerkt, dass es für mich völlig unverständlich ist, wenn immer noch an den sogenannten kombinatorischen Figuren Permutationen, Variationen, Kombinationen mit und ohne Wiederholung zum Beschreiben und Lösen von Aufgaben festgehalten wird. Davon abgesehen, dass mit ihnen ein wesentlicher Typ von Aufgaben nicht erfasst wird, haben sie sich in der schulischen Praxis und in der Praxis der Lehrerbildung im Lernprozess als ungeeignet erwiesen. Darauf haben bereits Hefendehl-Hebeker und Törner (1984) in einem Grundsatzartikel hingewiesen.

## Literatur

- Hefendehl-Hebeker, L., & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik*, 12(4), S. 245–262.
- Hoffmann, A. (2003). *Elementare Bausteine der kombinatorischen Problemlösefähigkeit*. Hildesheim: Franzbecker.
- Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern*. Dissertation. TU Dortmund.
- Sill, H.-D. (2018). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Paderborn: Ferdinand Schöningh (StandardWissen Lehramt, 5008).

Hans-Dieter Sill, Universität Rostock  
E-Mail: [hans-dieter.sill@uni-rostock.de](mailto:hans-dieter.sill@uni-rostock.de)

## Landesverband GDM Schweiz – Jahresbericht 2018

---

Esther Brunner und Lis Reusser

### Wintertagung

Der Jahresbericht der GDM Schweiz bezieht sich auf das Kalenderjahr 2018 und beginnt mit der Jahrestagung, die am 19. 1. 2018 an der Pädagogischen Hochschule Bern in Bern stattfand. Der thematische Fokus der Tagung lag auf der Auseinandersetzung mit Erkenntnissen aus der Professionalisierungsforschung von Mathematiklehrpersonen, insbesondere zu ihrem Fachwissen und ihren mathematikspezifischen Überzeugungen zum Fach selbst und zum Lehren und Lernen von Mathematik. Das Tagungskonzept sah vor, am Vormittag zwei Impulsreferate – aus der Mathematikdidaktik und aus dem Bereich der Erziehungswissenschaften – anzubieten und die Referate am Nachmittag in moderierten Gesprächsgruppen vertiefend im Hinblick auf die eigene Lehre und Rolle zu diskutieren.

Im ersten Referat beleuchtete Prof. Dr. Christian Brühwiler, PHSG zum Thema „Genese und Wirkungen berufsbezogener Überzeugungen von Mathematiklehrpersonen“, nach einer begrifflichen Klärung theoretische Konzeptualisierungen berufsbezogener Überzeugungen im Fachbereich Mathematik und stellte aktuelle Forschungsbefunde vor. Im Fokus standen dabei folgende Fragebereiche: (1) Wie entwickeln sich berufsbezogene Überzeugungen (zum Lehren und Lernen sowie zur Struktur von Mathematik) während der Lehrerausbildung und in den ersten Berufsjahren? (2) Lässt sich eine Veränderung in den Überzeugungen auf unterschiedliche (mathematik-didaktische) Lerngelegenheiten zurückführen? (3) Welche Effekte zeigen sich von den Überzeugungen auf die Gestaltung von Mathematikunterricht und die Mathematikleistungen der Schülerinnen und Schüler? Christian Brühwiler gab dazu eine Übersicht über den allgemeinen Forschungsstand und stellte Ergebnisse aus eigenen Untersuchungen im Rahmen von TEDS-M und der vom Schweizerischen Nationalfonds geförderten Studie WiL (Wirkungen der Lehrerausbildung auf professionelle Kompetenzen, Unterricht und Schülerleistung) vor und diskutierte die Ergebnisse insbesondere mit Blick auf die Professionalisierung von Mathematiklehrpersonen.

Als zweites Referat war Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter zum Thema „Professionalisierungsforschung: Erkenntnisse zum Professionswissen von Mathematiklehrkräften und Erfordernisse ei-

ner gegenstandsbezogenen Lernprozessforschung“ vorgesehen. Leider musste Bettina Rösken-Winter wegen einer saisonalen Grippe ihr Kommen kurzfristig absagen, sodass vom Vorstand maximale Flexibilität und Problemlösekompetenz gefragt waren. Es gelang, eine Kollegin der PH Bern, Prof. Dr. Daniela Freisler-Mühlemann, zu gewinnen. Sie stellte Ergebnisse aus einer qualitativen Studie vor und referierte zum Thema „Berufsbiografien und Professionalisierung von Lehrpersonen“.

Die beiden Referate ergänzten sich thematisch gut, sodass eine solide inhaltliche Grundlage bestand, auf der am Nachmittag in den moderierten Gesprächsgruppen intensiv diskutiert werden konnte. Den Abschluss der Tagung rund um das Thema „Professionalisierung“ bildete eine kurze Information von Roland Keller, PHZH und Helmut Linneweber-Lammerskitten, FHNW zu den aktuellen Entwicklungen rund um die laufenden und zukünftigen Masterstudiengänge Mathematikdidaktik. Die nächste Jahrestagung im Januar 2019 wird an der PH in Luzern stattfinden.

### Mitgliederversammlung

Die Mitgliederversammlung fand anlässlich der Jahrestagung am 19. 1. 2018 unter der Leitung von Esther Brunner statt. Das Protokoll der Mitgliederversammlung von 2017 wurde genehmigt und der Tagesaktuarin Renate Pfendsack mit Applaus gedankt; der Jahresbericht 2017 der beiden Co-Präsidentinnen sowie die Rechnung 2017 inkl. Bericht der Revisoren, wurden ebenfalls mit Applaus verdankt. Wichtiges Geschäft waren die Ergänzungswahlen in den Vorstand nach den Rücktritten von Christof Weber, FHNW und Peter Flury, PHZH. Die beiden Kollegen wurden im Anschluss an die Tagung anlässlich eines feinen Nachtessens in kleinem Rahmen verabschiedet. Neu in den Vorstand gewählt wurden Stephan Schönenberger, PHSG sowie Kathleen Philipp, FHNW. Nach 40 Minuten war die Mitgliederversammlung zu Ende.

### Weitere Anlässe: Fachdidaktische Diskussion

Im September konnten zum Thema „Digitalisierung in der Lehre“ zwei interessante Impulsreferate

angeboten werden. Prof. Dr. Dominik Petko, Universität Zürich, referierte rund um das Thema Digitalisierung in der Lehre und im Unterricht und gab einen fundierten Überblick über Forschungsbefunde, Möglichkeiten und Grenzen einer digitalisierten Lehre. Stephan Schönenberger konkretisierte diese Ausführungen anschließend am Beispiel der eigenen Lehre der Mathematikdidaktik. Im Anschluss an die beiden Impulsreferate nutzten die gut 30 Anwesenden die Diskussion rege.

### Vorstandssitzungen und Geschäfte

Der Vorstand traf sich zwischen Februar und Dezember 2018 zu drei Sitzungen und beschäftigte sich mit zahlreichen Geschäften. Die erste Sitzung Ende Februar stand im Zeichen des Rückblicks auf die Jahrestagung und die Mitgliederversammlung und diente der Festlegung des Jahresprogramms. Zudem wurden die Aufgaben innerhalb des Vorstands verteilt und den beiden neuen Vorstandsmitgliedern Aufgabenbereiche zugewiesen. Kathleen Philipp übernimmt das Protokoll und Stephan Schönenberger wird ab 2019 die Website betreuen. Intensiv diskutiert wurde auch das Thema möglicher Ehrenmitgliedschaften der GDM Schweiz. Der Vorstand beschloss, vorerst auf die Schaffung von Ehrenmitgliedschaften zu verzichten. Zudem wurde aus verschiedenen Kommissionen berichtet: Lis Reusser berichtete von der KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz), Esther Brunner von der Beiratssitzung der GDM und Marianne Walt von der SGL (Schweizerische Gesellschaft für Lehrerinnen- und Lehrerbildung).

Die zweite Vorstandssitzung im Mai befasste sich insbesondere mit der Planung der Wintertagung 2019 sowie Überlegungen zu einer fachdidaktischen Diskussion zum Thema Digitalisierung.

Die Planung der Wintertagung 2019 war auch in der dritten Vorstandssitzung ein wichtiges Thema. Zudem wurde in Zusammenarbeit mit Norbert Hungerbühler, dem Präsidenten der SMG (Schweizerische Mathematische Gesellschaft), im Vorstand die mögliche Nachfolge von Torsten Linnemann als ICMI Representative diskutiert. Esther Brunner informierte, dass die Schweizerische Mathematische Gesellschaft zuständig ist, eine Person als ICMI Representative zu bestimmen und auch das Wahlremium darstellt. Esther Brunner und Norbert Hungerbühler waren diesbezüglich im Vorfeld miteinander im Gespräch und waren sich einig, dass es wünschenswert wäre, wenn die SGM erneut eine Person nominieren – und hoffentlich wählen – würde, die in beiden Gesellschaften – SMG und GDM – Mitglied ist. Stephan Schönenberger stellte sich verdankenswerterweise zur Verfügung und wird der SGM im Frühling 19 anlässlich der Jahrestagung

zur Wahl vorgeschlagen. Wir freuen uns über die gelungene Zusammenarbeit in dieser Beziehung, konnten wir doch hier aktiv mitbestimmen, obwohl die GDM Schweiz nicht für die Wahl verantwortlich ist.

### Weitere Sitzungen

Der Beirat der GDM tagte im März am Sonntag vor der GDM Jahrestagung in Paderborn und Ende Oktober in Frankfurt. An der zweiten Sitzung, die jeweils von 11–18 Uhr dauert, nahm Esther Brunner teil. An der ersten war die GDM Schweiz nicht vertreten, da Esther Brunner wegen eines grippalen Infektes nicht nach Paderborn reisen konnte.

An den beiden Sitzungen der KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz) nahm Lis Reusser teil. Im Januar ging es u. a. um einen Rückblick auf die gelungene gemeinsame Tagung GFD/KOFADIS in Freiburg i. Br. vom September 2017. Des Weiteren wurde über das Projekt (P9) zur Förderung der Fachdidaktiken von Swissuniversities informiert. Im Anschluss an die Sitzung fand ein Kolloquium zum Thema „Braucht es eine allgemeine Fachdidaktik?“ statt.

Im September wurde u. a. das Qualifikationsprofil für die Besetzung von Dozierendenstellen in Fachdidaktiken diskutiert. Der Vorstand der KOFADIS hat dazu ein Paper verfasst, welches im Rahmen eines „Café didactique“ am 14. Januar 2019 an der PH Bern mit interessierten Personen aus den verschiedenen Fachverbänden diskutiert werden soll.

### Dank

All den zahlreichen Kolleginnen und Kollegen, die in diesem Jahr aktiv zum Gelingen der Aktivitäten der GDM Schweiz beigetragen haben, danken wir sehr herzlich. Ein ganz besonderes Dankeschön geht an unsere Kolleginnen und Kollegen aus dem Vorstand und an Marianne Walt von der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik der SGL für die konstruktive Zusammenarbeit und Unterstützung.

Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau, Kreuzlingen  
Email: [esther.brunner@phtg.ch](mailto:esther.brunner@phtg.ch)

Lis Reusser, Pädagogische Hochschule Bern  
Email: [lis.reusser@phbern.ch](mailto:lis.reusser@phbern.ch)

## Bericht zur GDM Nachwuchskonferenz 2018 in Münster

---

Katharina Kirsten, Johanna Rellensmann und Gilbert Greefrath, Stanislaw Schukajlow

Die GDM Nachwuchskonferenz fand vom 1.–5. 10. 2018 auf der Jugendburg Gemen statt. Die Konferenz für Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler der Mathematikdidaktik wurde im Jahr 2018 von der Universität Münster (AG Greefrath und AG Schukajlow) organisiert.

Das große Interesse der Promovierenden an einer gemeinsamen Konferenz und am gemeinschaftlichen Austausch zeigte sich bei der Anmeldung im Frühjahr 2018: Die 70 Teilnehmerplätze wurden vollständig vergeben, eine Warteliste musste eingerichtet werden. Schließlich reisten 70 Promovierende (46 weiblich, 24 männlich) von 29 unterschiedlichen Hochschulen aus Deutschland, Österreich und der Schweiz an. Empfangen wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auf der Wasserburg in Borken-Gemen, die eine malerisch-historische Kulisse und geeignete Arbeitsbedingungen für die Nachwuchskonferenz bot.

Das inhaltliche Programm der Nachwuchskonferenz wurde von Expertinnen und Experten der Mathematikdidaktik und benachbarter Disziplinen gestaltet und umfasste Hauptvorträge, Workshops, Runde Tische und Einzelberatungen. Das inhaltliche Zusammenspiel sowie das zeitliche Verhältnis von Programm und Freizeit wurden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sehr positiv bewertet. Zu den einzelnen Programmpunkten:

In diesem Jahr präsentierten drei hochkarätige Expertinnen und Experten der Mathematikdidaktik und benachbarter Disziplinen forschungsrelevante Themen und/oder Methoden im Rahmen von *Hauptvorträgen*. Prof. Dr. Philipp Mayring referierte am Dienstag über Möglichkeiten und Probleme qualitativer Forschung in der Fachdidaktik und ging dabei insbesondere auf Möglichkeiten und Grenzen der Qualitativen Inhaltsanalyse ein. Am Mittwoch gab Prof. Dr. Gabriele Kaiser einen Einblick in die mathematikdidaktische Forschung am Beispiel der Erfassung von Lehrerkompetenzen. Dabei teilte sie ihre Erfahrungen aus der Betreuung von zahlreichen erfolgreichen Promotionen mit den Teilnehmerinnen und Teilnehmern. Am Donnerstag reiste Prof. Dr. Lieven Verschaffel aus Belgien an, um einen Vortrag über Zielsetzungen und Merkmale von Interventionsstudien in der Mathematikdidaktik zu halten. Alle Vorträge wurden positiv evaluiert und von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern mit großer Zustimmung für zukünftige Nachwuchskonferenzen empfohlen.

Das Programm beinhaltete 15 unterschiedliche *Workshops*, die in fünf Workshopschienen angeboten wurden. Die Workshops behandelten qualitative und quantitative Forschungsmethoden sowie forschungsmethodisch übergreifende Themen (z. B. Zeitmanagement und Schreibfertigkeiten). Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten aus dem in Tabelle 1 aufgeführtem Workshopangebot wählen.

Alle Workshopthemen sowie die Expertinnen und Experten wurden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern sehr positiv evaluiert und für zukünftige Veranstaltungen empfohlen. Insbesondere die Workshops zu Forschungsmethoden sowie zum Publizieren stießen auf großes Interesse bei den Teilnehmerinnen und Teilnehmern.

Im Rahmen von *Runden Tischen* erhielten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Möglichkeit, ihr Forschungsprojekt mit einer Expertin oder einem Experten sowie den anderen Teilnehmenden der Konferenz zu diskutieren. Etwa 35 % der Teilnehmerinnen und Teilnehmer nahmen die Möglichkeit einer Beratung an einem Runden Tisch wahr. Die Evaluation und Weiterempfehlung dieses Beratungsformats fiel positiv aus – sowohl von den Teilnehmenden, die einen eigenen Runden Tisch gestalteten, als auch von denen, die den Runden Tischen als Diskutanten beiwohnten.

Darüber hinaus hatten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Möglichkeit, ihr Promotionsvorhaben mit einer Expertin oder einem Experten der Mathematikdidaktik in einer *Einzelberatung* zu diskutieren. Dieses Angebot richtete sich insbesondere auch an Promovierende, die erst kürzlich mit ihrem Promotionsprojekt begonnen hatten. Alle 29 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die eine Einzelberatung wahrnahmen, bewerteten die Beratung als sehr hilfreich und empfahlen dieses Beratungsformat ausnahmslos für zukünftige Nachwuchsveranstaltungen.

Das inhaltliche Konferenzprogramm wurde durch ein ausgewogenes *Freizeitprogramm* abgerundet. Am Montag wurde zum Kennenlernen ein PhD-Speed-Meet organisiert, bei dem die Teilnehmerinnen und Teilnehmer entsprechend der herkömmlichen Speeddating-Regeln ins Gespräch kamen und sich über ihre jeweiligen Forschungsinteressen austauschen konnten. Am Dienstag lud der Burgkeller zu einem hitzigen Kicker-Turnier, angeregten Diskussionen, gemeinsamem Musizieren oder dem Genuss eines Kaltgetränks ein. Am Mitt-



Teilnehmerinnen und Teilnehmer der GDM Nachwuchskonferenz 2018

wochnachmittag wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bei einer Stadtführung mit Pumpernickel und Korn durch Münster geführt. In gewohnter Gesellschaftsabend-Manier wurde am Donnerstagabend im Burgkeller zum Tanz aufgespielt.

Die Teilnehmenden sahen den persönlichen Gewinn durch die Teilnahme an der GDM Nachwuchskonferenz 2018 insbesondere in zwei Bereichen: Zum einen erhielten sie konkrete Ideen für die Weiterarbeit an ihrem Promotionsprojekt und erweiterten ihre generelle professionelle Expertise. Zum anderen wurden auch das Knüpfen neuer Kontakte sowie der persönliche Austausch als wertvoll empfunden. Damit wurden wesentlichen Ziele der Nachwuchskonferenz erreicht.

Zur *Finanzierung* der Nachwuchskonferenz kann Folgendes berichtet werden: Die Kosten für die Durchführung der GDM Nachwuchskonferenz beliefen sich im Jahr 2018 auf ca. 24.000 €. Der Großteil der Kosten entstand durch die Finanzierung der Unterkunft und der Verpflegung für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer. Die Gesamtkosten werden vollständig durch Teilnehmerbeiträge und durch einen Zuschuss der GDM getragen.

Zuletzt möchten wir unseren *Dank* aussprechen: Wir danken den Expertinnen und Experten, die durch ihre Workshops-, Vortrags- und Beratungsformate die Nachwuchskonferenz mitgestaltet und für die Teilnehmenden so wertvoll gemacht haben! Unser Dank gilt außerdem der GDM, ohne deren

Tabelle 1. Workshopangebot

Workshop I	Interviewmethoden (K. Höveler)	Fragebogenkonstruktion (S. Rach/S. Ufer)	Interpretative Forschungsansätze (E. Söbbeke)
Workshop II	Qualitative Inhaltsanalyse (P. Mayring)	Testkonstruktion (S. Rach/S. Ufer)	Zeit- und Selbstmanagement (N. Echterhoff)
Workshop III	Grounded Theory (S. Rezat)	Statistische Auswertungen (S. Krauss)	Publizieren (R. Sträßer)
Workshop IV	Design Research (S. Prediger)	Interventionsstudien (L. Verschaffel)	Präsent vortragen (E. Zitzmann)
Workshop V	Mixed Methods (B. Rott)	Kompetenzmodellierung (J. Bruns)	Schreibwerkstatt (M. Paaß)

Bezuschussung die Organisation einer für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer so kostengünstigen Veranstaltung nicht möglich wäre. Ein großes Dankeschön geht außerdem an Rudolf Sträßer, der die Konferenz die ganze Woche über begleitete. Mit seinem großen Erfahrungsschatz stand er den Teilnehmerinnen und Teilnehmern jederzeit in gewohnt offen-ehrlicher Art konstruktiv beratend zur Seite.

Katharina Kirsten, Universität Münster

E-Mail: [k.kirsten@uni-muenster.de](mailto:k.kirsten@uni-muenster.de)

Johanna Rellensmann, Universität Münster

E-Mail: [johanna.rellensmann@uni-muenster.de](mailto:johanna.rellensmann@uni-muenster.de)

Gilbert Greefrath, Universität Münster

E-Mail: [greefrath@uni-muenster.de](mailto:greefrath@uni-muenster.de)

Stanislaw Schukajlow, Universität Münster

E-Mail: [schukajlow@uni-muenster.de](mailto:schukajlow@uni-muenster.de)

## Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 3. 3. 2018 in Paderborn

---

Zeit: 16.30–18.30 Uhr

Ort: Universität Paderborn

Andreas Eichler begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an die seit der letzten Mitgliederversammlung verstorbenen Kolleg(inn)en:

- Heinrich Winter (2017)
- Gerhard Preiß (2017)
- Ernst Eggers (2017)
- Anna-Maria Fraedrich (2018)

### TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Das in Heft 103 der Mitteilungen der GDM (S. 49–53) enthaltene Protokoll der Mitgliederversammlung vom 2. 3. 2017 in Potsdam wird ohne Änderungen bestätigt, die gedruckte Fassung der Tagesordnung in Heft 104 der *Mitteilungen der GDM* (S. 53) wird ohne Änderungen beschlossen.

### TOP 2: Bericht des Vorstands

#### 2.1 Aktuelles aus Vorstand und Beirat

Andreas Eichler berichtet über die seitens des Vorstands wahrgenommenen Termine (Ort und wahrnehmende Personen jeweils in Klammern):

- 26. 4. 17 Festkolloquium Prof. Dr. M. Toepell (Grußwort) (Leipzig, S. Ruwisch)
- 15./16. 5. 17 Mitgliederversammlung der GFD (Berlin, A. Eichler, T. Fritzlär)
- 15. 8. 17 Sitzung des Vorstands (Hannover, A. Eichler, S. Ruwisch, T. Fritzlär, A. Vohns)
- 27. 10. 17 Gemeinsame Sitzung von Vorstand und Beirat (Hannover, A. Eichler, S. Ruwisch, T. Fritzlär, A. Vohns)
- 17. 11. 17 Mitgliederversammlung der GFD (Berlin, A. Eichler)
- 15. 12. 17 Sitzung der gemeinsamen Kommission Übergang Schule – Hochschule (Kassel, A. Eichler)
- 2. 3. 18 Tagung „Förderung mathematischer Kompetenzen – Rückblick und Ausblick“ (Berlin, A. Eichler)

Im Rahmen der *gemeinsamen Sitzung von Vorstand und Beirat* am 27. 10. 2017 wurden als neue *Mitglieder des wissenschaftlichen Beirats des JMD* Christiane Benz, Aiso Heinze und Anna Praetorius gewählt, Timo Leuders und Rudolf Sträßer wurden wiedergewählt.

Im Rahmen der *gemeinsamen Sitzung von Vorstand und Beirat* am 4. 3. 2018 wurden als Mitglieder der Förderpreisjury der GDM Rudolf Sträßer (Vorsitz), Andreas Büchter, Christine Knipping, Colette Laborde, Silke Ruwisch und Stefan Ufer gewählt. Weitere Themen dieser Sitzung waren:

- *Die Zukunft von MathEduc*: Die technischen Fragen einer Integration in Madipedia sind weitgehend geklärt, einige rechtliche Fragen hinsichtlich der Datenübernahme vom FIZ müssen noch geklärt werden.
- *Die Ausarbeitung von Guidelines für die Veranstalter von Jahrestagungen*: Dieses Thema hat Vorstand und Beirat über einige Jahre kontrovers beschäftigt. Die derzeit ausgearbeiteten Guidelines sollen einen Kompromiss zwischen der trotz der zunehmenden Größe der Tagung immer schwerer zu erreichenden Inklusivität, und einer eigenen Schiene mit Qualitätskontrolle durch Reviewverfahren darstellen. Sie sollen zudem größere Kohärenz zwischen den Jahrestagungen herstellen und einige bislang nur mündlich weitergetragene Traditionen codifizieren. Die Guidelines sollen demnächst auch auf der Homepage der GDM veröffentlicht werden. Der erste Vorsitzende weist darauf hin, dass die Ausarbeitung solcher Guidelines nicht als abgeschlossener Vorgang sondern als auch künftig zu optimierender Prozess zu sehen ist.
- *Zeitschriftenprojekt „Mathematikdidaktische Forschung für die Praxis“*: Angedacht ist hier, neben dem JMD als wissenschaftliches Publikationsorgan eine weitere Zeitschrift mit Hauptzielgruppe Mathematiklehrpersonen als Open-Access-Online-Journal zu etablieren, in der die seitens der GDM-Mitglieder erarbeiteten Forschungsergebnisse in praxisorientierter Form publiziert werden sollen. Seitens Beirat und Vorstand sind Timo Leuders und Gilbert Greefrath beauftragt worden, dieses Projekt weiter zu betreuen.
- *Symposium: „Herausforderungen Mathematik am Übergang Schule-Hochschule“*: Ein solches wird am 7. 9. 2018 unter Beteiligung der GDM stattfinden.

Aus der Mitgliederversammlung gibt es Rückfragen zum Punkt *Ausarbeitung von Guidelines für die Veranstalter von Jahrestagungen*: Jürgen Roth fragt nach, warum es in den Planungen keinen Nachwuchstag bzw. -vormittag gibt. Andreas Eichler erläutert, dass dieser in den letzten Jahren kein ständiges Element war und sich in Vorstand und Beirat keine Mehrheit dafür gefunden hätte. Aus der Mitte der Mitgliederversammlung wird die Frage aufgeworfen, inwiefern solche Guidelines nicht von der Mitgliederversammlung erlassen werden müssten. Der Vorstand erläutert, dass neben der Mitgliederversammlung auch der Vorstand beschließendes Organ der Gesellschaft sei und bereits in der Vergangenheit Regelungen zu den Jahrestagungen durch Vorstand und Beirat erlassen wurden (etwa, was die Zusammenstellung der Hauptvortragenden anbelangt). Man werde aber den Mitgliedern geeignete Möglichkei-

ten zur Rückmeldung zu den Guidelines einräumen.

Zum Punkt *Zeitschriftenprojekt „Mathematikdidaktische Forschung für die Praxis“* fragt Jürgen Roth, ob dort nur zuvor im JMD publizierte Forschungsergebnisse praxisorientiert aufbereitet werden dürften. Das ist so nicht geplant. Stefan Ufer fragt nach, inwiefern nicht die Zeitschrift *mathematica didactica* genau das Gewünschte leiste. Andreas Eichler sieht dies als deren langjähriger Mitherausgeber als nicht gegeben an. Es gibt Rückfragen zu den Kosten der Zeitschrift. Andreas Eichler erläutert, dass die Zeitschrift für Leser(innen) im Open Access, also kostenlos, verfügbar sein soll, man aber für die redaktionellen Abläufe sehr wohl Kosten für die Herausgabe seitens der GDM vorsehen müsse. Thomas Jahnke hinterfragt die Auswahl der Personen, die derzeit mit der Herausgabe/Entwicklung der Zeitschrift betraut sind und regt an, in ein Herausbergremium auch praktizierende Lehrpersonen aufzunehmen. Andreas Eichler bekräftigt die Auswahl der Erstherausgeber, die in dieser Sache eben Initiative ergriffen hätten und betont, dass an eine Einbindung arrivierter Lehrpersonen in ein Beratungskomitee und/oder Herausgeber(inn)engremium ohnehin gedacht sei. Wolfram Meyerhöfer fragt nach, wie man sich als Autor für diese Zeitschrift melden kann. Timo Leuders empfiehlt, sich direkt an ihn oder Gilbert Greefrath zu wenden, bis ein formelles Einreichverfahren etabliert wurde. Anke Lindmeier gibt ihrer Skepsis zum Ausdruck, ob der Wissenschaftstransfergedanke der Zeitschrift zeitgemäß sei und fragt nach Möglichkeiten der Evaluation des Erfolgs. Die Projektbetreuenden werden die geäußerten Bedenken in geeigneter Weise berücksichtigen.

Andreas Eichler weist auf Tagungsorte und auf die bereits bekannten Tagungstermine hin:

- 2019 Regensburg (4.–8. 3.)
- 2020 Würzburg (9.–13. 3.)

Für 2023/2024 sind derzeit Essen bzw. Köln im Gespräch, für 2021 und 2022 haben sich noch keine Veranstalter gefunden.

## 2.2 Nachwuchsförderung

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Paderborn* (siehe Bericht in Heft 105 der Mitteilungen) geht Dank an die lokalen Organisator(inn)en und die aktuellen Mitglieder der Nachwuchsvertretung: Andreas Frank, Fabian Grünig, Johanna Goral, Kerstin Hein, Raja Herold-Blasius, Julia Joklitschke, Marcel Klinger, Mona-Lisa Maisano, Angel Mizzi, Ralf Nieszporek, Julia Ollesch, Sebastian Schorcht, Petra Tebaartz, Frederike Welsing und Holger Wuschke.

Aiso Heinze lädt zum nächsten *DFG-Antragsworkshop der GDM* (voraussichtlich am 8.–9. 12. 2018)

am IPN Kiel ein. Der Workshop richtet sich an alle GDM-Mitglieder, die bislang noch kein DFG-Projekt hatten und dient der Beratung konkreter, zum Workshop mitzubringender Projektskizzen. Die Betreuung erfolgt durch DFG-erfahrene Expertinnen und Experten und der Workshop soll ggf. wieder in Kooperation mit der GDCP durchgeführt werden. Über weitere Details wird in einer Rundmail informiert.

Raja Herold-Blasius berichtet über die erste *GDM-Nachwuchskonferenz* in Essen (18.–22. 9. 2017). 62 Teilnehmer(inn)en von 33 Hochschulen und Universitäten aus Deutschland, Österreich und der Schweiz konnten sich im Rahmen von 5 Hauptvorträgen, 12 Workshops und 31 Runden Tischen zur mathematikdidaktischen Promotion im Allgemeinen, zu Forschungsmethoden und zum jeweils eigenen Promotionsvorhaben informieren und beraten lassen. Die Veranstaltung wurde von den Teilnehmenden insgesamt gut aufgenommen, ein detaillierter Bericht findet sich in den *GDM-Mitteilungen* 104, S. 48–50. Ein Dank geht nochmal an alle beteiligten Expert(inn)en und an die Mitglieder der GDM für die Co-Finanzierung.

Gilbert Greefrath, Stanisława Schukajlow, Katharina Kirsten und Johanna Rellensmann laden zur zweiten *GDM-Nachwuchskonferenz* in die Jugendbildungsstätte des Bistums Münster in Borken-Gemen (1.–5. 10. 2018) ein. Als Hauptvortragende konnten u. a. Philipp Mayring (Klagenfurt), Gabriele Kaiser (Hamburg) und Lieven Verschaffel (Leuven) gewonnen werden. Auch in diesem Jahr soll es neben Hauptvorträgen zu Promotionsvorhaben, Untersuchungsdesigns und Methoden sowie Workshops zu Forschungsmethoden und allgemeinen, themenübergreifenden Fähigkeiten viel Raum für Feedback zu den eigenen Projekten und die Möglichkeit zu Einzelgesprächen mit ausgewählten Expert(inn)en geben.

Andreas Eichler informiert über den 2019 wieder zu vergebenden *Förderpreis der GDM*: Bis zum 1. 8. 2018 können Vorschläge inkl. ca. zweiseitiger Begründung und elektronischer Kopie der Arbeit an den Vorsitzenden der Förderpreisjury, Rudolf Sträßer, gesandt werden.

### 2.3 ICME-13

Gabriele Kaiser berichtet über Aktivitäten, die im Rahmen der *Nachbereitung des ICME-13* im Jahr 2017 stattgefunden haben und bis zur Auflösung des ICME-13-Vereins Ende 2019 noch anstehen: Die Aktivitäten haben sich 2017 auf ein umfangreiches Publikationsprogramm in Kooperation mit dem Springer-Verlag bezogen (erste beide Proceedings-Bände, bislang insgesamt 24 ICME-Monographien, teilweise bereits als Pre-Conference-Bände erschienen). Für 2018 stehen noch drei Bände zum thematischen

Nachmittag, eine Open-Access-Publikation für Nachwuchswissenschaftler(innen) und ca. 3-4 weitere Monographien an. Die Ankündigung der Auflösung des ICME-13-Vereins soll Ende 2018 erfolgen, nach einem Jahr Ruhepause wird der Verein dann Ende 2019 formell aufgelöst.

### 2.4 Gemeinsame Kommissionen

#### *Kommission „Übergang Schule-Hochschule“*

Gilbert Greefrath berichtet: In der Kommission Übergang Schule-Hochschule der drei Fachverbände DMV, MNU und GDM sind in der kommenden Amtsperiode als Vertreter der GDM neuerlich Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath tätig, Regina Bruder und Christina Drüke-Noe sind Stellvertreterinnen, Reinhard Hochmuth wurde als weiterer Stellvertreter auf der letzten Beiratssitzung der GDM neu gewählt. Wichtige Aktivitäten der Kommission im Jahr 2017 betrafen eine gemeinsame Stellungnahme zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts (April 2017, abgedruckt in Heft 103 der Mitteilungen der GDM), eine Tagung der Kommission zum Thema „Mathematik in Schule und Hochschule – Wie groß ist die Lücke und wie gehen wir mit ihr um?“ (29.–31. 5. 2017, s. Bericht in Heft 104 der *Mitteilungen der GDM*) und die Diskussion des „Brandbriefes“, der Stellungnahmen und weiterer Aktivitäten zusammen mit den Vorsitzenden Michael Röckner (DMV), Andreas Eichler (GDM), Gerwald Heckmann (MNU) mit dem Ziel der Entwicklung eines gemeinsamen Forderungskatalogs der Verbände im Dezember 2017. Im Jahr 2018 war man an der Fachtagung des IQB am 2. März 2018 in Berlin „Curricula, Unterricht, Prüfungen sowie Aus- und Fortbildung. Förderung mathematischer Kompetenzen – Rückblick und Ausblick“ beteiligt und für den Herbst sind weitere Aktivitäten rund um die Herausforderungen im Bereich Mathematik am Übergang von der Schule zur Hochschule geplant (u. U. gemeinsames Symposium).

#### *Kommission für Lehrerbildung*

Timo Leuders berichtet: Im Rahmen der letzten Beiratssitzung der GDM wurden neben ihm selbst als Vorsitzenden der Kommission Stefanie Rach (Paderborn) und Anna Susanne Steinweg (Bamberg) als GDM-Delegierte, sowie Silke Ruwisch (Lüneburg), Petra Scherer (Duisburg-Essen) und Markus Vogel als Stellvertreter(inn)en gewählt. Im Jahr 2017 sind aus der Kommission heraus ein Positionspapier „Fachdidaktik für den inklusiven Mathematikunterricht – Orientierungen und Bemerkungen“ (abgedruckt in Heft 103 der GDM-Mitteilungen) und eine Stellungnahme „Fachdidaktische Expertise für Förderlehrkräfte im inklusiven Fachunterricht“ (abgedruckt in Heft 104 der GDM-Mitteilungen) ent-



standen, besonderer Dank gebührt dabei Petra Scherer und Anna Susanne Steinweg. Am 24./25. März 2017 hat die 5. Fachtagung der Kommission zum Thema „Bedarfsgerechte fachmathematische Lehramtsausbildung“ an der Universität Göttingen stattgefunden.

### 2.5 Bericht der Schriftführung

Andreas Vohns berichtet über Stand und Entwicklung der Mitgliederzahlen (Stichtag: 23. 2. 2018): Die GDM verfügt derzeit über 1152 Mitglieder, das sind 29 Personen mehr als im Vorjahr. Im Jahr 2017 wurde für die *Mitteilungen der GDM* ein neues Online-Redaktionssystem eingeführt (s. ausführlicher Bericht in Heft 104 der *GDM-Mitteilungen*). Der Schriftführer bitte noch einmal eindringlich alle Mitglieder, ihre Daten in der Mitgliederdatenbank selbst aktuell zu halten, um Versandrückläufe beim Versand der Zeitschriften zu minimieren.

### TOP 3: Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

#### Bericht des Kassenführers

Torsten Fritzlar berichtet: Auch im Jahr 2017 hat sich die Finanzlage der GDM als sehr entspannt dargestellt. Im Jahr 2017 standen Einnahmen in Höhe von € 91.498 € Ausgaben in Höhe von € 55.890 € gegenüber (Saldo: 24.608), zum 22. 2. 2018 befanden sich € 110.841,73 auf dem Konto der GDM. Dem Vorstand der GDM ist dabei durchaus bewusst, dass ein gemeinnütziger Verein nicht mittel- und langfristig in diesem Umfang Gewinne erwirtschaften/Rücklagen bilden kann. Für das Jahr 2018 wird in der Finanzplanung daher ein Saldo von € –5.000 vorgesehen. Verschiedene Mitglieder der GDM schlagen dem Vorstand vor, eine Senkung der Mitgliedsbeiträge vorzusehen. Eine solche kann satzungsgemäß aber erst mit dem Kalenderjahr 2019 in Kraft treten.

#### Bericht des Kassenprüfers

Gabriela Schürch berichtet: Die Prüfung wurde durch die gewählte Kassenprüferin des Vereins Frau Gabriela Schürch in der Zeit vom 6. 3.–7. 3. 2018 in Paderborn durchgeführt. Die Überprüfung erfolgte für das Geschäftsjahr 2017. Auskünfte erteilte Herr Prof. Dr. Torsten Fritzlar (Stellung im Verein: Kassenführer).

Überprüft wurden:

- alle Kontoauszüge von 2017
  - alle Belege des überprüften Zeitraumes
  - alle Ein- und Ausgaben auf rechnerische und sachliche Richtigkeit
  - das Kassenbuch und die Buchhaltung
- Ergebnis der Überprüfung:

- Alle Belege sind vollständig vorhanden. Sie wurden chronologisch und übersichtlich und nachvollziehbar nachgewiesen.
- Erforderliche Auskünfte wurden umfassend erteilt.
- Alle Ein- und Ausgaben waren vollständig, rechnerisch und sachlich richtig und nachvollziehbar dokumentiert.
- Alle Unterlagen über Forderungen und Verbindlichkeiten wurden vollzählig nachgewiesen und entsprechen den buchhalterischen Anforderungen.

Finanzbestände des Vereins:

Anfangsbestand per 1. 1. 2017: 83.621,47 €

Endbestand per 31. 12. 2017: 113.450,41 €

Unter Beachtung des Ergebnisses dieser Kassenprüfung wird der Mitgliederversammlung die Entlastung des Vorstandes empfohlen. Gabriela Schürch beantragt, dass die Mitgliederversammlung dem Vorstand des Vereins Entlastung für das Geschäftsjahr 2017 erteilt.

### TOP 4: Entlastung des Vorstands

Laut Satzung der GDM ist der Gesamtvorstand zu entlasten. Rainer Danckwerts empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei vier Enthaltungen zugestimmt.

### TOP 5: Wahlen

Andreas Eichler bedankt sich zunächst bei Silke Ruwisch (2. Vorsitzende) und Andreas Vohns (Schriftführer) für die gemeinsame Arbeit im letzten Jahr sowie deren Arbeit in den davorliegenden fünf Jahren. Turnusgemäß scheidet beide aus dem Vorstand aus und können jeweils nicht wiedergewählt werden.

#### 2. Vorsitz

Hans-Georg Weigand erläutert zunächst, welche Funktion aus seiner Sicht die 2. Vorsitzende im Vorstand zu übernehmen hat und schlägt dann Katja Lengnink als 2. Vorsitzende vor. Katja Lengnink stellt sich und ein mögliches Arbeitsprogramm im Vorstand vor. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Katja Lengnink wird gewählt (Ja-Stimmen: 129, Nein-Stimmen: 1, Enthaltungen: 2, Ungültige Stimmen: keine). Katja Lengnink nimmt die Wahl an.

#### Schriftführung

Susanne Prediger schlägt Daniela Götze vor und begründet ihren Vorschlag. Daniela Götze stellt sich und ein mögliches Arbeitsprogramm im Vorstand vor. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Daniela Götze wird gewählt (Ja-Stimmen: 115, Nein-Stimmen: 4, Enthaltungen: 2, Ungültige Stimmen: keine). Daniela Götze nimmt die Wahl an.

*Kassenprüferin*

Gabriela Schürch wird per Akklamation als Kassenprüferin für das Jahr 2018 bestimmt. Gabriela Schürch nimmt das Amt an.

*Beirat*

Es scheiden regulär aus (Wiederwahl bei allen Personen möglich): Hedwig Gasteiger, Henning Körner, Susanne Prediger und Alexander Schüler-Meyer. Zu wählen sind also 4 Personen.

Es kandidieren: Raja Herold-Blasius, Henning Körner, Susanne Prediger, Silke Ruwisch

Gewählt werden: Silke Ruwisch (117 Stimmen), Henning Körner (116 Stimmen), Susanne Prediger (114 Stimmen) und Raja Herold-Blasius (107 Stimmen) (bei insgesamt 128 abgegebenen Stimmzetteln).

Alle gewählten Personen nehmen die Wahl an.

*JMD-Herausgeber(innen)*

Aiso Heinze scheidet zum 31. 12. 2017 aus dem Herausgeber(innen)gremium aus, Esther Brunner wurde im Beirat als seine Nachfolgerin gewählt.

**TOP 6: GDM Jahrestagung 2019 in Regensburg**

Stefan Krauss lädt gemeinsam mit seinen Regensburger Kolleg(inn)en zur 53. Jahrestagung der GDM (4.–8. 3. 2019) an die Universität Regensburg ein. Ein kurzer Informationsfilm wird gezeigt. Nähere Informationen unter <http://2019.gdm-tagung.de>.

**TOP 7: Zeitschriften***7.6 Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)*

Stephan Hußmann berichtet: Im Jahr 2017 wurden beim JMD 36 Manuskripte eingereicht, bei 30 Manuskripten wurde eine Herausgeberentscheidung getroffen, 12 angenommen, 17 abgelehnt, einer zurückgezogen. Die Zeit zwischen Übergabe des angenommenen Artikels und seinem Online-Erscheinen konnte 2017 nochmals verkürzt werden, ebenso haben sich die Online-Zugriffszahlen weiterhin positiv entwickelt. Das nächste Themenheft (Heft 1/2018) wird zum Thema „Psychological Theories in Mathematics Education“ sein. Mit Jahrgang 2017 ist das JMD in den „Emerging Sources Citation Index“ von Thomson Reuters aufgenommen worden. Künftig wird es möglich sein, englischsprachige Übersetzungen bereits im JMD erschienener Artikel mit eigener DOI-Nummer als Online-Publikation einzureichen (diese durchlaufen das übliche Verfahren). Mit Springer wurde vereinbart, dass künftig pro Heft 4 bis 10 Artikel, bei mindestens 64 Seiten pro Heft und einer Gesamtartikelzahl von 10–16,

angestrebt werden. Im Rahmen der GDMV Jahrestagung hat neuerlich ein Workshop zum wissenschaftlichen Schreiben stattgefunden.

*7.7 ZDM*

Gabriele Kaiser informiert über die Entwicklungen beim ZDM: In das Editorial Board wurden zum Februar 2017 als Mitglieder aus dem deutschsprachigen Raum Susanne Prediger und Stanislaw Schukajlow neu aufgenommen. Im Jahr 2017 wurden beim ZDM 156 Manuskripte eingereicht, bei 94 Manuskripten wurde eine Herausgeberentscheidung getroffen, 76 angenommen, 3 abgelehnt, 8 an andere Journale weitergereicht und einer zurückgezogen. Sie berichtet zudem über die Entwicklung von Zugriffszahlen und über weitere Metriken des Journals. Im Jahr 2019 wird das ZDM sein 50-jähriges Bestehen feiern, es ist damit nur ein Jahr jünger als die *Educational Studies in Mathematics*.

*7.8 mathematica didactica*

Katja Lengnink und Benjamin Rott berichten über Herausgabemodalitäten sowie Stand und Entwicklung der Beitragseinreichungen zu *mathematica didactica*: Im Jahr 2017 erschienen ein Heft mit freien Beiträgen und ein Themenheft zum Problemlösen. In 2018 wurden bereits 3 Artikel angenommen und online veröffentlicht, 2 Artikel abgelehnt und 5 finden sich derzeit noch in Begutachtung oder Überarbeitung. Für 2018/19 sind als Themenheft ein Heft zur Geschichte und ein Heft zu Lehr-Lern-Laboren geplant. Die Herausgeber(innen) freuen sich auch über weitere freie Beiträge und Vorschläge für Themenhefte.

*7.9 Der Mathematikunterricht (MU)*

Henning Körner berichtet: Der MU ist die älteste deutschsprachige Zeitschrift zur Mathematikdidaktik. Herausgeber sind Stefan Deschauer, Henning Körner und Jörg Meyer. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zur Unterrichtspraxis. Übergreifendes Ziel ist, die Verbindung zwischen Wissenschaft, Fachdidaktik und Unterricht zu reflektieren und lebendig zu halten. Bis Anfang/Mitte 2019 ist man thematisch bereits ausgebucht, danach weiterhin an Gastherausgeber/innen interessiert.

**TOP 8: Verschiedenes**

Zu diesem Punkt gibt es keine Meldungen.

Protokoll: Andreas Vohns

Andreas Vohns, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt  
E-Mail: [andreas.vohns@aau.at](mailto:andreas.vohns@aau.at)

# Einladung zur Mitgliederversammlung der GDM

## Zentrales Hörsaalgebäude der Universität Regensburg, 7. 3. 2019

---

Ort: Hörsaal H 1 (Audimax)  
 Beginn: 16:00 Uhr

### Tagesordnung

- Top 1. Bestätigung des Protokolls,  
Beschluss der Tagesordnung
- Top 2. Bericht des Vorstands
- Top 3. Bericht des Kassenführers und der  
Kassenprüferin
- Top 4. Entlastung des Vorstands
- Top 5. Festsetzung der Mitgliedsbeiträge  
(Reduzierung der Mitgliedsbeiträge für  
2019)
- Top 6. Satzungsänderung
- Top 7. Wahlen: 1. Vorsitzende/r, Kassenwart/in,  
Kassenprüfer/in, Beirat
- Top 8. GDM Jahrestagung 2020 in Würzburg
- Top 9. Zeitschriften
- Top 10. Verschiedenes

Als Vorbereitung auf Top 6 wird im Folgenden die geänderte Satzung aufgeführt. Kleine Veränderungen wurden in § 12 (neu § 13) vorgenommen,

§ 10 und § 18 wurden ergänzt sowie die Satzung gendergerecht formuliert. Die aktuell gültige Satzung aus dem Jahre 2014 ist unter <https://didaktik-der-mathematik.de/pdf/Satzung%20GDM%202014.pdf> abrufbar.

### Satzung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.

§ 1. Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (e. V.) mit Sitz in Berlin verfolgt ausschließlich und unmittelbar gemeinnützige Zwecke im Sinne des Abschnitts „Steuerbegünstigte Zwecke“ der Abgabenverordnung.

Zweck des Vereins ist die Förderung von Wissenschaft und Forschung im Gebiet der Didaktik der Mathematik und damit verbunden die Förderung von Bildung und Erziehung.

Der Satzungszweck wird verwirklicht durch die Mitwirkung bei und Unterstützung von wissenschaftlichen Veranstaltungen und Forschungsvorhaben, durch finanzielle Unterstützung wissenschaftlicher Publikationen und durch Zusammenarbeit mit entsprechenden Institutionen im Inland und im Ausland.

§ 2. Die Gesellschaft ist selbstlos tätig; sie verfolgt nicht in erster Linie eigenwirtschaftliche Zwecke.

§ 3. Mittel der Gesellschaft dürfen nur für satzungsmäßige Zwecke verwendet werden. Die Mitglieder erhalten keine Zuwendungen aus Mitteln der Gesellschaft.

§ 4. Es darf keine Person durch Ausgaben, die dem Zweck der Gesellschaft fremd sind, oder durch unverhältnismäßig hohe Vergütungen begünstigt werden.

§ 5. Bei Auflösung der Gesellschaft oder bei Wegfall steuerbegünstigter Zwecke fällt das Vermögen an die Studienstiftung des Deutschen Volkes (e. V.), die es unmittelbar und ausschließlich für gemeinnützige Zwecke zu verwenden hat.

§ 6. Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr.

§ 7. Erwerb der Mitgliedschaft  
 Die Gesellschaft nimmt persönliche und korporative Mitglieder auf. Die Aufnahme neuer Mitglieder erfolgt auf schriftlichen Antrag an die Schriftführerin bzw. an den Schriftführer durch Beschluss des Vorstandes.

### § 8. Rechte und Pflichten des Mitglieds

Jedes Mitglied ist berechtigt

1. zur Teilnahme an den Veranstaltungen der Gesellschaft und zur Ausübung der Rechte in der Mitgliederversammlung,
2. zur Inanspruchnahme aller etwa bestehenden oder noch zu errichtenden Einrichtungen der Gesellschaft nach Maßgabe der dafür geltenden Bestimmungen.

Jedes Mitglied ist verpflichtet, sich für die Ziele der Gesellschaft einzusetzen und den von der Mitgliederversammlung beschlossenen Beitrag zu entrichten.

### § 9. Verlust der Mitgliedschaft

Die Mitgliedschaft erlischt durch Tod, Kündigung oder Ausschluss.

Die Kündigung durch das Mitglied ist bis zum 31. Dezember eines jeden Jahres zulässig. Die Kündigungserklärung ist nur wirksam, wenn sie mindestens drei Monate vorher in schriftlicher Form einem Vorstandsmitglied zugegangen ist.

Der Ausschluss kann nur durch einstimmigen Beschluss des Vorstandes ausgesprochen werden.

Gegen diese Ausschließung ist innerhalb von 2 Monaten nach Zustellen des Beschlusses Berufung an die Mitgliederversammlung möglich, die über den Einspruch entscheidet.

#### § 10. Ehrenmitgliedschaft

Mitgliedern des Vereins, die durch ein herausragendes Engagement für den Verein und/oder die nationale wie internationale Bedeutung des Vereins außergewöhnlich befördert haben, können die Ehrenmitgliedschaft erhalten.

Der Vorschlag kann von allen Mitgliedern begründet an den Vorstand der GDM (s. § 12) gestellt werden. Die Verleihung der Ehrenmitgliedschaft wird vom Vorstand beschlossen und vorgenommen.

Die Ehrenmitgliedschaft umfasst die lebenslange unentgeltliche Mitgliedschaft im Verein.

Die Ehrenmitgliedschaft kann von der Trägerin oder dem Träger der Ehrenmitgliedschaft ohne Angabe von Gründen aufgehoben werden.

#### § 11. Organe der Gesellschaft sind:

1. Der Vorstand,
2. die Mitgliederversammlung,
3. der Beirat.

#### § 12. Vorstand

Der Gesamtvorstand besteht aus

1. der oder dem Ersten Vorsitzenden
2. der oder dem Zweiten Vorsitzenden
3. der Schriftführerin oder dem Schriftführer
4. der Kassenführerin oder dem Kassenführer

Die Vorstandsmitglieder werden regelmäßig durch die Mitgliederversammlung für zwei Jahre gewählt. Jedes Jahr ist die Hälfte der Mitglieder des Vorstandes zu wählen. Vorherige Abberufung durch die Mitgliederversammlung ist möglich. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich.

Die oder der Erste und die oder der Zweite Vorsitzende vertreten die Gesellschaft im Sinne des § 26 BGB und sind Vorstand im Sinne des Gesetzes.

Soweit in dieser Satzung vom Vorstand die Rede ist, ist immer der gesamte Vorstand gemeint.

Der Vorstand beschließt mit Stimmenmehrheit. Bei Stimmengleichheit entscheidet die Stimme der oder des Ersten Vorsitzenden.

#### § 13. Mitgliederversammlung

Die Mitgliederversammlung findet einmal im Jahr statt. Die Tagesordnung muss wenigstens folgende Punkte enthalten:

1. Bericht des Vorstands über das abgelaufene Geschäftsjahr
2. Rechnungslegung der Kassenführerin oder des Kassenführers
3. Bericht der Kassenprüferin oder des Kassenprüfers

#### 4. Entlastung des Vorstandes

5. Wahl der Kassenprüferin oder des Kassenprüfers, der nicht dem Vorstand angehören darf, für das nächste Geschäftsjahr

#### 6. Wahlen zum Vorstand

Alle Mitgliederversammlungen werden schriftlich einberufen mit einer Frist von einem Monat unter Angabe der Tagesordnung.

Jede ordnungsgemäß einberufene Mitgliederversammlung ist beschlussfähig. Bei den Abstimmungen entscheidet die Mehrheit der Stimmen der anwesenden Mitglieder. Für eine Satzungsänderung oder für die Auflösung ist eine Dreiviertelmehrheit aller anwesenden Mitglieder erforderlich. Die Anträge dazu müssen mit der Einladung zur Mitgliederversammlung im Wortlaut bekannt gegeben werden.

Die oder der Erste Vorsitzende, bei deren oder dessen Verhinderung die oder der Zweite Vorsitzende, leitet die Mitgliederversammlung.

Über die Mitgliederversammlung fertigt die Schriftführerin oder der Schriftführer ein Protokoll an, das vom Versammlungsleitenden gegenzuzeichnen ist.

Der Vorstand kann in besonderen Fällen eine außerordentliche Mitgliederversammlung einberufen. Der Vorstand muss innerhalb von zwei Monaten eine außerordentliche Mitgliederversammlung einberufen, wenn dies von mindestens 20 % der Mitglieder unter Angabe der Zwecke und Gründe schriftlich verlangt wird.

#### § 14. Beirat

Der Beirat berät den Vorstand und die Mitgliederversammlung in den allgemeinen wissenschaftlichen Leitlinien und Zielsetzungen der Gesellschaft.

Beiratsmitglieder sollen solche Persönlichkeiten sein, die in besonderer Weise geeignet sind, die Ziele der Gesellschaft zu fördern. Der Beirat hat höchstens 15 gewählte Mitglieder. Sie werden von der Mitgliederversammlung für drei Jahre gewählt. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich. Jedes Jahr sind etwa ein Drittel der Mitglieder zu wählen. Anerkannte Landesverbände können zusätzlich jeweils ein Mitglied in den Beirat entsenden.

#### § 15. Ordnungen

Die Bestimmungen zu Untergruppen des Vereins wie Arbeitskreise, Landesverbände und Kommissionen werden durch Ordnungen geregelt. Diese Ordnungen sind nicht Teil der Satzung, müssen jedoch mit dieser in Einklang stehen. Ordnungen von Arbeitskreisen und Landesverbänden werden von der Mitgliederversammlung, Ordnungen von Kommissionen vom Vorstand beschlossen.

### § 16. Auflösung der Gesellschaft

Für die Beschlussfassung über die Gesellschaftsauf-  
lösung gilt § 13. Für die Verwendung des Gesell-  
schaftsvermögens ist § 5 zu beachten.

§ 17. Sollte eine Bestimmung unwirksam sein, so  
wird dadurch die Gültigkeit der übrigen Bestim-  
mung nicht berührt.

### § 18 Datenschutz

Zur Erfüllung der Zwecke des Vereins werden unter  
Beachtung der gesetzlichen Vorgaben der DSGVO  
personenbezogene Daten und persönliche und sach-  
gerechte Verhältnisse der Mitglieder im Verein ge-  
speichert, übermittelt und verändert. Jedes Mitglied  
hat das Recht auf:

- a) Auskunft über die zu seiner Person gespeicher-  
ten Daten
- b) Berichtigung der zu seiner Person gespeicherten  
Daten, wenn sie unrichtig sind
- c) Sperrung der zu seiner Person gespeicherten  
Daten, wenn sich bei behaupteten Fehlern we-  
der deren Richtigkeit noch deren Unrichtigkeit  
feststellen lässt

d) Löschung der zu seiner Person gespeicherten  
Daten, wenn die Speicherung unzulässig war.  
Dem Vorstand des Vereins, allen Mitarbeiterinnen  
und Mitarbeitern oder sonst für den Verein Tätigen  
ist es untersagt, personenbezogene Daten unbefugt  
zu einem anderen als dem zur jeweiligen Aufga-  
benerfüllung gehörenden Zweck zu verarbeiten, be-  
kannt zu geben, Dritten zugänglich zu machen oder  
sonst zu nutzen. Diese Pflicht besteht auch über das  
Ausscheiden der oben genannten Personen aus dem  
Verein.

*Diese Satzung wurde auf der Mitgliederversammlung  
am 7. März 1996 in Regensburg verabschiedet, gem. Be-  
schluss der Mitgliederversammlung am 3. März 2005 in  
Bielefeld in § 1 aktualisiert und ergänzt, gem. Beschluss  
der Mitgliederversammlung am 13. März 2014 in Ko-  
blenz in § 13 geändert und um § 14 ergänzt sowie gem.  
Beschluss der Mitgliederversammlung am 7. März 2019  
in Regensburg in § 12 (neu § 13) geändert und um § 10  
und § 18 ergänzt sowie gendergerecht formuliert.*

Daniela Götze, Schriftführerin der GDM  
E-Mail: [daniela.goetze@tu-dortmund.de](mailto:daniela.goetze@tu-dortmund.de)

## Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

### Herbsttagung in Münster, 12.–13. 10. 2018

Renate Motzer

Die 29. Herbsttagung des Arbeitskreises „Frauen und Mathematik“ der GDM fand vom 12.–13. Oktober 2018 in Hamburg statt. Die Tagung wurde von Andrea Blunck, einer der beiden stellvertretenden Sprecherinnen des Arbeitskreises, organisiert.

Die Tagung begann am Freitagnachmittag mit einem Vortrag von Kiyet Orhan zum Thema „(Re)Produktion oder Überwindung von (Geschlechter)Stereotypen? Ergebnisse einer exemplarischen Analyse neuerer Mathematikschulbücher für die Grundschule und die Sekundarstufe I“. Kiyet Orhan studiert an der FU Berlin. Sie schreibt in der Arbeitsgruppe von Anina Mischau ihre Masterarbeit in diesem Themenbereich und konnte von Ergebnissen eines Seminars berichten, in dem Mathematikschulbücher daraufhin untersucht wurden, wie Frauen und Männer dort dargestellt wurden. Bei den Untersuchungen konnte festgestellt werden, dass Jungen und Mädchen in den untersuchten aktuellen Schulbüchern meist gleich oft und bei ähnlichen Tätigkeiten dargestellt wurden. Wenn man nach den erwachsenen Frauen und Männern schaut, sieht es schon anders an. Männer kommen doppelt so oft vor wie Frauen. Die dargestellten Berufe sind bei den Männern meist höher dotiert als die Berufe der Frauen. Arbeiten im Haushalt werden dagegen meistens von Frauen geleistet. Manchmal reparieren Männer Autos oder Fahrräder. Schaut man nach den bekannten Persönlichkeiten, so sind es ebenfalls meist Männer, die abgebildet oder genannt werden. Am ehesten findet man noch Sportlerinnen, aber die Anzahl der dargestellten Sportler ist ebenfalls größer. Nur in einem der untersuchten Bücher wurde eine Mathematikerin vorgestellt. Im Anschluss an den Vortrag wurde intensiv über die Rollenbilder diskutiert, die unterschwellig durch solche Darstellungen vermittelt werden sowie über die Funktion der Kontrollgremien und die Autorinnen- und Autorenschaft von Schulbüchern.

Nach der Kaffeepause berichtete Andrea Reichenberger (Uni Paderborn) unter dem Titel: „Deutschsprachige Logikerinnen: Ihr Beitrag zur Geschichte der formalen Logik und mathematischen Grundlagenforschung“. Ziel des Vortrages war es, ein interdisziplinäres Forschungsprojekt zu deutschsprachigen Logikerinnen im Schnittfeld der Philosophiegeschichte, mathematischen Grundlagenforschung und Didaktik vorzustellen. Aufbauend auf Vorarbeiten zur sog. Erlanger Logikdoku-

mentation im Rahmen eines von Christian Thiel geleiteten DFG-Projekts (Fallstudien zur Begründung einer Sozialgeschichte der formalen Logik (1985–89)) unter Mitarbeit von Volker Peckhaus sowie Karin Beiküfner, und fortgesetzt von Adelheid Hamacher-Hermes in dem Forschungsprojekt „Frauen in der Logik zu Beginn des 20. Jahrhunderts in Deutschland“ (1994–96), wird derzeit eine digitalisierte biobibliographische Erschließung, Auswertung, Sicherung und Langzeitarchivierung der Archivdokumente vorbereitet. Über diese digitalisierte Erschließung hinaus geht es um eine problemgeschichtliche Kontextualisierung der Arbeiten von deutschsprachigen Logikerinnen und die Entwicklung eines gendersensiblen Kompetenzmodells in dem Fach Philosophie und Geschichte der Logik. Als Fallstudie diente in dem Vortrag der Zahlbegriff und die Frage nach den Grundlagen der Arithmetik; als Beispiele dazu wurden die Beiträge von Marie-Anna Deutschbein (1881–1971), Editha Krenz (1915–unbekannt) und Tatjana Ehrenfest-Afanassjewa vorgestellt (1876–1964). Nach dem didaktischen Konzept „Einstieg – Erklärung – Diskussion – Anwendung“ wurden die Themen „axiomatische Methode“, „Zahlbereiche“, „Prinzip der vollständigen Induktion“ und „(Un)definierbarkeit des Zahlbegriffes“ vorgestellt. Andrea Reichenberger konnte aufzeigen, dass es in Veranstaltungen zu diesen mathematischen Themenbereichen nicht sinnvoll ist, nur etwas über die Männer zu sagen, die sich damit beschäftigt haben und nach denen vielleicht bekanntere Ergebnisse benannt wurden. Auch die Frauen, die in diesen Bereichen tätig waren, sollten erwähnt werden und es kann aufgezeigt werden, wie Frauen an den Gedanken der Männer weitergearbeitet haben.

Als dritter Vortrag des Nachmittags stellte Christine Scharlach von der FU Berlin ihre Erfahrungen mit der fachwissenschaftlichen Ausbildung von Studierenden des Lehramts für die Grundschule (Klassenstufen 1–6) unter dem Titel „Mathematisches Professionswissen für das Grundschullehramt – Zum Umgang mit Heterogenität“ vor. Sie thematisierte vor allem, wie der Herausforderung durch eine große Anzahl von Studierenden mit sehr heterogenen Vorerfahrungen und Interessen (transdisziplinärer Studiengang) begegnet werden kann. Vier Merkmale zum Umgang mit Heterogenität sind nach Regine Richter (2005) die geteilte Verantwortung, die Professionalität von Lehrpersonen

und Studierenden, die Schaffung von Transparenz und Ent-Anonymisierung sowie (Innere) Differenzierung. So werden die Studierenden z. B. durch einen Vorwissenstest in Tutorien in 4 Stufen eingeteilt. Die Tutorien mit max. 16 Teilnehmenden ermöglichen Lernpartnerschaften sowie die Bearbeitung von Aufgaben auf unterschiedlichem Niveau, angeleitet durch studentische Hilfskräfte, überwiegend aus dem Lehramt Mathematik. Es hat sich gezeigt, dass die in der Mathematik typische Lehrveranstaltungsform mit 4 SWS Vorlesung, 2 SWS Übungen und umfangreicher Selbstlernzeit mit Übungsaufgaben trotz inhaltlich und methodisch speziell auf die Grundschulmathematik abgestimmter Vorlesungen, die Studierenden überfordert und ihnen auch in keinem anderen Fach begegnet. Neben einer Entzerrung (in zwei von drei Semestern 2 SWS Vorlesung und 2 SWS Übungen) gibt es zahlreiche Zusatzangebote, die den Studierenden den Zugang zur mathematischen Fachkultur erleichtern.

Der Samstagvormittag begann mit dem Vortrag von Jörn Steuding aus Würzburg. In dem gemeinsam mit Katharina Spieß konzipierten Vortrag „Mehr als 100 Jahre Frauenstudium und noch keine 50 Prozent Professorinnen“, wurde zunächst auf die aktuelle Situation von Frauen an Universitäten und Hochschulen in Deutschland (und ein wenig im Ausland) als Studierende, Promovierende und Professorinnen eingegangen. Anschließend wurden mit einem Fokus auf Mathematik für die vorgelegten, ernüchternden Zahlen Erklärungen gesucht, zunächst durch einen historischen Überblick über (etwas mehr als) „100 Jahre Frauenstudium“ und ferner durch aktuelle Studien und statistische Analysen. Abschließend wurden Aktivitäten und Ideen vorgestellt, die auf eine ausgewogenere Zukunft hoffen lassen.

An den Vortrag schloss sich eine längere Diskussion zu verschiedenen Aspekten der Situation von Frauen in der Universitätsmathematik an.

Nach dem Mittagessen berichtete Nicola Oswald (Uni Wuppertal) unter dem Titel „Ein Erfahrungsbericht: Gender und Mathematik – wie passt das zusammen?“ von ihrer Gastprofessur für Gender und Diversity in der Mathematik an der Leibniz Universität Hannover. Sie stellte die formalen Rahmenbedingungen und Anforderungen der

Gastprofessur vor und konnte uns einen Eindruck davon vermitteln, wie sie diese im Kontext ihrer eigenen Forschungs- und Lehrtätigkeit umgesetzt hat. Insbesondere ging sie auf die Inhalte und die Implementierung eines Seminars zu Diversity in der Mathematikdidaktik für Lehramtsstudierende sowie auf den Austausch mit der Arbeitsgruppe vor Ort ein. In einer abschließenden Diskussion wurde die Frage der Nachhaltigkeit einer solchen befristeten Gastprofessur in den Fokus genommen.

Als letzten Beitrag berichtete Renate Motzer (Uni Augsburg) unter dem Titel „Hypothesentest im Kopf – angewandt auf gendersensible Fragen“ von ihren Bemühungen, Schülerinnen und Schülern zu einem besseren Verständnis für den Hypothesentest zu verhelfen. Dazu wird durch den Wert von Wurzel  $n$  ( $n$  als Stichprobengröße) eine erste Abschätzung abgegeben, ob eine signifikante Abweichung zu dem von der Hypothese her zu erwarteten Stichprobenergebnis vorliegt. Diskutiert wurde, ob Beispiele aus der Welt des Fußballs oder PISA-Ergebnisse, die signifikante Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen aufweisen, als Beispiele geeignet sind. Neben Statistiken, die Vorurteile bestärken, sollten solche aufgenommen werden, die sie eher widerlegen. Neben Themen, die viele interessieren aber etliche auch nicht (was mit dem Geschlecht zusammenhängen kann), sollten Schülerinnen und Schüler weitere Themen zum Auswählen vorgegeben werden, so dass jede/jeder nach ihren/seinen Interessen Aufgaben aussuchen darf.

Das Ende der Tagung war der Sitzung des Arbeitskreises gewidmet. Renate Motzer wurde für weitere zwei Jahre als Arbeitskreissprecherin gewählt, Andrea Blunck und Christine Scharlach wurden als Stellvertreterinnen bestätigt. Die nächste Herbsttagung wurde für 2019 geplant. Sie wird vom 25.–26. 10. 2019 in Würzburg von Jörn Steuding ausgerichtet. Auch auf der GDM-Tagung in Regensburg wird es wieder ein Treffen des Arbeitskreises geben.

Wir danken Andrea Blunck für die gelungene Organisation der Tagung.

Renate Motzer, Universität Augsburg  
Email: [renate.motzer@math.uni-augsburg.de](mailto:renate.motzer@math.uni-augsburg.de)

## Arbeitskreis: Grundschule

### Herbsttagung in Bad Salzdetfurth, 9.–11. 11. 2018

Elke Binner, Marcus Nührenbörger, Barbara Ott und Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule fand in diesem Jahr am zweiten Novemberwochenende vom 9. bis 11. 11. 2018 wieder in Bad Salzdetfurth statt. Es trafen sich etwa 160 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus verschiedenen Bereichen der Lehreraus- und -weiterbildung. Die Tagung stand unter dem Thema „Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln“. Die Hauptvortragenden waren Lieven Verschaffel (Leuven/Belgien), Christiane Benz (Karlsruhe), Simone Reinhold (Leipzig) sowie Marianne Grassmann (Berlin) und Roland Rink (Braunschweig). Ergänzt wurden die Hauptvorträge durch Beiträge in den verschiedenen thematischen Arbeitsgruppen.

Nach der Begrüßung eröffnete Lieven Verschaffel am Freitagabend die Tagung mit dem ersten Hauptvortrag. Er befasste sich mit dem Thema „Analyzing and stimulating strategy competence in elementary arithmetic: the case of subtraction by addition“. In seinem Vortrag ging er beispielhaft auf die Bedeutung der Analyse und Entwicklung von „Strategiekompetenz“ für das Verstehen und Lernen elementarer Arithmetik ein.

Am Samstag widmete sich Christiane Benz in ihrem Vortrag dem Thema „Den Blick schärfen – Grundlagen für arithmetische Kompetenzen“. Es wurde die Relevanz von Strukturwahrnehmung für Zahlvorstellung und Strategieentwicklung für arithmetische Lernprozesse beleuchtet. Dabei wurden die individuelle Wahrnehmung von Strukturen sowie daraus folgende verschiedene Strategien aus theoretischer und empirischer Perspektive analysiert. Darauf aufbauend wurde die Rolle eines geschärften Blicks für mathematische Strukturen für erfolgreiches Mathematiklernen skizziert und Konsequenzen für die Gestaltung arithmetischer Lernumgebungen im Elementar- und Primarbereich abgeleitet.

Simone Reinhold griff in ihrem Vortrag „Geometrische Abbildungen in der Vorstellung: Relevanz und (individuelle) Strategien von Grundschulkindern“ die Entwicklung der Fähigkeit zur Vorstellung in sich stabiler räumlicher Beziehungen eines geometrischen Arrangements sowie die Fähigkeit zur Vorstellung von Veränderungen innerhalb räumlicher Bezüge auf. Es wurden Ergebnisse aus Studien zu individuellen Strategien von Kindern im Vor- und Grundschulalter bei der Bearbeitung von Raumvorstellungsaufgaben in den Blick ge-

nommen und Überlegungen zur Relevanz dieser räumlich-visuellen Fähigkeiten für den Mathematikunterricht dargelegt. Im Mittelpunkt standen Aktivitäten, die ein mentales Drehen, Zerlegen oder Zusammenfügen ebener oder räumlicher geometrischer Arrangements erfordern. Mathematische Strategien bezogen sich hier auf die Vorstellung geometrischer Abbildungen. Dabei wurde immer wieder die enge Verbindung zum Sprechen und Handeln herausgestellt.

In ihrem Vortrag zum Thema „Ich mache das am liebsten immer ganz genau – mein Schulweg ist 452,478 m lang – Bemerkungen zum Umgang mit Größen und Messinstrumenten im Mathematikunterricht“ umrissen Marianne Grassmann und Roland Rink zunächst den mathematischen Hintergrund des Themenbereiches. Sie machten deutlich, dass es sich um einen mathematischen Gegenstand und nicht „nur“ um Sachrechnen handelt. In diesem Zusammenhang wurde u. a. den Fragen nachgegangen, was sind eigentlich Größen, was bedeutet Messen und was müssen Kindern in diesem Zusammenhang verstanden haben. Es wurde auf die spezifischen Denk- und Arbeitsweisen, die in diesem Themengebiet eine Rolle spielen, eingegangen und Konsequenzen für den Unterricht abgeleitet.

Während der Tagung wurden zudem die folgenden acht Arbeitsgruppen angeboten. Hier wurden in diesem Jahr vor allem laufende Forschungsprojekte vorgestellt und diskutiert:

- Lehrerfortbildung (Koordination: Marianne Grassmann, Christoph Selter)
- Vorschulische Bildung (Koordination: Julia Bruns, Meike Grüßing)
- Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien (Koordination: Roland Rink, Daniel Walter)
- Sachrechnen (Koordination: Dagmar Bönig)
- Arithmetik (Koordination: Elisabeth Rathgeb-Schnierer)
- Kommunikation und Kooperation (Koordination: Birgit Brandt, Marcus Nührenbörger)
- Geometrie (Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer, Simone Reinhold)
- Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit (Koordination: Grit Kurtzmann, Bernd Neubert)

Turnusmäßig fand in diesem Jahr die Wahl zum Sprecherrat statt. An dieser Stelle möchten wir die Gelegenheit nutzen, uns, auch im Namen aller Mitglieder des Arbeitskreises, bei den ausscheidenden



Sprechern Christoph Schreiber und Sebastian Wartha für ihr engagiertes Wirken und die konstruktive Zusammenarbeit zu bedanken. Barbara Ott und Elisabeth Rathgeb-Schnierer wurden neu in den Sprecherrat gewählt.

Auch zu dieser Herbsttagung erscheint ein Tagungsband. Er enthält ausführliche Beiträge, die sich auf die Hauptvorträge der Tagung beziehen und dokumentiert zudem Ergebnisse aus den Arbeitsgruppen. Der Tagungsband erscheint in der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ der UBP (University of Bamberg Press) unter dem Titel „Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln“ und wird von *Anna Susanne Steinweg* (Bamberg) herausgegeben. Über OPUS (<http://opus-bayern.de/uni-bamberg/>) besteht Zugang zur elektronischen Version des Tagungsbandes.

Die nächste Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule widmet sich dem Thema „Darstellen und Kommunizieren“ und wird vom 15.–17. 11. 2019 wieder in Bad Salzdetfurth stattfinden. In den oben genannten Arbeitsgruppen werden zudem neue Entwicklungen der jeweiligen Themen-

bereiche vorgestellt und diskutiert. Gerne bekommen auch Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler die Gelegenheit, dort ihre laufenden Projekte vorzustellen.

Weitere Informationen und Anregungen finden Sie auf der Internetseite des AK Grundschule unter [didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/](http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/).

Elke Binner, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM),  
Humboldt-Universität zu Berlin  
E-Mail: [elke.binner@hu-berlin.de](mailto:elke.binner@hu-berlin.de)

Marcus Nührenböcker, IEEM der  
Technischen Universität Dortmund  
E-Mail: [marcus.nuehrenboecker@tu-dortmund.de](mailto:marcus.nuehrenboecker@tu-dortmund.de)

Barbara Ott, Pädagogische Hochschule St.Gallen  
E-Mail: [barbara.ott@phsg.ch](mailto:barbara.ott@phsg.ch)

Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Universität Kassel  
E-Mail: [rathgeb-schnierer@mathematik.uni-kassel.de](mailto:rathgeb-schnierer@mathematik.uni-kassel.de)

## Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

### Herbsttagung in Budapest, 21.–22. 9. 2018

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

Das zweite Treffen des GDM-Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ im Jahr 2018 fand am 21. und 22. September an der Eötvös Loránd Universität in Budapest statt. Damit war die ungarische Hauptstadt zum vierten Mal Ort der alljährlichen Herbsttagung des im Jahr 2015 (in Basel) gegründeten Arbeitskreises (anfangs AK Ungarn genannt). Die Annehmlichkeiten des Tagungsortes samt Rahmenprogramm wussten die 14 an dieser Veranstaltung teilnehmenden Mitglieder des Arbeitskreises sehr zu schätzen.

Zu Beginn erinnerte Éva Vásárhelyi an den nach langer und schwerer Krankheit am 19. Juli 2018 verstorbenen Kollegen Prof. Dr. Bernd Zimmermann. Sie würdigte seine Leistungen auf den Gebieten Problemlösen in Mathematik, Heuristik, Geschichte der Mathematik, Kreativität und Begabung. Dazu erwähnte sie sein Oktagon der mathematischen Hauptaktivitäten. Besonders hob sie seine Verdienste in der Unterstützung der ungarischen Mathematikdidaktik und in der langjährigen ungarisch-fernerisch-deutschen Zusammenarbeit hervor.

Im Mittelpunkt der Arbeitskreistagung standen selbstverständlich die Fachvorträge (nachfolgend die Abstracts).

#### Freitag, 21. September 2018

*Johann Sjuts, Osnabrück: Aufgabenstellungen zur Metakognition in der Schulmathematik*

Zentral für die Professionalität von Lehrkräften ist die Kompetenz zur Organisation und Analyse von Lehr-Lern-Prozessen. Von hoher Bedeutung für den Mathematikunterricht sind Aufgaben, die metakognitive Aktivitäten anregen. Diese Aufgaben nehmen Vorausschau, Selbstüberwachung und Rückschau der Lern-, Verstehens- und Denkprozesse als integrale Bestandteile auf. In der Effektstärke liegt Metakognition auf den vorderen Rängen. Die kontinuierliche Überwachung der Wirksamkeit des eigenen Tuns ist eine wesentliche Bedingung für erfolgreiches Lernen. Es gilt daher, eine lernbegleitende Metakognition durch passende Aufgabenstellungen zur Geltung zu bringen. Der Vortrag zeigt

auf exemplarische Weise, wie Metakognition in Aufgaben Berücksichtigung finden kann.

*Karl Josef Fuchs und Gregor Milicic, Salzburg: Themen der numerischen Mathematik an Österreichs höheren Schulen*

Ausgangspunkt des Referats ist eine Analyse von Lehrstoffen der allgemeinbildenden und berufsbildenden höheren Schulen Österreichs, die dem Bereich der numerischen Mathematik zuzuordnen sind. Fundamentale Ideen wie jene des algorithmischen/ problemorientierten Denkens oder der Approximation/Diskretisierung, sind als Strategien beim Lehren dieser Themen von besonderer Bedeutung. Den beiden Teilen Lehrplan/ Lehrstoff bzw. Fundamentale Ideen widmet sich Karl Josef Fuchs, eine Auswahl prototypischer Beispiele zur Numerik aus den Curricula präsentiert Gregor Milicic.

*Ödön Vancsó, Budapest: Eine Problemserie, die zu der Lösung des Problems „Gut zu wetten“ führt*

Ödön Vancsó analysiert in seiner Präsentation das Problem der Sportwetten. Als Konklusion aus der Struktur der Lösung wird eine Problemserie konstruiert, die zu dieser Lösung führt. Eine kurze methodisch-didaktische Analyse der Frage schließt den Vortrag ab.

*Katalin Fried, Budapest: What makes a problem difficult?*

If by looking at a problem we can solve it, we do not call it a problem; it is rather an exercise or an application of techniques. So what makes a problem difficult?

1. We might not know everything we should in order to solve it.
2. We get stuck at a point and do not know how to start or go on.
3. We might have constant uncertainty (factual and/or technical).
4. We are not sure we actually have solved the problem.

We are going through these difficulties through studying a particular problem for high school students.

*Ervin Deák, Budapest: Begriffliche Klarstellungen, neue Begriffe und Zusammenhänge im synthetisch-geometrischen Themenkreis*

*„Pythagoreischer Lehrsatz“*

In der synthetischen Geometrie ist „der“ Pythagoreische Lehrsatz nicht „ein Satz mit vielen bekannten Beweisen“, sondern eine Gruppe verschiedener Sätze. Für jedes rechtwinklige Dreieck ist das Hypotenusenquadrat „gleich“ der Vereinigung (ohne gemeinsame innere Punkte) der beiden Kathetenquadrate. Für spezielle rechtwinklige Dreiecke (gleichschenklige, solche mit kommensurablen

Katheten oder mit drei kommensurablen Seiten) können Verschärfungen der Behauptung des Satzes gelten bzw. gesucht werden. Es könnte z. B. auch die „Auslegungsgleichheit“ – eine Verschärfung der Zerlegungsgleichheit – als selbständiger Begriff (die Möglichkeit, das Hypotenusenquadrat und die beiden Kathetenquadrate mit derselben Anzahl von kongruenten Exemplaren ein und desselben Quadrats auszulegen) betrachtet und behandelt werden. Es wird untersucht, inwieweit der Kathetensatz mit der Auslegungsgleichheit harmonisiert. Im Vorfeld der Maßgeometrie kann die Auslegungsgleichheit auch als eine wichtige weiterführende Idee dienen.

### Samstag, 22. September 2018

*Stefan Götz, Wien: Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie*

Beim Kapitel „Analytische Geometrie“ in der Oberstufe werden oft abstrakte Problemstellungen ohne weiterführenden Kontext in den Blick genommen. Auf diese Weise kann die eigentliche Kraft der algebraischen Beschreibung von geometrischen Situationen den Schülerinnen und Schülern kaum vermittelt werden. Im Vortrag werden (zum Teil wohlbekannte) Fragestellungen aus der ebenen Dreiecksgeometrie präsentiert, die die Schülerinnen und Schüler zum (auch eigenständigen) Begründen mit Mitteln der analytischen Geometrie anregen sollen. Eine standardisierte Lage eines allgemeinen Dreiecks im Koordinatensystem erweist sich dabei als fruchtbarer Ausgangspunkt für den Einsatz von Standardmethoden (!) der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht.

*Karl Josef Fuchs, Salzburg, und Ján Gunčaga, Bratislava: Computer Algebra Systeme im Mathematikunterricht – Instrumente zur Begriffsbildung sowie einer „Modernisierung“ historischer Materialien*

Computer Algebra Systeme wie GeoGebraCAS sowie andere an den Schulen verwendete Hand Held Systeme wie TI-Nspire oder CasioClassPad II sind nicht nur reine Instrumente zur Visualisierung oder reine Rechenhilfen, sondern können sehr viel zur Bildung zentraler mathematischer Begriffe beitragen. In der Präsentation gehen Karl Josef Fuchs und Ján Gunčaga exemplarisch auf die Idee der Approximation im Zusammenhang mit der Differentialrechnung sowie auf die Möglichkeit des Beweisens und der Analogiebildung im Rahmen einer Veranschaulichung mit CAS ein. Zudem sind historische Lehrbücher (zum Beispiel von Franz Mocnik) reiche Quellen für die Verwendung von CAS. Beispiele dazu werden im zweiten Teil des Vortrags präsentiert.

*Gabriella Ambrus, Budapest: Lehramtsstudierende lösen einfache (offene) Textaufgaben, die auf realen Situationen basieren*

Es ist schwer, Textaufgaben zu lösen. Beim Lösen von Textaufgaben mit Realitätsbezug bedeuten das Wahrnehmen und die Analyse der realen Situation ein weiteres Problem – nicht nur für SchülerInnen, sondern auch für Lehramtsstudierende –, was anhand mehrerer Überprüfungen belegt wurde. Eine Förderung der zukünftigen Lehrkräfte auf diesem Gebiet soll daher schon während des Studiums geplant werden. Ein Konzept für die Durchführung wird im Rahmen eines Projektes „Komplexer Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert“ der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erarbeitet. Der Vortrag beschäftigt sich mit neuen und aktuellen Ergebnissen dieses Forschungsprogramms.

Die ausführlichen Fassungen der Beiträge werden wie gewohnt in einem Tagungsband (Ed. Éva Vásárhelyi) erscheinen.

Ein intensiver Informationsaustausch rundete die Tagung ab. Dabei kamen mehrere Themenbereiche zur Sprache: Die Anzahl der Promotionen in Mathematikdidaktik an ungarischen Universitäten entwickelt sich erfreulich. Von der länderübergreifenden Zusammenarbeit (Ungarn, Öster-

reich, Schweiz, Deutschland, Slowakei, Tschechien, Polen, Slowenien, Kroatien) gehen wirksame Impulse aus (Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Unterricht, Abschlussleistungen in der Schule, Bedeutung von Schulbüchern, Fragestellungen und Methoden in der mathematikdidaktischen Forschung, Formate forschenden Lernens im Lehramtsstudium). Der Arbeitskreis plant gemeinsame Vorhaben zur Verbreitung metakognitiver Aktivitäten beim Mathematiklernen in der Schule (entsprechend den bereits auf der GDM-Jahrestagung 2018 in Paderborn besprochenen Zielsetzungen) und zur Dokumentation und Analyse von Unterrichtsszenen (nach einem Kategoriensystem). Bereits vorliegende Arbeiten werden zusammengestellt und im Arbeitskreis verfügbar gemacht. Vorgesehen sind ebenso gemeinsame Publikationen.

Mit ausdrücklichem Dank für ihren Einsatz wird Gabriella Ambrus als Sprecherin des Arbeitskreises bestätigt.

Die nächste Sitzung findet im März 2019 auf der GDM-Jahrestagung in Regensburg statt.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität Budapest  
E-Mail: [ambrusg@cs.elte.hu](mailto:ambrusg@cs.elte.hu)

Johann Sjuts, Universität Osnabrück  
E-Mail: [sjuts-leer@t-online.de](mailto:sjuts-leer@t-online.de)

## Arbeitskreis: Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge

Herbsttagung in Duisburg-Essen, 28.–28. 9. 2018

---

Guido Pinkernell und Florian Schacht

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Digitale Werkzeuge (MDW) wurde 2018 an der Universität Duisburg-Essen ausgetragen und stand unter dem Thema „Digitalisierung fachbezogen gestalten“. Mit 45 Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus Forschung, Praxis und Bildungsadministration sowie 16 thematischen Beiträgen ([www.uni-due.de/didmath/veranstaltungen/tagungen/akmdw/akmdw.php](http://www.uni-due.de/didmath/veranstaltungen/tagungen/akmdw/akmdw.php)) war viel Gelegenheit für Information, Gespräche und Austausch zum Schwerpunktthema der diesjährigen Tagung.

Anlass für die Fortführung des Themenschwerpunktes, der bereits auf der Arbeitskreistagung 2017 in Heidelberg angestoßen wurde, war die in der „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ formulierte Zielsetzung, Bildung unter den Bedingungen und Möglichkei-

ten einer digital geprägten Welt neu zu fassen. Vor diesem Hintergrund wurde auch der von der KMK im Jahr 2016 verabschiedete Rahmen für „Kompetenzen in der digitalen Welt“ kritisch diskutiert ([https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/KMK\\_Kompetenzen\\_-\\_Bildung\\_in\\_der\\_digitalen\\_Welt\\_Web.html](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2017/KMK_Kompetenzen_-_Bildung_in_der_digitalen_Welt_Web.html)). Das im AK erarbeitete und vom Vorstand der GDM verabschiedete Positionspapier zur Bildungsoffensive von Bund und Ländern hat die aus didaktischer Sicht wesentlichen Handlungsfelder benannt (vgl. [www.madipedia.de/images/6/6c/BMBF-KMK-Bildungsoffensive\\_PositionspapierGDM.pdf](http://www.madipedia.de/images/6/6c/BMBF-KMK-Bildungsoffensive_PositionspapierGDM.pdf)). Sie haben das Programm der Tagung deutlich geprägt: In einer Keynote mit dem Titel *Digitalisierung als Herausforderung an Mathematikdidaktik. gestern. heute. morgen.*

skizzierte Bärbel Barzel (Universität Duisburg-Essen) ausgehend von einer kritischen Bestandsanalyse die Gestaltungsmöglichkeiten und die Herausforderungen, die sich für den Fachunterricht sowie für die Fachdidaktik vor dem Hintergrund gesellschaftlicher Prozesse im Zusammenhang mit der Digitalisierung ergeben. Die Vorträge der Teilnehmenden befassten sich insgesamt mit neuen Formen des Lehrens und Lernens, neuen Möglichkeiten des Zugangs zu bekannten Inhalten, mit der Prägung von Sprache und Kognition durch neue Medien und Werkzeuge sowie mit Konzepten für die Lehreraus- und -fortbildung. Ein Tagungsband ist in Vorbereitung. Der Tagungsband zur Herbsttagung 2017 in Heidelberg ist unter dem Titel „Digitales Lernen im Mathematikunterricht“ beim Franzbecker Verlag erschienen (ISBN 978-3-88120-140-7).

Ein wichtiges Ziel der Herbsttagung war es, Akteure auf dem Feld digitaler Werkzeuge, Medien und Bildung aus Forschung, Praxis und Bildungsadministration zu vernetzen. Dazu beschäftigten sich vier themenbezogene Gruppen mit den folgenden Aufgabenfeldern:

- *Curriculare Verankerung digitaler Werkzeuge*  
Leitfrage: Wie sollten digitale Werkzeuge curricular verankert sein?
- *Programmieren von Algorithmen*  
Leitfrage: Inwiefern wird algorithmisches Denken in den Fachunterricht eingebunden, sodass Programmieren und fachliches Lernen vertieft werden?

- *Digitale Lernangebote – Kriterien zur Beurteilung und Entwicklung von Apps und Videos*  
Leitfrage: Welche fachdidaktischen Qualitätskriterien existieren zur Analyse, Bewertung und Produktion von Apps und Videos?
- *Fachlicher Hintergrund bei technischen Problemen*  
Leitfrage: Inwiefern können technische Probleme fachliche Lernprozesse vertiefen?

### Herbsttagung 2019 und Einladung zur Mitarbeit

Das Arbeitskreistreffen 2019 wird zweitägig vom 27.9. bis zum 28.9.2019 stattfinden. Ort und Tagungsthema werden noch bekannt gegeben.

Die letzten Herbsttagungen 2017 in Heidelberg und 2018 in Essen waren geprägt durch die Vielfalt innovativer Beiträge, die gerade aus dem Kreis des sogenannten „Nachwuchs“ kamen. Das wollen wir intensivieren und laden insbesondere promovierende und andere in einer Qualifizierungsphase befindlichen Personen auf dem Feld digitaler Werkzeuge und Medien zur Mitarbeit in den Arbeitskreis ein:

[http://www.madipedia.de/wiki/Arbeitskreis\\_Mathematikunterricht\\_und\\_Digitale\\_Werkzeuge](http://www.madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Mathematikunterricht_und_Digitale_Werkzeuge)

Guido Pinkernell, PH Heidelberg  
E-Mail: [pinkernell@ph-heidelberg.de](mailto:pinkernell@ph-heidelberg.de)

Florian Schacht, Universität Duisburg-Essen  
E-Mail: [florian.schacht@uni-due.de](mailto:florian.schacht@uni-due.de)

## Arbeitsgruppe: PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe Sommertagung in Dortmund, 15.–16. 6. 2018

---

Roland Rink und Daniel Walter

Die zweite Sommertagung der AG ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe‘ fand von Freitag, 15. 6. 2018, bis Samstag, 16. 6. 2018, in Dortmund statt. 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus Praxis und Forschung tauschten sich im Rahmen von neun Vorträgen über innovative Unterrichtsideen sowie aktuelle Forschungsprojekte zum Einsatz digitaler Medien in den Klassenstufen 1 bis 6 aus:

- Andrea Baldus (TU Dortmund): *Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms im Mathematikunterricht der Grundschule*. Der Beitrag beleuchtete die Frage, inwiefern Tabellenkalkulationsprogramme zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen eingesetzt werden können. Dabei wurden erste Ergebnisse einer Interventionsstudie vorgestellt und diskutiert.
- Jacqueline Bonow (Justus-Liebig-Universität Gießen): *Digital und inklusiv: Settings für den Ma-*

*thematikunterricht in der Primarstufe.* Im Beitrag wurden Ideen vorgestellt, die sich auf die Vernetzung von Inklusion und digitalen Medien beziehen. Damit werden zwei aktuelle Forschungsfelder der Mathematikdidaktik miteinander verbunden.

- Daniela Götze (TU Dortmund): *Arithmetik digital – Anschauliches Beweisen in der Lehrerbildung fördern.* Viele Studierende weisen mitunter tiefgehende Schwierigkeiten im konzeptuellen Verständnis zum Beweisen arithmetischer Zusammenhänge auf. Im Beitrag wurde am Beispiel von dynamisierten Beweisvideos aufgezeigt, wie Studierende unterstützt werden können, diesen Schwierigkeiten zu begegnen.
- Andreas Leinigen (Justus-Liebig-Universität Gießen): *Kinder erklären für Kinder mathematische Sachverhalte mit Lehrfilmen.* Erklären ist eine der zentralen didaktischen Unterrichtshandlungen, bei der Sprache eine eminent wichtige Rolle einnimmt. Der Beitrag zeigte am Beispiel der schriftlichen Subtraktion auf, wie Kinder bei der Erstellung eigener Erklärvideos vorgehen und inwiefern die entwickelten Filme das Verständnis zur schriftlichen Subtraktion unterstützen können.
- Franziska Peters (Justus-Liebig-Universität Gießen): *Radio im Mathematikunterricht.* Der Beitrag befasste sich mit der Frage, wie auditive Lernmaterialien sinnvoll zur Förderung von Bildungs- und Fachsprache eingesetzt werden können. Die Audiodateien entstammen dabei dem „Kinderfunkkolleg Mathematik“ des Radiosenders hrz-Kultur, das kindgerechte Materialien zu verschiedenen mathematischen Themenfeldern anbietet.
- Roland Rink (TU Braunschweig): *Stop Motion – eine neue Möglichkeit zur Einsicht in Schülervorstellungen zu Zahlen und elementaren Rechenoperationen?* Ein nicht unerheblicher Anteil der Grundschul Kinder zeigt große Schwierigkeiten bei der Entwicklung tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen. Im Beitrag wurde gezeigt, dass die Stop-Motion-Technik vielversprechende Chancen bieten kann, vor allem Kinder mit Schwierigkeiten zu unterstützen und Einsichten zu gewinnen.
- Sina Römer (TU Dortmund): *Entdeckerfilme im Mathematikunterricht der Grundschule – Entwicklung und Erforschung von videobasierten Lernumgebungen.* Auf Videoplattformen wie YouTube steigt seit Jahren die Zahl der Videos, die bspw. Lösungswege und Algorithmen erklären und präsentieren. Im Rahmen des vorgestellten Projektes wurde in Abgrenzung dazu der Einsatz von „Entdeckerfilmen“ untersucht, welche die Lernenden zum Erkunden, Beschreiben und

Begründen mathematischer Grundoperationen und Zusammenhänge anregen sollen.

- Shajahan Haja-Becker (Universität des Saarlandes): *Erprobung von Viertklässlern am Mittenviereck mit der dynamischen Geometrie.* Der Beitrag befasste sich mit den Vorgehensweisen von Kindern bei der Verwendung der Software *Cinderella 2.8.* Der mathematische Lerngegenstand bestand dabei aus der Untersuchung von Eigenschaften des Mittenvierecks.
- Aileen Steffen (Universität Vechta): *Nutzungsweisen und mathematische Lernprozesse von Kindergartenkindern bei Interventionen mit einer Tablet-App.* Das vorgestellte Projekt fokussiert Nutzungsweisen und Lernprozesse von Kindergartenkindern bei Verwendung der Osmo Tangram-App und einem entsprechenden physischen Pendant. Insbesondere wurden dabei fachdidaktische Potenziale der App analysiert und ein besonderes Augenmerk auf die Lernbegleitung durch den Osmo gelegt.

### Sommertagung 2019

Die dritte Sommertagung wird zweitägig vom 28. 6. 2019 bis zum 29. 6. 2019 in Münster stattfinden. Das Tagungsprogramm sowie Anmeldemodalitäten werden im Frühjahr 2019 auf [www.pri-ma-medien.de](http://www.pri-ma-medien.de) veröffentlicht.

### Einladung zur Mitarbeit

Informationen zur Arbeitsgruppe PriMaMedien sind im Internet unter [www.pri-ma-medien.de](http://www.pri-ma-medien.de) zu finden. Interessierte sind herzlich eingeladen, sich aktiv in der Arbeitsgruppe zu engagieren, indem sie an den regelmäßigen Arbeitsgruppentreffen während der GDM-Jahrestagungen sowie der jährlich stattfindenden Herbsttagung des AK Grundschule in Bad Salzdetfurth teilnehmen. Sofern Sie regelmäßig Informationen zu Aktivitäten der Arbeitsgruppe per Mail erhalten möchten, können Sie in den AG-Newsletter aufgenommen werden. Gerne können Sie sich hierzu bei Roland Rink ([r.rink@tu-braunschweig.de](mailto:r.rink@tu-braunschweig.de)) oder Daniel Walter ([daniel.walter@uni-muenster.de](mailto:daniel.walter@uni-muenster.de)) melden.

Roland Rink, Technische Universität Braunschweig  
E-Mail: [r.rink@tu-braunschweig.de](mailto:r.rink@tu-braunschweig.de)

Daniel Walter, Universität Münster  
E-Mail: [daniel.walter@uni-muenster.de](mailto:daniel.walter@uni-muenster.de)

## Arbeitskreis: Problemlösen

### Herbsttagung in Darmstadt, 29.–31. 8. 2018

Ana Kuzle, Inga Gebel und Benjamin Rott

Wir nutzen diese Ausgabe der GDM-Mitteilungen, um die bisherigen Aktivitäten des Arbeitskreises Problemlösen im Jahr 2018 kurz zusammenzufassen und um unsere Pläne für das Jahr 2019 anzukündigen.

#### Aktivitäten des Arbeitskreises 2018

Vom 29. bis 31. August 2018 fand die 20. Tagung „Problem Solving in Mathematics Education“ (Pro-Math) und zugleich die 5. Herbsttagung des Arbeitskreises Problemlösen an der Universität Potsdam (Campus Golm) statt. Die Tagung wurde vom Lehrstuhl Grundschulpädagogik Mathematik durch Inga Gebel und Ana Kuzle ausgerichtet. An der Tagung haben knapp 40 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus sieben verschiedenen Ländern (Deutschland, Finnland, Griechenland, Israel, Schweden, Türkei und Ungarn) teilgenommen. Für den Hauptvortrag konnte eine ausgewiesene Forscherin zum Problemlösen – Frau Prof. Dr. Anu Laine (Universität Helsinki, Finnland) – gewonnen werden, die zum Thema „Open problems as part of mathematics teaching“ vorgetragen hat. Zusätzlich zum Hauptvortrag gab es – passend zum Tagungsmotto „Implementation research on problem solving in school settings“ – 18 weitere Vorträge (11 research reports und 7 short orals). Die Beiträge eröffneten ein breites Spektrum problemorientierten Mathematiklernens und -lehrens. So wurden beispielsweise Forschungsprojekte zur Rolle von Reflexion bei der Auseinandersetzung mit mathematisch reichhaltigen Problemstellungen, zum Problemlösen in der Algebra und Kombinatorik, zum Problemlösen unter Zuhilfenahme digitaler Medien sowie zur Gestaltung problemorientierten Mathematikunterrichts in der Grundschule vorgestellt. Zusätzlich wurde ein Workshop ausgerichtet, um den Austausch zu den von Teilnehmerinnen und Teilnehmern geäußerten Anliegen (Methodik und Rolle der Akteure wie Lehrkräfte, Forscherinnen und Forscher, Schülerinnen und Schüler, Studierende in Implementationsforschung, ideelle Forschungsprojekte zum Problemlösenlehren) zu ermöglichen. Zu dieser gemeinsamen Tagung wird ein Tagungsband mit Ausarbeitungen zu den Präsentationen erscheinen. Der Band wird von Ana Kuzle, Inga Gebel und Benjamin Rott herausgegeben und voraussichtlich im Herbst 2019 im WTM-Verlag erscheinen.

Während der Tagung haben wir auch unseres kürzlich verstorbenen Kollegen Bernd Zimmermann gedacht. Im Rahmen eines Memorials haben András Ambrus, Torsten Fritzlar und Kinga Szücs die Arbeit von und mit Bernd Zimmermann aus eigener Perspektive betrachtet und gewürdigt. Dieser Rückblick fiel allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern sehr schwer. Wir haben als Community eine wichtige Person verloren, die insbesondere im deutschsprachigen Raum die Forschung u. a. im Bereich des Problemlösens etabliert und vorangeht hat.

#### Aktivitäten des Arbeitskreises 2019 und der Problemlösen-Community

Im kommenden Jahr wird der Arbeitskreis wie gewohnt während der *GDM-Tagung* in Regensburg tagen; Peter Stender (Universität Halle-Wittenberg) wird seine Forschung zu „Heuristische Strategien – nicht nur zum Problemlösen“ zur Diskussion stellen. In diesem Zusammenhang stehen auch Neu- und/oder Wiederwahlen der beiden Sprecherposten an. Zusätzlich weisen wir in Bezug auf die GDM-Tagung darauf hin, dass es ein von Edyta Nowinska (Universität Osnabrück) und Benjamin Rott (Universität zu Köln) ausgerichtetes Minisymposium geben wird, in dem das Thema „Qualität einer Mathematikunterrichtsstunde valide beurteilen – kritischer Vergleich mehrerer Perspektiven“ erörtert wird. Im Minisymposium wird – am Beispiel einer Unterrichtsstunde zum Problemlösen – zunächst diskutiert, was aus einer normativen Perspektive die Qualität einer solchen Unterrichtsstunde ausmachen kann. Anschließend soll die Qualität dieser Unterrichtsstunde anhand verschiedener Instrumente (u. a. Ratinginstrument zur Beurteilung metakognitiv-diskursiver Unterrichtsqualität) analysiert werden.

Die sechste Herbsttagung des Arbeitskreises „Problemlösen“ wird 2019 in Köln stattfinden. Die Tagung wird von Benjamin Rott und seinen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern ausgerichtet. Am Freitag, den 18.10.2019 wird Dietrich Dörner, anknüpfend an seine „Logik des Misslingens“ und an Platons „Mathematik des Denkens“, den Hauptvortrag der Tagung mit dem Titel „Problemlösen in der Politik“ halten. Alle weiteren Informationen werden rechtzeitig bekannt gegeben.

Schließlich möchten wir auch auf die nächste ProMath-Tagung hinweisen. Die Tagung der ProMath-Gruppe findet vom 11.9.2019 bis 13.9.2019 an der Universität Ljubljana (Faculty of Education, Kardeljeva ploščad 16, 1000 Ljubljana, Slowenien) statt. Sie wird von Tatjana Hodnik ([tatjana.hodnik@pef.uni-lj.si](mailto:tatjana.hodnik@pef.uni-lj.si)) und Vida Manfreda Kolar ([vida.manfreda@pef.uni-lj.si](mailto:vida.manfreda@pef.uni-lj.si)) unter Unterstützung von Ana Kuzle ([kuzle@uni-potsdam.de](mailto:kuzle@uni-potsdam.de)) ausgerichtet. Weitere Informationen werden 2019 auf der Tagungsseite ([www.promath.org](http://www.promath.org)) veröffentlicht.

Interessierte sind als Gäste und weitere Mitglieder im Arbeitskreis jederzeit herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin Ana Kuzle bzw. den Sprecher Benjamin Rott.

Ana Kuzle, Universität Potsdam  
Email: [kuzle@uni-potsdam.de](mailto:kuzle@uni-potsdam.de)

Inga Gebel, Universität Potsdam  
E-Mail: [ingagebel@uni-potsdam.de](mailto:ingagebel@uni-potsdam.de)

Benjamin Rott, Universität zu Köln  
Email: [benjamin.rott@uni-koeln.de](mailto:benjamin.rott@uni-koeln.de)

## Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Rauischholzhausen, 12.–13. 10. 2018

---

Anke Lindmeier

Zur Herbsttagung des AKs „Psychologie und Mathematikdidaktik“, der im Geiste der International Group for Psychology of Mathematics Education (IG PME) steht, trafen sich wieder 30 Teilnehmerinnen und Teilnehmer im Schloss Rauischholzhausen, der Tagungsstätte der Justus-Liebig-Universität Gießen. Zwei Tage nehmen sich die Teilnehmenden, von der gerade angestellten Doktorandin bis zur erfahrenen Professorin, jedes Jahr Zeit, um sich in vier verschiedene Forschungsarbeiten einzudenken und kritische Rückmeldung zu geben.

Am Freitag startete Katja Lenz, die in ihrer Arbeit die klassische Unterscheidung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen aufgreift und im Bereich der Bruchrechnung für eine Testentwicklung ausschärft. Das vorbildliche Vorgehen zeigte dabei insbesondere auf, wie wichtig die sorgfältige Analyse des Testgegenstandes für die Testentwicklung ist.

Katharina Siefers anschließend präsentierte Studie zu Selbstwirksamkeitserwartungen im Umgang mit Repräsentationen steht ebenfalls deutlich in psychologischer Tradition. Die eng aufeinander bezogenen Erhebungsinstrumente erfordern besondere methodische Aufmerksamkeit, bilden aber die inhärenten theoretischen Bezüge ab.

Im Rahmen der „akademischen Abenddiskussion“ beschäftigten wir uns, angestoßen durch einen Impuls von Aiso Heinze, mit Fragen der Forschungsethik. Die Themenkomplexe *Publikationsethik* und allgemeine *Gute wissenschaftliche Pra-*

*xis* (z. B. Dokumentation des Forschungsprozesses, Redlichkeit) werden im Forschungsalltag bereits relativ häufig bewusst. Entsprechende Grundlagen sind beispielsweise in der Denkschrift „Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ der DFG (DFG, 2013) nachzulesen. Eine umfangreiche Ressource stellen auch die Seiten des Committee on Publication Ethics (COPE, <https://publicationethics.org>) dar.

Weniger häufig werden allerdings grundlegendere ethische Fragen diskutiert, die insbesondere relevant werden, wenn Forschung an Menschen stattfindet, was in der mathematikdidaktischen Forschung (häufig) zutrifft. Bei der Betrachtung von Fallbeispielen wurde es knifflig: Ist die Gewährung von Incentives ethisch vertretbar? Unter welchen Umständen, in welcher Höhe und wer soll diese erhalten? Haben Kinder das Recht, eine Studienteilnahme zu verweigern, auch wenn Eltern, Lehrkräfte und Aufsichtsbehörden zugestimmt haben? Dürfen natürlich auftretende Variationen, beispielsweise eine fehlerhafte Instruktion durch Lehrkräfte, in Kontraststudien genutzt werden, wenn alle Beteiligten zustimmen? Erfordert die Beobachtung eines natürlich auftretenden Nachteils für Lernende, dass die Forschenden im Nachgang Chancengerechtigkeit herstellen müssen? Die herausfordernde Diskussion konnte durchaus als Härte-test für den individuellen ethischen Kompass verstanden werden, zumal letztlich die Argumente auf die grundlegenden Prinzipien der Freiheit, Gleichheit und Würde

des Menschen sowie der Forderung nach Schadensvermeidung, Fürsorge und Gerechtigkeit für alle zurückzuführen sind. Eine klassische Quelle zum Nachlesen dieser Prinzipien und Handlungsempfehlungen bei Forschung mit Menschen stellt der Belmont-Report (1979) dar. Im Anschluss an die Abenddiskussion war der gesellige Ausklang im Schlosskeller wohlverdient.

Eva Treiber führte die frisch ausgeschlafenen Teilnehmenden am Samstagvormittag in ein Forschungsprojekt zur Bedeutung mathematischer Anforderungen für die Attribution von Erfolg und Misserfolg bei Teilnehmenden der Physikolympiade ein. Das Thema an der Schnittstelle von Psychologie, Physik- und Mathematikdidaktik nutzt den spannenden Kontrast der verbundenen Domänen, um Mechanismen der Attribution nachzuzeichnen.

Im letzten Slot stellte Silke Neuhaus ihr Dissertationsprojekt zum Beweisverständnis von Studierenden in der Hochschuleingangsphase vor. Dabei zeigte sich, dass, obwohl Beweisen eine der zentralen Tätigkeiten der Mathematik ist, das Erfassen und Untersuchen des zugehörigen Verständnisses immer noch ein lohnendes hochschuldidaktisches Thema ist.

Die Vortragenden kommen im Folgenden selbst zu Wort und lassen auch Sie als Lesende nochmals an den Inhalten der Vorträge und den Kernpunkten der Diskussionen teilhaben. Ich möchte noch herausstellen, dass die Vortragenden auch dieses Jahr alle bestens vorbereitet waren und durch die sehr guten Präsentationen zu einem kurzweiligen Programm beitrugen. Im Namen aller Teilnehmerinnen und Teilnehmer darf ich den Vortragenden herzlich für ihre Bereitschaft danken, ihre Arbeiten ausführlich vor- und zur Diskussion zu stellen!

*Katja Lenz, Anika Dreher, Lars Holzäpfel und Gerald Wittmann, Pädagogische Hochschule Freiburg: Entwicklung und Validierung eines Testinstruments zur Erfassung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen im Bereich der Bruchrechnung*

Es herrscht Konsens darüber, dass mathematisches Wissen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen umfasst (Hiebert & LeFevre, 1986; Geary et al., 2008). Trotz der Vielzahl an Forschungsarbeiten zu *konzeptuellem und prozeduralem Wissen* bleibt die Verwendung der Begriffe zum Teil vage und es fehlen explizite domänenspezifische Konzeptualisierungen (Crooks & Alibali, 2014). Darüber hinaus betonen Rittle-Johnson und Schneider (2015), dass der Validität bei der Messung der Wissensarten bislang zu wenig Beachtung geschenkt wurde. Das vorgestellte Projekt zielt auf dieses Forschungsdesiderat am Beispiel der Addition und Subtraktion von Brüchen. Es wurde eine theoretisch fundierte, umfassende Konzeptualisierung von konzeptuel-

lem und prozeduralem Wissen entwickelt sowie eine systematische Operationalisierung und Validierung vorgenommen. Ergebnisse der konfirmatorischen Faktorenanalyse bestätigten eine Überlegenheit der angenommenen zweidimensionalen Faktorenstruktur gegenüber einer eindimensionalen Modellierung und anderen theoretisch plausiblen zweidimensionalen Modellierungen.

#### *Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven*

Die anschließende Diskussion bezog sich zunächst auf die Konzeptualisierung der Konstrukte. Dabei wurde unter anderem thematisiert, an welchen Stellen die vorgenommene Konzeptualisierung und Operationalisierung aus mathematikdidaktischer Sicht von der psychologischen Perspektive abweicht. Insbesondere wurde deutlich, dass Konzeptualisierung und Operationalisierung der Konstrukte stärker vor dem Hintergrund der angestrebten Testnutzung gesehen werden müssen, um die Frage „Warum genau so?“ besser beantworten zu können. Entsprechend wurde angeregt, den Zweck der Testentwicklung – die Klassifizierung von Schüler\*innen nach ihren individuellen Unterschieden im konzeptuellen und prozeduralen Wissen zu Brüchen sowie die Erfassung der Auswirkungen von spezifischen Lerngelegenheiten auf die beiden Konstrukte – expliziter zu benennen, damit bezogen auf die Testwertinterpretation und -nutzung ein umfassenderes Validitätsargument entwickelt werden kann.

Ein weiterführendes Thema der Diskussion betraf die grundsätzliche Frage, ob Unterschiede in den Testwerten auf individueller Ebene interpretiert werden können oder ob eine Interpretation auf Klassenebene angemessener wäre. Unterschiede in den Testwerten wären dann als Effekte von Unterschieden im Unterricht der Kinder zu interpretieren.

Hierzu wurden unterschiedliche Lösungsansätze diskutiert (z. B. experimentelle Herangehensweise, Analyse der Korrelationen innerhalb der Klassen und zwischen den Klassen, Berücksichtigung von Kovariaten).

Insgesamt hat die Diskussion dazu beigetragen, die Argumentationslinie weiter zu schärfen, und gab wichtige Impulse für die Weiterarbeit.

*Katharina Siefer, Timo Leuders und Andreas Obersteiner, Pädagogische Hochschule Freiburg: Kompetenzprofile beim Umgang mit linearen Funktionen: Selbstwirksamkeitserwartungen und Leistung – Abschluss der ersten Studie*

Der Umgang mit Funktionen in ihren verschiedenen Repräsentationen gehört zu den zentralen Kompetenzbereichen des Mathematikunterrichts. Kompetenzen sind als individuelle Ausprägungen



nicht nur kognitiver, sondern auch nicht-kognitiver Dispositionen (Blömeke, Gustafsson, & Shavelson, 2015; Weinert, 2001), wie beispielsweise Selbstwirksamkeitserwartungen, zu verstehen. Selbstwirksamkeitserwartungen haben einen entscheidenden Einfluss auf das Lernen (Talsma, Schütz, Schwarzer, & Norris, 2018).

Mathematische Selbstwirksamkeitserwartungen werden definiert als die eigene Einschätzung der Fähigkeiten, bestimmte mathematische Aufgaben erfolgreich bearbeiten oder lösen zu können (Hackett & Betz, 1989). In der vorgestellten Studie wurden Leistungen und Selbstwirksamkeitserwartungen beim Umgang mit linearen Funktionen von 376 Lernenden im 8. und 9. Schuljahr anhand derselben Aufgaben untersucht. Dazu wurde ein Erhebungsinstrument zur aufgabenbezogenen Erfassung von Selbstwirksamkeitserwartungen (Bandura, 2006) beim Umgang mit linearen Funktionen entwickelt.

In Übereinstimmung mit der Literatur zeigten die Daten im Querschnitt einen moderaten Zusammenhang zwischen Leistung und Selbstwirksamkeitserwartungen. Mittels hierarchischer Clusteranalyse konnten Gruppen mit unterschiedlichen Ausprägungen in Leistung und Selbstwirksamkeitserwartungen identifiziert werden. Die Ergebnisse sind für die Unterrichtspraxis relevant, da Lernende mit unterschiedlichen Kompetenzprofilen aus Selbstwirksamkeitserwartungen und Leistung von unterschiedlichen Fördermaßnahmen profitieren sollten.

#### *Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven*

Anfangs wurde diskutiert, inwieweit sich das verwandte psychologische Konstrukt des Selbstkonzepts von den Selbstwirksamkeitserwartungen unterscheidet. Es wurde darauf hingewiesen, dass häufig beide Konstrukte nicht sauber getrennt werden, was zu verzerrten Ergebnissen führen kann (Honicke & Broadbent, 2016). Neben Unterschieden in der Art der Erhebung (aufgaben spezifische Erfassung vs. Erfassung als generelle Überzeugung) wurden auch empirische und theoretische Argumente angeführt.

Ein zweiter Diskussionspunkt betraf die Auswertungsmöglichkeiten, die sich aus der Erfassung der Selbstwirksamkeitserwartungen und Leistungen anhand derselben Aufgabe ergeben. Beispielsweise könnte die Genauigkeit der Schülereinschätzungen abgebildet werden.

Es folgte eine Diskussion zur Erstellung der Cluster für die Charakterisierung von Gruppen unterschiedlicher Kompetenzprofile, was ein methodisch herausforderndes Problem darstellt. Dadurch, dass Leistung und Selbstwirksamkeitserwartungen in einer Beziehung zueinander stehen, muss die ge-

meinsame Varianz in den beiden Variablen berücksichtigt werden. Die vorgestellte Methode wurde diskutiert und verschiedene Alternativen wurden hervorgebracht. Abschließend lässt sich sagen, dass zentrale Erkenntnisse aus der Diskussion gezogen wurden, die es nun ermöglichen, die weitere Auswertung zu verfeinern und die Argumentationslinie zu stärken.

*Eva Treiber, Irene Neumann und Aiso Heinze, IPN Kiel: Mathematik in der PhysikOlympiade unter besonderer Berücksichtigung der Attribution*

Der Schülerwettbewerb PhysikOlympiade möchte begabte Jugendliche für Physik interessieren und fördern (Petersen & Wulff, 2017). Da die anspruchsvollen Physikaufgaben auch Mathematisierungen erfordern, können die Jugendlichen an der Physik, aber auch an der Mathematik scheitern, selbst wenn sie physikalisch kompetent sind.

Das vorgestellte Promotionsprojekt untersucht vor diesem Hintergrund die mathematischen Anforderungen in der PhysikOlympiade aus zwei Perspektiven: Zum einen stellt sich die Frage, wie die Teilnehmenden durch ihren Unterricht auf die mathematischen Anforderungen vorbereitet werden. Zum anderen soll erforscht werden, wie die Jugendlichen ihren (Miss-)Erfolg auf mathematische oder physikalische Ursachen attribuieren und wie diese Attributionen ihr mathematisches bzw. physikalisches Selbstkonzept beeinflussen.

Zunächst wurden Musterlösungen der Olympiaden-Aufgaben hinsichtlich ihrer mathematischen Anforderungen sowie deren Abdeckung durch die gymnasialen Mathematiklehrpläne in vier Bundesländern analysiert. Dabei zeigt sich die Bedeutung der Mathematik für die PhysikOlympiade (wie für die Physik allgemein, z. B. Karam, 2014). Zwar reichen für die erste Runde mathematische Kenntnisse aus der Sekundarstufe I, die mathematischen Anforderungen der höheren Runden gehen jedoch über die aus dem Unterricht bekannten Inhalte hinaus.

Zusätzlich wurde zu mehreren Zeitpunkten im Wettbewerbsverlauf, neben anderen affektiven Variablen, die Attribution des (Miss-)Erfolgs der Teilnehmenden (z. B. Weiner, 2010) erfasst, sowohl auf Mathematik als auch auf Physik bezogen. Die vorgestellten Ergebnisse konzentrierten sich auf die Daten von 170 Teilnehmenden der ersten Runde (davon 97 für die zweite Runde qualifiziert). Sowohl bei erfolgreichen als auch bei ausgeschiedenen Teilnehmenden wurden selbstwertdienliche Attributionsmuster sichtbar. Außerdem zeigte sich bei der Attribution eine Unterscheidung von Mathematik und Physik: Während erfolgreiche Teilnehmende ihr Weiterkommen signifikant höher auf die Mathematik als auf die Physik in den Aufgaben

zurückführten, attribuierten erfolgreiche ihr Ausscheiden stärker auf die Physik als auf die Mathematik in den Aufgaben – ein Ergebnis, das sich vermutlich mit den niedrigen mathematischen Anforderungen der ersten Runde erklären lässt.

#### *Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven*

Im Anschluss an die Aufgabenanalyse war ein zentraler Diskussionspunkt, ob die Teilnehmenden die benötigte Mathematik im Mathematik- oder im Physikunterricht lernen. Es wurde vermutet, dass Lehrkräfte sich stark darin unterscheiden, zu welchem Grad ihr Physikunterricht der Sekundarstufe I mathematisiert ist. Es wäre interessant zu erheben, inwiefern sich diese Unterschiede bei betreuenden Lehrkräften in der Physikolympiade widerspiegeln oder ob vor allem Schüler und Schülerinnen an der Physikolympiade teilnehmen, deren Physikunterricht stärker mathematisiert ist. Ebenso wurde angeregt, dass eine Analyse von Lösungen der Teilnehmenden Einblicke geben könnte, wie die Mathematik zum Modellieren genutzt wird.

Für die Auswertung und Interpretation der Ergebnisse wurde darauf hingewiesen, dass sich nicht nur die Teilnehmenden unterscheiden (beispielsweise hinsichtlich der Vorkenntnisse), sondern sich auch die Rahmenbedingungen im Lauf der Olympiade ändern (Bearbeitung als Einzelperson vs. Seminarwochen, absolutes vs. relatives Auswahlkriterium). Diese Aspekte sollten in weiteren Analysen einbezogen werden, da Attributionen sich dann beispielsweise auch durch den Vergleich mit der Lerngruppe ändern können. Zusammenfassend hat die Diskussion das Projekt insgesamt bestärkt und Anregungen für die Auswertung sowie mögliche weiterführende Studien gegeben.

#### *Silke Neuhaus und Stefanie Rach, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg: Beweisverständnis von Studierenden in der Studieneingangsphase*

Beweisen bereitet Studierenden gerade zu Beginn ihres Studiums oftmals große Schwierigkeiten. Studierende müssen sowohl eigenständig Beweise konstruieren, validieren und evaluieren können als auch ein Beweisverständnis aufbauen. Darunter versteht man, dass sie korrekt aufgeschriebene Beweise lesen und verstehen können.

In diesem Vortrag wurde mein Dissertationsprojekt vorgestellt, bei dem ich das Beweisverständnis von Fach- und Lehramtsstudierenden in der Eingangsphase eines Mathematikstudiums analysiere. Neben der Vorstellung einer Arbeitsdefinition zur Konzeptualisierung von Beweisverständnis wurde auch eine Operationalisierung mittels Testinstrumenten vorgestellt, die sich an ein Assessmentmodell von Mejia Ramos et al. (2012) anlehnt. In den bisherigen quantitativen Studien wurden

diese Tests genutzt, um Zusammenhänge zwischen dem Beweisverständnis und anderen Merkmalen von Studierenden, wie zum Beispiel Begriffswissen, Fachinteresse oder dem Nutzen von Beweislesestrategien, zu untersuchen und mögliche Prädiktoren für das Beweisverständnis zu ermitteln. Auf diese Weise können Ansatzpunkte für eine verbesserte Diagnose von Schwierigkeiten sowie eine bessere Unterstützung von Lernprozessen in der Studieneingangsphase erlangt werden. Erste Ergebnisse der bisherigen Studien wurden gezeigt und diskutiert.

#### *Kernpunkte der Diskussion und neue Perspektiven*

In der Diskussion wurden hilfreiche Anregungen für eine Weiterentwicklung der Arbeitsdefinition von Beweisverständnis gegeben, die nun in nächster Zeit theoretisch ausgeschärft wird. Da die auf Basis des Assessmentmodells von Mejia Ramos et al. (2012) konstruierten Beweisverständnistests nur einen Beweis aus einem mathematischen Fachbereich beinhalten, ist es schwierig, aus den vorgestellten Ergebnissen zu generalisieren. In der Diskussion wurde überlegt, wie man Beweisverständnis allgemeiner erfassen könnte und ob das Assessmentmodell von Mejia-Ramos et al. (2012) erweitert werden sollte. Außerdem wurden die Auswirkungen des Forschungsprojekts auf die Mathematikdidaktik, spezieller auf die Hochschullehre im Bereich Mathematik, erfragt. Durch die Analyse der Zusammenhänge zwischen Beweisverständnis und anderen individuellen Merkmalen von Studierenden könnte erstens das theoretisch ausgeschärfte Konzept des Beweisverständnisses empirisch fundiert werden und zweitens könnten mögliche Prädiktoren für Beweisverständnis ermittelt werden. Gerade das Vorwissen der Studierenden im untersuchten mathematischen Beweis und z. T. Beweislesestrategien scheinen das Beweisverständnis zu präzisieren. Basierend auf diesen Erkenntnissen könnten dann gezielte Fördermaßnahmen entwickelt werden, indem sowohl das Begriffswissen als auch Strategien zum Umgang mit Beweisen adressiert werden. Insgesamt war die Diskussion gewinnbringend für die weitere Arbeit an diesem Promotionsprojekt und brachte zusätzliche Impulse für die Forschung im Bereich des Beweisens.

#### **Organisatorisches und Ausblick**

Haben Sie Lust, an unserer Tagung teilzunehmen? Im Jahr 2019 wird die Herbsttagung des AKs Psychologie und Mathematikdidaktik voraussichtlich vom 11. bis 12. Oktober wieder im Schloss Rauischholzhausen stattfinden. In der gewohnten Struktur werden bis zu vier Arbeiten, die fortgeschritten oder kurz vor dem Abschluss sind, vorgestellt wer-

den. Dies können sowohl Promotionsprojekte als auch Ausschnitte aus anderen Projekten sein. Sie sollten dazu bereit sein, die Arbeiten im Sinne eines Werkstattberichts zur Diskussion zu stellen. Eine kurze Email an die beiden Sprecherinnen Silke Ruwisch ([ruwisch@uni.leuphana.de](mailto:ruwisch@uni.leuphana.de)) oder Anke Lindmeier ([lindmeier@ipn.uni-kiel.de](mailto:lindmeier@ipn.uni-kiel.de)) genügt, wenn Sie in den Emailverteiler aufgenommen werden möchten oder gegebenenfalls auf der Tagung vortragen möchten.

Auf der GDM 2019 wird der AK Psychologie und Mathematikdidaktik keine planmäßige Aktivität anbieten, es besteht aber jederzeit die Möglichkeit, sich unter [www.leuphana.de/gdm\\_psychologie](http://www.leuphana.de/gdm_psychologie) über unsere Ziele und Aktivitäten zu informieren.

### Gemeinsames Literaturverzeichnis

- Bandura, A. (2006). Guide for constructing self-efficacy scales. In F. Pajares, & T. C. Urdan (Hrsg.). *Adolescence and education. Self-efficacy beliefs of adolescents* (S. 307–337). Greenwich: IAP.
- Belmont-Report (1979). *Belmont Report: Ethical Principles and Guidelines for the Protection of Human Subjects of Research, Report of the National Commission for the Protection of Human Subjects of Biomedical and Behavioral Research*. <https://www.hhs.gov/ohrp/regulations-and-policy/belmont-report/index.html>
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3–13. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194>
- Crooks, N. M., Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34(4), 344–377. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001>
- DFG (2013). *Vorschläge zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis: Empfehlungen der Kommission Selbstkontrolle in der Wissenschaft*. Weinheim: Wiley-VCH. [http://www.dfg.de/download/pdf/dfg\\_im\\_profil/reden\\_stellungnahmen/download/empfehlung\\_wiss\\_praxis\\_1310.pdf](http://www.dfg.de/download/pdf/dfg_im_profil/reden_stellungnahmen/download/empfehlung_wiss_praxis_1310.pdf)
- Geary, D. C., Boykin, A. W., Embretson, S., Reyna, V., Siegler, R., Berch D. B., & Graban, J. (Hrsg.) (2008). *The final report of the National Mathematic. Report of the task group on learning processes*. U.S. Department of Education.
- Hackett, G. & Betz, N. E. (1989). An Exploration of the Mathematics Self-Efficacy/Mathematics Performance correspondence. *Journal for Research in Mathematics Education* 20(3), 261. <https://doi.org/10.2307/749515>
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.). *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics* (S. 1–27). Hillsdale NJ u.a.: Erlbaum.
- Honick, T., & Broadbent, J. (2016). The influence of academic self-efficacy on academic performance: A systematic review. *Educational Research Review*, 17, 63–84. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2015.11.002>
- Karam, R. (2014). Framing the structural role of mathematics in physics lectures: A case study on electromagnetism. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 10(1), 10119. <https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.10.010119>
- Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18.
- Petersen, S., & Wulff, P. (2017). The German Physics Olympiad – identifying and inspiring talents. *European Journal of Physics*, 38(3), 1–16. <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa538f>
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.). *The Oxford handbook of numerical cognition* (S. 1102–1118). Oxford: Oxford University Press.
- Talsma, K., Schüz, B., Schwarzer, R., & Norris, K. (2018). I believe, therefore I achieve (and vice versa): A meta-analytic cross-lagged panel analysis of self-efficacy and academic performance. *Learning and Individual Differences*, 61, 136–150. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.015>
- Weiner, B. (2010). The development of an attribution-based theory of motivation: A history of ideas. *Educational Psychologist*, 45(1), 28–36. <https://doi.org/10.1080/00461520903433596>
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. S. Rychen, & L. H. Salganik (Hrsg.). *Defining and selecting key competences* (S. 45–66). Göttingen: Hogrefe.

Anke Lindmeier, IPN Kiel  
E-Mail: [lindmeier@ipn.uni-kiel.de](mailto:lindmeier@ipn.uni-kiel.de)

## Arbeitskreis: Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik

Herbsttagung in Frauenwörth am Chiemsee, 18.–20. 9. 2018

Gert Kadunz, Barbara Ott und Christof Schreiber

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik fand in diesem Jahr wieder in der Benediktinerinnenabtei Frauenwörth auf der Fraueninsel im Chiemsee statt. Es trafen sich vierzehn an semiotischen Ansätzen des Lehrens und Lernens von Mathematik Interessierte, die sich im Rahmen von insgesamt elf Vorträgen aus verschiedenen Schulstufen, der Lehrerbildung sowie der Informatik intensiv austauschten. Die thematischen Ausrichtungen der Präsentationen waren breit gefächert. So konzentrierten sich einige auf allgemeine Überlegungen, während andere Vorträge unterrichtspraktische Fragestellungen behandelten.

Die theoretische Grundlage der meisten Vorträge bildete die Semiotik nach C. S. Peirce, seine Zeichen triade sowie die auf Peirce und L. Wittgenstein aufbauenden Überlegungen nach W. Dörfler, wie etwa eine spezielle Sicht auf die Verwendung von Diagrammen in mathematischen Lernprozessen. Auch andere Ansätze, wie das epistemologische Dreieck von H. Steinbring und dessen Verwendung für die Analyse von Unterricht, wurden diskutiert. In der Auseinandersetzung zur Verwendung von Zeichen beim Lernen von Mathematik wurden verschiedene Modi der Darstellung wie Geschriebenes oder Gezeichnetes, Gesten und Gebärden sowie Gesprochenes thematisiert. Dabei wurden Settings mit haptischem Material, mit Papier und Stift und auch digitale Produkte diskutiert. Auch Beispiele aus Schulbüchern und Lernumgebungen standen im Fokus des semiotischen Interesses.

Einige der Vorträge sind Grundlage für vertiefende Aufsätze, die in einem Herausgeberband von Gert Kadunz 2019 unter dem Titel „Semiotik Bd. 2“ bei Springer veröffentlicht werden.

Im Rahmen der Herbsttagung wurde außerdem Gert Kadunz (Uni Klagenfurt) als Sprecher bestätigt und Barbara Ott (PH St. Gallen) sowie Christof Schreiber (Uni Gießen) wurden als neue Mitglieder in den Sprecherrat gewählt. Ein ganz herzlicher Dank ging an Willi Dörfler (Uni Klagenfurt) für seine langjährige Tätigkeit als einer der Sprecher des Arbeitskreises Semiotik.

Auf der Tagung der GDM in Regensburg wird montags 16.00–17.30 Uhr wieder ein Arbeitskreistreffen stattfinden, zu dem alle Interessierten herz-

lich eingeladen sind. Eine entsprechende Tagesordnung wird rechtzeitig allen Kolleginnen und Kollegen, deren E-Mail Adressen sich im Verteiler des Arbeitskreises befinden, übermittelt werden. Die nächste Herbsttagung wird wieder in der Abtei Frauenwörth auf der Fraueninsel im Chiemsee stattfinden und ist auf den 24.–26. September 2019 terminiert. Anfragen zur Anmeldung werden von Gert Kadunz entgegengenommen.

Informationen zum Arbeitskreis finden Sie unter [www.uni-klu.ac.at/kadunz/semiotik](http://www.uni-klu.ac.at/kadunz/semiotik).

Gert Kadunz, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt  
Email: [gert.kadunz@aau.at](mailto:gert.kadunz@aau.at)

Barbara Ott, Pädagogische Hochschule St. Gallen  
Email: [barbara.ott@phsg.ch](mailto:barbara.ott@phsg.ch)

Christof Schreiber, Justus-Liebig-Universität Gießen  
Email: [christof.schreiber@math.uni-giessen.de](mailto:christof.schreiber@math.uni-giessen.de)

## Arbeitskreis: Stochastik

### Herbsttagung in Würzburg, 2.–4. 11. 2017

Susanne Schnell

Dieses Jahr richtete der Arbeitskreis Stochastik seine Herbsttagung in Würzburg aus. Gut dreißig interessierte Kolleginnen und Kollegen aus Schule und Hochschule diskutierten über Herausforderungen für die Stochastikdidaktik.

Wolfgang Riemer eröffnete die Tagung mit einem spannenden Experimentalvortrag zum Thema *Auf der Suche nach  $H_0$*  und lud dabei die Teilnehmenden zum Mitdenken und Mitmachen ein. Er thematisierte den „Unsinn“ von Hypothesentest auf Rezept und schlug die Analyse von Ritualen und Aufgabemustern gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern vor.

Am Samstagvormittag präsentierte Tobias Rolles unter dem Titel *Kompetenzmodellierung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff* Ergebnisse einer querschnittlichen quantitativen Studie zu Fähigkeiten von Lernenden in Hinblick auf den Umgang mit verschiedenen Aspekten des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und unterschiedlichen Aufgabentypen (z. B. mehrstufige Zufallsexperimente, Berechnung einfacher Laplace-Wahrscheinlichkeiten sowie frequentistische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten).

Im Anschluss stellte Karin Kempfer ihr Dissertationsprojekt zur *Entwicklung und Erforschung einer Lernumgebung zum Erwerb einer Differenzkompetenz am Beispiel Zufall in den Disziplinen Mathematik und Theologie* vor. Dabei arbeitet sie an der Schnittstelle der Didaktiken der Theologie und der Stochastik zu den fachspezifischen Modellierungsprozessen zum Zufall.

Der Vortrag von Rolf Biehler und Thomas Wasong *Data Science und Big Data in der Schule – Konzeption und Durchführung eines Projektkurses für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II* stellte ebenfalls eine überfachliche Perspektive in den Mittelpunkt, nämlich die Behandlung von Big Data und Data Science in der Kooperation mit der Informatikdidaktik im Rahmen eines experimentellen Projektkurses an zwei Gymnasien. Die ersten Eindrücke aus der noch laufenden Durchführung zeigten eindrucksvoll, wie auch große Datenmengen, zum Beispiel gesammelt von sogenannten Lärmboxen, von Schülerinnen und Schülern sinnvoll bearbeitet werden können.

Norbert Henze setzte sich mit dem Fall des Justizirrtums bei Sally Clark auseinander: *Mit Wahr-*

*scheinlichkeit 1 zu 73 Millionen unschuldig? Ein fataler Missbrauch der Statistik.* Anhand dieses prominenten Beispiels wurde diskutiert, wie wichtig ein solides Grundverständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten ist. Der Erwerb dessen ist eines der zentralen Ziele des verständnisorientierten Stochastikunterrichts.

Eine weitere disziplinverbindende Perspektive nahm Norbert Christmann in seinem Vortrag *Nutzung stochastischer Methoden bei taktischen Entscheidungen in der Endphase von Basketballspielen* ein, in dem er gemeinsam mit Jan Christmann sportliche Statistiken zum Basketball eindrucksvoll aufbereitete und auswertete.

Im Vortrag von Laura Martignon und Ulrich Hoffrage zum Thema *Risikokompetenz* wurde der Begriff des Risikos als an Verluste oder Gewinne von Ressourcen gekoppelt diskutiert und unter anderem ein Stufenmodell zum Erkennen, Abwägen und Vergleichen, Analysieren und Modellieren sowie schließlich Handeln vorgeschlagen.

Der Samstag schloss nach einer Diskussion zu Herausforderungen für die Stochastikdidaktik (siehe unten), der Sitzung des AK Stochastik sowie der Mitgliederversammlung zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts, mit einem gemeinsamen Abendessen in einer Würzburger Weinstube.

Am Sonntag eröffnete Joachim Engel mit seinem Vortrag *Verständnisorientierte Inferenzstatistik: Herausforderungen – Dilemmas – Konzepte.* Er ging der Frage nach, welchen Beitrag die Mathematik zum Verständnis der induktiven Logik leisten kann. Dass diese per se nie fehlerfrei sei, sei eine wichtige Erkenntnis, die im Unterricht herausgearbeitet werden müsse und die kritisches Denken weit über rein formale Betrachtungen hinaus benötige.

Im Anschluss stellte Florian Berens sein Dissertationsprojekt unter dem Titel *Measuring, explaining and treating attitudes and beliefs in statistics education at university level* vor. Im Zentrum steht für ihn die Frage nach der Messung, Erklärung und positiven Beeinflussung nicht-kognitiver Faktoren wie beliefs, Einstellungen und Erwartungen zur Statistik von Studierenden der Sozialwissenschaften. Neben der Entwicklung eines zielgruppenspezifischen Instruments zur Erfassung dieser Faktoren stellte er die

Planung einer Studie mit Experimentalgruppendesign zur Beeinflussung der Einstellungen vor.

Die Tagung schloss mit dem Vortrag *Besorgt um Deutschland? Mediale und politische Nutzung von Ängsten* des renommierten Statistikers Gerd Bosbach. In diesem kurzweiligen Beitrag stellte er auf anschauliche Weise anhand aktueller Beispiele unter anderem zum demografischen Wandel und zur Wirtschaftslage dar, wie „Katastrophenszenarien“ medial konstruiert und von kritischen mitdenkenden, informierten Bürgerinnen und Bürgern entlarvt werden können.

Im Rahmen der diesjährigen Herbsttagung des AK Stochastik wurden verschiedene Herausforderungen sowohl für die Praxis als auch für die Forschung diskutiert. Die Vorträge unter anderem von Karin Kempfer, Rolf Biehler und Thomas Wassong, Norbert Christmann und auch Gerd Bosbach zeigen die enge Verbindung zwischen Stochastik und anderen Fächern. Da die Interpretation zum Beispiel von statistischen Größen oder Wahrscheinlichkeiten vor einem spezifischen Kontext Sinn und Ziel der Stochastik ist, können sinnstiftende Fragestellungen und Datensätze aus anderen Disziplinen herangezogen werden. Daher wurde eine Vernetzung der Stochastikdidaktik mit anderen Fächern und Fachdidaktiken diskutiert: Welche Möglichkeiten zur Fächerverbindung gibt es (z. B. Zusammenarbeit mit der Informatik in Hinblick auf Data Science oder zu den Sozialwissenschaften)? Wie lassen sich diese in der Praxis umsetzen?

Ein weiteres wiederkehrendes Thema nach verschiedenen Vorträgen war das Verhältnis von formalem Kalkül und tiefergehendem inhaltlichen Verständnis. Insbesondere in Hinblick auf die Konzeption und Umsetzung einer verständnisorientierten Lehramtsausbildung zur Stochastik wurden verschiedene Fragen aufgeworfen, die in den kommenden Sitzungen thematisiert werden sollen: Welche Inhalte/Konzepte sollten zentral sein? Welches Grundverständnis ist unverzichtbar? Wie sollte das Curriculum gestaltet werden? Welche Ansätze gibt es dazu bereits?

Als dritte Herausforderung wurde der Blick auf die Praxis herausgearbeitet und die grundsätzliche Frage gestellt, welche Erfordernisse im aktuellen Stochastikunterricht bzw. bei Stochastiklehrerinnen und -lehrern besonders relevant sind. Hierzu wurde der Wunsch formuliert, in kommenden Tagungen die Beziehungen zwischen Forschung und Praxis zu betrachten: Welche Bedarfe gibt es von Seiten der Lehrkräfte im Hinblick auf Aus- und Fortbildung in Stochastik? Welche Perspektive nehmen sie auf Situation und Anforderungen des aktuellen Stochastikunterrichts ein? Welche Wünsche formulieren sie an die stochastikdidaktische Forschung?

Die Lebhaftigkeit der Diskussion zeigt, wie viel Potenzial in der weiteren gemeinsamen Arbeit des AK Stochastik steckt. Auf den kommenden Treffen werden die genannten Herausforderungen inhaltlich leitend sein. Zu dem Thema wurden außerdem bereits im Vorfeld der Tagung Diskussionsbeiträge online veröffentlicht, die auf der Website des Arbeitskreises eingesehen werden können: [www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/diskussion.html](http://www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/diskussion.html)

Wir danken herzlich allen Personen, die zum Gelingen dieser Tagung beigetragen haben. Ebenso herzlicher Dank gilt all jenen, die schon jetzt die kommende Herbsttagung vorbereiten, die vom 27.–29. September 2019 im Haus der Kirche – Evangelische Akademie Baden in Bad Herrenalb stattfindet. Genauere Informationen werden auf der Website des AK bekannt gegeben.

Letztlich bleibt noch in eigener Sache mitzuteilen, dass Philipp Ullmann als erster Sprecher des AK Stochastik zurückgetreten ist. Als Nachfolgerin wurde Susanne Schnell gewählt. Zweite Sprecherin bleibt Katja Krüger. Wir danken Philipp Ullmann herzlichst für die Arbeit der letzten Jahre. Neben zahlreichen organisatorischen Tätigkeiten gelang es ihm nicht nur, Herbsttagungen mit anregenden Vorträgen zu planen, sondern auch während der Treffen für eine angenehme Atmosphäre und gut moderierte Diskussionen zu sorgen. Wir freuen uns darauf, ihn von jetzt an als aktiven Teilnehmer dieser Diskussionen begrüßen zu dürfen.

[www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/](http://www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/)

Susanne Schnell, Universität Paderborn  
Email: [susanne.schnell@math.upb.de](mailto:susanne.schnell@math.upb.de)

## ISTRON-Gruppe Herbsttagung in Würzburg, 8.–9. 10 2018

Wolfgang Weigel und Hans-Stefan Siller

Die ISTRON-Gruppe verweist inzwischen auf ein fast 30-jähriges Bestehen. Von 8.–9. Oktober 2018 fand die ISTRON-Herbsttagung erstmals in Würzburg – dem Tagungsort der GDM-Tagung 2020 – statt. Aktiven und interessierten Lehrkräften aus Unterfranken und angrenzenden Regionen wurde die Möglichkeit geboten, zu erkennen, wie (mathematische) Modellierungen und Realitätsbezüge in den (regulären) Mathematikunterricht integriert werden (können)!

Traditionell gehören zum jährlichen Herbst-Treffen der ISTRON-Gruppe ein interner, wissenschaftlicher Teil sowie eine an der Schulpraxis orientierte ganztägige Fortbildungsveranstaltung. In der internen Sitzung präsentierte beispielsweise Reinhard Oldenburg hochschuldidaktische Überlegun-

gen. In dem Diskussionsbeitrag wurde insbesondere die Integration von Modellbildung im Rahmen der Fachvorlesung Analysis diskutiert. Auch das von Matthias Ludwig verantwortete Projekt MathCityMaps wurde dort unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten vorgestellt und im Anschluss diskutiert. Aus den Reihen der Nachwuchswissenschaftlerinnen stellte Corina Hankeln wesentliche Ergebnisse aus einem internationalen Austausch mit Frankreich vor. Der Fokus in diesem Beitrag lag hierbei v.a. auf einem Vergleich zum Modellieren in der Schule auf internationaler Ebene.

Die am folgenden Tag stattfindende ganztägige Lehrerfortbildung hatte sich dem Motto „Mathematik spielerisch? – spielerisch Mathematik!“ verschrieben. Dieser Lehrertag war gleichermaßen bei



Überquerung einer Leonardokuppel (Bild: Emmerich, Pressestelle Universität Würzburg)

Mittelschul-, Realschul- und Gymnasiallehrkräften aus ganz Bayern und darüber hinaus gut nachgefragt. Die Hauptvorträge wurden von Gabriele Kaiser und Hans-Georg Weigand gehalten.

Gabriele Kaiser zeigte auf, wie man sich dem Volumen der Skulptur des Seeler-Fußes vor dem Hamburger Fußballstadion begründet nähern kann. Weiterhin standen umfangreichere, projektartige Ansätze, Mathematik spielerisch zu entdecken, im Fokus. Dazu gehörte beispielsweise der spannende Vergleich einer Ampelsteuerung an einer Verkehrskreuzung mit einem Verkehrskreisel.

Hans-Georg Weigand berichtete, wie man sich auf spielerische Weise auf mathematische Entdeckungsreise begibt. Dazu wurden mehrere Stationen des Würzburger Lehr-Lern-Labors vorgestellt. Die Lehrerinnen und Lehrer konnten erfahren, wie die Kinder an Realobjekten ein Bewusstsein für eine mathematische Problemstellung entdecken können, welche dann nach einer Mathematisierung an mathematischen Simulationen weiter erkundbar sind. Konkret kann man z. B. mit einem Bobbycar Einparkprozesse von PKW erfahrbar machen und diese dann weitergehend an interaktiven Simulationen studieren.

Zusätzlich zu den Hauptvorträgen wurden in vierzehn Workshops interessante und v.a. auch praxisbezogene Inhalte mathematischer Modellierung für und in der Schule vorgestellt. Die Themen reichten von Politik (z. B. Wahlen in USA) über Kli-

mawandel, Leonardo-Kuppel, Google PageRank-System, (Brett-)Spielen bis hin zu Farben und Tönen. Natürlich wurden die Arbeitsprodukte von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern, aber auch von den Dozenten selbst getestet (vgl. Hans Humenberger beim Begehen der gerade erbauten Leonardo-Kuppel im Bild).

Details zum internen Programm als auch zur Lehrerfortbildung finden sich auf der Homepage der ISTRON-Gruppe ([www.istron.mathematik.uni-wuerzburg.de](http://www.istron.mathematik.uni-wuerzburg.de)) und auf der Homepage des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg ([go.uni-wuerzburg.de/menspiel](http://go.uni-wuerzburg.de/menspiel)).

Zur nächsten ISTRON-Herbst-Tagung haben Katja Eilerts und ihr Team an die Humboldt-Universität zu Berlin im Herbst 2019 eingeladen.

Weitere Informationen zu ISTRON finden Sie auf der Homepage der ISTRON-Gruppe, die neben den Informationen zur Schriftenreihe auch detaillierte(re) Informationen zu zukünftigen Tagungen enthält. Haben Sie Interesse bei ISTRON mitzumachen? Über Ihr Interesse und ihre Rückmeldung freuen wir uns!

Wolfgang Weigel, Universität Würzburg  
E-Mail: [wolfgang.weigel@mathematik.uni-wuerzburg.de](mailto:wolfgang.weigel@mathematik.uni-wuerzburg.de)

Hans-Stefan Siller, Universität Würzburg  
E-Mail: [hans-stefan.siller@mathematik.uni-wuerzburg.de](mailto:hans-stefan.siller@mathematik.uni-wuerzburg.de)

## Arbeitskreis: Mathematikgeschichte und Unterricht

### Ankündigung der Tagung in Mainz, 29. 5.–2. 6. 2019

Ysette Weiß

Die nächste gemeinsame Tagung der Fachsektion für Mathematikgeschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und des Arbeitskreises „Mathematikgeschichte und Unterricht“ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik findet vom 29. 5. 2019 bis zum 2. 6. 2019 in Mainz statt.

Die gemeinsamen vier- bis fünftägigen Tagungen werden seit mehr als 20 Jahren im zweijährigen Turnus an wechselnden Standorten organisiert und zeichnen sich durch eine große thematische Bandbreite aus. Mathematikhistorisch interessierte Mathematiker, Historiker, Philosophen und Didaktiker haben auf dieser Tagung sowohl die Möglichkeit sich mit verschiedenen Aspekten der Entwicklung von mathematischen Ideen, Institutionen und her-

ausragenden Mathematikern zu beschäftigen als auch die Einbeziehung historischer Aspekte in den Mathematikunterricht und dessen Geschichte zu diskutieren. Einen Einblick kann man sich durch die Tagungsbände der vergangenen Tagungen verschaffen.

Nähere Informationen werden auf der Webseite des Arbeitskreises <https://ak-mg-u.uni-mainz.de> bekanntgegeben. Die Anmeldung von Vorträgen erfolgt per Mail an das lokale Organisationsteam Tilmann Sauer, Martina Schneider und mich.

Wir freuen uns über eine rege Teilnahme.

Ysette Weiß, Universität Mainz  
E-Mail: [yweiss@uni-mainz.de](mailto:yweiss@uni-mainz.de)



## 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 2019 Regensburg, 4.–8. 3. 2019

---

Die 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik findet vom 4. bis 8. März 2019 an der Universität Regensburg statt. Nach 1996 lädt die GDM zusammen mit dem Lehrstuhl Didaktik der Mathematik der Universität Regensburg zum zweiten Mal in die UNESCO-Welterbestadt ein, um sich über aktuelle Fragen und Entwicklungen der mathematikdidaktischen Forschung auszutauschen.

Die kommende GDM-Tagung in Regensburg ist die erste, die nach den neuen Richtlinien zur Gestaltung der GDM-Jahrestagungen konzipiert ist. Im Rahmen von Hauptvorträgen, Minisymposien, Einzel- und Kurzvorträgen sowie einer Postersession werden sich während der Tagungswoche auf dem Universitäts-Campus im Süden von Regensburg mehrere hundert Teilnehmerinnen und Teilnehmer über aktuelle mathematikdidaktische Themen informieren. Am Montag und Donnerstag treffen sich die GDM-Arbeitskreise, am Dienstag findet der Lehrkräfte-Tag als Schnittstellenveranstaltung zwischen Theorie und Praxis statt.

### Das Tagungsprogramm

In fünf Hauptvorträgen wird ein Überblick über verschiedene Forschungsthemen der Mathematikdidaktik gegeben. Zu Tagungsbeginn freuen wir uns auf *Christine Knipping* (Universität Bremen), die über epistemologische und diskursive Herausforderungen zum Thema „Argumentieren im Mathematikunterricht“ referiert. Im Vortrag „PISA – Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich“ von *Kristina Reiss* (Technische Universität München) geht es um die Bedeutung der internationalen Vergleichsstudie für das Lehren und Lernen von Mathematik. „Ich seh’ da eigentlich etwas ganz anderes“ ist der Aufhänger des Vortrags

von Nachwuchswissenschaftlerin *Susanne Schnell* (Universität Paderborn) zum Thema „Professionelle Wahrnehmung von Lehrkräften erfassen und entwickeln“. Sinnstiftung im Mathematikunterricht illustriert *Abraham Arcavi* (Weizman Institute of Science, Israel) in seinem Vortrag „Making sense of sense-making in mathematics education“. Schließlich beleuchtet *Anita Schilcher* (Universität Regensburg) zum Abschluss der Tagung das mathematikdidaktische Forschungsthema „Sprache und Mathematik“ aus Sicht der Deutschdidaktik.

Den wesentlichen Bestandteil des Tagungsprogramms bilden bei der GDM 2019 in Regensburg zum einen freie Beiträge im Rahmen der Einzel- und Kurzvorträge sowie der Postersession, zum anderen begutachtete Beiträge im Rahmen der Minisymposien, in denen jeweils ein eingegrenztes, aktuelles Forschungsthema in bis zu sechs Vorträgen von verschiedenen Seiten beleuchtet wird. Das Programmangebot des Lehrkräfte-Tages am Dienstag ist speziell auf Lehrerinnen und Lehrer aller Schulformen zugeschnitten. Hier finden praxisorientierte Vorträge sowie Workshops zu schulelevanten Themen statt. Den Abschluss dieses Tages bildet der Vortrag „Feedback im Kontext Unterricht – Fakten und Mythen“ von Benedikt Wisniewski, zu dem nicht nur Lehrkräfte, sondern alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Tagung herzlich eingeladen sind.

Die Nachwuchsvertretung der GDM organisiert auch in Regensburg wieder ein Programm für alle Doktorandinnen und Doktoranden, die noch am Anfang ihrer Promotion stehen. Dieses startet bereits am Sonntagmittag mit dem Nachwuchstag. Hier können die Teilnehmerinnen und Teilnehmer Gleichgesinnte kennenlernen, Erkenntnisse über



Tagungsort, das Vielberth-Gebäude auf dem Campus der Universität Regensburg (Foto: Andreas Frank)

wissenschaftliche Arbeitsweisen gewinnen und ihre ersten Erfahrungen mit anderen austauschen. Im Rahmen der Talkrunde am Montag berichten zwei bereits promovierte Personen von ihrer eigenen Promotion sowie dem anschließenden beruflichen Werdegang und stellen sich den Fragen des wissenschaftlichen Nachwuchses. In der Expertinnen- und Expertensprechstunde können Promovierende während der Tagungswoche in einem Einzelgespräch Fragen und Probleme des eigenen Promotionsprojekts mit einer Expertin oder einem Experten diskutieren. Der Kneipenabend des Nachwuchses am Dienstag dient dem gegenseitigen Kennenlernen. Angebote für alle Promovierende, Post-Docs und Jun.-Profs stellen die folgenden Workshops dar: (1) Gestaltung von fachdidaktischen Vorlesungen (Jürgen Roth, Universität Koblenz-Landau) sowie (2) How to publish (Sven Solterbeck, Waxmann Verlag).

Das Rahmenprogramm beginnt am Montag mit dem Eröffnungsabend und einem gemütlichen Beisammensein. Am Mittwoch ist der Ausflugstag, an dem Sie eines der kulturellen, kulinarischen oder sportlichen Angebote wahrnehmen und die Altstadt Regensburgs mit ihren vielen kleinen Gassen und ihren Wahrzeichen gotischer Dom und Steinernen Brücke, erkunden können. Im Kolpinghaus Regensburg findet am Donnerstag der Gesellschaftsabend statt. Hier wird für das leibliche Wohl bestens gesorgt sein, Rhythmus und Tanz verspricht uns anschließend unsere Live-Band.

Aktuelle Informationen zur 53. Jahrestagung der GDM in Regensburg finden Sie unter <https://2019.gdm-tagung.de/>.

Das Tagungsteam freut sich, Sie zur GDM 2019 in Regensburg begrüßen zu dürfen.

Andreas Frank, Universität Regensburg  
E-Mail: [andreas.frank@ur.de](mailto:andreas.frank@ur.de)

## Die Vielfalt der tutoriellen Lehre in einer Tagung

**Einladung zur bundesweiten KI<sup>2</sup>VA-Tagung  
„Fachtutorien: Tutorielle Lehre und Heterogenität“  
TU Darmstadt 16./17. Mai 2019**

Tina Rudolph

Seit einigen Jahren sind Tutorinnen und Tutoren fester Bestandteil der Hochschullehre. Ihr Einsatz ermöglicht eine intensivere Betreuung für die Studierenden, die nicht direkt an wissenschaftliche Beschäftigte gebunden ist und zugleich können die betreuenden Tutorinnen und Tutoren den vermittelten Stoff nachhaltig verinnerlichen. Allerdings tragen sie sowie die sie qualifizierenden Hochschulbeschäftigten eine große Verantwortung, da sie auf vielfältige Anforderungen eingehen müssen.

Die Tagung „Tutorielle Lehre und Heterogenität“ beschäftigt sich mit den Anforderungen, die tutorielle Lehre an die studentischen und wissenschaftlichen Akteure stellt. Dazu zählen die Motivation von Studierenden und der Umgang mit heterogenen Gruppen sowie heterogene Tutorienformate, wie Labore oder Ateliers, die verschiedene Qualifizierungsmaßnahmen erfordern.

Auch die tutorielle Lehre in der Mathematik wird im Rahmen der Tagung durch verschiedene fachdidaktische Angebote vertreten. Dabei werden Einsatz- und Qualifizierungsmodelle von Tutorin-

nen und Tutoren vorgestellt und Perspektiven erarbeitet, wie diese Konzepte insbesondere für eine große Anzahl von Mathematik-Tutorinnen und Tutoren genutzt werden können. Innerhalb der Tagung werden dazu sowohl Keynotes als auch Workshops und Poster präsentiert, die sich mit universitären Qualifizierungskonzepten aus ganz Deutschland beschäftigen.

Die Tagung richtet sich an Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aller Disziplinen sowie Praktikerinnen und Praktiker in der Tutoriellen Qualifizierung. Wir freuen uns auf reges Interesse an der Tagung!

Weitere Informationen sowie das Programm der Tagung finden Sie unter [www.ki2va.informatik.tu-darmstadt.de](http://www.ki2va.informatik.tu-darmstadt.de). Bei Fragen können Sie sich an [tagung2019@kiva.tu-darmstadt.de](mailto:tagung2019@kiva.tu-darmstadt.de) wenden.

Tina Rudolph, Technische Universität Darmstadt  
E-Mail: [rudolph@mathematik.tu-darmstadt.de](mailto:rudolph@mathematik.tu-darmstadt.de)

## Tanja Hamann: Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht

Rezensiert von Henning Heske



Nachdem Tanja Hamann viele Jahre lang auf den GDM-Tagungen Einblick in ihr Promotionsvorhaben gegeben hatte, liegt ihre abgeschlossene Arbeit, die von der Universität Hildesheim als Dissertation angenommen wurde, nun als gedrucktes Buch vor. Seit 2011 hatte Hamann diese Einblicke regel-

mäßig – mit Ausnahme des Jahres 2017 – in den *Beiträgen zum Mathematikunterricht* publiziert, zuletzt 2018. Dabei weckten vor allem ihre ersten drei Beiträge Aufmerksamkeit, die alle den Spoiler trugen: „Macht Mengenlehre krank?“ Dadurch, dass diese Teilergebnisse vorliegen, kann man den Werdegang der Arbeit gut nachverfolgen. Im Nachhinein wird deutlich, dass Tanja Hamann insbesondere auf der Suche nach einer theoretischen Einordnung ihrer Befunde war. Erst als das Konzept der Rekontextualisierung von Helmut Fend (2008) gewinnbringend von ihr abgewandelt und angewendet werden konnte, gelang ihr eine theoretische Rahmung für die nun vorliegende, insgesamt überzeugende Darstellung des Scheiterns der „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht der Bundesrepublik Deutschland.

Die Geschichte dieser mathematikdidaktischen Reform ist grundsätzlich bekannt, nicht jedoch die Details und die genauen Gründe für das Scheitern. Der KMK-Beschluss von 3. 10. 1968 *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen* schrieb die Einführung der sogenannten Neuen Mathematik (New Math) an allen allgemeinbildenden Schulen vor. Hamann verfolgt in ihrer Arbeit eine doppelte Zielsetzung: Vorrangig möchte sie eine konkrete Beschreibung dieser speziellen Reform liefern, zugleich aber auch Aspekte herausarbeiten, die sich prototypisch auf andere Reformen des Mathematikunterrichts verallgemeinern lassen. Dazu wandelt Hamann das genannte Modell von Fend etwas ab. Den vier Ebenen seines bildungssoziologischen, fächerübergreifenden Modells – der kulturellen, der curricularen, der schulpraktischen und der rezeptiven Ebene – stellt sie die wissenschaftlich-theoretische Ebene, die curriculare Ebene, die un-

terrichtskonzeptionelle Ebene und die schulpraktische Ebene gegenüber. Auf jeder dieser Ebenen, die vertikal angeordnet sind, kommt nun an verschiedenen Stellen noch der zeitliche Verlauf als weitere Prozessdimension „zum Tragen, so dass sich ein mehrdimensionales deskriptives Modell ergibt“ (S. 17). Den Schwerpunkt legt Hamann dabei auf die wissenschaftlich-theoretische und die unterrichtskonzeptionelle Ebene, da diese am stärksten durch die Bezugswissenschaften (Mathematik, Pädagogik, Psychologie) und die Fachdidaktik geprägt sind. Zudem ist in beiden Fällen die Quellenlage durch die vorliegenden Veröffentlichungen, insbesondere der Schulbücher, ergiebig. Im Gegensatz zur untersten Ebene der Schulpraxis, die im Nachhinein kaum wissenschaftlich untersucht werden kann. Der Untersuchungszeitraum überdeckt schwerpunktmäßig die Jahre 1968 bis 1984, nur auf der wissenschaftlich-theoretischen Ebene wird der Ausgangspunkt der Reform bis ins Jahr 1959, als das maßgebliche OEEC-Seminar in Royaumont stattfand, zurückverfolgt.

Als zentrale Leitfrage formuliert Hamann: „Welches waren die der *Mengenlehre* zugrunde liegenden theoretischen Reformideen und wie wurden die Konzepte auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene rekontextualisiert?“ (S. 23) Zur ihrer Beantwortung wählt sie durchgehend die hermeneutische Methode.

Nacheinander arbeitet Hamann die ersten drei der genannten Ebenen des Reformprozesses ab. Der schulpraktischen Ebene ist aufgrund der kaum möglichen Erfassung kein eigenes Kapitel gewidmet. Im Kapitel über die wissenschaftlich-theoretische Ebene schildert Hamann knapp die internationalen Einflüsse, insbesondere das Royaumont-Seminar als entscheidenden Impuls für die Reform des Mathematikunterrichts in der Bundesrepublik. Anschließend referiert sie relativ ausführlich drei sehr bekannte wissenschaftliche Theorien, die prägenden Einfluss auf die Reform hatten: die entwicklungspsychologische Lerntheorie von Jean Piaget, die Theorie der Darstellungsformen (EIS-Prinzip) von Jerome S. Bruner und seine Forderung nach einem Spiralcurriculum sowie die von Zóltan P. Dienes formulierten mathematikdidaktischen Prinzipien. Bei der späteren Darstellung der unterrichtskonzeptionellen Ebene wird deutlich, dass Hamann mit diesen drei wis-

senschaftlichen Konzepten tatsächlich die grundlegende theoretische Rahmung erfasst hat. Es bleibt jedoch unverständlich, dass das wesentliche Buch von Dieter Ellrott und Manfred Schindler *Die Reform des Mathematikunterrichts – Grundlagen mit Beispielen aus dem Unterricht der Primarstufe* (Bad Heilbrunn, 1975) als zeitgenössische Darstellung von der Autorin hier nicht miteinbezogen wurde.

Im zweiten Kapitel gibt Hamann einen instruktiven Überblick über den Reformverlauf in der Bundesrepublik. Uberfachlich bedeutsam war diesbezüglich vor allem der Strukturplan für das Bildungswesen des Deutschen Bildungsrates (1970). Bei der Untersuchung der curricularen Ebene beschränkt sich Hamann auf die Grundschule und hier wiederum exemplarisch – aufgrund der persönlichen Nähe – auf das Land Niedersachsen. Die niedersächsischen Rahmenrichtlinien für die Grundschule von 1984, die eine Abkehr von der Mengenlehre bedeuteten, markieren den zeitlichen Endpunkt des Untersuchungszeitraumes. Eine vergleichende Untersuchung der verschiedenen Bundesländer steht damit ebenso noch aus wie Forschungen über den Verlauf und die Auswirkungen der Reform in den weiterführenden Schulen.

Das umfangreichste Kapitel der Arbeit bildet die Darstellung der unterrichtskonzeptionellen Ebene anhand der Analyse dreier ausgewählter Lehrwerke für die 1. Klasse. Während die exemplarische Auswahl der drei deutlich unterschiedlichen Schulbücher samt ihrer Begleitmaterialien schlüssig begründet wird, erscheint die Beschränkung auf das erste Schuljahr zumindest fragwürdig. Es wäre natürlich sehr interessant zu erfahren, wie sich die Reform in allen vier Schuljahren der Grundschule manifestierte und wie sich die didaktischen Bemühungen dort im Verlauf der Reform gegebenenfalls veränderten. Letzteres untersucht Hamann anhand einer qualitativen Schulbuchanalyse der verschiedenen Ausgaben zwischen 1967 und 1984, aber eben nur für den ersten Jahrgang. Aufgrund dieses Settings kann speziell der Frage nach der Umsetzung eines Spiralcurriculums kaum nachgegangen werden. Methodisch hätte zudem eine ergänzende quantitative Schulbuchanalyse gewinnbringende Aufschlüsse, insbesondere über die Gewichtung der mathematischen Teilgebiete, geben können.

Die Untersuchung der drei Lehrwerke liefert den Befund, dass diese drei unterschiedliche Konzepte verfolgen und daher nicht von „dem“ Reformkonzept oder „der“ Mengenlehre gesprochen werden kann. Während das Lehrwerk *Wir lernen Mathematik* vor allem eine Rekontextualisierung der Dienes-Konzeption darstellt, verfolgt *Mathematik in der Grundschule* einen eigenständigen Lehrgang mit der operativen Methode nach Piaget. Die Schul-

buchreihe *alef* wiederum bemühet sich, ein breites Spektrum der verschiedenen theoretischen Überlegungen (u. a. das EIS-Prinzip nach Bruner) didaktisch aufzubereiten. Allen Lehrwerken gemeinsam ist eine sichtbare Anpassung ihrer Konzeptionen an die curricularen Vorgaben, so dass die gewählten theoretischen Konstrukte stets nur eingeschränkt und abgewandelt umgesetzt werden. Zudem wird im Laufe der Jahre die inhaltliche Veränderung sichtbar, dass – vermutlich als Reaktion auf die gemachten Unterrichtserfahrungen – die Einführung der Zahlen immer weiter nach vorne rückt. Damit wird auch deutlich, dass die schulpraktische Ebene die Rekontextualisierung von der wissenschaftlich-theoretischen Ebene zur unterrichtskonzeptionellen Ebene wesentlich mitbestimmt. Hamann stellt diese Rückbeziehungen zwischen den vier Ebenen am Ende der Arbeit schlüssig in einer übersichtlichen Grafik dar, die als Blaupause für ähnliche Untersuchungen dienen kann.

Trotz des Scheiterns der Reform im Kern markiert sie den Übergang vom Rechenunterricht zu einem propedeutischen Mathematikunterricht in der Primarstufe. Dabei bleibt festzuhalten, dass diese Unterrichtsreform offenbar vor allem deshalb scheiterte, weil Mathematik im Wesentlichen lediglich zu pranumerischer Mengenlehre rekontextualisiert wurde, und es keine kohärente Gesamtkonzeption für die unterrichtspraktische Ebene gab. Gleichwohl stellt Hamann selbst fest, dass „die Gründe für die endgültige Rücknahme letztlich weitgehend im Dunkeln bleiben“ (S. 277). Insofern bieten sich hier Anknüpfungspunkte für weitere historische Forschungen, die neben den übrigen Grundschuljahrgangen auch die Einführung und das Scheitern der Mengenlehre an den weiterführenden Schulen in den Blick nehmen. Interessant wären auch Vergleiche zu Unterrichtsreformen in anderen Fächern, wie beispielsweise zu der aktuell offenbar ebenfalls scheiternden Reform „Lesen durch Schreiben“. Tanja Hamann kommt jedenfalls das ausdrückliche Verdienst zu, mit der Anpassung des Konzepts der Rekontextualisierung nach Fend einen tragfähigen theoretischen Ansatz für disziplinhistorische Untersuchungen im Bereich der Fachdidaktik gefunden zu haben.

Tanja Hamann (2018): *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland* (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Bd. 9). Siegen: universi – Universitätsverlag Siegen. 298 S., EUR 22,00.

Henning Heske, Zentrum für schulpraktische Lehrerbildung Krefeld  
E-Mail: [henning.heske@zfsilkrefeld.onmicrosoft.com](mailto:henning.heske@zfsilkrefeld.onmicrosoft.com)

## Prof. Dr. rer. nat. h.c. mult. Rudolf Fritsch (1939–2018)

Kristina Reiss und Stefan Ufer

Some mathematicians are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects and they solve problems one at a time. I happen to be a frog ...

Dyson, F. (2009). Birds and Frogs.

*Notices of the American Mathematical Society* 56, 212–223



Mit großer Betroffenheit mussten wir zur Kenntnis nehmen, dass Prof. Dr. rer. nat. h.c. mult. Rudolf Fritsch am 12. Juni 2018 im Alter von 78 Jahren verstorben ist. Er war ein humorvoller Mensch, der eine Vielzahl wissenschaftlicher und persönlicher Interessen verfolgte. Wir trauern um einen wunder-

baren Freund und lieben Kollegen, dessen Verankerung in Mathematik und Mathematikdidaktik uns einen klaren Blick, gerade auf die Didaktik des Fachs, eröffnet hat. Das Zitat zu Beginn, das Rudolf Fritsch für seine Website gewählt hatte, bringt es auf den Punkt. Es zeigt einen Blick auf die Mathematik als Wissenschaft, die Akteure mit einem breiten Überblick über verschiedene Gebiete der Mathematik genauso braucht wie Menschen, die eine klar abgrenzbare Frage in großer Tiefe zu durchdringen versuchen. Der „Blick von unten“ auf die Mathematik beinhaltete, dass er sich mit den Wurzeln und dem historischen Entstehen mathematischer Erkenntnis auseinandersetzte. Hier handelt es sich um eine, besonders für einen Mathematikdidaktiker, sehr gewinnbringende Perspektive.

Rudolf Fritsch wurde am 30. September 1939 in Johannisburg, Ostpreußen, geboren. Nach dem Abitur am Carolinum in Ansbach studierte er Mathematik und Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München und der Universität des Saarlandes in Saarbrücken. Er promovierte 1968 in Saarbrücken bei Dieter Puppe mit einer Arbeit „Zur Unterteilung semisimplizialer Mengen“. Nach einer Tätigkeit als Studienassessor am Aufbaugymnasium Dudweiler/Saar war er ab 1969 an der Universität Konstanz tätig, wo er sich im Jahr 1973 mit kategorientheoretischen Arbeiten habilitierte. Seit 1981 war er Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Ma-

thematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München, den er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 2004 innehatte.

In seinen mathematischen Arbeiten beschäftigte sich Rudolf Fritsch im Anschluss an seine Dissertationsschrift besonders mit Themen der Topologie und der Geometrie. Im Laufe seiner Tätigkeit in Konstanz und besonders in seiner Zeit in München kamen elementargeometrische Arbeiten hinzu, aufbauend beispielsweise auf seinem Interesse am Kreis von Feuerbach. Im Jahr 1990 erschien das gemeinsam mit Renzo Piccinini (Neufundland, Kanada) im Rahmen mehrerer Forschungsaufenthalte verfasste Buch „Cellular Structures in Topology“ bei Cambridge University Press. Neben diesen mathematischen Arbeiten interessierte sich Rudolf Fritsch immer auch für die Geschichte der Mathematik bzw. das Leben derer, die diese Disziplin bedeutend mitgestaltet haben. So verfasste er mehr als 25 biographische Notizen zu bedeutenden Mathematikerinnen und Mathematikern von Emmy Noether bis Friedrich Schur. Aber auch eine ganze Reihe mathemathikhistorischer Veröffentlichungen gehören zu seinem Werk. So illustriert das gemeinsam mit seiner Frau Gerda Fritsch verfasste Buch „Der Vierfarbensatz. Geschichte und Beweisidee“ (überarbeitete englische Übersetzung bei Springer, New York erschienen) dieses Interesse, das zugleich auf das Fach und auf seine Geschichte gerichtet war. Er war weiterhin Mitherausgeber der Zeitschriften *Forum Geometricorum* und *International Journal for Computer Discovered Mathematics*. Die fachdidaktischen Arbeiten Rudolf Fritschs befassen sich überwiegend mit der Aufbereitung anspruchsvoller mathematischer Inhalte für den Mathematikunterricht. Als Beispiel kann hier ein Beweis der Transzendenz der Euler’schen Zahl  $e$  aufgeführt werden, der sich interessierten Schülerinnen und Schülern erschließen kann. Insgesamt durchzieht die Arbeiten von Rudolf Fritsch ein roter Faden, der die historische Genese der Mathematik und ihrer zentralen Fragen

mit deren Aufbereitung für ein breites Publikum zusammenbringt, sei es im Rahmen des Unterrichts in der Schule oder im Rahmen einer persönlichen Bildung. In jedem Fall ging es darum, das Fach erlebbar und zugänglich zu machen. Dieses Ziel verfolgte er auch in seinen universitären Lehrveranstaltungen. Seine Vorlesungen und Seminare waren in der Sache anspruchsvoll und dabei von einem klaren Gespür für die Schwierigkeiten von Studienanfängerinnen und -anfängern geprägt, sie waren akribisch vorbereitet, aber stets offen für aktuelle Fragen der Hörerinnen und Hörer.

Zentraler Bezugspunkt waren für Rudolf Fritsch seine zahlreichen internationalen Kontakte, teilweise geprägt durch die familiären Wurzeln seiner Eltern, die aus Ostpreußen und dem Sudetenland stammten. Daraus ergaben sich schon bald Kontakte in den osteuropäischen Raum, die auch für seine mathematischen Interessen wichtig wurden. Er war seit 1991 ordentliches Mitglied der naturwissenschaftlichen Klasse der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste und deren Präsident von 2007 bis 2018. Für sein Engagement erhielt er 2014 die Medaille „pro meritis“ als höchste Auszeichnung der Sudetendeutschen Akademie der Wissenschaften und Künste sowie 2015 den Großen Sudetendeutschen Kulturpreis. Seine wissenschaftlichen Verdienste wurden mit Ehrendoktorwürden der Universität Sankt Kliment Ochridski in Sofia (1999) und der heutigen Baltischen Föderalen Immanuel-Kant-Universität in Königsberg (2003) gewürdigt.

Für die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik besonders bedeutsam war das Jahr 1998, in dem Rudolf Fritsch gemeinsam mit seiner Arbeitsgruppe die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) an der LMU München organisierte. Auch bei der zweiten Jahrestagung in München im Jahr 2010, die gemeinsam mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) durchgeführt wurde, stand er mit Rat und Tat zur Seite.

Rudolf Fritsch blieb trotz langer und schwerer Krankheit nach seiner Emeritierung in seiner wissenschaftlichen Arbeit aktiv und engagierte sich weiter in der Ausbildung von Lehramtsstudierenden sowohl an der Ludwig-Maximilians-Universität als auch an der Technischen Universität München. Mit ihm haben beide Münchner Universitäten eine in der Öffentlichkeit sichtbare, aktiv mitgestaltende Persönlichkeit verloren, die für die Verbindung von Mathematik und Mathematikdidaktik stand. Insbesondere die Gespräche mit ihm zur Verbindung von Fach und Fachdidaktik werden uns sehr fehlen. Sein Engagement für die Inhalte und für ihre Vermittlung wird uns weiterhin ein Vorbild sein.

Kristina Reiss, Technische Universität München  
E-Mail: [kristina.reiss@tum.de](mailto:kristina.reiss@tum.de)

Stefan Ufer, Universität München  
E-Mail: [ufer@math.lmu.de](mailto:ufer@math.lmu.de)

## Nachruf auf Herrn Prof. i. R. Dr. Bernd Zimmermann

Michael Fothe, Torsten Fritzlar, Frank Heinrich, Michael Schmitz, Kinga Szücs und Hartmut Rehlich



Nach langer und schwerer Krankheit ist am 19.7.2018 unser ehemaliger Kollege und/oder akademischer Lehrer Bernd Zimmermann im Alter von 72 Jahren verstorben. Die längste Zeit seines wissenschaftlichen Schaffens hat er an der

Friedrich-Schiller-Universität Jena als Professor für Didaktik der Mathematik und Informatik verbracht, nämlich von 1993 bis zu seiner Pensionierung 2011. In dieser Zeit haben wir ihn als Menschen und als Wissenschaftler kennen und schätzen gelernt. In Gedenken an die gemeinsame Zeit möchten wir aus dieser Perspektive heraus sein wissenschaftliches Wirken in der Mathematikdidaktik in Erinnerung rufen.

Bernd Zimmermann studierte von 1965 bis 1971 in Hamburg und Kiel Mathematik (unter anderem bei Collatz und Kähler), Physik, Philosophie, Pädagogik, Astronomie und Meteorologie. Er erwarb das Diplom in Mathematik und legte 1973 die Zweite Staatsprüfung in Mathematik und Physik ab.

Bis 1978 war Herr Zimmermann als wissenschaftlicher Assistent in Paderborn tätig. Dort erwuchs sein Interesse für mathematisches Problemlösen. Angeregt durch Arbeiten aus der (Denk-) Psychologie (z. B. von Dörner und Lüer) befasste er sich in seiner Dissertation „Analyse des Problemlöseverhaltens bei Aufgaben aus der Inzidenzgeometrie“ mit diesem Themenkreis und wurde am Fachbereich Mathematik/Informatik der Universität-Gesamthochschule Paderborn zum Dr. rer. nat. promoviert.

Nach einer Tätigkeit als Lehrer für Mathematik und Physik am Gymnasium Hittfeld von 1978 bis 1985 setzte Bernd Zimmermann seine Laufbahn an der Hochschule fort. Er wirkte bis 1991 als Hochschulassistent für Didaktik der Mathematik an der Universität Hamburg. Dabei vertiefte und erweiterte er seine Sichtweisen zum Thema Problemlösen und Heuristik in der Mathematik und habilitierte sich 1992 mit der Schrift „Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse“. Von 1992 bis 1993 hatte er eine Vertretungsprofes-

sur für Didaktik der Mathematik an der Universität Greifswald inne, bevor er seine langjährige Hochschullehrertätigkeit an der Universität in Jena aufnahm.

Neben dem Themenkreis Problemlösen und Heuristik befasste sich Herr Zimmermann in der Zeit seines arbeitsreichen Schaffens insbesondere mit Geschichte der Mathematik, Kreativität in der Elementarmathematik, Begabtenforschung, Beliefforschung sowie mit Wissenschaftstheorie und Mathematikunterricht. In seiner Wirkungszeit an der Universität Jena verfolgte er diese Richtungen facettenreich, breit und tief.

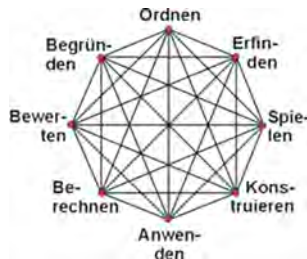
Exemplarisch hervorheben möchten wir die im Folgenden aufgeführten Forschungsarbeiten:

Bernd Zimmermann hat ein Konzept für problemorientierten Mathematikunterricht vorgelegt (z. B. Zimmermann 1991), in dem neben dem Lösen auch das Finden von Problemen gebührend berücksichtigt ist. Die gleichzeitige Betonung beider Tätigkeiten findet sich im sogenannten Problemfeldkonzept wieder, für das er wesentliche Anstöße gab. Es nimmt die Arbeitsweise von mathematisch Forschenden auf und genügt zudem zeitgemäßen konstruktivistischen Vorstellungen vom Lehren und Lernen.

Es ist ein Verdienst von Herrn Zimmermann, die Geschichte der Mathematik in besonderer Weise einbezogen zu haben, wenn es um das Verständnis von und um Anregungen für das Lehren und Lernen von Mathematik ging. Er sah darin eine wichtige Quelle zur Erforschung und Förderung mathematischen Denkens und Lernens (z. B. Zimmermann 1996). Bekannt geworden sind in diesem Zusammenhang seine Studien dazu, welche heuristischen Denkweisen sich in 5000 Jahren Mathematikgeschichte als besonders fruchtbar erwiesen haben und wie diese gelehrt und gelernt werden könnten (z. B. Zimmermann 2003). Diese Überlegungen hat er auch in die Schulbuchreihe „Mathenetz“ als Herausgeber und Autor eingebracht.

Untrennbar mit dem Namen Bernd Zimmermann verbunden ist das sogenannte Oktagon mathematischer Haupttätigkeiten (z. B. Zimmermann 1999). Ausgehend von acht Motiven, die über Jahrhunderte und Jahrtausende hinweg die Herstellung

neuer Mathematik begünstigt haben, hat Bernd Zimmermann einen Verbund der Tätigkeiten Berechnen, Bewerten, Begründen, Ordnen, Vermuten/Erfinden, Spielen, Konstruieren und Anwenden in Form einer Oktagonardarstellung geschaffen. In diesem Netz von Tätigkeiten hat er unter anderem eine mögliche umfassende und ausgewogene Orientierungsgrundlage für die Auswahl geeigneter Probleme für Schülerinnen und Schüler gesehen.



Bereits in seiner Habilitationsschrift und auch später immer wieder untersuchte Bernd Zimmermann Vorstellungen von Lehrpersonen, Lernenden und Studierenden zu Mathematikunterricht, Mathematik oder mathematischem Tätigsein. Auch für eine differenzierte Beschreibung derartiger Vorstellungen ist das oben skizzierte Oktagon in besonderer Weise geeignet (z. B. Haapasalo & Zimmermann 2015).

Ferner möchten wir auf Bernd Zimmermanns Sichtweise zum Unterrichten von Mathematik eingehen. In Anlehnung an kognitionspsychologische Forschungen zum komplexen Problemlösen hat er Unterrichten als Entscheiden und Handeln in komplexen Konstellationen angesehen. Entsprechend ist Mathematikunterricht durch eine hohe Komplexität sowohl hinsichtlich methodischer als auch hinsichtlich mathematisch-kognitiver Aspekte gekennzeichnet. Vor diesem Hintergrund war es ihm ein Anliegen, die Komplexität von Mathematikunterricht bereits in der universitären Ausbildung zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer stärker als bisher und in geeigneter Weise zu thematisieren. Aus diesem Anliegen heraus ist die Dissertationsschrift von Fritzlar (2004) erwachsen.

Herr Zimmermann hat in dem 1983 in Hamburg ins Leben gerufenen und bis heute existierenden Projekt zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülerinnen und Schülern als Lehrer und Forscher über drei Jahrzehnte engagiert mitgearbeitet. Er zählte zu den Gründungsmitgliedern und zum Vorstand der „William-Stern-Gesellschaft für Begabungsforschung und Begabtenförderung e. V.“, die seinerzeit u. a. als Träger des Projekts gegründet wurde. Auch in seiner Zeit in Jena hat er sich bei Besuchen in Norddeutschland immer wieder die Zeit genommen, für die Projektteilnehmer in Hamburg als Gastlehrer unverwechselbare, mathematisch schöne

und anspruchsvolle Samstagvormittage zu gestalten.

Bei der Entwicklung und Einführung des Jenaer Modells der Lehrerbildung einschließlich des Praxissemesters (ab 2007) hat sich Bernd Zimmermann ebenfalls stark engagiert. Er hat eine Casio-Stiftungsprofessur für Didaktik der Informatik/Mathematik (2003–2008) für die Universität Jena maßgeblich eingeworben; in der Laufzeit dieser Professur war er u. a. Mitherausgeber eines Tagungsbandes zum Computereinsatz im Mathematikunterricht (siehe Lit.-Verzeichnis).

Bernd Zimmermann beteiligte sich an der Herausgabe verschiedener Zeitschriften und Buchreihen, z. B. der Buchreihe *Ars Inveniendi et Dejudicandi* im WTM-Verlag und der internationalen Zeitschriften „Teaching Mathematics and Computer Science“, „The Electronic Journal of Mathematics and Technology“ und „The Teaching of Mathematics.“ Er war sowohl an interdisziplinär ausgerichteten als auch an internationalen Projekten aktiv beteiligt.

Bernd Zimmermann war anderen Kulturen, Traditionen, auch mathematischen sowie pädagogischen Traditionen gegenüber sehr aufgeschlossen. Bei seinen internationalen Beziehungen stand Finnland zweifelsohne auf dem ersten Platz. Aber auf dem zweiten Platz folgte Ungarn: Er pflegte besonders intensive berufliche Kontakte zu ungarischen Kollegen, von denen viele zu Freundschaften geworden sind. Begonnen hat die intensive Zusammenarbeit 1988, als die ungarische Bolyai-János-Gesellschaft die ICME-6 in Budapest organisierte. Die enge Kooperation zwischen den Mitarbeitern des Mathematikdidaktischen Zentrums der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eötvös-Lóránd-Universität in Budapest und den Mathematikdidaktikern in Jena, die auf eine 50jährige Geschichte zurückblicken kann, wurde nach Bernd Zimmermanns Ruf nach Jena (1993) intensiviert. In diesem Rahmen kam es zu regelmäßigen Treffen, zum Studierendenaustausch, zur Organisation gemeinsamer Konferenzen und Tagungen. Ebenfalls sind zahlreiche gemeinsame Publikationen aus diesen Beziehungen entstanden, so z. B. Zimmermann & Vásárhelyi (2010). In seinen letzten Jahren in Jena (2008–2011) trug er durch seine Ratschläge und seine Expertise wesentlich zur Erstellung der Dissertationsschrift von Kinga Szücs (2009) bei.

Als es 1999 an der Universität Debrecen in Ungarn erstmalig ermöglicht wurde, in Didaktik der Mathematik zu promovieren, wirkte Bernd Zimmermann bei der fachlichen Ausrichtung des dreijährigen Promotionsstudiengangs aktiv mit. Er gab Promotionsstudierenden persönliche Konsultationen, unterstützte sie bei der Erstellung von Publika-



tionen und hielt Vorträge bei zahlreichen einschlägigen Tagungen.

Einen weiteren Anschlusspunkt zwischen Ungarn und Bernd Zimmermann bildete das Werk von Pólya György, wozu er durch seine Forschungen über Heuristik gelang. Er hat Pólyas Werk besonders geschätzt und hat es immer tiefer erforscht. Als die GDM-Tagung 2008 in Budapest ausgetragen wurde, war es eine Selbstverständlichkeit, dass er einen der Hauptvorträge zu diesem Thema hielt.

Seit seiner Gründung (2015) war Bernd Zimmermann aktives Mitglied des GDM-Arbeitskreises Mathematiklehren und -lernen in Ungarn (Arbeitskreis Ungarn), er hielt Vorträge bei den Jahrestagungen und begutachtete die Beiträge der Tagungsbände.

Wir danken unserem Kollegen Bernd Zimmermann für die Bereicherung unserer Arbeit und werden ihn in bleibender Erinnerung behalten.

*Bis zum nächsten Mal, denn früher wird es nichts.*

#### Erwähnte Literaturquellen

- Fothe, M.; Hermann, M.; Zimmermann, B. (Hrsg.) (2006). *Learning in Europe. Computers in Mathematics Instruction*. Schriftenreihe des Collegium Europaeum Jenense, Band Nr. 34, Jena.
- Fritzlar, T. (2004). *Zur Sensibilität von Studierenden für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts*. Kovač, Hamburg (Zugelassene Dissertation, Universität Jena)
- Haapasalo, L.; Zimmermann, B. (2015). Investigating Mathematical Beliefs by Using a Framework from the History of Mathematics. In C. Bernack-Schüler, R. Erens, A. Eichler, & T. Leuders (Hrsg.), *Views and beliefs in mathematics education: Results of the 19th MAVI conference, 197–211*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Szücs, K. (2009). *Schwierigkeiten im nichtfachspezifischen fremdsprachigen Mathematikunterricht*. Dissertation, Universität Debrecen.
- Zimmermann, B. (1977). *Analyse des Problemlöseverhaltens bei Aufgaben aus der Inzidenzgeometrie*. Dissertation, Universität-Gesamthochschule Paderborn.
- Zimmermann, B. (1991). *Problemorientierter Mathematikunterricht*. Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

Zimmermann, B. (1991). *Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse*. Habilitationsschrift, Universität Hamburg.

Zimmermann, B. (1996). Geschichte der Mathematik als eine Quelle zur Erforschung und Förderung mathematischen Denkens und Lernens. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1996*, 492–495.

Zimmermann, B. (1999). Kreativität in der Geschichte der Mathematik. In B. Zimmermann, G. David, T. Fritzlar, F. Heinrich, M. Schmitz (Hrsg.), *Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften*. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik. Math/Inf/99/29; Friedrich-Schiller-Universität Jena 1999.

Zimmermann, B. (2003). Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 49, Heft 1, 42–57.

Zimmermann, B., & Vásárhelyi, É. (2010). György Pólya (1887–1985) – Zum Menschen, Mathematiker und Mathematikdidaktiker. In B. Zimmermann (Hrsg.), *György Pólya (1887–1985) – Teil I. Von Pólya auf den Weg gebracht*. *Der Mathematikunterricht*, Jahrgang 56, Heft 2, 4–12.

Torsten Fritzlar, Halle

E-Mail: [torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de](mailto:torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de)

Michael Fothe, Jena

E-Mail: [michael.fothe@uni-jena.de](mailto:michael.fothe@uni-jena.de)

Frank Heinrich, Braunschweig

E-Mail: [f.heinrich@tu-braunschweig.de](mailto:f.heinrich@tu-braunschweig.de)

Michael Schmitz, Jena

E-Mail: [michael.schmitz@uni-jena.de](mailto:michael.schmitz@uni-jena.de)

Kinga Szücs, Jena

E-Mail: [kinga.szuecs@uni-jena.de](mailto:kinga.szuecs@uni-jena.de)

Hartmut Rehlich, Braunschweig

E-Mail: [h.rehlich@tu-braunschweig.de](mailto:h.rehlich@tu-braunschweig.de)

## Hinweise für Autor(inn)en

---

### Zielgruppe/Inhalte

Die *Mitteilungen der GDM* werden halbjährlich an alle Mitglieder der GDM versandt. Redaktionsschluss ist jeweils der 30. 5. und der 30. 11. eines Jahres. Die Mitteilungen möchten über alles berichten, was einen deutlichen Bezug zur Mathematikdidaktik, zum Mathematikunterricht und zur Lehrer(innen)bildung im Fach Mathematik aufweist, insbesondere über alle Aktivitäten der GDM, ihrer Arbeitskreise und der von der GDM mitbestellten Kommissionen. Vor dem Schreiben eines freien Beitrags für die Mitteilungen (Rubriken: Magazin, Diskussion) wird empfohlen, zunächst mit dem Herausgeber abzuklären, in wie weit der geplante Beitrag für die Mitteilungen von Interesse ist.

### Bilder/Illustrationen

Wir streben an, den Anteil schöner Illustrationen aller Art zu erhöhen. Alle Autoren sind dazu aufgerufen, sich hierzu Gedanken zu machen und möglichst qualitativ hochwertige Illustrationen mit ihrem Beitrag mitzuliefern (als Dateien oder Vorlagen zum Scannen) oder Vorschläge zu unterbreiten.

### Manuskripte/Umfang

Der Umfang eines Beitrags sollte für freie Beiträge (Rubriken: Magazin, Diskussion) zunächst mit dem Herausgeber abgestimmt werden. Er sollte in der Regel sechs Seiten (also zwölf Spalten) inklusive Illustrationen nicht überschreiten. Eine reine Textspalte in den Mitteilungen hat ca. 2 500 Anschläge (inklusive Leerzeichen). Für die

anderen Rubriken gelten zum Teil andere Längenempfehlungen, die auf der Internetseite der Zeitschrift detaillierter angegeben sind (s. [tinyurl.com/ycxhvaqj](http://tinyurl.com/ycxhvaqj)). Beiträge sollten als weitestgehend unformatierte WORD- oder L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Files eingereicht werden. Auf der Internetseite stehen für L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X und WORD auch Manuskriptvorlagen zur Verfügung, die Sie bei der Längenabschätzung und den zu verwendenden Formatierungen unterstützen. Alle Beiträge werden von uns unabhängig vom Einreichungsformat anschließend professionell gesetzt. Bei Manuskripten mit einem hohen Anteil mathematischer Formeln helfen Sie uns mit einer Einreichung als L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-File.

Am Ende eines Beitrags drucken wir üblicherweise die Kontaktadresse des Autors (inkl. Emailadresse) ab – *bitte geben Sie am Ende des Manuskripts selbst unbedingt Ihren Namen, Ihre Institution und Ihre Emailadresse an.*

### Einreichung/Kontakt

Bitte reichen Sie Ihre Manuskripte bevorzugt online unter:

[ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/author/submit](http://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/author/submit)

ein (einmalige Registrierung erforderlich) oder senden Sie alternativ Manuskripte (mit Ausnahme der Rubrik: Rezensionen) an die Herausgeberin ([schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de](mailto:schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de)). Wegen Rezensionen und Rezensionsanfragen wenden Sie sich bitte an an Ulrich Kortenkamp ([ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de](mailto:ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de)) oder Thomas Jahnke ([jahnke@math.uni-potsdam.de](mailto:jahnke@math.uni-potsdam.de)).

## Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

■ **Vorstand.** 1. *Vorsitzender:* Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel, Institut für Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel. Tel. 0561. 804-4310 [eichler@mathematik.uni-kassel.de](mailto:eichler@mathematik.uni-kassel.de)

■ 2. *Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641. 99-32221, [katja.lengnink@math.uni-giessen.de](mailto:katja.lengnink@math.uni-giessen.de)

■ *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31,

06110 Halle (Saale). Tel. 0345. 5523-880, [torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de](mailto:torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de)

■ *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, IEEM – Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, Vogelpothsweg 87, 44221 Dortmund. Tel. 0231. 755-6107, Fax. 0231. 755-2948, [daniela.goetze@math.tu-dortmund.de](mailto:daniela.goetze@math.tu-dortmund.de)

■ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.

■ *Homepage der GDM:* [www.didaktik-der-mathematik.de](http://www.didaktik-der-mathematik.de)

### Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Grafische Gestaltung: Christoph Eyrych, Berlin ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin  
Der Bezugspreis der *GDM-Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

# Neuerscheinungen im WTM-Verlag 2018



**Brüning, A.-K.: Das Lehr-Lern-Labor „Mathe für kleine Asse“.** Untersuchungen zu Effekten der Teilnahme auf die professionellen Kompetenzen der Studierenden. Münster 2018. Ca. 430 Seiten, DIN A5.

Preis 43,90 €.  
ISBN 978-3-95987-105-1



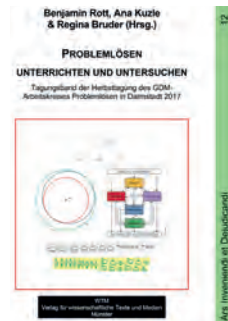
**Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2018.** Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018 (52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik). Münster 2018. Ca. 2200 Seiten in vier Bänden.

Preis 99,90 €  
ISBN 978-3-95987-089-4



**Klopfer, M.: Individuelle Lernunterstützung im Mathematikunterricht.** Entwicklung, Durchführung und Evaluation innovativer Methoden der Rückmeldung an Schüler auf der Basis neuwissenschaftlicher Erkenntnisse über die natürlichen Grundlagen des Lernens. Münster 2018. Ca. 280 S., DIN A5.

Preis 37,90 €  
ISBN 978-3-95987-083-2



**Rott, B., Kuzle, A. & Bruder, R. (Hrsg.): Problemlösen unterrichten und untersuchen.** Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Darmstadt 2017. Münster 2018. Ca. 220 Seiten, DIN A5.

Preis 27,90 €  
ISBN 978-3-95987-099-3



**Böhme, N.: Fortschrittsanzeigen in multimedialen Lernumgebungen.** Eine empirische Studie im Bereich der Lehrerbildung. Münster 2018. Ca. 350 S., Format 17 cm x 24 cm.

Preis 52,90 €  
ISBN 978-3-95987-101-3



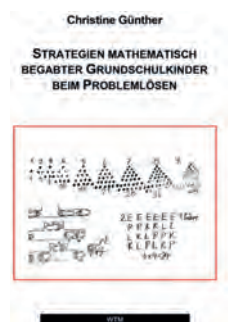
**Ladel, S., Kortenkamp, U. & Etzold, H. (Hrsg.): Mathematik mit digitalen Medien – konkret.** Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe. Münster 2018. Ca. 135 Seiten, DIN A5.

Preis 19,90 €  
ISBN 978-3-95987-077-1



**Ralf Benölken, Nina Berlinger & Marcel Veber (Hrsg.): Alle zusammen! Offene, substanzielle Problemfelder als Gestaltungsbaustein für inklusiven Mathematikunterricht.** Münster 2018. Ca. 270 Seiten, DIN C5.

Preis 35,90 €  
ISBN 978-3-95987-091-7



**Günther, Ch.: Strategien mathematisch begabter Grundschul Kinder beim Problemlösen.**

Münster 2018. Ca. 310 Seiten, DIN A5.  
Preis 37,40 €  
ISBN 978-3-95987-103-7