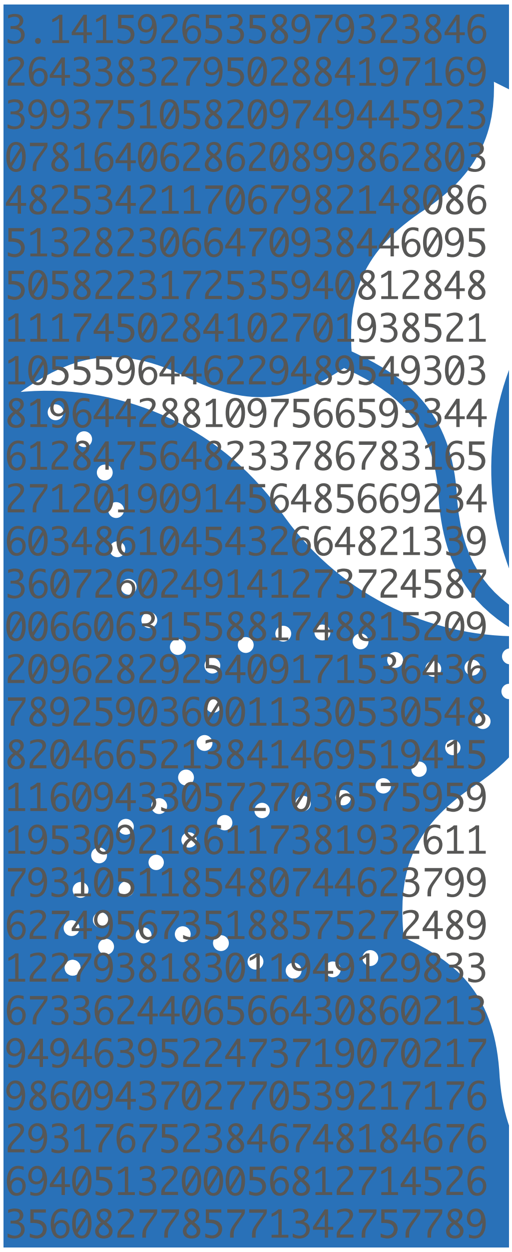
MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK



GDM

109

Juli 2020

Homeschooling – Perspektive einer Mutter

Liebe Leserinnen und Leser,
als am 13. März 2020 der NRW Ministerpräsident Armin Laschet den Lockdown bekannt gab, ahnte ich als Mutter eines Drittklässlers und eines fast Sechsjährigen noch nicht, was auf mich zukommt. Anfangs war ich positiv gestimmt: „Ich kann mit meinen Söhnen lernen und zwar so, wie ich es für didaktisch sinnvoll und richtig erachte." Weit gefehlt! Zuerst musste ich unserem älteren Sohn verdeutlichen, dass das in den Medien genutzte Wort „Coronaferien" nicht mit „Ferien" gleichzusetzen ist und Homeschooling-Aufgaben (leider) einen anderen Umfang haben als normale Hausaufgaben. Als Nicht-Psychologin schaffte ich es nicht immer, die totale Eskalationsstufe rechtzeitig abzufangen. Zudem betonte unser Kleiner schnell, dass er ein Kindergarten- und kein Schulkind sei. Da hatte er recht! Es brachte aber die Problematik mit sich, dass eines unserer Kinder spielen durfte, das andere Schulaufgaben zu erledigen hatte („Unfair!"). Ganz zu schweigen davon, dass es auch für mich schwierig war in dieser diplomatischen Sackgasse meine dienstlichen Aufgaben zu erledigen. So platzte in nahezu jede Videokonferenz eines unserer Kinder rein, weil es eine *wahnsinnig wichtige* Frage gab. Aus einer Videokonferenz musste ich minutenlang aussteigen, weil unser Kleiner mit einer großen klaffenden Wunde im Gesicht zu mir kam. Was sollte ich anderes machen, als mich in der Konferenz zu entschuldigen, die Wunde zu verarzten und Tränen zu trocknen? Dann stieg ich wieder in die Konferenz ein. Ich lernte schnell, mit solchen Unvorhersehbarkeiten entspannt umzugehen. Ändern konnte ich sie eh nicht.

Was ich allerdings nur schwer aushalten konnte, war die Art und Weise, wie in der Grundschule unseres Sohnes das Homeschooling organisiert wurde. Für die ersten drei Wochen schickte die Lehrerin einen Zettel mit einer Auflistung sämtlicher Aufgaben für die Fächer Deutsch und Mathematik. Man erwartete, dass die Eltern das individuelle Pensum für ihr eigenes Kind selbst festlegten?! In Mathematik stand die schriftliche Subtraktion mit Erweitern an, weil das angeblich *jeder* kann. Zur Unterstützung bekamen wir einen Videolink einer kommerziellen Lernplattform (das besagte Video war derzeit kostenlos). In diesem Video wurde die Geschichte von Lilli und Niko erzählt, die *unfassbar* viele Fische geangelt hatten: große und kleine. Logischerweise (?!) zählten sie erst alle 834 Fische und anschließend nur die 212 kleinen. Für die Berechnung der Anzahl der großen Fische wurde natürlich (?!) schriftlich gerechnet. Und weil es so viel Spaß machte (?!), wurde auch $666 - 333$ schriftlich subtrahiert. Erschrocken klappte ich den Rechner zu und in Gedanken senkte sich mein Kopf auf die Tischplatte: Das war jetzt nicht deren Ernst! Und unser Sohn sagte zu mir: „Verstehe ich nicht. Die Aufgaben kann ich doch im Kopf lösen." Ich stimmte ihm zu. Obwohl ich mich bisher nicht in den Mathematikunterricht unseres Sohnes eingemischt hatte, schrieb ich zum ersten Mal eine längere Nachricht mit einige Tipps und dem Angebot der Unterstützung an die Lehrerin. Auch wenn dieser Brief sehr nett aufgenommen wurde, so wurde nichts davon umgesetzt. Stattdessen gab es weitgehend prozedurale Aufgaben zum Abarbeiten: Eine Flut an Kopien aus nahezu allen Mathematikschulbüchern Deutschlands. Prozessbezogene Aufgaben wurden weggelassen. Das könne man den Eltern nicht zumuten. Somit bot ich meine Hilfe bei der Durchführung von prozessbezogeneren Videokonferenzen mit den Kindern an. Vehement wurde dies abgelehnt. Lediglich ein einziges Mal (!) wurde eine solche Konferenz ausprobiert. Thema war eine wirklich nette Sachrechenseite zum Rechnen mit „Zeitzonen". Allerdings versuchte die Lehrerin, die Aufgabenstellungen unter Berücksichtigung der Sommerzeit mancher Länder zu lösen. Erschwerend kam hinzu, dass die Kinder lediglich Aufgabenlösungen vorlesen und keine Rechenwege vorstellen mussten. Somit führte die Berücksichtigung der Sommerzeit aber auch das reine Vorlesen von Zeitangaben nicht nur zu einer ziemlichen Verwirrung unter den Kindern, sondern auch zu diversen falschen Berechnungen. Nach nur wenigen Minuten lag mein Kopf erneut imaginär auf der Tischplatte. Tja, wenn der Sachkontext irrelevant wird und das Rechnen im Vordergrund steht, kann ein Flug nach Moskau auch 3,5 statt 2,5 Stunden dauern. Hauptsache, es wurde richtig gerechnet. Mein Einwand, dass man alle Aufgaben in Winterzeit rechnen müsse, wurde überhört. Schlussendlich bekräftigte ich unseren Sohn in der Korrektheit seiner Lösungen, denn er hatte alle Aufgaben sachrechnerisch korrekt berechnet. Ich fragte mich rückblickend, ob diese und auch andere Aufgaben im Präsenzunterricht ebenso sinnlos besprochen worden wären. Ich befürchte schon.

Sicherlich ist das nur meine Geschichte. Ich weiß, dass viele Kolleginnen und Kollegen die Kinder in dieser Zeit sehr gut begleitet haben. Aber zumindest in unserer Region scheinen derartige konzeptlose Konzepte von Homeschooling als ein Abarbeiten von Arbeitsblättern *ohne* Feedback weit verbreitet. Wir als GDM sollten die letzten Wochen vielleicht auch als eine Notwendigkeit dafür sehen, dass wir didaktisch sinnvollere Formen der digitalen Unterstützung weiter vorantreiben müssen. In diesem Heft werden erste diesbezügliche Projekte vorgestellt. Sie haben mir aufgezeigt: Es kann auch anders gehen.

Daniela Götze

ISSN 0722-7817

Inhalt

Bildnachweise der Umschlagseite: pixabay

Vorwort des 1. Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,
die Treffer zu einem Begriff bei Google sind sicher eine Art Indikator der Wichtigkeit eines Themas für die Gesellschaft. Welchen Begriff man hier eingeben muss, um eine möglichst hohe Trefferanzahl zu bewirken, ist Anfang Juni 2020 keine schwierige Frage. „Covid-19“ erzeugt fast 5 Milliarden Treffer. Alle anderen Begriffe, die ich versucht habe, landen weit, teilweise sehr weit hinter dieser hohen Anzahl. Begriffe, die unsere Profession betreffen, beispielsweise „Mathematik“ (36 Millionen Treffer), „Didaktik“ (8 Millionen Treffer), „Mathematikdidaktik“ (200 000 Treffer) liegen weit von dem Namen des Virus entfernt, das unsere bisherige Welt erheblich durcheinandergebracht hat.

Kalte Statistik wird dem Thema sicher nur zum Teil gerecht, auch wenn wir vermutlich alle und zumindest zu Beginn der Pandemie gebannt oder erschrocken auf die Zahlen der Johns-Hopkins Universität oder einer der deutschen Online-Zeitschriften wie etwa ZEIT-Online geschaut haben. So scheinen die Zahlen manchmal die Menschen zu verbergen, die mit den Folgen des Virus kämpfen oder gekämpft haben. Über 7 Millionen Infizierte und über 400 000 Tote sind (Anfang Juni) zwei weitere statistische Informationen, die dann sehr nahe kommen, wenn sie mit konkreten Bildern in Nachrichtensendungen oder Todesnachrichten im näheren Umfeld einhergehen.

Positiv gesehen, können die Zahlen hier aber auch schützen vor zu großer Nähe. Hier zeigt sich der mathematische Umgang mit den Zahlen und mit den diese Zahlen beschreibenden Modellen als Möglichkeit, die aktuelle Lage mit emotionalem Abstand rekonstruktiv begleiten zu können. Der „R-Wert“ oder die Basis einer Exponentialfunktion ist in aller Munde, mal richtig interpretiert, mal so verzerrt, dass es einem mathematisch graust. Die Entwicklung sei nicht mehr „dynamisch“, sondern nur noch „linear“ (Der R-Wert war gerade von über 1 auf unter 1 gesunken) wurde da auf einer ministerialen Pressekonferenz gesagt. Der R-Wert habe bei kleinen Fallzahlen eine andere Wirkung als bei großen Fallzahlen, steht in der Zeitung. Solche und ähnliche Äußerungen mögen dazu führen, dass Exponentialfunktionen in Zukunft eine (noch) höhere Aufmerksamkeit in der mathematischen wie mathematikdidaktischen Lehre erhalten. Über die Exponentialfunktionen hinaus berührt die Pandemie einige stochastische Themen, die ein rekonstruktives Verstehen ermöglichen. Das sind die Statistiken selbst, aber auch etwa das Nachvollziehen des zunächst verblüffend unsicheren Antikörpertests mit dem Modell der Formel von Bayes. In gewissen Sinne zeigt die Covid-19-Krise aber auch Grenzen auf, zumindest die Grenzen einer vorhersagenden Mathematik. Vielleicht ist die Pandemie das, was Nassim Nicholas Taleb als „schwarzen Schwan“ bezeichnet hat, glücklicherweise selten, mit erheblichen negativen Konsequenzen versehen und sehr schwer vorherzusagen, also mit statistischen Mitteln kaum zu beherrschen.

Die Unsicherheit der Lage und die fehlende Möglichkeit, solide Vorhersagen treffen zu können, ist vermutlich bei uns allen sehr präsent. Sie betrifft unser berufliches Wirken in erheblichen Maße, auch wenn wir in großer Zahl zu relativen Expertinnen und Experten digitaler Lehre geworden sind – einen Eindruck davon wird man auch in dieser Ausgabe sehen. Ob, wie und wann wir Lehre oder andere unserer beruflichen Tätigkeiten wieder mit Präsenz ausführen können, wissen wir nicht. Wann wir bei Zoom, Pexip und Co wieder einmal aus einer Videokonferenz fliegen, wissen wir auch nicht. Und auch, wann die nächste Konferenz stattfinden wird, wissen wir nicht. Ende Februar hatte ich bei den Schlussworten der Konferenz der gemeinsamen Kommission Lehrerbildung von DMV, GDM und MNU in Kassel noch gesagt, dass ich hoffe, nicht gerade die letzte Konferenz für längere Zeit beendet zu haben. Selbst Ende Februar hatte ich das noch zumindest teilweise scherzhaft gesagt. Wenige Tage später war klar, dass es (für mich) tatsächlich die letzte Präsenz-Konferenz für längere Zeit gewesen sein wird. Bei aller Freude auf die GDM-Onlinetagung und bei aller Beruhigung, dass noch viel mehr digital funktioniert als erwartet: Ich freue mich darauf, dass wir uns wieder live sehen und sprechen können. Daher freue ich mich insbesondere, dass das Tagungsteam der GDM-Tagung 2021 in Lüneburg im Sinne eines vorsichtigen Nach-Vorne-Blickens dafür arbeitet, eine Präsenztagung 2021 für uns alle zu ermöglichen. Ich drücke für unsere GDM-Tagung im nächsten Jahr auf jeden Fall beide Daumen.

Andreas Eichler
(1. Vorsitzender der GDM)

Die Qualitätsoffensive Lehrerbildung – ein Vorwort

Daniela Götze

Dass Lehrerbildung eine anspruchsvolle Aufgabe ist, bleibt unbestritten: Lehrkräfte sollen fachwissenschaftlich umfangreich ausgebildet sein, über methodische und didaktische Kompetenzen verfügen und in der Lage sein, diese auch im Unterricht anzuwenden (BMBF, 2019). Daher unterstützt das BMBF zahlreiche lehrerausbildende Institutionen durch das große Maßnahmenprogramm „Qualitätsoffensive Lehrerbildung". Dieses startete mit der ersten Förderphase bereits im Jahre 2014. In einem wettbewerblichen Verfahren haben sich von insgesamt 85 einreichenden Hochschulen 59 durchgesetzt, die im Rahmen von 49 Projekten mit unterschiedlichen Schwerpunkten gefördert wurden (teilweise Verbundprojekte).

Kurz vor Ablauf der ersten Förderphase wurde im Juni 2018 der Startschuss für eine zusätzliche Förderung der Qualitätsoffensive Lehrerbildung in Höhe von 64 Millionen Euro gegeben. Nach Sichtung der bisherigen Förderprojekte durch ein Auswahlgremium wurde 48 Projekten von 58 Hochschulen aus allen Bundesländern eine Weiterförderung der Maßnahmen bis Ende 2023 bewilligt.

Durchsucht man unter www.qualitaetsoffensive-lehrerbildung.de/de/projekte.php die Projektskizzen gezielt nach Maßnahmen für das Unterrichtsfach Mathematik (oder für den Lernbereich mathematische Grundbildung), so bleibt das Resultat dieser Suche leider ergebnislos. Es ist kaum möglich – es sei denn, man investiert die Zeit einer Sichtung aller Projekte – sich schnell und überblicksartig über die Maßnahmen im Allgemeinen und vor allem mit Schwerpunkt Mathematik zu informieren. Die in den letzten beiden Heften der GDM-Mitteilungen gestartete und in diesem Heft nun fortgesetzte Reihe gibt daher einen kompakten Einblick in die von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung geförderten Projekte und Maßnahmen der Standorte Berlin, Bielefeld, Chemnitz, Hamburg, Potsdam und Vechta.

Literatur

BMBF (2019). *Qualitätsoffensive Lehrerbildung.* Verfügbar unter www.bmbf.de/de/qualitaetsoffensive-lehrerbildung-525.html.

Daniela Götze, Universität Siegen
E-Mail: daniela.goetze@uni-siegen.de

Inklusionsorientierte Qualifizierung angehender Lehrkräfte

Das Projekt FDQI-HU-MINT der HU Berlin

Dominik Bechinie, Katja Eilerts, Julia Frohn, Sia Marsch, Annette Upmeier zu Belzen, Stephen Mayer und Burkhard Priemer

Projektziel: Interdisziplinäre Seminarentwicklung

Das maßgebliche Zielkonstrukt im Projekt FDQI-HU ist die adaptive Lehrkompetenz, bestehend aus den Konstruktfacetten diagnostische und didaktische Kompetenz sowie Klassenführungs- und Sachkompetenz (Brühwiler, 2014). Adaptive Lehrkompetenz kann im Professionalisierungsdiskurs über zukünftige Lehrkräfte als Bindeglied zwischen strukturtheoretischen (Helsper, 2011) und kompetenzorientierten Ansätzen (Baumert & Kunter, 2011) definiert werden. Sie gilt als Professionalisierungsansatz, „der die Situationsspezifik und Komplexität unterrichtlichen Handelns berücksichtigt und gleichzeitig eine Konkretisierung der Lehrkräftekompetenzen und entsprechende empirische Untersuchungsansätze verspricht“ (Frohn, Schmitz & Pant, 2020, S. 32).

Adaptive Lehrkompetenz verspricht, den Anforderungen des Unterrichtens in heterogenen Lerngruppen professionell zu begegnen. Dies soll auf zwei Ebenen geschehen: einerseits auf der Makroebene bei der Planung mit Blick auf Inhalte, Methoden, Medien, Materialien, Sozialformen und Lernzeiten; andererseits auf der Mikroebene als situationsspezifische Handlungsebene in der Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden (Schmitz, 2017). Da in den Interventionen der ersten Förderphase vornehmlich die Planungskompetenz fokussiert wurde, liegt der Fokus der Seminare dieser Förderphase vor allem auf der Ermöglichung einer Praxiserfahrung und hiermit auf einer Stärkung der adaptiven Handlungskompetenz. Um diese angemessen zu fördern, führen Studierende in FDQI-HU-Seminaren Lernsequenzen mit Schülerinnen und Schülern in Lehr-Lern-Laboren (Priemer & Roth, 2020) durch. Zur Förderung der anvisierten Kompetenzen wurden in der ersten Projektphase von FDQI-HU fünf flexibel einzusetzende Bausteine für die universitäre Lehrkräftebildung entwickelt (Brodesser et al., 2020), die in der zweiten Förderphase im interdisziplinären Team an die Anforderungen inklusionsorientierter MINT-Lehre adaptiert werden. In enger Anbindung an die Modulstruktur der Lehrkräftebildung der HU stellen die Fächer Mathematik, Biologie und Physik jeweils ein komplettes Modul für die Intervention bereit. Dieses umfasst eine gemeinsame Blockveranstaltung sowie darauf aufbauende semsterbegleitende fachbezogene Sitzungen. Am Ende des Semesters findet eine weitere gemeinsame Blockveranstaltung als Studierenden-Konferenz statt, auf der Ergebnisse und Erfahrungen aus den Praxissequenzen im Lehr-Lern-Labor vorgestellt und reflektiert werden.

Wie auch in der ersten Förderphase wird eine Evaluation die Annahme prüfen, dass zwischen den beiden Messzeitpunkten am Beginn und am Ende des Semesters die Steigerung adaptiver Lehrkompetenz in der Interventionsgruppe größer ist als in der Vergleichsgruppe. In der ersten Förderphase wurden anhand eines Validierungsverfahrens mit Expertinnen und Experten drei Indizes adaptiver Lehrkompetenz festgelegt (Schmitz, Simon & Pant, 2020), die als Messinstrumente Anwendung finden. Sie werden in dieser Förderphase weiterentwickelt, indem ein ergänzendes Expertinnen- und Expertenverfahren durchgeführt und per Regressionsanalyse die Struktur der Indizes überprüft und ggf. angepasst wird. Die Befragung basiert auf der Vorführung von Videosequenzen und offenen Items im dyadischen Verfahren (Schmitz, Brodesser & Pant, 2020). Der ursprünglich im Paper-Pencil-Verfahren angewandte Fragebogen wird in ein digitales Format zur online-Datenerhebung überführt. Es wird ein Vergleich angestrebt, ob die Modifikation der Interventionen zu anderen Ergebnisstrukturen führt als in der ersten Förderphase.

Ziele der beteiligten MINT-Fächer

Die am Projekt beteiligten Fächer setzen die Interventionen der FDQI-HU-Konzeption im Rahmen ausgewählter Seminare im Master of Education um. Nach allgemeindidaktischer Einführung der oben beschriebenen Konstrukte, werden diese in den drei Fächern fachlich kontextualisiert angewendet, indem inklusionsorientierte Lernsequenzen theoriebasiert konzipiert und entwickelt werden. Dabei wird von Ansätzen wie dem *Didaktischen Modell für inklusives Lehren und Lernen* (DiMiLL; Frohn et al., 2019), dem *Universal Design for Learning* (UDL; CAST, 2011) und dem Konstrukt der Darstellungsflüchtigkeit (Huhmann, 2013) ausgegangen und schritt-weise ein exemplarischer fachlicher Inhalt in den Blick genommen. Zentrales Element dieser Lernsequenzen ist die Unterstützung durch ein digitales Tool in Form einer App, das heterogenitätssensibles Lernen naturwissenschaftlicher Inhalte, Prozesse und Erkenntnismethoden durch Dokumentations- und Strukturierungsfunktionen fördert. Im letzten Abschnitt des Seminars erfolgt die Erprobung, Reflexion und Weiterentwicklung der Lernsequenzen in Lehr-Lern-Laboren, in denen adaptive Kompetenzen der Studierenden gefördert werden sollen.

Beschreibung der App
Die App soll als Scaffold für die Dokumentation in Experimentier-, Modellierungs- sowie Problemlöseprozessen dienen. Den Schülerinnen und Schülern soll mithilfe dieser App ermöglicht werden, Ansätze und Ergebnisse schnell und mit geringem Aufwand zum Beispiel über Bild- und Videoaufnahmen zu dokumentieren. Weiterhin sind Funktionen geplant, die das Kommentieren und Sortieren der gesammelten Daten und Bilddateien erlauben. Auf diese Weise stehen den Lernenden nicht nur die durchlaufenen Experimentier- und Modellierungsprozesse, sondern auch die eigenen Denkprozesse für die Reflexion im Anschluss zur Verfügung. Die interdisziplinär entwickelte App soll barrierearm gestaltet sein und adaptiv von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften an die jeweiligen Präferenzen angepasst werden können. Für die Reduzierung der Barrieren wird auf die Expertise der Querlagen des Projekts FDQI-HU-MINT (Rehabilitationswissenschaften, digitale Medienbildung und Sprachbildung) zurückgegriffen. Da eine umfassend barrierefreie App im Rahmen des Projekts aus zeitlichen Gründen nicht umsetzbar ist, wird in Absprache mit den Querlagen sowie unter Berücksichtigung der Dissertationsschwerpunkte eine Auswahl der barrierenreduzierenden Optionen der App getroffen.

Forschungsprojekte
Die Forschungsprojekte, die im Rahmen von Dissertationen umgesetzt werden, adressieren die Ebene der Schülerinnen und Schüler. Die in der Intervention entwickelten heterogenitätssensiblen Lernumgebungen werden weiterentwickelt und in Schulen eingesetzt. Die Umsetzung erfolgt mithilfe der im DiMiLL (Frohn et al., 2019) beschriebenen Prozessmerkmale inklusiven Unterrichts unter Fokussierung der individuellen Nutzung des Angebotes zur Kompetenzentwicklung der Lernenden. Dabei wird der projektübergreifende theoretische Rahmen fachbezogen operationalisiert, zur empirischen Untersuchung individueller Lernprozesse durchgeführt und evaluiert.

In allen *Dissertationen* nimmt zudem das Konstrukt der Prozessflüchtigkeit eine zentrale Rolle ein. Es basiert auf dem in der Mathematik erstmals beschriebenem Phänomen der Darstellungsflüchtigkeit (Huhmann, 2013). Dieses wird als eine von mehreren Ursachen des *Cognitive Load* gesehen und entsteht, weil „[Modellierungs- und Problemlöseprozesse sowie] Darstellungen ohne Dokumentation nach der Durchführung den Schülerinnen und Schülern nicht mehr zugänglich und somit ‚flüchtig' sind" (Huhmann, 2013). In Anlehnung an Huhmann (2013) sowie Beyer, Eilerts und Huhmann (2020) wird bezüglich naturwissenschaftlicher Prozesse ebenfalls eine Flüchtigkeit angenommen bzw. für wahrscheinlich gehalten. Im Projekt wird daher der Begriff Prozessflüchtigkeit verwendet. So kann davon ausgegangen werden, dass beim Betrachten und Ausführen von Prozessen, beispielsweise in Experimenten oder Modellierungen, der Prozess des „Ausprobierens" bzw. des „Trial-and-Error" nach Beendigung von den Schülerinnen und Schülern ebenfalls häufig nicht mehr nachvollzogen werden kann.

Für Lernprozesse wird angenommen, dass auf der Ebene der Person *Cognitive Load*, Motivation, Sprachkompetenz, kognitive Fähigkeiten und fachbezogenes Vorwissen Prädiktoren für erfolgreiches Lernen sind (siehe z. B. Dresel & Haugwitz, 2008; Kalyuga, 2007; Köller, 1998).

Des Weiteren stehen Lehrkräfte für das Lernen in heterogenen Gruppen vor der Herausforderung, barrierearme Angebote zu erstellen, die den individuellen Lernenden gerecht werden. Im Rahmen der Dissertationen werden daher diese relevanten Personenmerkmale um Heterogenitätsdimensionen, wie z. B. die Wahrnehmungsfähigkeit oder motorische Fähigkeiten, ergänzt. Auf der individuellen Ebene wird Lernen als Relation zwischen Person und Situation verstanden, die bestimmte Handlungsangebote (Affordances) und Handlungsbeschränkungen (C*onstraints*) beinhaltet (Greeno, Smith & Moo, 1993; Renkl, 2010). Die aus dem Nutzungsverhalten der App erhobenen Daten werden hinsichtlich des Potentials, Prozessflüchtigkeit und somit *Cognitive Load* zu reduzieren, ausgewertet. Für die Evaluation des digitalen Angebots werden Merkmale der Lernenden vor und nach der Nutzung (Merkmale der Person, z. B. Sprache, Fachwissen), das individuelle Nutzungsverhalten sowie die persönliche Wahrnehmung des Angebots während der Nutzung erfasst.

Da durch die Verbindung von erfassten Personenmerkmalen mit Merkmalen der Situation sowie der Situationswahrnehmung der einzelnen Schülerinnen und Schüler Unterschiede in individuellen Lernverläufen beobachtet, erklärt und letztlich vorausgesagt werden können (Ziegler, Schroeter, Lüdtke & Roemer, 2018), sollen mithilfe dieser Erkenntnisse Gelingensbedingungen für inklusionsorientierten Fachunterricht exemplarisch an ausgewählten Themen der MINT-Fächer beschrieben werden.

Nach der Pilotierung der interdisziplinär entwickelten App für inklusives MINT-Lernen in den Lehr-Lern-Laboren, und der damit einhergehenden Testung der Usability, werden in der Hauptstudie die Potenziale dieser App im Kontext von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht der Primarstufe in Bezug auf ihren Beitrag zu einem inklusiven, digitalgestützten Unterricht für alle Schülerinnen und Schüler untersucht.

Der Einsatz von Modellierungsaufgaben in der Grundschule ist auch heute noch eher die Ausnahme, da sie durch ihre Komplexität und ungewohnte Herangehensweise Schülerinnen und Schüler vor dementsprechend große Herausforderungen stellen (Eilerts & Skutella, 2018).

Die App ist hierbei unterstützendes Element zur Dokumentation und Strukturierung von Gedankengängen, um so den *Cognitive Load* zu verringern. Hierdurch wird der dem Modellieren inhärente Prozess des Reflektierens und Validierens sowie des Darlegens des Lösungsweges bzw. der Ergebnisse und somit die Kompetenz des Argumentierens (siehe Modellierungskreislauf nach Blum & Leiß, 2005) gestützt. Sie ist durch ihre Adaptivität in unterschiedlichen Lernumgebungen einsetzbar, von denen zwei Lernumgebungen (siehe Eilerts & Kolter, 2015; Eilerts et al., 2018) exemplarisch fokussiert werden sollen. Diese werden sowohl von Experimentalgruppen (mit Einsatz der App) als auch von Kontrollgruppen (dieselbe analoge Lernumgebung, ohne Einsatz der App) durchlaufen. Um Rückschlüsse auf die Nutzung und das Potenzial der App zu ziehen, werden bei allen Durchführungen Daten zur Nutzung der App und zu den Schülerinnen und Schülern erhoben. Hierzu gehören z. B. Logfiles, um die Nutzung der App auszuwerten, Kategorien zu bilden, Zusammenhänge zu den anderen Variablen herzustellen und Handlungsempfehlungen zu geben.

Des Weiteren werden die Kompetenzstufen der einzelnen Schülerinnen und Schüler in Bezug auf das Problemlösen in inner- und außermathematischen Kontexten des Modellierens bzw. in diesem Zusammenhang insbesondere die Kompetenzstufen des Argumentierens erfasst (IQB, 2013), wobei „Argumentieren bedeutet, dass mathematische Begründungen selbst gesucht [...] werden. [...] [Es steht] das Identifizieren von Zusammenhängen und das Anstellen von Vermutungen an sich im Zentrum der Tätigkeit, etwa um Begründungen für einen Sachverhalt angeben zu können" (Stanat et al., 2012, S. 37). Durch das Kontrollgruppendesign können Schlussfolgerungen gezogen werden, welchen Einfluss der Einsatz der App auf die Förderung individueller Kompetenzen in komplexen Situationen hat, angezeigt durch das Erreichen höherer Niveaustufen im Vergleich zur Kontrollgruppe. Perspektivisch soll die App Lehrkräften zur Verfügung gestellt und deren Potenzial durch die Beschreibung der konzipierten Lernsequenzen exemplarisch erläutert werden.

Darüber hinaus werden im Projekt weitere inklusionsorientierte Lernumgebungen für die Unterrichtsfächer Biologie und Physik entwickelt und im Rahmen von Dissertationen wissenschaftlich evaluiert. In allen Dissertationsprojekten soll somit die Eignung des DiMiLL für die Planung inklusiver Lernumgebungen empirisch untersucht werden. Die zu den jeweiligen Themen der Fächer Mathematik, Biologie und Physik konzipierten inklusiven Lernsequenzen dienen dann als Best-Practice-Beispiele für die Anwendung des DiMiLL.

Literatur

Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–54). Münster: Waxmann.

Beyer, S., Eilerts, K., & Huhmann, T. (im Druck). Analyse von analogen und digital-gestützten Problemlöseprozessen sowie Nutzungsweisen von Hilfen in der Lernumgebung Pentominos mittels qualitativer Inhaltsanalyse. In S. Ladel, C. Schreiber, R. Rink & D. Walter (Hrsg.), *Aktuelle Forschungsprojekte zu digitalen Medien in der Primarstufe*. (Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien, Bd. 6). Münster: WTM-Verlag.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der Tanken-Aufgabe. *Mathematik lehren*, (128), 18–21.

Brodesser, E., Frohn, J., Welskop, N., Liebsch, A.-C., Moser, V., & Pech, D. (Hrsg.) (2020). *Inklusionsorientierte Lehr-Lern-Bausteine für die Hochschullehre. Ein Konzept zur Professionalisierung zukünftiger Lehrkräfte*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Brühwiler, C. (2014). *Adaptive Lehrkompetenz und schulisches Lernen: Effekte handlungssteuernder Kognitionen von Lehrpersonen auf Unterrichtsprozesse und Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler*. Münster, New York: Waxmann.

Dresel, M., & Haugwitz, M. (2008). A Computer-Based Approach to Fostering Learning Motivation and Self-Regulated Learning. *The Journal of Experimental Education*, *77*(1), 3–18.

Eilerts, K., & Huhmann, T. (2018). Ein interdisziplinäres Projekt zur Entwicklung und Erforschung digital unterstützter Lehr-Lernumgebungen für den Inhaltsbereich Raum und Form im Mathematikunterricht der Primarstufe. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 497–500). Münster: WTM-Verlag.

Eilerts, K., & Skutella, K. (2018). *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Ein ISTRON-Band für die Grundschule*. Wiesbaden: Springer.

Eilerts, K., & Kolter, J. (2015). Modellieren baut Brücken – Eine Kletterwand für Klasse 1 bis 6. *Mathematik lehren*, (192), 20–24.

Frohn, J., Brodesser, E., Moser, V., & Pech, D. (2019). *Inklusives Lehren und Lernen. Allgemein- und fachdidaktische Grundlagen*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Frohn, J., Schmitz, L., & Pant, H. A. (2020). Lehrkräfteprofessionalisierung: adaptive Lehrkompetenz für inklusiven Unterricht. In E. Brodesser, J. Frohn, N. Welskop, A.-C. Liebsch, V. Moser & D. Pech (Hrsg.), *Inklusionsorientierte Lehr-Lern- Bausteine für die Hochschullehre. Ein Konzept zur Professionalisierung zukünftiger Lehrkräfte* (S. 30–36). Bad Heilbrunn: Klinkhardt. doi: 10.35468/5798_02.2

Greeno, J.G., Smith, D.R., & Moore, J.L. (1993). Transfer of situated learning. In D. K. Dettermann & R. J. Sternberg (Hrsg.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (S. 99–167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Helsper, W. (2011). Lehrerprofessionalität – der strukturtheoretische Professionsansatz zum Lehrberuf. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 149–170). Münster: Waxmann Verlag

Huhmann, T. (2013). *Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

IQB (2013). *Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Abgerufen von https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm/

Kalyuga, S. (2007). Expertise reversal effect and its implications for learner-tailored instruction. *Educational Psychological Review*, *19*, 509–539.

Köller, O. (1998). *Zielorientierung und schulisches Lernen*. Münster: Waxmann.

Priemer, B., & Roth, J. (2020). *Lehr-Lern-Labore: Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-662-58913-7

Reinmann, G. (2018). *Reader zu Design-Based Research*. Abgerufen am 23.04.2020 von https://gabi-reinmann.de/wp-content/uploads/2018/06/Reader_DBR_Juni2018.pdf

Renkl, A. (2010). Lehren und Lernen. In R. Tippelt & B. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Bildungsforschung* (S. 737–751). Wiesbaden: Springer VS.

Schmitz, L. (2017). *Adaptive Lehrkompetenz*. Abgerufen am 19. Mai 2020 von www.hu-berlin.de/fdqi/glossar.

Schmitz, L., Brodesser, E., & Pant, H. A. (2020). Adaptive Lehrkompetenz: Bildung von Indizes und empirische Ergebnisse zur Wirkung universitärer Lehrveranstaltungen. In E. Brodesser, J. Frohn, N. Welskop, A.-C. Liebsch, V. Moser & D. Pech (Hrsg.), *Inklusionsorientierte Lehr–Lern-Bausteine für die Hochschullehre. Ein Konzept zur Professionalisierung zukünftiger Lehrkräfte* (S. 124–136). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schmitz, L., Simon, T., & Pant, H. A. (2020). *Heterogene Lerngruppen und adaptive Lehrkompetenz. Skalenhandbuch zur Dokumentation des IHSA-Erhebungsinstruments*. Münster: Waxmann.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*, 141–156.

Stanat, P., Pant, H. A., Böhme, K. & Richter, D. (Hrsg.). (2012). *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik. Ergebnisse des IQB-Ländervergleichs 2011*. Münster: Waxmann.

Ziegler, M., Schroeter, T., Lüdtke, O., & Roemer, L. (2018). The Enriching Interplay between Openness and Interest: A Theoretical Elaboration of the OFCI Model and a First Empirical Test. *Journal of Intelligence*, *6*(3), 35.

Dominik Bechinie, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: dominik.bechinie@hu-berlin.de

Katja Eilerts, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: katja.eilerts@hu-berlin.de

Julia Frohn, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: julia.frohn@hu-berlin.de

Sia Marsch, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: sia.marsch@hu-berlin.de

Annette Upmeier zu Belzen, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: annette.upmeier@biologie.hu-berlin.de

Stephen Mayer, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: stephen.mayer@physik.hu-berlin.de

Burkhard Priemer, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: priemer@physik.hu-berlin.de

Bi$^{\text{professional}}$ – praxisorientiert-forschungsbasiert-inklusionssensibel-phasenübergreifend

Maßnahmen im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Bielefeld

Rudolf vom Hofe, Thomas Rottmann und Miriam Lüken

Das Projekt zur Qualitätsoffensive Lehrerbildung der Universität Bielefeld wird unter dem Namen Bi$^{\text{professional}}$ seit 2016 mit Beteiligung von etwa 70 Akteuren aus den Bereichen der Hochschule und Lehrerbildung durchgeführt.[1] Kern des Projekts ist die Konzeption, Durchführung und Beforschung von innovativen Lehr-/Lernformaten für die Lehrerbildung. Dabei fokussiert das Projekt inhaltlich einen vermehrten Praxisbezug, eine zunehmend forschungsorientierte Ausrichtung des Lehramtsstudiums und eine inklusionssensible Lehrerbildung. Als Querschnittsthema des Gesamtprojekts ist seit der aktuell laufenden zweiten Förderphase die phasenübergreifende Ausgestaltung von Lehrerbildung verankert. Im Folgenden berichten wir über die drei interdisziplinären Teilmaßnahmen, an denen das Fach Mathematik beteiligt ist.

Learning Reflection in Bezug auf inklusionssensible Diagnostik, Förderung und Didaktik (Berthold, vom Hofe, Pieper, Roelle und Salle)

Eine zentrale Herausforderung angehender Lehrkräfte ist es, professionelle Kompetenzen im inklusiven Unterricht und für den Umgang mit inklusiven Gruppen zu erwerben. Für den Erwerb dieser Kompetenzen ist eine hohe Reflexionsfähigkeit erforderlich. Ein vielversprechendes Medium zur Förderung von Reflexionsfähigkeiten im inklusiven Unterricht ist das Schreiben eines Lerntagebuchs, in dem Lehramtsstudierende das Reflektieren ihres eigenen Unterrichts üben können. In der ersten Förderphase wurde in dieser Teilmaßnahme basierend auf bildungswissenschaftlichen und mathematikdidaktischen Theorien und Evidenzen ein Lerntagebuch zur Förderung von Reflexionsfähigkeiten im Praxissemester entwickelt. In zwei Experimenten konnten positive Effekte auf Reflexionsfähigkeiten gezeigt werden.

Das Ziel dieser Teilmaßnahme für die zweite Förderphase ist es, zu untersuchen, wie ein Lerntagebuch gestaltet sein muss, um die Reflexionsfähigkeit mit besonderem Fokus auf inklusive Gruppen im Praxissemester zu fördern. Diese Fragestellung soll in einer interdisziplinären Kooperation der Arbeitseinheit Bildungspsychologie und Mathematikdidaktik mit einem experimentellen Design untersucht werden. Die positiv evaluierten Lerntagebuchsettings sollen den Lehrenden und den Lehramtsstudierenden zugänglich gemacht und in Form eines Lerntagebuchpackages zur Verfügung gestellt werden.

Durch interdisziplinäres Team-Teaching inklusionssensible Diagnose- und Beratungskompetenz fördern (Rottmann, Wild, Peter-Koop, Lüken und Tiedemann)

Im Rahmen der ersten Förderphase von Bi$^{\text{professional}}$ wurde von Vertreterinnen und Vertretern der Mathematikdidaktik und der Pädagogischen Psychologie ein Seminarkonzept entwickelt und evaluiert, welches durch interdisziplinäres Teamteaching die positive Entwicklung von inklusionsbezogenen Einstellungen und Selbstwirksamkeitsüberzeugungen von Lehramtsstudierenden hinsichtlich Diagnose, Beratung und Förderung bei rechenschwachen Kindern unterstützt. Die Maßnahme zielt auf Seiten der Lehrenden auf die Entwicklung und vergleichende Evaluation von Konzepten für interdisziplinäre Lehrveranstaltungen, in welchen die Themenfelder Diagnose und Beratung aus mathematikdidaktischer sowie aus pädagogisch-psychologischer Perspektive u. a. anhand konkreter Praxisbeispiele aus der Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen und der pädagogisch-psychologischen Beratungsstelle behandelt werden. Eine Variante der Lehrkonzeption schließt die Begleitung realer Fälle

[1] Das diesem Artikel zugrundeliegende Vorhaben Bi$^{\text{professional}}$ wird im Rahmen der gemeinsamen Qualitätsoffensive Lehrerbildung von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Förderkennzeichen 2016–2019: 01JA1608; 2019–2023: 01JA1908). Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei der Autorin und den Autoren.

aus den Beratungsstellen durch Studierende unter Supervision ein und orientiert sich damit an den Prinzipien des problem based learning, welches sich bereits in der psychologischen Hauptfachausbildung bewährt hat und nun in der Lehramtsausbildung für die Grundschule aufgegriffen und konzeptuell im Sinne eines interdisziplinären Zugriffs erweitert wird.

Das Lehrkonzept soll in der zweiten Förderphase in seiner finalen Version an der Universität Bielefeld erprobt und schließlich so aufbereitet werden, dass es an anderen Hochschulstandorten leicht übernommen werden kann. Zu diesem Zweck werden Vertreterinnen und Vertreter der pädagogischen Psychologie und der Mathematikdidaktik, die an der Konzeptentwicklung *nicht* beteiligt waren, das Seminar eigenständig im interdisziplinären Teamteaching durchführen. Die Veranstaltungen werden erneut begleitend evaluiert, sodass die Entwicklung der Studierenden evidenzbasiert eingeschätzt werden kann.

Erwerb professioneller Kompetenzen zur Motivationsförderung für den Mathematikunterricht in inklusiven Settings
(vom Hofe, Hettmann, Fries, Grund und Zurbriggen)

Ziel dieses Teilprojekts ist die Entwicklung und Evaluation von Konzepten für die Aus- und Fortbildung von Lehrkräften. Inhaltlich zielen die Materialien auf die Motivations- und Selbstwirksamkeitsförderung durch individualisiertes Lernen für den Einsatz im Rahmen einer individuellen (mathematischen) Förderung von leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern.

Die in der ersten Förderphase für Mathematiklehramtsstudierende entwickelte und evaluierte Veranstaltungskonzeption zur Vermittlung von professionellen Kompetenzen in den genannten Bereichen, soll für praktizierende Lehrkräfte in Form einer Fortbildungsveranstaltung gewinnbringend adaptiert werden. Diese fokussiert das Lehren und Lernen in inklusiven Settings und setzt inhaltliche Schwerpunkte durch die Erweiterung des bisherigen Konzepts für den MINT-Bereich als Anwendungsfeld, sowie für Lerngruppen von 20 bis 30 Schülerinnen und Schülern und die Interdisziplinarität zwischen (Motivations-)Psychologie, Erziehungswissenschaft und mehreren Fachdidaktiken. Neben den Inhalten zur fachlichen und motivationalen Förderung, wird mit der Diagnostik von Motivationsdefiziten im Fachunterricht mit Hilfe eines leitfragengestützten Diagnoseschemas ein weiterer Schwerpunkt des modularen Fortbildungscurriculums gesetzt.

Das Arbeitsprogramm gliedert sich in drei Phasen: Zunächst die zeitgleiche Entwicklung eines bedarfsorientierten Curriculums sowie der Zusammenstellung und Adaption von Evaluationsinstrumenten, gefolgt von der Validierung dieser Verfahren und Pilotierung einzelner Fortbildungsbausteine und schließlich deren Umsetzung und Evaluation.

Miriam Lüken, Universität Bielefeld
(korrespondierende Autorin)
E-Mail: miriam.lueken@uni-bielefeld.de

DigiLeG

Entwicklung digitaler Lernumgebungen für (sächsische) Grundschulen

Birgit Brandt

Zielsetzung

Ziel des Projektes ist es, (sächsische) Grundschulen bei der Umsetzung der Digitalisierung zu unterstützen. Um dies zu realisieren, wird zusammen mit den Studierenden des Lehramts an Grundschulen der Technischen Universität Chemnitz über einen längeren Zeitraum eine frei zugängliche, internetbasierte Datenbank mit best-practice-Beispielen aufgebaut und weiterentwickelt. Dabei wird aufgrund der Altersstruktur der Lehrkräfte in Sachsen bewusst bei den Studierenden als künftige Lehrkräfte angesetzt, um digitale Lernumgebungen nachhaltig in der sächsischen Schullandschaft zu etablieren. Das Projekt zielt somit auf folgende Forderung aus dem Strategiepapier der Kultusministerkonferenz zur Bildung in der digitalen Welt:

Das Projekt DigiLeG am Zentrum für Lehrerbildung der Technischen Universität Chemnitz wird im Rahmen der gemeinsamen Qualitätsoffensive Lehrerbildung von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert (Laufzeit: 1. 3. 2020–31. 12. 2023).

> Das Lernen mit und über digitale Medien und Werkzeuge sollte bereits in den Schulen der Primarstufe beginnen. [. . .] Voraussetzungen dafür sind eine funktionierende Infrastruktur [u. a. Plattformen], [. . .] die Weiterentwicklung des Unterrichts und vor allem auch eine entsprechende Qualifikation der Lehrkräfte. (KMK, 2016, S. 11)

Um einen Transfer digitaler Möglichkeiten in die Schule zu gewährleisten, Chancen und Grenzen des Lehrens und Lernens mit digitalen Technologien zu kennen und digitale Werkzeuge wirksam im Unterricht einzusetzen, bedarf es eines weitreichenden Konzeptes, in dem die Studierenden fachdidaktisch angeleitet digitale Lernumgebungen praktisch erproben und die Praxiserfahrungen reflektieren. Am Projekt DigiLeG sind daher die Grundschuldidaktiken Deutsch (Prof. Dr. M. Krelle), Mathematik (Prof. Dr. B. Brandt), Philosophieren mit Kindern (Prof. Dr. M. Kim) und Sachunterricht (Prof. Dr. L. Bröll; Projektleitung) sowie die Fachdidaktiken Englisch (Prof. Dr. H. Dausend) und Sport und Bewegungserziehung (Prof. Dr. M. Breuer) mit entsprechenden Teilprojekten beteiligt, um die jeweiligen fachspezifischen Bezüge angemessen zu berücksichtigen.

In ausgewählten Seminaren werden fachspezifische und fächerübergreifende digitale Lernumgebungen entwickelt, welche in den Schulpraktischen Studien durch die Studierenden erprobt und in begleitenden Übungen sowie anschließenden Seminaren reflektiert werden. Somit durchlaufen die Studierenden in einer zentralen Phase ihres Studiums den von Fröhlich-Gildhoff, Nentwig-Gesemann und Pietsch (2011) dargelegten Zyklus zum Kompetenzerwerb pädagogischer Fachkräfte. Positiv evaluierte digitale Lernumgebungen werden einer breiten Öffentlichkeit durch eine internetbasierte Datenbank zugänglich gemacht, in der neben Unterrichtsmaterialien auch Erfahrungen aus der Umsetzung in der Praxis dokumentiert sowie Hürden und Stolpersteine aufgezeigt werden.

Nachhaltigkeit und Transfer

Eine Verankerung des digitalen Lernens in den fachdidaktischen Modulen erlaubt eine intensive Beschäftigung mit der Thematik in der ersten Phase der Lehramtsausbildung, welche im Anschluss an das Studium in die Ausbildungsseminare der zweiten Phase sowie die Unterrichtspraxis an Schulen wirken kann. Im Laufe des Projektes entwickeln die Studierenden eine umfassende Handlungskompetenz zum Einsatz digitaler Medien in fachlichen Lehr-Lern-Kontexten. Es werden vertiefende Fragestellungen zum Einsatz digitaler Medien bearbeitet und mit grundsätzlichen fachdidaktischen Annahmen sowie unterrichtspraktischen Ideen verknüpft. Durch die Nutzung der dokumentierten digitalen Lernumgebungen, der damit verknüpften Praxisreflektionen sowie aufbereiteter Videosequenzen durch Beteiligte aller Phasen der Lehreraus- und -fortbildung, erlaubt die Datenbank einen direkten Austausch der TU Chemnitz mit Schulen und Lehrenden aus der Praxis, anderen Hochschulen sowie Ausbildungsstätten der zweiten Phase. Die Momente des Projektes, a) Lehramtsstudierende zum reflektierten und zielgerichteten Einsatz digitaler Medien in ihrem Unterricht zu befähigen und b) ihre Unterrichtsideen in einer Datenbank zu sammeln und zu evaluieren, werden somit auf insgesamt vier Ebenen sichtbar:

1. Studiengang Lehramt an Grundschulen an der TU Chemnitz,
2. Wirkung auf die Schulpraxis,
3. Transfer auf Hochschulebene und
4. zweite Phase der Lehrerausbildung.

Dieser breite Austausch zwischen verschiedenen Institutionen der Lehreraus- und -fortbildung, der Praxis und der universitären Forschung ist auch Ziel der Symposien Lernen Digital, die seit 2017 fachübergreifend vom Zentrum für Lehrerbildung der TU Chemnitz alle zwei Jahre durchgeführt werden (Brandt & Dausend, 2018; Brandt, Bröll, & Dausend, 2020); turnusgemäß werden während der Projektlaufzeit 2021 und 2023 entsprechende Symposien durchgeführt, ergänzt durch eine stärker auf regionalen Austausch angelegte Schulbörse 2022.

Aktuelle und geplante Projektaktivitäten

Das Projektdesign zeichnet sich durch eine Verzahnung der Professionalisierung im Lehramtsstudium der Grundschule durch die Entwicklung, Durchführung und Reflexion digital gestützter Lernumgebungen mit dem Wissenstransfer durch Aufbau einer internetbasierten Datenbank aus. Der Projektstart fiel zusammen mit dem Standbybetrieb der Universitäten und die Projektarbeit ist dadurch gleich zu Beginn lediglich eingeschränkt möglich.

Immerhin konnten dennoch sieben der insgesamt acht geplanten Mitarbeiter/innen eingestellt werden, so dass das Gesamtprojekt nun zunächst über die Teilprojekte mit fachspezifischen Recherche- und Planungsaktivitäten anläuft, die vor allem die Begleitforschung sowie Planungen zum Design der Seminarkonzepte betrifft.

Begleitforschung
Das Projekt wird begleitet durch zwei wissenschaftliche Studien, die jeweils quer durch die Teilprojekte verlaufen: (1) eine quantitative Fragebogenstudie und (2) eine qualitative Studie mit Video- und Dokumentenanalyse.

(1) Im Rahmen der Fragebogenstudie sollen ca. 450 Studierende zu digital gestützten Lernumgebungen und Aufgaben für die Grundschule befragt werden. Das Projekt DigiLeG zielt auf differenzierte Ergebnisse in den verschiedenen Fächern der Grundschule. Über ein Pre/Post-Design wird zudem der Frage nachgegangen, wie sich das computerbezogene Selbstkonzept (Janneck et al., 2012) als Teil der Lehrerprofessionalität durch die Arbeit an und mit digitalen Lernsettings verändert. Verglichen werden diese Daten zudem mit den Ergebnissen einer entsprechenden Fragebogenuntersuchung von sächsischen Lehrkräften (angestrebt N=2000).
Zurzeit finden erste Pilotbefragungen im Rahmen der virtuellen Lehre statt. Für den Bereich der Grundschuldidaktik Mathematik zeigt sich bezogen auf die erlebte Unterrichtspraxis (z. B. Unterrichtsversorgung und Praktika) ein sehr breites Spektrum an Vorerfahrungen. Gleichwohl handelt sich bei den folgenden Angaben um Ergebnisse einer nicht repräsentativen Stichprobe. Sie soll somit nur ein erstes Bild zur Orientierung bieten.
Gut $1/3$ der Befragten hat noch keinerlei Erfahrungen mit dem Einsatz digitaler Medien im (Mathematik-)Unterricht gemacht, der Rest hat vor allem den Einsatz von interaktiven Tafeln und Computern erlebt; der Einsatz von Tablets und insbesondere auch von Smartphones ist in der von den Studierenden erlebten Unterrichtspraxis eher eine Ausnahme. Die Studierenden fühlen sich mehrheitlich kompetent in der generellen Nutzung digitaler Medien, jedoch ebenso mehrheitlich also wenig kompetent für den Einsatz im (Mathematik-)Unterricht. Allerdings sind fast alle befragten Studierenden digitalen Medien im Mathematikunterricht positiv gegenüber eingestellt und erwähnen, dass sie in ihrer bisherigen mathematikdidaktischen Ausbildung schon einige Einsatzmöglichkeiten kennen gelernt haben.

(2) Die Erprobung und Reflexion der erstellten digitalen Lernumgebungen werden durch die qualitative Videostudie begleitet (N=120 Unterrichtsstunden, verteilt auf die beteiligten Fächer). Die Videos werden ausgewertet mit dem Fokus, Handlungsmuster und Praktiken mit digitalen Medien als Aspekte der Unterrichtsqualität zu erfassen. Ergänzend werden die Praktikumsberichte der Studierenden in Bezug auf die „reflection-on-action" (Schön, 1983) als Komponente der Lehrerprofessionalisierung inhaltsanalytisch ausgewertet (Mayring, 2015).

Pilotseminar Angewandte Mathematik digital und differenziert unterrichten
Für den Bereich der Mathematikdidaktik wird die Entwicklung digital gestützter Lernumgebungen für das Projekt DigiLeG zunächst in das Modul *Angewandte Mathematik und ihre Didaktik* integriert, das im normalen Studienverlauf von Studierenden im 6. Semester besucht wird. Somit verfügen die Studierenden schon über schulpraktische Erfahrungen aus Praktika, ausreichend mathematikdidaktische Grundlagenkenntnisse und haben erste fachspezifische Apps und ihre Einsatzmöglichkeiten für den Arithmetik- und Geometrieunterricht kennen gelernt. Für dieses Modul wurde schon im Vorfeld des Projektes ein Seminarkonzept entwickelt, in dem Studierenden u. A. digital gestützte Lernangebote erstellen und vereinzelt auch im Unterricht erproben. In Kooperation mit der Professur Psychologie digitaler Lernmedien sind darüber hinaus im Seminarkontext produzierte Lernvideos im Rahmen einer Masterarbeit forschungsorientiert zum Disfluency Effekt (Diemand-Yaumann et. al., 2011) im Grundschulunterricht eingesetzt worden.

In der Vorlesung zum Modul werden die fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Grundlagen für die Inhaltsbereiche *Größen und Messen* sowie *Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit* vermittelt. In den begleitenden Seminaren erstellen die Studierenden projektorientiert Produkte zu diesen Inhaltsbereichen, die über Portfolioarbeit begleitet und reflektiert werden. Diese Produkte können den Einsatz digitaler Medien und/oder außerschulische Lernorte thematisieren. Wie im Projekt DigiLeG angelegt, geht es vor allem darum, bereits vorhandene digitale Angebote zu nutzen und sinnvoll in komplexere Lernumgebungen einzubinden. Die Palette digitaler Medien ist daher bewusst breit angelegt bzw. offen für Vorschläge von Studierenden: denkbar sind zum Beispiel die Nutzung spezifischer Apps aus der Mathematikdidaktik oder auch nicht-didaktisch orientierte Apps, wie z. B. digitale Karten bzw. Routenplaner oder Apps zum Messen. Weiter können Lernvideos, Podcasts, Stop-Motion-Filme oder digital erweiterte (interaktive) Plakate erstellt werden.

Aktuell ist das Seminarkonzept komplett auf digitale Lehre umgestellt, d. h.: Die Studierenden müssen ihre Produkte grundsätzlich digital einreichen, auch wenn sie einen Schwerpunkt auf außerschulische Lernorte ohne Einsatz digitaler Medien für ihr Projekt auswählen. Damit wird in diesem Durchgang verstärkt der Umgang mit digitalen Medien angesprochen, insbesondere mit digitalen Präsentationstools, Video- und Tonaufnahme bzw. -verarbeitung. Dies gilt es, in der quantitativen Begleitforschung entsprechend mit zu erfassen. Hingegen ist der Einsatz im Unterricht aktuell nicht möglich. Im mathematikdidaktischen Teilprojekt ist geplant, gerade die Erprobungs- und Reflexionsphase durch eine Verzahnung mit Übungen zum Unterrichtspraktikum sowie dem mathematikdidaktischen Modul *Heterogenität im Mathematikunterricht* (7. Semester) weiter auszubauen. Der aktuelle Einsatz digitaler Medien in der Schule sowie die Erfahrungen der Studierenden mit digitaler Lehre an der Universität sind dabei angemessen einzubinden, um auch diese Situation für die Professionalisierung im Lehramtsstudium durch die Arbeit an und mit digitalen Lernsettings zu nutzen.

Literatur

Brandt, B. & Dausend, H. (2018). *Digitales Lernen in der Grundschule: Fachliche Lernprozesse anregen*. Münster: Waxmann.

Brandt, B., Bröll, L., & Dausend, H. (2020). *Digitales Lernen in der Grundschule II: Aktuelle Trends in Forschung und Praxis.* Münster: Waxmann.

Diemand-Yauman, C., Oppenheimer, D., & Vaughan, E. (2011): Fortune favors the bold (and the italicized) on educational outcome: Effects of disfluence. *Cognition 118*(1). 111–115.

Fröhlich-Gildhoff, K., Nentwig-Gesemann, I., & Pietsch, S. (2011). *Kompetenzorientierung in der Qualifizierung frühpädagogischer Fachkräfte.* Frankfurt: Henrich Druck + Medien GmbH.

Janneck, M., Vincent-Höper, S., & Ehrhardt, J. (2012). Das computerbezogene Selbstkonzept: Eine gendersensitive Studie. In H. Reiterer, O. Deussen (Hrsg.), *Mensch & Computer 2012: interaktiv informiert – allgegenwärtig und allumfassend!?* (S. 243–252). München: Oldenbourg Verlag.

KMK (2016). *Bildung in der digitalen Welt.* Verfügbar unter tinyurl.com/y2kud2om

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12. überarbeitete Auflage). Weinheim, Basel: Beltz.

Schön, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action.* New York: Basic Books.

Birgit Brandt, Technische Universität Chemnitz
E-Mail: birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de

Mathematik im Fokus des Aufbaus professionellen Lehrerhandelns

Das Projekt ProfaLe in der Reform der Hamburger Lehrerbildung

Gabriele Kaiser und Marius Herzog

Lehrerbildung hat an der Universität Hamburg auch heute, über 100 Jahre nach ihrer Gründung im Jahre 1919, einen zentralen Stellenwert: Jährlich beginnen etwa 900 Bachelorstudierende ein Lehramtsstudium. Sie können zwischen vier Lehramtstypen, 28 Unterrichtsfächern, neun beruflichen Fachrichtungen und sieben sonderpädagogischen Förderschwerpunkten wählen. Mit insgesamt knapp 5.700 Studierenden ist die Lehrerbildung für die Universität Hamburg quantitativ die größte Einzelaufgabe in der Lehre.

Im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung, die von Bund und Ländern gemeinsam getragen wird, verbessert die Universität Hamburg mit dem Projekt „Professionelles Lehrerhandeln zur Förderung fachlichen Lernens unter sich verändernden gesellschaftlichen Bedingungen (ProfaLe)“ seit 2015 die curricular-inhaltliche Koordination der fachlichen, fachdidaktischen, pädagogischen und schulpraktischen Ausbildungsanteile.

Ziele und Projektkontext von ProfaLe

Die Projektarbeit folgt dabei *drei Grundgedanken*. Lehrerbildung muss zukünftige Lehrkräfte stärker dazu befähigen, dem Wandel gesellschaftlicher Bedingungen professionell zu begegnen. Diese Erkenntnis wurde zum Ausgangspunkt gewählt: Einen Lehrberuf professionell auszuüben, bedeutet, relevante gesellschaftliche Veränderungen sensibel wahrzunehmen und sich, auf der Basis professionellen Wissens, angemessen darauf einzustellen.

Die zweite Überlegung ist ebenfalls im Titel des Projekts angedeutet. Alle Maßnahmen werden auf die jeweils unterschiedlichen Bedingungen der Unterrichtsfächer ausgerichtet. Eine zentrale Erkenntnis, die in zahlreichen Reformprojekten zur Lehrerbildung an der Universität Hamburg in den vergangenen Jahren gereift ist, besagt, dass erfolgreiche Reformbemühungen fachspezifisch angelegt waren. ProfaLe richtet seine Aktivitäten daher fachspezifisch im Rahmen eigens entwickelter „ProfaLe-Lehrveranstaltungen“ aus.

Die dritte Prämisse des Projekts erwuchs aus dem Umstand, dass in der Lehrerbildung – nicht nur in Hamburg – zahlreiche wissenschaftliche Disziplinen und Teildisziplinen zusammenwirken und dass die Vielfalt der Lehrangebote für die Studierenden nicht nur eine Chance, sondern auch eine Schwierigkeit darstellt, wenn ihnen die verschiedenen Elemente nicht koordiniert und unverbunden präsentiert werden. Das Projekt ProfaLe soll deshalb dazu beitragen, Lehrangebote der Lehrerbildung zu vernetzen und zu verknüpfen.

Die Projektaktivitäten von ProfaLe sind in *vier Handlungsfeldern* organisiert, die jeweils eine spezifische Anforderung an den Fachbezug der Lehrangebote und die Vernetzung der Akteurinnen und Akteure repräsentieren:

Im Handlungsfeld 1 „Kooperationen zwischen Fächern und Fachdidaktiken“ stehen die Verbindung von fachlichem und fachdidaktischem Wissen in der Lehrerbildung und die Förderung von Kooperationen zwischen Fachwissenschaften und Fachdidaktiken im Mittelpunkt. Dass an der Universität Hamburg die Fachdidaktiken in der Fakultät für Erziehungswissenschaft angesiedelt sind (sogenanntes „Hamburger Modell“), stellt eine besondere Bedingung dar, die bei der Entwicklung der Maßnahmen berücksichtigt werden musste.

Wie in anderen deutschen Großstädten auch wächst in Hamburg ein erheblicher Teil der Schülerschaft mehrsprachig auf. Aufbauend auf langjährigen Forschungserfahrungen im Themenfeld „Mehrsprachigkeit und Bildung“ beschäftigt sich das Handlungsfeld 2 „Sprachlich-kulturelle Heterogenität und Mehrsprachigkeit“ mit der Aufgabe, Kompetenzen zur Gestaltung von sprachsensiblem Fachunterricht zu vermitteln.

Ein weiteres Handlungsfeld beschäftigt sich mit der Anforderung der Umsetzung von „Inklusion“. In Übereinstimmung mit der Konvention der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen (UN 2008, Art. 24) sind auch die Hamburger Schulen verpflichtet, Barrieren abzubauen, um Schülerinnen und Schülern mit Behinderung diskriminierungsfreie und gleichberechtigte Teilhabe an allen Bildungsprozessen zu ermöglichen. Das Handlungsfeld 3 „Inklusion“ erforscht die Konsequenzen für die Hamburger Lehrerbildung und entwickelt Ansatzpunkte für die Etablierung des Themas in den Curricula der Lehramtsstudiengänge.

Mit dem konstruktiven Zusammenwirken von universitärem Studium (erste Phase) und beruflicher Praxis in der Schule befasst sich das Handlungsfeld 4 „Phasenübergreifende Kooperation“. Im Mittelpunkt der Aktivitäten steht die Zusammenarbeit mit den Mentorinnen und Mentoren, die Studierende in den Schulpraktika betreuen, wobei besonders ist, dass alle Seiten – die Studierenden, die Lehrenden an der Universität sowie die Mentorinnen und Mentoren – durch diese Kooperation neue Erkenntnisse gewinnen können.

Die Wirksamkeit der oben beschriebenen Maßnahmen für den Aufbau professioneller Lehrerkompetenzen wird auf drei Ebenen im Rahmen der *wissenschaftlichen Begleitforschung* untersucht – zunächst als Monitoring und Makro-Evaluation studentischen Lernens und Wissenserwerbs im Studienverlauf. Dies geschieht durch eine ProfaLe-Panelstudie, die insbesondere den Erwerb des Professionswissens in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik analysiert, aber auch fächerübergreifend den Erwerb pädagogischen Unterrichtswissens untersucht.

Auf der zweiten Ebene folgen Interventionsstudien zur Wirkung spezifischer innovativer Maßnahmen, die in der Regel in mehreren Lehrveranstaltungen über mehrere Semester hinweg entwickelt und umgesetzt werden. Diese Studien wurden bzw. werden im Rahmen von Dissertationen und Forschungsarbeiten der vier Handlungsfelder realisiert.

Auf der dritten Ebene befindet sich schließlich die Lehrveranstaltungsevaluation, die das studentische Feedback an die Lehrenden zu den ProfaLe-Lehrveranstaltungen erhebt und auswertet.

Auf Beschluss der Hamburger Bürgerschaft vom 25. April 2018 werden die Lehramtsstudiengänge derzeit und in den kommenden Jahren umfassend reformiert. Mit der *Reform der Lehrerbildung* hat sich der Hamburger Senat zum Ziel gesetzt, die Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer weiterzuentwickeln. Dazu sollen die Studiengänge für die Lehrämter besser auf die neue Schulstruktur ausgerichtet und die Pädagogikausbildung sowie die Fachlichkeit gestärkt werden. Darüber hinaus soll die Lehrerausbildung auf die neuen Herausforderungen, insbesondere auf die Binnendifferenzierung, die Begabungsförderung und die Inklusion, die Verbesserung des Fachunterrichts in Mathematik sowie die Stärkung des Kernfachs Deutsch zugeschnitten werden.

Strukturell wesentlich ist die Einrichtung eines eigenständigen Grundschullehramtes sowie eines Lehramtes für das Unterrichten in den Sekundarstufen I und II an Gymnasien und Stadtteilschulen. Im Gegenzug entfällt künftig das bisher angebotene Studium zum stufenübergreifenden Lehramt der Primar- und Sekundarstufe I.

Die zweite Phase des Projekts ProfaLe im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2019-2023) fällt insofern zeitlich ausgesprochen günstig mit der Reform der Studiengänge zusammen. ProfaLe kann damit eine entscheidende Rolle bei der Neugestaltung der Hamburger Lehrerbildung übernehmen und wissenschaftliche Erkenntnisse zur Lehrerprofessionalisierung in die universitäre Praxis überführen. Nicht zuletzt durch die Einführung eines neuen Grundschullehramts mit Mathematik als verpflichtendem Fach wird ProfaLe als Reformprojekt mit dem Fach Mathematik als einem Fokus profiliert

ProfaLe – ein Reformprojekt mit dem Fach Mathematik als Fokus

Die Konzeption der Lehrveranstaltungen und deren wissenschaftliche Begleitung erfolgten und erfolgen auf der Basis einer gemeinsamen theoretischen Modellierung professionellen Lehrerhandelns. Hierbei kam dem *Konzept der professionellen Unterrichtswahrnehmung („noticing")* eine besondere Bedeutung für die Gestaltung der Lehrveranstaltungen zu.

Ein zentrales Ziel ist dabei die Vermittlung professionsnaher, situationsspezifischer Wissensrepräsentationen, sodass es für Lehrkräfte möglich ist, ihre Kompetenzen in Unterrichtshandeln (Performanz) umzusetzen. In den Entwicklungs- und Forschungsaktivitäten wurde an den aktuellen Stand der Diskussion professioneller Kompetenzen von (zukünftigen) Lehrkräften angeknüpft, d. h. an neuere Konzeptionen, die Lehrerkompetenzen als Kontinuum von Dispositionen zur Lehrerperformanz modellieren und kognitive Wissensfacetten und affektive Aspekte um situierte Kompetenzfacetten der professionellen Unterrichtswahrnehmung erweitern (Blömeke, Gustafsson, & Shavelson, 2015). Basierend auf dem im nordamerikanischen Raum verbreiteten Konzept *„noticing"* (van Es & Sherin, 2008; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011) unterscheiden aktuelle nationale und internationale Arbeiten (siehe u. a. Blömeke et al., 2014, Kaiser et al., 2015) drei Facetten der professionellen Unterrichtswahrnehmung: die präzise Wahrnehmung von Unterrichtssituationen („perception accuracy", Carter et al., 1988), deren zielangemessene Analyse und Interpretation („interpretation") sowie die flexible Reaktion darauf („decision-making"). Diese Facetten werden unter dem Kürzel PID zusammengefasst.

Die Verfügbarkeit dieser verhaltensnahen, situationsspezifischen Wissensrepräsentationen bestimmt wesentlich, ob die Transformation von Kompetenz in Performanz gelingt. Aktuelle empirische Studien setzen bei der Evaluation von professioneller Unterrichtswahrnehmung insbesondere auf videobasierte Erhebungsinstrumente, die die klassischen Instrumente von Papier-und-Bleistift-Evaluation bei der Erhebung von Lehrerwissen ergänzen (für einen Überblick siehe Kaiser & König, 2019). Im Projekt ProfaLe wurde und wird das Ziel verfolgt, die professionelle Wahrnehmung für einzelne Fächer theoretisch zu konkretisieren, ein Modell der empirischen Erfassung dieser Fähigkeit von Lehrkräften zu entwickeln und Maßnahmen zur Förderung zu erproben.

Im zukünftig eigenständigen Lehramt an Grundschulen sollen drei Fächer aus dem Fächerkanon der Grundschule studiert werden, zwei davon müssen Deutsch und Mathematik sein. Das Studium dieser Kernfächer wird zudem noch genauer auf die Anforderungen der Grundschule ausgerichtet. Deutsch und Mathematik werden mit dieser Reform gestärkt, denn beide Fächer haben eine allgemeine Erschließungsfunktion für jedes andere Schulfach und alle inner- und außerschulischen Lernprozesse. Somit gehören die mit dem Fach Mathematik verbundenen Kompetenzen zum entscheidenden Schlüssel für alle weiteren Lernprozesse und letztlich für die Teilhabe am gesellschaftlichen Leben.

Doch bereits zuvor, unabhängig von der Bedeutung des Fachs Mathematik für die Reform der Lehrerbildung, waren die Projektaktivitäten in diesem Fach ausgeprägt. So sich in der Projektstruktur handlungsfeldübergreifend immer wieder Ansatzpunkte mit mathematikdidaktischem Fokus verankert (vgl. Abb. 1).

Projekt-Entwicklungen

Seit dem Start des Projekts ProfaLe im Sommer 2015 wurden in den vier Handlungsfeldern mehr als 200 innovative Lehrveranstaltungen entwickelt, durchgeführt und evaluiert. So wurden Lehramtsspezifische Übungen und Tutorien angeboten, aber auch im Team-Teaching von Fachwissenschaft und Fachdidaktik gelehrt, um so eine sinnhafte Verbindung zwischen beiden Bereichen für die Studierenden herzustellen. Zusätzlich befassten sich weitere Seminare mit dem Umgang sprachlicher Heterogenität im Mathematikunterricht. Wiederum andere Lehrveranstaltungen widmeten sich dem inklusiven Mathematikunterricht in der Grundschule aus mathematikdidaktischer Perspektive in Form eines im Praktikum integrierten Seminars. Diese Lehrangebote wurden und werden als ProfaLe-

„Professionelles Lehrerhandeln zur Förderung fachlichen Lernens unter sich verändernden gesellschaftlichen Bedingungen“ (ProfaLe, 2015–2023)			
Handlungsfeld 1 „Kooperation zwischen Fächern und Fachdidaktiken“	Handlungsfeld 2 „Sprachlich-kulturelle Heterogenität“	Handlungsfeld 3 „Inklusion“	Handlungsfeld 4 „Phasenübergreifende Kooperation“
6 Fächer/Teilprojekte, u. a. Mathematikdidaktik	6 Fächer/Teilprojekte, u. a. Mathematikdidaktik	7 Fächer/Teilprojekte, u. a. Mathematikdidaktik	6 Fächer/Teilprojekte, u. a. Mathematikdidaktik
	2 mathematikdidaktische Dissertationsprojekte	1 mathematikdidaktisches Dissertationsprojekt	1 mathematikdidaktisches Dissertationsprojekt
Aktivitäten u. a. im Rahmen Hamburgs Reform der Lehrerbildung			
Stärkung der Verknüpfung Fach-Fachdidaktik durch Lehrveranstaltungskonzeptionen in Mathematik z. B. für das neu einzurichtende Grundschullehramt	Verankerung sprachlich-kultureller Heterogenität im Fachunterricht Mathematik durch Grundlagenseminar im Kernpraktikum (Masterphase)	Konzipierung eines Wahlpflichtmoduls im Grundschullehramt (u. a. Mathematik) zum Thema Inklusion	Entwicklung fachspezifischer Aufgabenstellungen (u. a. Mathematik) zur Perspektivverknüpfung von Seminarleiterinnen und Seminarleitern, Mentorinnen und Mentoren sowie Studierenden

Abbildung 1. Mathematikdidaktik in der ProfaLe Projekt-Struktur

Lehrveranstaltungen im Vorlesungsverzeichnis gekennzeichnet, so dass sie von den Studierenden als innovative Veranstaltungen wahrgenommen werden können.

Im Rahmen dieser Lehrveranstaltungen wurden, auf der Mesoebene, Interventionsstudien durchgeführt, um Aussagen über deren innovative Einflüsse zu erhalten. Diese Studien waren und sind Bestandteil diverser *Dissertationsprojekte*, die handlungsfeldbezogene Perspektiven auf mathematikdidaktische Fragestellungen richteten. So wird die Sensibilisierung von Mathematiklehramtsstudierenden für sprachliche Aspekte beim fachlichen Lernen und Lehren untersucht oder das Wissen über die Sprache und Selbstwirksamkeitswahrnehmung angehender Lehrkräfte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer erforscht. Unter dem Aspekt der Inklusion wird der Frage nachgegangen, inwieweit eine Perspektivverschränkung von Mathematikdidaktik und Sonderpädagogik als Beitrag zur Lehrerbildung für einen inklusiven Mathematikunterricht fruchtbar gemacht werden kann. Eine andere Arbeit befasst sich mit der Frage, wie sich die Fähigkeit der professionellen Unterrichtswahrnehmung im Schulpraktikum des Masterstudiums entwickelt. In diesem Kontext wird, wie in anderen Handlungsfeldern auch, videobasiert professionelle Unterrichtswahrnehmung untersucht. Erste Ergebnisse deuten darauf hin, dass die professionelle Unterrichtswahrnehmung von Studierenden durch das Praktikum gestärkt wird.

Um die Projektergebnisse nachhaltig im universitären Kontext und darüber hinaus vorzuhalten, wurde eine *ProfaLe-Materialplattform* eingerichtet, die online Lehr- und Lernmaterialien anbietet, so dass interessierte Hochschuldozentinnen und -dozenten diese für ihre eigenen Lehrveranstaltungen übernehmen oder modifizieren können.

Im Rahmen eines Konzepts für Seminarsitzungen lässt sich etwa anhand einer Textvignette zu bedingten Wahrscheinlichkeiten, bereits vorhandenes Basiswissen zu Sprachregistern und Scaffolding vertiefen, während bei anderem Material die Analyse von zwei realen Schülerfehlern zum Thema Exponentialfunktionen und der daraus resultierende Umgang mit diesen im Vordergrund stehen.

Das *Lehrlabor Lehrerprofessionalisierung* (L3Prof) bietet ergänzend Lehrenden der Universität Hamburg eine andere Möglichkeit, innovative Lehrkonzepte umzusetzen. Mit L3Prof unterstützt die Universitätsleitung die Zielsetzungen von ProfaLe und finanziert Aktivitäten der universitären Lehrerbildung über das Projekt ProfaLe hinaus. In jedem Semester wurden bisher mindestens drei Vorhaben mit jeweils maximal 40 000 Euro gefördert. Die Laufzeit betrug in der Regel zwei Semester. Seit 2016 wurden in sechs Antragsrunden insgesamt 43 Anträge zur Förderung ausgewählt, von denen mittlerweile bereits 35 Projekte abgeschlossen sind. Thematisch sind die Lehrprojekte innerhalb der vier Handlungsfelder von ProfaLe angesiedelt. Für den Bereich Mathematik gab es auf diesem Wege z. B. die Angebote einer integrierten Schreibwerkstatt Mathematik, die Förderung eines Lernzentrums Mathematik oder eine das Fach und die Fachdidaktik integrierende Lehrveranstaltung zu mathematischem Modellieren in der Schule.

Die *Begleitforschung* unterstützt nicht nur die vier Handlungsfelder bei deren Evaluationsprojekten auf der Mesoebene. Um auf der Makroebene die

Wissensentwicklung im Lehramtsstudium zu untersuchen und die Effektivität der innovativen Veranstaltungsformate zu evaluieren, wurde in den Jahren 2016, 2017 und 2018 eine additive Querschnittstudie zur Wissensentwicklung der Studierenden in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik durchgeführt. Die an den online-Umfragen freiwillig teilnehmenden Studierenden befanden sich je nach Studienbeginn am Ende ihres zweiten, vierten oder sechsten Bachelorsemesters bzw. ihres zweiten und vierten Mastersemesters. Die Begleitforschung wird zusammen mit dem Projekt „ZuS" der Universität zu Köln aus der Qualitätsoffensive Lehrerbildung durchgeführt, um Vergleiche dieser beiden universitären Standorte zu ermöglichen und eine gewisse Unabhängigkeit von spezifischen curricularen Strukturen beider Universitären sicherzustellen. Studierende mit den Fächern Deutsch, Englisch, Mathematik bearbeiteten Tests zum fachlichen und fachdidaktischen Wissen und schätzten die behandelten fachdidaktischen Studieninhalte ein (Buchholtz & Doll, 2017; Doll, Buchholtz, Kaiser, König, & Bremerich-Vos, 2018). Die Beteiligung von knapp einem Viertel der Studierenden kann als sehr zufriedenstellend angesehen werden und zeigt die hohe Akzeptanz der Studie in der Universität sowie das große Engagement der beteiligten Lehrenden.

In Varianzanalysen der additiven Querschnittdaten (Studieneingangsphase, Studienmitte, Masterstudium) klärten Abitur, Studienphase und Lehramt signifikante Anteile des mathematikdidaktischen Wissens auf. Ein besseres Abitur hing mit einem höheren mathematikdidaktischen Wissen zusammen. Angehende Lehrkräfte am Gymnasium erzielten in der Tendenz im Bachelor- und Masterstudium höhere Testresultate als angehende Lehrkräfte der Primar-/Sekundarstufe I. Post-hoc Tests ergaben jedoch, dass dieser Unterschied nur im Masterstudium signifikant wurde. Ein analoger Unterschied im mathematischen Wissen zwischen den Studierenden dieser beiden Lehrämter zeigte sich ebenfalls als genereller Trend, der wiederum nur in der Masterphase statistisch abgesichert werden konnte. Das mathematikdidaktische und das mathematische Wissen korrelierten manifest mit $r = .58(p < .001)$.

In die Studie zu den additiven Querschnitten wurden außerdem fächerübergreifend alle Lehramtsstudierenden einbezogen, die bereit waren, ihr pädagogisches Unterrichtswissen testen zu lassen und die behandelten erziehungswissenschaftlichen Studieninhalte einzuschätzen.

Darüber hinaus wird in einer weiteren standortübergreifenden Studie in Kooperation mit der Universität zu Köln die Entwicklung der professionellen Unterrichtswahrnehmung in den Praxisphasen im Masterstudium untersucht. Anhand von Videovignetten zu Unterrichtssequenzen im Fach Mathematik wird in einem Prä-Post-Design die Entwicklung der professionellen Unterrichtswahrnehmung der Studierenden erhoben

Aktuell wird innerhalb der Reform der Lehrerbildung an einer Online-Erhebung mit Studierenden des neuen Grundschullehramts im Bachelorstudium gearbeitet. Pilotiert wird eine Studie bei der Studierende befragt werden sollen, die im Wintersemester 2020/21 das Studium aufnehmen. Ziel ist die Wahrnehmung und Einschätzung der Lerngelegenheiten sowie die Entwicklung der Kompetenzen der Studierenden im neuen Studiengang.

Erreichtes und künftige Herausforderungen

Mit Beginn des Jahres 2019 hat ProfaLe die Aufgabe übernommen, die Hamburger Reform der Lehrerbildung zu unterstützen. So war es in diesem Jahr möglich, die Zusammenarbeit zwischen Fächern und ihren Didaktiken in den Prüfungsordnungen so zu verankern, dass Studierende im Laufe ihres Studiums mindestens eine Veranstaltung besuchen können, die von beiden Seiten kooperativ gestaltet wird. Mit dieser Regelung wird ein Ziel des Projekts ProfaLe hochschulweit dauerhaft umgesetzt. Für das Fach Mathematik wurden dafür Lehrveranstaltungskonzepte entwickelt, die am Beginn des Studiums für das Grundschullehramt Mathematik und Mathematikdidaktik kooperativ vermitteln. Darüber hinaus konnte das Projekt wichtige Impulse geben, die helfen, gesellschaftlich relevantes professionelles Lehrerhandeln im Rahmen des Lehramtsstudiums anzulegen. Neben den innovativen Lehrveranstaltungen ist für den Bereich Mathematik hier nicht nur die außerordentlich hohe Anzahl von Dissertationsprojekten und anderen Forschungsarbeiten im Bereich der Mathematikdidaktik von Bedeutung. Auch die Impulse über die ProfaLe-Materialplattform sowie die ergänzenden Maßnahmen durch das Lehrlabor Lehrerprofessionalisierung trugen und tragen insgesamt dazu bei, die Projektziele in diesem Fach zu repräsentieren.

Ein Fokus wird weiterhin auf dem neu einzurichtenden Grundschullehramt liegen. Innovative Lehrveranstaltungsformate werden insbesondere in den Fächern Deutsch und Mathematik erarbeitet, da diese Fächer im Grundschullehramt eine besondere Rolle spielen. Damit steht auch künftig die Mathematik im Fokus von ProfaLe.

Durch die Qualitätsoffensive Lehrerbildung ergibt sich in Hamburg die Chance, die Implementation neu gestalteter Studiengänge wissenschaftlich zu begleiten und hinsichtlich der Ziele des ProfaLe-Projekts zu evaluieren sowie videobasierte Evaluationsformate zur professionellen Unterrichtswahrnehmung zu berücksichtigen.

Die umfassende Umgestaltung der Lehramtsstudiengänge stellt für die Universität Hamburg eine große Herausforderung dar, bietet dem Projekt ProfaLe jedoch gute Chancen, die Projektziele zu erreichen. Im Gegenzug wird die Reform durch die Ergebnisse von ProfaLe und die noch geplanten Aktivitäten erheblich unterstützt, sodass Reformmaßnahmen und Projektaktivitäten nicht zuletzt in Bezug auf das Fach Mathematik voneinander profitieren.

Literatur

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223*, 3–13.

Blömeke, S., König, J., Busse, A., Suhl, U., Benthien, J., Döhrmann, M., & Kaiser, G. (2014). Von der Lehrerausbildung in den Beruf – Fachbezogenes Wissen als Voraussetzung für Wahrnehmung, Interpretation und Handeln im Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 17*(3), 509–542.

Buchholtz, N., & Doll, J. (2017). Wissenserwerb und fachdidaktische Lerngelegenheiten im Mathematiklehramtsstudium – Erste Erkenntnisse aus der Begleitforschung des Hamburger ProfaLe-Projekts. In Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 143–146). Münster: WTM-Verlag.

Carter, K., Cushing, K., Sabers, D. Stein, P., & Berliner, D. (1988). Expert-novice differences in perceiving and processing visual classroom information. *Journal of Teacher Education, 39*, 25–31.

Doll, J., Buchholtz, N., Kaiser, G., König, J., & Bremerich-Vos, A. (2018). Nutzungsverläufe für fachdidaktische Studieninhalte der Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik im Lehramtsstudium. Die Bedeutung der Lehrämter und der Zusammenhang mit Lehrinnovationen. *Zeitschrift für Pädagogik, 64*(4), 511–532.

Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Döhrmann, M., & Hoth, J. (2017). Professional competencies of (prospective) mathematics teachers – cognitive versus situated approaches. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 161–182, 183–184.

Kaiser, G., & König, J. (2019). Competence measurement in (mathematics) teacher education and beyond: implications for policy. *Higher Education Policy, 32*, 597–615.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Hrsg.) (2011). *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes*. New York: Routledge.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to noticeïn the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244–276.

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg
E-Mail: gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Marius Herzog, Universität Hamburg
E-Mail: marius.herzog@uni-hamburg.de

Kompetenzorientiert Problemlösen Unterrichten lernen

Die Entwicklung eines Theorie-Praxisseminars mit multiperspektivischen Unterrichtsvideos an der Leuphana Universität Lüneburg

Laura Schilling, Dominik Leiß und Timo Ehmke

Als Folge der unbefriedigenden Ergebnisse deutscher Schülerinnen und Schüler im Rahmen der TIMSS (Blum, 2001) und der PISA-Studie im Jahr 2003 (Prenzel et al., 2004) sowie der damit einhergehenden Forderung nach Kompetenzorientierung, wurden als erster Schritt bundesweit verbindliche Bildungsstandards erlassen. In diesen werden neben inhaltlichen Leitideen *allgemeine mathematische Kompetenzen* aufgeführt, welche die Schülerinnen und Schüler in der Regel bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihres Bildungsganges erreicht haben sollten (Kultusministerkonferenz, 2003).

Beim kompetenzorientierten Unterrichten liegt der Fokus, neben dem Fachwissen, daher auch auf den allgemeinen mathematischen Kompetenzen selbst (Reusser, 2014). Das mathematische Problemlösen stellt im Fach Mathematik in der Sekundarstufe I eine der insgesamt sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen dar (Kultusministerkonferenz, 2003). In fachdidaktischen Diskursen gewinnt das Problemlösen immer mehr an Bedeutung. Im Gegensatz dazu nimmt es trotz der Vorgaben in den Bildungsstandards im Mathematikunterricht bisher kaum einen Stellenwert ein (Kuzle

& Gebel, 2016). Das Ziel der Kompetenzorientierung stellt die Erreichung der Bildungsstandards bei allen Schülerinnen und Schüler dar, dabei müssen individuelle Lernprozesse berücksichtigt werden (Reusser, 2014), um die Heterogenität in den Lernprozessen zu berücksichtigen (Trautmann & Wischer, 2011). Zur Bewältigung dieser Herausforderung ist ein Kooperieren von allen beteiligten Akteuren der schulischen Bildung erforderlich. Vor diesem Hintergrund und den bislang im Durchschnitt erreichten Ergebnissen von Schülerinnen und Schülern im Bereich des mathematischen Problemlösens (OECD, 2019), drängt mehr denn je die Notwendigkeit, angehende Lehrkräfte in Bezug auf die Lehre von Problemlösen im Rahmen der universitären Ausbildung gezielt zu fördern und Expertise aufzubauen.

Als weiterer Schritt, um die Qualität im Bildungssystem zu verbessern, wurden Standards für die Lehrkräftebildung verfasst (Terhart, 2002). Das fachdidaktische Wissen ist neben dem allgemeinen pädagogischen Wissen und dem Fachwissen, ein Teil der professionellen Kompetenz von Lehrkräften (Baumert & Kunter, 2006; Shulman, 1986) und damit auch ein zentrales Ziel der Lehrkräfteausbildung. Im Rahmen dessen entsteht der Bedarf an einer engeren Verknüpfung von Theorie und Praxis sowie an der Entwicklung berufspraktischer Fähigkeiten (Oelkers, 1999). Diese Verknüpfung muss sowohl unter fundierten Kriterien als auch immer mit einer Reflexion der Erfahrungen geschehen (Hascher, 2014). Dies bedeutet, dass die Studierenden theoretisches Wissen weder als bloße Fakten noch als bloße Richtlinien für die praktische Anwendung verstehen lernen sollten. Auf diese Weise kann ihr Verständnis von Theorie und Praxis neu verhandelt und erweitert werden (Neuweg, 2011). Bengtsson (1993) betont, dass Distanz zur Praxis notwendig ist, um sie kritisch reflektieren zu können. Obwohl das implizite Wissen der Studierenden anerkannt werden sollte (Shulman, 2004), können Studierende nicht einfach durch Modellierung und oder „learning-by-doing“ lernen, wie guter Unterricht funktioniert. Vielmehr brauchen die Studierenden diese kritische Reflexion über ihre eigenen praktischen Erfahrungen und die Möglichkeit zum Gedankenaustausch durch kooperatives Lernen (Hascher, 2014).

Das Projekt *ZZL-Netzwerk*[1] im Zukunftszentrum Lehrerbildung der Leuphana Universität Lüneburg setzt an dieser Stelle an und zielt auf eine Qualitätsverbesserung der Lehrkräftebildung mit Fokus auf eine verbesserte Theorie-Praxis-Verzahnung ab. Dazu wird auf die Kooperation aller an der Lehrkräftebildung beteiligten Akteure gesetzt. Das Handlungsfeld *Kompetenzorientierter Unterricht* des Forschungs- und Entwicklungsprojekts *ZZL-Netzwerk* stellt sich den Herausforderungen, die mit der Implementation von Kompetenzorientierung in die schulische sowie universitäre Lehre einhergehen. In interdisziplinären Teams, sogenannten Entwicklungsteams, kooperieren Lehrkräfte, Wissenschaftler/-innen und Studierende exemplarisch in fünf Unterrichtsfächern, unter anderem auch im Fach Mathematik und arbeiten im Kontext der Kompetenzorientierung an gemeinsamen Fragestellungen. Im regelmäßigen Austausch zwischen den unterschiedlichen Akteurs- und Expertisegruppen werden neben schulischen Lehrangeboten auch universitäre Lehrformate entwickelt, erprobt und beforscht. In den Teams wird also phasen- und institutionsübergreifendend zusammengearbeitet. Ziele der Entwicklungsteamarbeit sind die gemeinsame Entwicklung, Erprobung, Reflexion sowie Verstetigung von innovativen Projekten in der Lehrkräftebildung. Im Entwicklungsteam des Fachs Mathematik arbeiten seit etwa fünf Jahren sechs praktizierende Mathematiklehrkräfte gemeinsam mit Wissenschaftler/-innen der Leuphana Universität Lüneburg an der Konzeption und Weiterentwicklung eines Seminars.

Aufbauend auf dem beschriebenen Spannungsfeld zwischen Kompetenzorientierung, Heterogenität und Theorie-Praxis-Verzahnung wurde im Rahmen der Entwicklungsteamarbeit ein Seminarkonzept zur Förderung der fachlichen und fachdidaktischen Kompetenzen der Studierenden im Bereich des mathematischen Problemlösens entwickelt. In dem Seminar werden Elemente aus der Theorie und der Praxis kombiniert, um die professionellen Kompetenzen der Studierenden zu erweitern. Die Begleitforschung des Seminars ist darauf ausgelegt, die Entwicklung der fachdidaktischen Kompetenzen der Studierenden zu untersuchen. Dieser Beitrag setzt sich daher mit der Frage auseinander, inwieweit durch das entwickelte Theorie-Praxis-Seminar fachdidaktische Kompetenzen der Studierenden gefördert werden können. Im Folgenden werden das Seminarkonzept sowie eine Evaluationsstudie vorgestellt.

[1] Das ZZL-Netzwerk am namensgebenden Zukunftszentrum Lehrerbildung der Leuphana Universität Lüneburg wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autorenteam.

Theorie-Praxis-Seminarkonzeption

Ziel des Seminars ist es, dass Studierende Theorie und Praxis verbinden, um ihre eigenen didaktischen Fachkompetenzen im Bereich des mathematischen Problemlösens zu entwickeln (Oonk, Verloop, & Gravemeijer, 2015), und die Bedeutung dieser Kompetenzen für die Förderung der individuellen Fachkompetenzen ihrer Schülerinnen und Schüler erkennen (Arnold et al., 2011). Der Fokus liegt bei diesem Seminar auf dem mathematischen Problemlösen, um den beschriebenen Defiziten im Mathematikunterricht entgegenzuwirken und angehende Lehrkräfte diesbezüglich kompetent auszubilden. Konkret lernen die Studierenden, Problemlöseunterricht sach- und fachgerecht zu planen und Lernsituationen insbesondere im Hinblick auf die heterogenen Schülerinnen und Schüler zu gestalten. Das Seminar besteht aus fünf zentralen Elementen:

(1) *Fachliches und fachdidaktisches Wissen.* Die Studierenden erarbeiten sich Grundlagen im mathematischen Problemlösen. Dazu setzen sie sich mit grundlegenden Definitionen, Heuristiken und deren Anwendung auseinander. Ferner eignen sie sich Wissen über das Lehren von Problemlösestrategien (Pólya, 1945) und Merkmalen eines kompetenzorientierten Unterrichts (Reusser, 2014) an. Dies ist für den Schritt (3) erforderlich, nämlich die Erarbeitung eines Lehr-Lern-Settings zum mathematischen Problemlösen für die jeweilige Klasse und die begleitende Lehrkraft.

(2) *Persönliches Kennenlernen von Entwicklungsteamlehrkräften und Studierenden.* Die Studierenden treffen sich außerhalb der Seminarzeit persönlich mit ihrer zugewiesenen Lehrkraft. Auf diese Weise lernen sie die (Lehr-)Person persönlich kennen, sehen erstmals ihren Unterricht und erfahren mehr über die jeweilige Klasse, für die sie das schulische Lehr-Lern-Setting (3) erarbeiten. Diese Treffen erleichtern den späteren Austausch über die Planung und Koordination (Six, Gleich, & Gimmler, 2007). Die Studierenden bekommen auf diese Weise die Möglichkeit, den Klassenraum kennenzulernen und Merkmale der Schülerinnen und Schüler zu erfahren. Diese Aspekte müssen in dem Lehr-Lern-Settings berücksichtigt werden. Im Austausch mit der Lehrkraft können die Studierenden schon erste Ideen für das Lehr-Lern-Setting sammeln.

(3) *Erarbeitung von schulischen Lehr–Lern-Settings.* Als nächsten Schritt erarbeiten die Studierenden konkrete, schulische Lehr-Lern-Settings für die zugeteilte Klasse in kooperativen Seminarsitzungen. Die kompetenzorientierten Lehr–Lern-Settings enthalten eine Problemlöseaufgabe entsprechend der jeweiligen Klassenstufe, die von den Studierenden in Zusammenarbeit mit dem/der Dozent/-in im Seminar ausgewählt wird. Die Studierenden erstellen dazu eine Unterrichtsplanung, anhand derer die begleitende Lehrkraft die Problemlöseaufgabe während einer Unterrichtsstunde in die Praxis umsetzen kann. Die Studierenden entwerfen dazu dann Differenzierungs- und Unterstützungsmaßnahmen bezüglich der Problemlöseaufgabe, um die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler zu berücksichtigen.

(4) *Dialog mit der begleitenden Lehrkraft.* Die Studierenden teilen ihre Planungen mit der begleitenden Lehrkraft. Dieses fördert den Dialog zwischen Universität und Schule. Die sechs Entwicklungsteamlehrkräfte erhalten von den Studierenden Einführungen in die fachlichen und fachdidaktischen Inhalte, die sie für die Umsetzung des Lehr-Lern-Settings im Unterricht benötigen. Die Lehrpersonen haben die Möglichkeit einzugreifen, praktische Tipps zu geben und das entwickelte Lehr-Lern-Setting gemeinsam zu überarbeiten. Das Endprodukt ist auf diese Weise eine theoretisch fundierte, praktisch anwendbare Unterrichtsplanung zu einer kompetenzorientierten Problemlöseaufgabe.

(5) *Beobachtung und Reflexion der Praxis & der Theorie.* Das erarbeitete Lehr-Lern-Setting wird von der erfahrenen Lehrkraft und nicht durch die Studierenden durchgeführt, weil die Lehrkraft mit der Klasse vertraut ist, ihre besonderen pädagogischen Herausforderungen versteht und über das Fachwissen verfügt, diese schnell zu lösen. Auf diese Weise kann der Schwerpunkt des Unterrichts mehr auf den Inhalt und den damit verbundenen als auf pädagogische Probleme gelegt werden. Das bedeutet, dass die Studierenden gezielter beobachten können und eine kritische Reflexion ermöglicht wird (Bengtsson, 1993). Um den Unterricht aus einem Seminarraum in der Universität beobachten zu können, werden die Klassenräume und der Seminarraum an der Universität über ein bidirektionales Videokonferenzsystem miteinander verbunden (Drexhage, Schmidt, & Ehmke, 2016). Die Studierenden analysieren und reflektieren, wie die von ihnen entwickelten Unterrichtsplanung umgesetzt wird. Darüber hinaus gibt die Lehrkraft nach dem Unterricht Feedback an ihre Studierendengruppe bezüglich des geplanten Lehr-Lern-Settings. Diese gemeinsame Reflexion kann besonders hilfreich sein, um den Studierenden ein besseres Verständnis für den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler zu vermitteln (Kleinknecht & Gröschner, 2016).

Erste Evaluationsergebnisse

Das Seminar wurde über zwei Jahre hinweg jedes Semester mit einem Leistungstest im Rahmen einer Evaluationsstudie begleitet. Der Fokus dieses Tests liegt auf der fachdidaktischen Kompetenz im Bereich des mathematischen Problemlösens. Die Evaluationsstudie besteht aus einem Prä-Post-Kontrollgruppen-Design. Die Interventionsgruppe besteht aus 57 Studierenden, die das einsemestrige Praxisseminar während vier Semestern besuchten. Die Studierenden der Kontrollgruppe ($n = 40$) besuchten eine andere kompetenzorientierte Fachvorlesung im Fach Mathematik. Alle Studierenden waren zum Zeitpunkt der Studie im selben Semester. Die Entwicklungsteamlehrkräfte ($n = 6$), die an keiner Intervention teilgenommen haben, bilden eine weitere Vergleichsgruppe und haben an dem Test nur zu einem Messzeitpunkt teilgenommen.

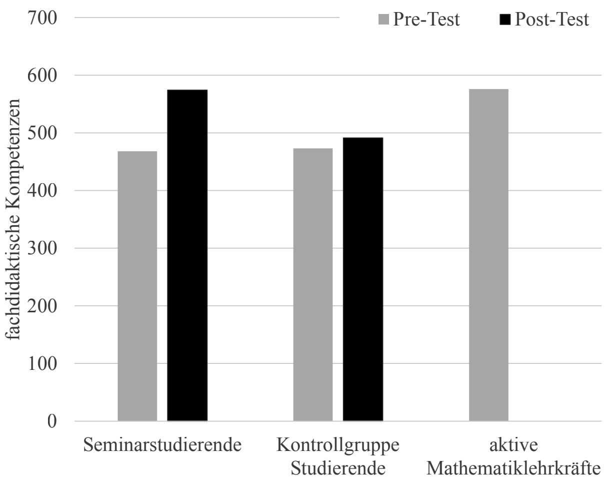


Abbildung 1. Fachdidaktische Kompetenzen ($MW = 500$ / $SD = 100$)

Bezüglich fachdidaktischer Kompetenzen im Bereich des mathematischen Problemlösens zeigen sich zu Semesterbeginn (Pre-Test) keine signifikanten Unterschiede zwischen den drei Gruppen (siehe Abb. 1). In der Abbildung sind die kumulierten Ergebnisse der Seminarstudierenden über die vier verschiedenen Semester dargestellt. Zum Semesterende (Post-Test) sind die Kompetenzen der Seminarstudierenden statistisch signifikant höher als die fachdidaktischen Kompetenzen der Kontrollgruppe ($p < .05$). Die Effektgröße d variiert in den verschiedenen Semestern des Seminars zwischen 0.8 und 1.2. Es fällt insbesondere auf, dass die fachdidaktischen Kompetenzen der Studierenden nach der Seminarteilnahme in etwa ebenso ausgeprägt sind wie die der Mathematiklehrkräfte des Entwicklungsteams.

Die Evaluation des Seminars hinsichtlich der relevanten fachdidaktischen Kompetenzen der Studierenden zeigt, dass sich die fachdidaktischen Kompetenzen signifikant steigerten. Diese Ergebnisse sprechen für eine kompetenzfördernde Seminarkonzeption. Bei der detaillierten, qualitativen Betrachtung der Ergebnisse zeigen sich allerdings Defizite bei den diagnostischen Kompetenzen. Nur 10 % der Studierenden im Seminar können Schüler/-innenlösungen von anspruchsvollen Problemlöseaufgaben analysieren und diagnostizieren, während 73,5 % fachdidaktisches Wissen abrufen können.

In einer vorangegangen Seminarevaluation wurden ferner die Einstellungen zu Theorie und Praxis in der Lehrkräftebildung untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass den Studierenden zwar der Bezug zur Praxis etwas wichtiger ist, ebenso der Bezug zu Theorie aber als wichtig im Lehramtsstudium von ihnen angesehen wird.

Dieses und die Studienergebnisse bestärken das Seminarkonzept als lernförderliches Instrument in der Lehrpersonenbildung und stellen eine Ermutigung zur Konzeption von Seminaren dar, die Theorie und Praxis miteinander verzahnen und die professionellen Kompetenzen von angehenden und aktiven Lehrkräften fördern. Die Studierenden halten Theorie und Praxis für notwendig, um das jeweils andere zu verstehen. Dies zeigt, dass dieses Theorie-Praxis-Seminar ein unabdingbares Merkmal, nämlich diese Theorie-Praxis-Verzahnung, aufweist, welches den Studierenden ein optimales Lernen ermöglicht. Dieses Seminarkonzept bietet neben der Theorie-Praxis-Verzahnung offenbar, wie die Ergebnisse zeigen, einen guten Weg zur Förderung der fachdidaktischen Kompetenzen.

Die Ergebnisse zeigen jedoch auch Defizite bei den diagnostischen Kompetenzen auf. Weinert, Schrader und Helmke (1990) betonen, dass die diagnostische Kompetenz einer der Schlüsselfaktoren der Lehrkompetenz ist. Die Studierenden werden in ihrem zukünftigen Leben als Lehrpersonen fachdidaktische und diagnostische Kompetenzen benötigen.

Weiterentwicklung des Seminars: Multiperspektivische Videos als didaktisches Tool zur Auseinandersetzung mit Heterogenität

Aufbauend auf den Evaluationsergebnissen wird als nächster Schritt das Seminar weiterentwickelt und multiperspektivische Videoelemente werden integriert, um insbesondere vermehrt Auseinandersetzung mit Heterogenität in den Blick zu nehmen. Demnach wird das Seminar mehr Elemente umfassen, die Theorie und Praxis noch intensiver im Kontext der Fachdidaktik und insbesondere der Diagnostik verbinden. Fokussiert wird nun noch mehr die Heterogenität im Klassenraum. Die Studierenden sollen in die Lage versetzt werden, auch die schwierigen Aufgaben der Prozessdiagnostik erfolgreich bewältigen zu können. Um insbesondere die diagnostischen Kompetenzen noch stärker als bisher zu fördern, wird das hier vorgestellte Seminarkonzept durch videobasierte Lernelemente ergänzt. Digitale Elemente können insbesondere für die Verzahnung von Theorie und Praxis hilfreich sein (Oonk, 2009). Im Rahmen des Projekts *ZZL-Netzwerk* wurden multiperspektivische Unterrichtsvideos aufgezeichnet und sollen im Seminar verwendet werden. Multiperspektivität bedeutet in diesem Zusammenhang, dass neben der Lehrkraft, jeder Schüler bzw. jede Schülerin aus mindestens einer Kameraperspektive während des Unterrichts erfasst wird. Die vielfältigen heterogenen Schüler/-innenlösungsprozesse können mit diesen Videos im Seminar sichtbar gemacht werden (Paulicke, Schmidt, & Ehmke, 2015).

Aus diesen Überlegungen heraus wird das Seminarziel (vgl. Theorie-Praxis-Seminarkonzeption) erweitert um eine theoretische Auseinandersetzung mit der Diagnose von Schwierigkeiten bei Problemlöseaufgaben und adaptiver Lernunterstützung, sowie die Reflexion diesbezüglicher Praxisbeispiele und die Gestaltung sowie Reflexion von Praxiselementen bezüglich adaptiver Lernunterstützung. Um dementsprechend die diagnostischen Kompetenzen im Bereich des mathematischen Problemlösens sowie das Handlungswissen bezüglicher adaptiver Lernunterstützung bei den Studierenden intensiver zu fördern, wird die Seminarstruktur in vier der fünf aufgeführten, zentralen Elemente (vgl. Theorie-Praxis-Seminarkonzeption) um die im Folgenden beschriebenen Aspekte ergänzt:

Das *fachliche und fachdidaktische Wissen* (1) wird neben dem fachdidaktischen Wissen und dem Fachwissen im Bereich des mathematischen Problemlösens, um grundlegendes Wissen zu Diagnostik und adaptiver Lehrkompetenz, allgemein pädagogisch und fachspezifisch, erweitert. Dieses Wissen benötigen die Studierenden, um neben der Aufgabe und der Vorbereitung, auch im Unterricht adaptiv beim Problemlösen unterstützen zu können. Die adaptive Lernunterstützung ist bedeutsam, um die Schülerinnen und Schüler im Sinne eines kompetenzorientierten Unterrichts zu unterstützen (Reusser, 2014). Nach Schwarz, Wissmach & Kaiser (2008) müssen für die diagnostische Kompetenz die drei Wissensbereiche pädagogisches, fachdidaktisches und fachliches Wissen zusammengeführt werden. In diesem Seminar erfolgt exemplarisch eine Verzahnung dieser drei Wissensbereiche am Beispiel des mathematischen Problemlösens.

Als besonderes Element des Seminars werden videobasierte Lernelemente in dieser Seminarphase integriert. Um den Studierenden die Bedeutung und auch die Komplexität von Diagnostik und adaptiver Lernunterstützung zu veranschaulichen, werden die Studierenden als Seminareinstieg mit der Komplexität unterrichtlicher Praxis im kompetenzorientierten Mathematikunterricht konfrontiert. Hierzu wird eine ausgewählte Unterrichtsvideosequenz genutzt. In dieser Sequenz bearbeiten vier Schüler/-innen eine Problemlöseaufgabe. Die Schüler/-innen stellen der Lehrkraft eine Frage bezüglich ihrer Aufgabenbearbeitung. Die Lehrkraft ist dabei nur einen kurzen Moment am Tisch und hat nur einen kurzen Einblick in den Lösungsprozess, als sie den Schüler/-innen die Frage beantworten muss. Anhand der Diskrepanz zwischen der Komplexität der praktischen Unterrichtssituation und dem theoretischen fachlichen und fachdidaktischen Anspruch wird die Bedeutung der Seminarinhalte verdeutlicht.

Um das Wissen über Diagnostik und Lernunterstützung anzuwenden, werden weitere Unterrichtsvideosequenzen genutzt, anhand derer die Studierenden Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern diagnostizieren und adaptive Lernunterstützungsmaßnahmen entwickeln. Anhand der multiperspektivischen Unterrichtsvideos können die verschiedenen Lösungsprozesse sichtbar gemacht werden und damit auch die volle Komplexität der Heterogenität, mit der die Lehrkraft im Unterricht konfrontiert wird.

In der *Erarbeitung von schulischen Lehr-Lern-Settings* (3) wird der Fokus nun mehr auf die fachliche und fachdidaktische Auseinandersetzung der Studierenden mit dem Lerninhalt gelegt, als Basis für situative Diagnostik und Lernunterstützung. Um ausreichend Zeit hierfür zu schaffen und um die Möglichkeit des Austausches im Seminar zu gewährleisten, wird der Lerninhalt durch die Lehrkräfte und Wissenschaftler/innen in Form einer konkreten Problemlöseaufgabe festgelegt. Die Aufgabe bereiten die Studierenden in einer fachdidaktischen Sachanalyse umfassend für den Einsatz vor. In dieser Analyse wird die Problemlöseaufgabe mit allen Schwierigkeiten, Lösungswegen, Grund- und Fehlvorstellungen sowie möglichen Unterstützungsmaßnahmen vorbereitet (Barzel & Holzäpfel, 2010; Jaschke, 2010), welches die fachliche und fachdidaktische Grundlage für situative Diagnostik und Lernunterstützung bildet. Um sich exemplarisch auf die Gestaltung einen lernförderlichen Einsatz einer Problemlöseaufgabe vorzubereiten, liegt der Schwerpunkt in der Planung des Lehr-Lern-Settings also vielmehr auf theoretisch fundierten Vorüberlegungen zu den individuellen Lernprozessen und Schwierigkeiten.

Dementsprechend verändert sich der Fokus im *Dialog mit der begleitenden Lehrkraft* (4) von der detaillierten Unterrichtsplanung hin zu der fachdidaktischen Sachanalyse und möglichen Schwierigkeiten sowie (adaptiven) Lernunterstützungsmaßnahmen im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler.

Folglich liegt der Schwerpunkt bei der *Beobachtung und Reflexion der Praxis und der Theorie* (5) nun auch auf der situativen Diagnostik und Lernunterstützung. Der Einsatz des Lehr-Lern-Settings erfolgt weiterhin durch die Lehrkraft. Die Studierenden bekommen auf diese Weise die Möglichkeit, ihren fokussierten Blick auf einen Gruppentisch zu legen und diesen bei der Bearbeitung mit allen Schwierigkeiten zu beobachten. Insbesondere die Lernunterstützung durch die Lehrkraft im Rahmen des Problemlöseprozesses kann in dieser Weise von den Studierenden beobachtet und reflektiert werden. Ferner profitieren auch die Lehrkräfte, die der gesamten Heterogenität des Klassenraums ausgesetzt sind, durch die anschließende Reflexion mit den Studierenden über die Lernprozesse und die erfolgten Lernunterstützungen einzelner Lerngruppen.

Ausblick

Das durch die Evaluation bestärkte Seminarkonzept ergänzt mit den multiperspektivischen Lernelementen hat als Ziel die Studierenden auf einen kompetenzorientierten Problemlöseunterricht mit dem Fokus auf Heterogenität vorzubereiten. Die Schülerinnen und Schüler sollen möglichst optimal bezüglich ihrer individuellen Problemlösekompetenzen unterstützt werden. Das Seminar wird im Sommersemester 2021 erneut eingesetzt und von weiteren Studien begleitet werden, um neben dem fachlichen und fachdidaktischen Wissen auch die diagnostischen Kompetenzen, das Handlungswissen bezüglich adaptiver Lernunterstützung und die Einstellung sowie das Wissen zum Umgang mit Heterogenität zu untersuchen. Auch wenn es nun noch das weiterentwickelte Seminar zu untersuchen gilt, fördert die Entwicklung dieser Seminarkonzeption die Verzahnung von Theorie und Praxis, die für Lehramtsstudierende notwendig ist, um erfolgreich auf die Herausforderungen einer kompetenz- und zukunftsorientierten Schulbildung zu reagieren.

Literatur

Arnold, K.-H., Hascher, T., Messner, R., Niggli, A., Patry, J.-L., & Rahm, S. (2011). *Empowerment durch Schulpraktika. Perspektiven wechseln in der Lehrerbildung.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2010). Leitfragen zur Unterrichtsplanung. Mathematik Lehren, (158), 4–9.

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *9*(4), 469–520. doi:10.1007/s11618-006-0165-2

Bengtsson, J. (1993). Theory and practice: Two fundamental categories in the philosophy of teacher education. *Educational Review*, *45*(3), 205–211.

Blum, W. (2001). Was folgt aus TIMSS für Mathematikunterricht und Mathematiklehrerausbildung? In Bundesministerium für Bildung und Forschung (Ed.), *TIMSS: Impulse für Schule und Unterricht* (pp. 75–87). Bonn: BMBF.

Drexhage, J., Schmidt, D. L. T., & Ehmke, T. (2016). The Connected Classroom: Using Video Conferencing Technology to Enhance Teacher Training. *Reflecting Education*, *10*(1), 70–88.

Hascher, T. (2014). Vorwort. In *Das Praxissemester im Lehramtsstudium: Forschen, Unterrichten, Reflektieren* (pp. 11–13). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L., & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe. Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit.* Paderborn: Waxmann.

Jaschke, T. (2010). Von der klassischen zur didaktischen Sachanalyse. *Mathematik Lehren*, *158*, 10–13.

Kleinknecht, M., & Gröschner, A. (2016). Fostering preservice teachers' noticing with structured video feedback: Results of an online- and video-based intervention study. *Teaching and Teacher Education*, *59*, 45–56.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Beschluss vom 4. 12. 2003.

Kuzle, A., & Gebel, I. (2016). Development of Materials for Problem Solving Instruction in the Context of Lessons for Promoting and Improving Specific Mathematical Competences Using Design Based Research. In T. Fritzlar, D. Assmuss, K. Bräuning, A. Kuzle, & B. Rott (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 2015 Joint Conference of ProMath and the GDM Working Group on Problem Solving. Ars Inveniendi et Dejudicandi 6* (pp. 159–172). Münster: WTM-Verlag.

Neuweg, G. H. (2011). Distanz und Einlassung – Skeptische Anmerkungen zum Ideal einer „Theorie-Praxis-Integration" in der Lehrerbildung. *Erziehungswissenschaften*, *22*(43), 33–45.

OECD. (2019). *Pisa 2018 Ergebnisse (Band 1): Was Schülerinnen und Schüler wissen und können*. https://doi.org/10.31244/9783830991007

Oelkers, J. (1999). Studium als Praktikum? Illusionen und. In F.-O. Radtke (Ed.), *Lehrerbildung an der Universität. Zur Wissensbasis pädagogischer Professionalität* (pp. 61–76). Frankfurt am Main.

Oonk, W. (2009). *Theory-enriched practical knowledge in mathematics teacher education*. Leiden: ICLON.

Oonk, W., Verloop, N., & Gravemeijer, K. P. . (2015). Enriching practical knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 559–598.

Paulicke, P., Schmidt, T., & Ehmke, T. (2015). „Hier werden Parallelwelten im Unterricht sichtbar". Multiperspektivische Unterrichtsvideos in der universitären LehrerInnenausbildung. *Seminar*, *3*, 15–27.

Pólya, G. (1945). *How to Solve it. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., ..., Schiefele, U. (2004). *PISA 2003 – Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann.

Reusser, K. (2014). Kompetenzorientierung als Leitbegriff der Didaktik. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 32*(3), 325–339.

Schwarz, B., Wissmach, B., & Kaiser, G. (2008). "Last curves not quite correct": Diagnostic competences of future teachers with regard to modelling and graphical representations. *ZDM – International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 777–790. doi:10.1007/s11858-008-0158-0

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–31.

Shulman, L. S. (2004). *The wisdom of practice: Essays on higher education* (P. Hutchings, ed.). San Francisco: Jossey-Bass, Inc.

Six, U., Gleich, U., & Gimmler, R. (2007). Kommunikationspsychologie. In U. Six, U. Gleich, & R. Gimmler (Eds.), *Kommunikationspsychologie – Medienpsychologie. Lehrbuch* (pp. 21–50). Weinheim: Beltz.

Terhart, E. (2002). *Standards für die Lehrerbildung: Eine Expertise für die Kultusministerkonferenz*. Münster: Universität Münster, Zentrale Koordination Lehrerausbildung.

Trautmann, M., & Wischer, B. (2011). *Heterogenität in der Schule. Eine kritische Einführung.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Laura Schilling, Leuphana Universität Lüneburg
E-Mail: laura.schilling@leuphana.de

Dominik Leiss, Leuphana Universität Lüneburg
E-Mail: dominik.leiss@leuphana.de

Timo Ehmke, Leuphana Universität Lüneburg
E-Mail: timo.ehmke@leuphana.de

Projekt SPIES zur Professionalisierung der Lehrerbildung Mathematik

Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Potsdam

Karen Reitz-Koncebovski, Jolanda Hermanns, Ulrich Kortenkamp und Ana Kuzle

Professionalisierung – Schulpraktische Studien – Inklusion (PSI-Potsdam). Unter dieser Überschrift startete im Frühjahr 2015 an der Universität Potsdam das Projekt der Qualitätsoffensive Lehrerbildung. Die organisatorische Verwaltung des Projektes ist beim neu gegründeten Zentrum für Lehrerbildung und Bildungsforschung (ZeLB) verortet. Die drei Schwerpunkte wurden in der zweiten Projektphase, die am 1. Januar 2019 startete, weitergeführt. Die schwerpunktübergreifenden Handlungsfelder (Medienbildung, Internationalisierung, Campusschulen sowie Promotionsprogramm) wurden in der zweiten Projektphase am ZeLB verstetigt.

In der ersten Förderphase beschäftigten sich die drei Schwerpunkte mit den folgenden Inhalten: Im Schwerpunkt „Professionalisierung" sollte das Professionswissen von Lehramtsstudierenden durch Integration von fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Studienanteilen verbessert werden. Hierzu wurde u. a. der professionsspezifische Bereich des Fachwissens bestimmt und als *erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext* als fachübergreifendes Konstrukt (beteiligte Fächer: Biologie, Geschichte, Mathematik, Physik und Wirtschaft-Arbeit-Technik) modelliert (Woehlecke & Massolt, 2017). Im Schwerpunkt „Schulpraktische Studien" sollte der Kompetenzerwerb bei der Integration schulpraktischer Elemente gestärkt werden. Hierzu wurden sowohl eine Längsschnitt- als auch eine Querschnittsstudie aller Praktika im Bachelorstudium durchgeführt. Darüber hinaus stand die Reflexion von Studierenden in Praxisphasen im Fokus. Im Schwerpunkt „Inklusion und Heterogenität" wurde das Wissen zu Inklusion und Heterogenität der Studierenden vertieft. Im Teilprojekt „Sprache im Fach" wurde eine Handreichung für fachdidaktische Lehrveranstaltungen entwickelt.

In der zweiten Projektphase wurden alle drei Schwerpunkte weitergeführt. Es fand jedoch eine inhaltliche Fokussierung statt. Im Schwerpunkt „Schulpraktische Studien" steht der Ausbau der Reflexionskompetenz von Studierenden in Praxisphasen im Blickfeld. Die allgemeine Kompetenzentwicklung über die schulpraktischen Studien hinweg wird jetzt in den Praktika des Masterstudiums weiter untersucht. Im Schwerpunkt „Inklusion und

Heterogenität" erfolgen eine Fokussierung auf diagnostischen Kompetenzen bei Studierenden des Lehramts sowie Lehrkräfte der zweiten und dritten Phase. Im Schwerpunkt „Professionalisierung" wird das entwickelte Modell als Grundlage für die Gestaltung fachwissenschaftlicher Lerngelegenheiten in unterschiedlichen Lehrveranstaltungsformaten genutzt. In der zweiten Projektphase sind neben der Mathematik auch die Fächer Chemie, Deutsch und Englisch beteiligt.

Professionalisierung in der Lehrerbildung Mathematik

Das Teilprojekt Mathematik im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Potsdam ist dem Schwerpunkt „Professionalisierung" zugeordnet. Grundlegendes Ziel ist, die mathematisch-fachwissenschaftliche Ausbildung für die Lehramtsstudierenden weiterzuentwickeln, mit dem Fokus einerseits auf das berufsspezifische Fachwissen und den Anschluss an die Schulmathematik, andererseits auf eine stärkere Verzahnung mit der fachdidaktischen Ausbildung.

Projektphase 1: Fokus auf das berufsspezifische Fachwissen in Lehrveranstaltungen

In der ersten Projektphase wurden zwei fachwissenschaftliche Lehrveranstaltungen im Studiengang für das Lehramt Primarstufe mit Fach Mathematik bzw. mit Schwerpunkt Inklusionspädagogik (Studienordnungen 2013), nämlich „Elemente der Arithmetik" und „Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik", analysiert und inhaltlich sowie (hochschul-)didaktisch weiterentwickelt und dabei *Gestaltungsprinzipien* herausgearbeitet, die für das Projektziel förderlich und auf weitere fachwissenschaftliche Lehrveranstaltungen, auch für andere Lehrämter, übertragbar sein sollten (Reitz-Koncebovski, Kortenkamp & Goral, 2018).

Das Teilprojekt Mathematik startete mit der normativen Frage, welches fachwissenschaftliche Niveau Lehramtsstudierende während ihres Studiums erreichen sollten. Mithilfe von curricularen Analysen und Expertenbefragungen sollte eine Niveaustufe mathematischen Fachwissens zwischen dem schulischen Fachwissen einerseits und dem universitären Fachwissen, wie es ein Mathematikstudium ohne Lehramtsbezug anstrebt, andererseits identifiziert und validiert werden, um anschließend als Grundlage zur Neu- oder Umgestaltung von Lehrveranstaltungen genutzt zu werden. Sehr bald stellte sich heraus, dass anstelle einer Niveaustufe viel eher der *Charakter* des Professionswissens angehender Lehrpersonen expliziert werden sollte. Zudem wurde klar, dass das berufsspezifische Fachwissen unabhängig von den jeweiligen Schulstufen, für die verschiedene Lehramtsstudiengänge vorbereiten, betrachtet werden kann. Vielmehr geht es darum, einen Wissensbereich zu identifizieren, der das universitär vermittelte mathematische Fachwissen professionsspezifisch auf den schulischen Kontext bezieht, das heißt, das universitäre Fachwissen zum einen retrospektiv an das Schulwissen der Studierenden anbindet, zum anderen prospektiv für die zukünftige Praxis als Mathematiklehrkraft nutzbar macht.

Einen solchen schulrelevanten Fachwissensbereich haben Heinze, Dreher, Lindmeier und Niemand (2016) als *school-related content knowledge* (SRCK) theoretisch begründet und zudem als empirisch unterscheidbar identifiziert. In der interdisziplinären Zusammenarbeit im Potsdamer QLB-Projekt wurden überdies gemeinsame fachübergreifende Charakteristika eines professionsspezifischen Fachwissens herausgearbeitet und als *erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext* (Woehlecke et al., 2017) modelliert. Das *erweiterte Fachwissen* ist eine Art Überblickswissen, welches das Wissen um übergeordnete Konzepte des Fachs, das Wissen um fachliche Arbeitsweisen und Erkenntniswege sowie dasjenige Wissen einschließt, das eine Lehrperson benötigt, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren. Das *erweiterte Fachwissen* fungiert somit als Brücke zwischen dem universitären Fachwissen und dem fachdidaktischen Wissen.

In den fachwissenschaftlichen Mathematik-Lehrveranstaltungen, die im Rahmen des Projekts in mehreren Durchgängen weiterentwickelt wurden, sollte dieses berufsspezifische Fachwissen konkretisiert und als Kern der fachwissenschaftlichen Ausbildung gelehrt und zugleich Anknüpfungspunkte zur Fachdidaktik Mathematik geschaffen werden. In der Konzeption der Lehrveranstaltungen kristallisierten sich zunächst vier Gestaltungsprinzipien heraus: (1) fundamentale Ideen verfolgen, vertikal durch das Curriculum vom Elementarbereich bis zur Hochschule und horizontal durch verschiedene Gebiete der Mathematik, (2) das Wissen über Konzepte und Zusammenhänge explizit machen, (3) Studierende in die Lernsituation von Schüler/-innen bringen und sie anregen, ihre Erfahrungen in Hinblick auf die zukünftige Tätigkeit als Lehrkräfte zu reflektieren, und (4) das Prozesshafte an der Mathematik verdeutlichen (Reitz-Koncebovski, Kortenkamp & Goral, 2018).

Die Lehrveranstaltungen wurden vielfältig evaluiert und weiterentwickelt. Hinsichtlich der Wahrnehmung der *Studierenden* wurde festgestellt, inwieweit das Ziel, ihnen die Sinnhaftigkeit des fachwissenschaftlichen Studiums für den zukünftigen Beruf einsichtig zu machen, erreicht wurde. Interviews mit *Lehrenden* gingen der Frage nach, welches mathematische Fachwissen Lehramtsstudierende benötigen. Die Evaluationsinstrumente wurden auf ihre Tauglichkeit überprüft und entsprechend weiterentwickelt.

Zusätzlich wurden weitreichende curriculare und strukturelle Maßnahmen angestoßen, die auf eine Fokussierung des berufsspezifischen Fachwissens in der fachwissenschaftlichen Ausbildung und eine stärkere Verzahnung mit der Fachdidaktik zielen. Infolgedessen wurden in den Studiengängen Mathematik für das Primarstufenlehramt neue Lehrveranstaltungen eingerichtet und in den Studienordnungen ab 2018 verankert. Eine neu konzipierte Studienordnung für das Lehramt der Sekundarstufe sowie die neu eingerichteten Studiengänge für das Lehramt Mathematik-Physik und für das Fach Förderpädagogik Mathematik greifen die Überlegungen und Ergebnisse ab dem Wintersemester 2020 ebenfalls auf.

Projektphase 2: SPIES

Das mathematikspezifische Projekt der zweiten Phase des Potsdamer QLB-Projekts (seit 2019) trägt den Namen **SPIES-M – Spi**ralcurriculum und **E**rweitertes **S**chulwissen im Fach **M**athematik.
Im Fokus stehen:

1. die Bereicherung des Curriculums fachwissenschaftlicher Lehrveranstaltungen um das *erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext*, wodurch das Spiralcurriculum des schulischen Mathematikunterrichts in die universitären Lehrveranstaltungen fortgesetzt wird,
2. die Neuentwicklung von Lehrveranstaltungen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik verzahnen, zu allen großen Inhaltsgebieten der Mathematik,
3. deren Implementierung in neuen Studiengängen für die Lehramtsbildung Mathematik sowohl für die Primarstufe als auch für die Sekundarstufe,
4. Begleitforschungen im Design-Based-Research-Ansatz, wobei insbesondere alle neuen Lehrveranstaltungen durch Projektmitarbeiter als „spies“ (engl.: Spione) besucht und in kollegialer Supervision evaluiert werden. Dies impliziert die Entwicklung von Testinstrumenten, die den Effekt der neuentwickelten Lehrveranstaltungen messen, und dabei speziell den Zuwachs des Professionswissens, d. h. des *erweiterten Fachwissens* sowie des verknüpften fach- und fachdidaktischen Wissens bei den Studierenden, fokussieren.

Das Projekt SPIES führt die Arbeit der ersten Projektphase nahtlos fort. Die in der ersten Phase als Pilot entwickelten Lehrveranstaltungen „Elemente der Arithmetik“ und „Ausgewählte Kapitel der Elementarmathematik“ bildeten die fachwissenschaftliche Basis für die erste Neuentwicklung, nämlich die Konzeption der Lehrveranstaltungen „Arithmetik und ihre Didaktik I“ und „Arithmetik und ihre Didaktik II“, die im Wintersemester 2018/19 und Sommersemester 2019 zum ersten Mal durchgeführt wurden. Auf Grundlage von Beobachtungen in diesen Lehrveranstaltungen und Diskussionen mit den beteiligten Dozierenden im Sinne einer kollegialen Supervision wurden die in der ersten Phase für fachwissenschaftliche Lehrveranstaltungen entwickelten *Gestaltungsprinzipien* ausgeschärft, überarbeitet und erweitert um Prinzipien, die die Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik sowie das fachdidaktische Wissen betreffen.

Die überarbeiteten *Gestaltungsprinzipien* wiederum wurden und werden als Bezugspunkt für die Konzeption neuer Lehrveranstaltungen genutzt, insbesondere der in den Studienordnungen 2018 für die Primarstufenlehrämter verankerten Bachelor-Lehrveranstaltungen „Geometrie und ihre Didaktik I“ und „Geometrie und ihre Didaktik II“ sowie der Master-Lehrveranstaltungen „Stochastik und ihre Didaktik“ sowie „Algebra und ihre Didaktik“, die im Wintersemester 2019/20 bzw. Sommersemester 2020 erstmals realisiert werden.

Gestaltungsprinzipien für Lehrveranstaltungen
Den Kern der fachwissenschaftlichen Ausbildung durch die neukonzipierten Lehrveranstaltungen stellt das *erweiterte Fachwissen* dar, verstanden als ein schulrelevantes Überblickswissen, das für die Auswahl und Strukturierung der hochschulmathematischen Inhalte leitend ist. Ziel ist, dass die Studierenden auf der Basis des schulrelevanten Fachwissens lernen, fachdidaktisches Wissen aus ihrem mathematischen Wissen zu generieren. Leitend sind dabei didaktische Prinzipien, insbesondere Grundvorstellungen mathematischer Inhalte (vom Hofe, 1995), mithilfe derer die Studierenden erschließen können, wie mathematische Inhalte didaktisch vermittelbar werden.

Charakteristisch für die neuen Lehrveranstaltungen ist, dass sie sowohl in der Fachwissenschaft wie in der Fachdidaktik auf das Wesentliche fokussieren. In fachwissenschaftlich-inhaltlicher Hinsicht liegt der Fokus auf fundamentalen Ideen der Mathematik, die horizontal durch verschiedene Gebiete der Mathematik und vertikal durch das Curriculum vom Elementarbereich bis zur Hochschule verfolgt werden und dadurch das Spiralprinzip von der Schule bis zur Hochschule realisieren (Kortenkamp & Goral, 2018; Schwill, 1995). In fachwissenschaftlich-prozessbezogener Hinsicht liegt der Fokus auf typischen mathematischen Arbeitsweisen und Erkenntniswegen (Müller, Wittmann & Steinbring, 2003). In fachdidaktischer Hinsicht liegt der Fokus auf Grundprinzipien der Mathematikdidaktik wie Grundvorstellungen (vom

Hofe, 1995), Darstellungswechsel oder Lebensweltbezug sowie auf der Realisierung dieser didaktischen Prinzipien in den Lehrveranstaltungen selbst. Letzteres geschieht einerseits methodisch im Sinne des „Pädagogischen Doppeldeckers" (Wahl, 2002), andererseits durch die Schaffung geeigneter Lernumgebungen, die die Studierenden in die Lernsituation von Schüler/-innen bringen und sie dadurch anregen Lernhürden zu erkennen, Lernprozesse zu reflektieren und fachliche Inhalte auf höherer Ebene zu verstehen (Kortenkamp & Goral, 2018).

Entsprechend wurden fünf Gestaltungsprinzipien formuliert: (1) fundamentale Ideen der Mathematik verfolgen, (2) Mathematik als Handlung erfahrbar machen, (3) Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen, (4) pädagogischer Doppeldecker, (5) Lernprozesse von Schüler/-innen erfahrbar machen — und zusätzlich ein Querschnittsprinzip, das sich auf jedes dieser fünf Gestaltungsprinzipien oder aber auf die Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik beziehen kann: „auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen". Letzteres hat sich im Zuge der Beobachtungen und deren Auswertung als zunehmend bedeutsam herausgestellt.

spies@work: Beobachtung und kollegiale Reflexion

Auf der Grundlage der *Gestaltungsprinzipien* wurde neben einer Handreichung zur Konzeption von Lehrveranstaltungen für die Dozierenden ein Beobachtungsinstrument entwickelt.

Kernstück des Projekts SPIES stellen Beobachtungen in den neuentwickelten Lehrveranstaltungen mit anschließender kollegialer Reflexion dar. Die ersten Beobachtungen wurden im Wintersemester 2019/20 in den Lehrveranstaltungen „Arithmetik und ihre Didaktik 1" und „Stochastik und ihre Didaktik" durch von der Projektmitarbeiterin geschulte wissenschaftliche Hilfskräfte als „spies" durchgeführt und dienten in erster Linie der Pilotierung und Anpassung des Beobachtungsinstruments.

Im laufenden Sommersemester werden wiederum zwei Lehrveranstaltungen durch Beobachtungen und kollegiale Reflexionen begleitet, die beide in verschiedener Hinsicht besonders sind. Die beobachtete Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II" wird aufgrund der Pandemiesituation ausschließlich online durchgeführt, vornehmlich in asynchronen Formaten, und die Beobachtung bezieht sich auf die Videos und weitere Lernangebote im Moodlekurs. Die zweite Lehrveranstaltung ist eine rein fachwissenschaftliche Lehrveranstaltung im Bachelor-Studiengang für das Lehramt an Sekundarstufen, die Vorlesung „Elementargeometrie" mit Übung und Tutorium. Ziel ist es hierbei, Ansatzpunkte für die Integration des *erweiterten Fachwissens* in die Inhalte der Lehrveranstaltung aufzuzeigen sowie die Kooperation mit Fachdidaktiker/-innen, zunächst in Gestalt eines informellen Austauschs, zu initiieren. Diese Lehrveranstaltung wird in Form von Videokonferenzen realisiert, die von einer wissenschaftlichen Hilfskraft mithilfe eines angepassten Beobachtungsbogens (fokussiert auf die fachwissenschaftlichen Kriterien) beobachtet werden. Auf Grundlage der Beobachtungsaufzeichnungen findet mehrmals im Semester ein kollegialer Austausch zwischen dem Dozenten, der Projektmitarbeiterin und der Beobachterin statt, der sich bislang als sehr fruchtbar erwiesen hat.

Evaluation: Zuwachs des Professionswissens bei den Studierenden

Um die Wirkung der in der Grundschulpädagogik Mathematik in Potsdam neuentwickelten Lehrveranstaltungen zu untersuchen, werden Testaufgaben entwickelt, die überprüfen sollen, inwieweit die Studierenden in der Lage sind, in Hinblick auf konkrete Aufgabenstellungen ihr fachliches und fachdidaktisches (Meta-)Wissen zu aktivieren und miteinander zu verknüpfen beziehungsweise fachdidaktisches aus dem fachlichen Wissen abzuleiten. Die Forschungsfrage dahinter ist: Was bewirkt die Realisierung der Gestaltungsprinzipien in den Lehrveranstaltungen bei den Studierenden?

Eine erste Pilotierung von Testaufgaben für den Inhaltsbereich Arithmetik fand im Sommersemester 2019 im Rahmen der Abschlussklausur zur Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik" statt. Die Testaufgaben forderten von den Studierenden die Herstellung von Bezügen zwischen konkreten Aufgaben und dem in der Lehrveranstaltung erworbenen mathematischen Fachwissen beziehungsweise fachdidaktischen Wissen und zielten damit auf die angestrebte Metakompetenz „Zusammenhänge explizit benennen und darstellen", die in der Lehrveranstaltung durch das Querschnittsprinzip „auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen" entwickelt werden sollte. Die Auswertung zeigte allerdings, dass es den Studierenden sehr schwerfiel, diese Zusammenhänge zu beschreiben. Als Konsequenzen daraus ziehen wir zum einen die Erkenntnis, dass das Explizitmachen von Zusammenhängen in den Lehrveranstaltungen noch häufiger und deutlicher geschehen muss, zum anderen, dass die Testaufgaben präziser formuliert werden müssen und die Studierenden Aufgaben dieser Struktur bereits vorher in Übungen und Hausaufgaben antreffen sollten.

Evaluation: Lehrenden- und Studierendenperspektive

In den Jahren 2016/2018 wurden eine Reihe von Interviews mit Dozierenden am Institut für Mathematik durchgeführt, in denen es inhaltlich um das mathematische Fachwissen, das Lehramtsstudierende benötigen, und strukturell um mögliche Kooperationen von Fachwissenschaft(ler/-innen) und Fachdidaktik(er/-innen) ging. Diese Interviews sollen in der zweiten Projektphase ergänzt werden durch Workshops, die Dozierende der Universität, Akteur/-innen der zweiten und dritten Phase der Lehramtsausbildung und Lehrpersonen der Schule zusammenbringen. Ziel ist es, das Modell des *erweiterten Fachwissen* mit konkreten fachspezifischen Inhalten zu verknüpfen.

Die Studierendenperspektive, die auf konkrete Lehrveranstaltungen bezogen regelmäßig in den Lehrveranstaltungsevaluationen erhoben wird, soll auch in einer fachübergreifenden Erhebung der erlebten *„doppelten Diskontinuität“* (Klein, 1908) und der wahrgenommenen Relevanz der Lehrveranstaltungen für den zukünftigen Beruf allgemeiner erfasst werden.

(Teil-)Studien mit Fokus auf spezielle Inhaltsbereiche

In der ersten Projektphase wurde eine Studie zu Zahldarstellungen im Stellenwertprinzip durchgeführt (Goral & Kortenkamp, 2018).

Derzeit läuft ein Projekt in Kooperation mit der Universität Innsbruck und der TU München, das den „Natural Number Bias“ bei Lehramtsstudierenden mittels eines fachlichen Tests, der 2018/19 pilotiert wurde (Stampfer, Reitz-Koncebovski & Hell, 2019), und eines fachdidaktischen Tests im Pre-Post-Design untersuchen soll. Dazwischen ist eine Intervention im Rahmen der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“ geplant, die den „Natural Number Bias“ thematisiert und entlang der *Gestaltungsprinzipien* konzipiert wird.

Ausblick

Jede der neuentwickelten Lehrveranstaltungen in Studiengängen für die Primarstufenlehrämter soll innerhalb der zweiten Phase des Potsdamer QLB-Projekts (2019-2022) in zwei bis drei Design-Based-Research-Zyklen (weiter-)entwickelt werden. Außerdem werden einzelne bestehende fachwissenschaftliche Lehrveranstaltungen in Studiengängen für die Sekundarstufe in ähnlicher Weise in kollegialer Supervision evaluiert, um eine stärkere Einbindung des *erweiterten Fachwissens* in die vermittelten Fachinhalte sowie Kooperationen mit der Fachdidaktik anzuregen. Die sogenannten „spies“ dienen dabei neben der Durchführung von Begleitforschung auch zur Quervernetzung innerhalb der Fächer und als Bindeglied zwischen den Fakultäten.

Zum Projektabschluss ist für die jeweiligen Lehrveranstaltungen eine Dokumentation der Curricula, Inhalte und Lehr-/Lernmaterialien vorgesehen. Die erste bereits zu diesem Stadium entwickelte Lehrveranstaltung ist die Vorlesung mit Übung zur Arithmetik und ihrer Didaktik. Hier kommt uns die Pandemiesituation im gegenwärtigen Sommersemester zugute: Durch die asynchrone Umsetzung der Lehrveranstaltungsinhalte in Videos und Online-Aktivitäten entsteht die Dokumentation zur Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“ als OER als Nebenprodukt.

Literatur

Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–54). Münster, Deutschland: Waxmann.

Goral, J., & Kortenkamp, U. (2018). Prospective teachers' strategies to solve non-decimal addition problems. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 5, S. 51). Umeå, Sweden: PME.

Heinze, A., Dreher, A., Lindmeier, A., & Niemand, C. (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 19*(2), 329–349.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907–08. Leipzig, Deutschland: Teubner.

Kortenkamp, U., & Goral, J. (2018). Aussichtstürme schaffen – den Horizont erweitern, ohne dorthin zu laufen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1055–1058). Münster, Deutschland: WTM-Verlag.

Müller, G., Wittmann, E., & Steinbring, H. (2003). *Arithmetik als Prozess*. Seelze, Deutschland: Kallmeyer.

Reitz-Koncebovski, K., Kortenkamp, U., & Goral, J. (2018). Gestaltungsprinzipien für fachwissenschaftliche Einführungsveranstaltungen in den Lehramtsstudiengängen Mathematik. In A. Borowski, A. Ehlert & H. Prechtl (Hrsg.), *PSI-Potsdam: Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2015–2018)* (S. 175–188). Potsdam, Deutschland: Universitätsverlag.

Schwill, A. (1995). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In Hischer, H. & Weiß, M. (Hrsg.), *Fundamentale Ideen – Erörterungen zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik (S. 18–25)*. Hildesheim, Deutschland: Franzbecker.

Stampfer, F., Reitz-Koncebovski, K., & Hell, T. (2019). Feststellung und Entwicklung des Natural Number Bias bei Lehramtsstudierenden in der fachdidaktischen Ausbildung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 781–784). Münster, Deutschland: WTM-Verlag.

Wahl, D. (2002). Mit Training vom trägen Wissen zum kompetenten Handeln? *Zeitschrift für Pädagogik 48*(2), 227–241.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Deutschland: Spektrum.

Woehlecke, S., Massolt, J., Goral, J., Hassan-Yavuz, S., Seider, J., Borowski, A., Fenn, M., Kortenkamp, U., & Glowinski, I. (2017). Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext als fachübergreifendes Konstrukt und die Anwendung im universitären Lehramtsstudium. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 35*(3), 413–426.

Karen Reitz-Koncebovski, Universität Potsdam
E-Mail: karen.reitz-koncebovski@uni-potsdam.de

Jolanda Hermanns, Universität Potsdam
E-Mail: jolanda.hermanns@uni-potsdam.de

Ulrich Kortenkamp, Universität Potsdam
E-Mail: ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de

Ana Kuzle, Universität Potsdam
E-Mail: ana.kuzle@uni-potsdam.de

Das Projekt BRIDGES an der Universität Vechta

Martina Döhrmann, Ilka Gummel, Johanna Herkenhoff und Stefanie Brunner

„Brücken bauen. Zusammenarbeit initiieren und gestalten“ ist das Ziel des Projekts BRIDGES[1], das an der Universität Vechta im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung gefördert wird. Durch fächerübergreifende, institutionenübergreifende und phasenübergreifende Brücken werden Strukturen geschaffen und etabliert, um interdisziplinäre und praxisbezogene Forschung in der Lehrerbildung zu fördern und den Professionalisierungsprozess angehender Lehrkräfte zu unterstützen. In der ersten Phase der Förderung gliederte sich das Projekt in die beiden Teilprojekte *Werkstatt Inklusion* und *Beratung und (Selbst-)Reflexion*. Beide Teilprojekte werden im Folgenden kurz vorgestellt. Die Mathematik war intensiv an der *Werkstatt Inklusion* beteiligt und arbeitet auch in der zweiten Förderphase in der *Werkstatt Digitalisierung in inklusiven Settings* mit. Bereits jetzt haben die Projektergebnisse zu vielen Anregungen und Weiterentwicklungen im Fach geführt, die im Beitrag ebenfalls skizziert werden.

Das Teilprojekt Werkstatt Inklusion

Lehrkräfte auf ihre Aufgaben in einer inklusiven Schule vorzubereiten, wurde auch an der Universität Vechta zur Zeit der ersten Antragsstellung als besondere Herausforderung gesehen. Einzelne Aspekte eines inklusiven Unterrichts wie Diagnoseverfahren, differenzierte Aufgaben oder Fördermaterialien waren zwar bereits – in den Fächern unterschiedlich stark ausgeprägt – Gegenstand von Forschung und Lehre, aber es fehlten fächerübergreifende und fachspezifische Konzepte für eine Förderung des Professionalisierungsprozesses von Lehrkräften zur Gestaltung eines inklusiven Unterrichts und eine curriculare Einbindung der Konzepte.

Im Teilprojekt *Werkstatt Inklusion* konnte die Vorstellung einer interdisziplinären und praxisorientierten Forschung zum Thema Inklusion und Stärkung der Lehre in diesem Bereich realisiert werden. Wissenschaftler/-innen aus den Studienfächern Anglistik, Biologie, Erziehungswissenschaften, Geographie, Mathematik, Musik und Soziale Arbeit haben, unterstützt durch die aus Projektmitteln finanzierte Juniorprofessorin für Inklusive Bildung, eine gemeinsame Forschungswerkstatt gegründet und damit Brücken zwischen den Fächern und in die Praxis gebaut. Kurz nach dem Projektstart haben sich auch die Studienfächer Katholische Theologie und Sachunterricht der Werkstatt angeschlossen. Zudem wurden Schulen aus Vechta, Dinklage, Lohne, Neuenkirchen-Vörden, Wildeshausen, Alhorn, Bakum, Visbeck und Cloppenburg sowie das Andreaswerk Vechta, ein Verein für Menschen mit Behinderungen, für eine Zusammenarbeit gewonnen. Im Rahmen der Forschungswerkstatt wurden im Projektzeitraum sechs Fachtage durchgeführt. Die ersten drei Fachtage ermöglichten dabei eine Annäherung an das Thema Inklusion aus unterschiedlichen Perspektiven. Zum ersten Fachtag wurden externe Wissenschafler/-innen eingeladen, zum zwei-

[1] Das Projekt „BRIDGES – Brücken bauen“ der Universität Vechta wird im Rahmen der gemeinsamen ‚Qualitätsoffensive Lehrerbildung‘ von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

ten Expert/-innen aus der Schulpraxis und zum dritten Wissenschaftler/-innen der unterschiedlichen beteiligten Fachdisziplinen. Im Anschluss an die Fachtage fanden jeweils werkstattinterne Workshops statt. In diesen wurde z. B. ausgehend von der jeweiligen Fachkultur ein gemeinsames Inklusionsverständnis entwickelt, das sich auch in einer gemeinsamen formulierten Definition widerspiegelt:

INKLUSION bezeichnet Basiswerte der Gesellschaft: Partizipation ist ein Menschenrecht. Alle Menschen werden in ihrer Vielfalt und Individualität wahrgenommen, angenommen und wertgeschätzt. Die Vielfalt wird als Ressource wahrgenommen. Bezogen auf Bildung in der Schule und dort speziell im Unterricht bedeutet für uns Inklusion, auf Bedürfnisse von Gesellschaft und Individuen einzugehen sowie individuelle Lernvoraussetzungen zu erkennen, zu berücksichtigen und dementsprechend deren Entwicklung zu fördern. Individualisierung und Gemeinschaft sind dabei gleichermaßen wichtig.

Zudem wurden in der Forschungswerkstatt theoriegeleitet und ergänzt durch die Erkenntnisse der Fachtage fächerübergreifende Gelingensbedingungen für inklusiven Unterricht erarbeitet und abgestimmt (Baumert, Vierbuchen, & Team BRIDGES, 2018).

Von den neun Studienfächern der *Werkstatt Inklusion* waren sieben auch mit Promotionsprojekten an der Werkstatt beteiligt (zwei davon konnten aus Projektmitteln finanziert werden). Das gemeinsame Ziel der Projekte lag in der Entwicklung und Erforschung konkreter inklusiver Lernumgebungen. Dabei standen Fragen im Fokus wie: Hilft die „leichte Sprache", Sprachbarrieren im Biologieunterricht zu überwinden? Welche Vorteile bietet das außerschulische Lernen für inklusive Gruppen gegenüber dem Lernen im Klassenzimmer? Wie kann migrationsbedingte Mehrsprachigkeit von Schüler/-innen beim Fremdsprachenlernen unterstützen? In der Forschungswerkstatt wurde ein Doktorandenkolloquium eingerichtet, in dem die jeweiligen Promotionsprojekte diskutiert und unterstützt wurden. Der erste Programmkongress der Qualitätsoffensive im Oktober 2016 bot zudem in einem Forum zu *Inklusion und Heterogenität in der Lehrerbildung* die Möglichkeit, deutschlandweit Brücken zu weiteren Forschungsvorhaben zu diesem Schwerpunktthema zu bauen.

Mittlerweile sind an der Universität Vechta Pflichtmodule zum Themenfeld Inklusion fest in den Curricula der Studiengänge für die Lehrämter an Grund- sowie Haupt- und Realschulen verankert. Fächerübergreifend wurden von der mittlerweile verstetigten Juniorprofessorin für Inklusive Bildung zwei Pflichtmodule zum Themenfeld Inklusion konzipiert und seitdem durchgeführt: Ein Modul, das Heterogenität und Inklusion im Bereich der Primarstufe thematisiert und in einer neu konzipierten Form bereits im Wintersemester 2017/2018 angeboten wurde, sowie ein neues Modul, das sich an Studierende mit dem Schwerpunkt Sekundarstufe richtet und seit dem Sommersemester 2018 angeboten wird. Diese werden durch fachspezifische Angebote ergänzt. Durch das Kompetenzzentrum für Lehrerfortbildung, das seit 2012 an die Universität Vechta angegliedert ist, können Lehrkräfte der Region auch direkt von Forschungsschwerpunkten der Uni profitieren. Entwickelt wurde ein Fortbildungskonzept zum Themenfeld Inklusion und Heterogenität, unterteilt in Basis- und Aufbaumodule, das von der Juniorprofessorin für Inklusive Bildung seit 2018 angeboten wird. Ergänzt wird das Angebot auch hier fachspezifisch, z. B. durch die Veranstaltungen „Kooperativer Mathematikunterricht", „Die Streuobstwiese als inklusives Bildungsangebot" und „Interkulturelle Kompetenzbildung – Ethnische Heterogenität in der Klasse als Chance und Herausforderung".

Das Teilprojekt Beratung und (Selbst-)Reflexion

Das Ziel des zweiten Teilprojekts lag darin, Studierende mit Lehramtsoption in ihrem Professionalisierungsprozess zu beraten, sie zur (Selbst-)Reflexion anzuregen und ihre Beratungskompetenzen zu fördern. Dazu wurden im Rahmen der ersten Förderphase verschiedene Lehr- und Fortbildungsangebote entwickelt, z. B. die Module *Studien- und Berufs(wahl)reflexion: Vom Studierendencoaching zum Schüler/-innencoach* sowie *Reflexion von eigener Lehrer/-innenrolle und Unterrichtsgestaltung per Kollegialer Beratung und Supervision/Kollegialem Coaching.* Um Studierende während ihres gesamten universitären Professionalisierungsprozesses begleiten zu können, wurde ein elektronisches Kompetenzentwicklungsportfolio (eKeP) entwickelt. Das eKeP wurde als Tool in Stud.IP implementiert, das als Campusmanagementsystem allen Studierenden der Universität Vechta zur Verfügung steht. Es wurde noch während der ersten Projektförderphase erprobt und im Modul *Studienbegleitende Selbstreflexion zur Lehrer/-innenprofessionalisierung per elektronisch verankertem Kompetenzentwicklungsportfolio* eingesetzt, um die Ergebnisse fortlaufend in die Weiterentwicklung einfließen lassen zu können. Ein Transfer der Ergebnisse des Teilprojekts fand insbesondere über eine zweitägige Tagung 2018, aber auch über mehrere Veröffentlichungen statt (u. a. Völschow, Israel, & Warrelmann, 2019).

(Weiter-)Entwicklungen im Fach Mathematik durch das Projekt BRIDGES

Das Fach Mathematik an der Universität Vechta war und ist intensiv an BRIDGES – insbesondere durch zwei Promotionsprojekte in der ersten Phase und Übernahme der Gesamtprojektleitung - beteiligt. Beide Promotionsprojekte konnten in der Projektlaufzeit abgeschlossen werden und die Projekterfahrungen und -ergebnisse haben inhaltliche Diskussionen und Prozesse im Fach angeregt und die Weiterentwicklung der Lehre in den letzten Jahren stark beeinflusst.

Johanna Herkenhoff (2020) hat im Rahmen ihrer Promotion eine Planungshilfe für Lehrkräfte zur Gestaltung eines inklusiven Mathematikunterrichts entwickelt. Ausgehend von den Arbeiten von Helmke (2017) und Meyer (2016) zu Qualitätskriterien von Unterricht aus Sicht der allgemeinen Didaktik, den mathematikspezifischen Kriterien aus dem Projekt PIKAS der Universität Dortmund (Selter, 2017) und den Gelingensbedingungen für inklusiven Unterricht, die in der *Werkstatt Inklusion* erarbeitet wurden, hat Herkenhoff Kriterien für den inklusiven Mathematikunterricht entwickelt. Dazu extrahierte sie unter Anwendung des Design-Based-Research-Ansatzes Qualitätsmerkmale, um der Forderung nach anschlussfähigen Planungskonzepten aus einer logischen Symbiose allgemeindidaktischer, mathematikdidaktischer und inklusivdidaktischer Kriterien nachzugehen. Mit dem Zusammenschluss von 17 Qualitätsmerkmalen, die in 88 Indikatoren untergliedert sind, generierte Herkenhoff ein Planungsinstrument für Primarstufenlehrkräfte zur Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts, dessen Praxistauglichkeit und Wirkung sie im Rahmen ihrer Arbeit nachweisen konnte.

Ilka Gummels (2020) hat im Rahmen ihrer Promotion eine kooperative Lernumgebung für den inklusiven Mathematikunterricht praxisorientiert entwickelt und evaluiert. Ebenfalls orientiert an einem Design-Based-Research-Ansatz entwickelte sie theoriegeleitet Gestaltungsprinzipien für kooperative Lernumgebungen im Mathematikunterricht und eine konkrete Lernumgebung für den Arithmetikunterricht der Grundschule. Diese wurde in insgesamt drei Zyklen des iterativen Forschungsprozesses in jeweils zwei Schulklassen erprobt. Dabei wurden die videografierten Kooperationen zunächst hinsichtlich der Umsetzung des kooperativen Lernens anhand eines Kriterienkatalogs eingeschätzt und Schwierigkeiten und Hürden innerhalb kooperativer Lernprozesse herausgefiltert. Innerhalb des Prozesses führte dies zu einer Optimierung der Lernumgebung und einer Minimierung der Schwierigkeiten und Hürden. Im Rahmen der Analyse wurden Merkmale substanzieller kooperativer Lernumgebungen herausgestellt, die für eine erfolgreiche Zusammenarbeit von Schülerinnen und Schülern berücksichtigt werden sollten. Zudem wurden Gestaltungsprinzipien erarbeitet, die auf methodischer Gestaltungsebene unter anderem die Vorerfahrungen und den Materialeinsatz besonders betreffen.

In einem fachinternen Workshop der Mathematik wurde 2018 gemeinsam mit der Juniorprofessorin für Inklusive Bildung ein themenspezifisches Lehrangebotskonzept entwickelt, das den gesamten Studienverlauf von Mathematikstudierenden mit Lehramtsperspektive in den Blick nimmt. Ziel dabei war die Herstellung eines inhaltlich abgestimmten und kohärenten Angebotes zum Themenfeld Inklusion innerhalb des Faches als auch eine Abstimmung der Inhalte mit den im Rahmen des Projekts entwickelten fächerübergreifenden Pflichtmodulen im Master of Education. Neben den bereits im Mathematikcurriculum vorhanden schulstufenspezifischen Seminaren *Diagnostizieren und Fördern im Mathematikunterricht* im Master wird seitdem im Bachelor das neue Seminar *Inklusiver Mathematikunterricht* angeboten, durch das die Ergebnisse der beiden Promotionen direkt in die Lehre einfließen können. In weiteren fachdidaktischen Veranstaltungen werden zudem Inhalte selbstverständlich auf einen inklusiven Mathematikunterricht bezogen oder inklusionsspezifische Aspekte thematisiert. Dies gilt z. B. für die aktuell angebotene Wahlpflichtveranstaltung *Methoden im inklusiven Mathematikunterricht* oder für die vorbereitenden und begleitenden Veranstaltungen der Praxisphase im Master. Auch im Rahmen von Projektbandarbeiten während der Praxisphase sowie von Masterarbeiten werden zunehmend inklusive Lernumgebungen in der Unterrichtspraxis erprobt und evaluiert.

Die Praxisphase im Master besteht in Niedersachsen aus einem 18-wöchigem Praxisblock, der durch gemeinsam konzipierte und durchgeführte Seminare von Lehrkräften (insb. Fachseminarleiter/-innen) und Fachdidaktiker/-innen vorbereitet und begleitet wird. In den Seminaren der Mathematik und auch in den Unterrichtsbesuchen werden Merkmale guten (Mathematik-)Unterrichts thematisiert. Durch die Arbeit von Herkenhoff wurde eine Diskussion dieser Merkmale im Fach angeregt, an der neben den Lehrkräften, die als Lehrende in der Praxisphase mitwirken, auch Mentor/-innen beteiligt waren. Entstanden ist dabei eine Concept Map, die aus der Sicht der Beteiligten relevante Merkmale guten Mathematikunterrichts und ihre Beziehungen untereinander visualisiert. Die Concept Map wird seit dem Wintersemester 2019/2020 in der Praxisphase eingesetzt und soll Studierenden auch über die Studienzeit hinaus eine Unterstützung in der Planung und Reflexion von Mathematikunterricht bieten. Die Concept Map wird im September auch auf der virtuellen Jahrestagung der GDM vorgestellt (Döhrmann et al., im Druck).

Am Teilprojekt II war die Mathematik zwar nicht direkt beteiligt, mittlerweile profitiert sie jedoch auch von dem dort entwickelten elektronischen Portfolio. Das in Stud.IP implementierte eKEP wird in der Mathematik als lernbegleitendes Prüfungsformat in mehreren Seminaren eines Moduls eingesetzt und hat sich gerade im Sommersemester 2020, in dem ausschließlich digitale Lehre stattfinden konnte, sehr bewährt.

Wie geht es weiter?

Durch die *Werkstatt Inklusion* ist das Thema Inklusion innerhalb der Universität Vechta zum Querschnittsthema geworden. Die Brücken zwischen den an der Lehrerausbildung beteiligten Fächern sowie zwischen der Universität und weiteren Bildungseinrichtungen der Region werden in der 2. Phase der Qualitätsoffensive ausgeweitet und für neue Herausforderungen genutzt. In der neuen interdisziplinären Forschungswerkstatt *Digitalisierung in inklusiven Settings* wird das Potential digitaler Medien für inklusive Lernumgebungen bzw. inklusiven Unterricht untersucht. An dieser Werkstatt sind neben der aus Projektmitteln eingerichteten Juniorprofessur für Mediendidaktik mit der Mathematik fünf Fächer beteiligt und es findet über mehrere gemeinsame Workshops ein enger Austausch mit Kooperationspartner/-innen der TU Kaiserslautern statt. Ziel der Werkstatt ist die spezifische Weiterentwicklung der Lehrangebote zum Themenfeld Inklusion und die Entwicklung weiterer Angebote für die Lehrerfortbildung und auch hochschuldidaktische Weiterbildung.

Auch die in der ersten Phase entwickelten Angebote aus dem Bereich *Beratung und Selbstreflexion* werden in der 2. Phase weiterentwickelt. Dabei wird das eKEP auf weitere Module und Inhaltsbereiche ausgeweitet und z. B. auch zur Begleitung und Reflexion der Kompetenzentwicklung der Studierenden im Bereich Inklusion eingesetzt.

Insgesamt konnte mit dem Projekt BRIDGES eine Profilierung und Optimierung der Strukturen an der Universität Vechta durch die strukturelle Stärkung der interdisziplinären Zusammenarbeit der Fachdidaktiken, Fachwissenschaften und Bildungswissenschaften sowie der Vernetzung mit Schulen, außerschulischen Institutionen und anderen Hochschulen erreicht werden. Entstanden ist eine effektive und nachhaltige Kooperationsstruktur, die für weitere Querschnittsaufgaben, weitere interdisziplinäre Forschung, weitere praxisorientierte Forschung und die Weiterentwicklung von Angeboten für die Lehrkräfteausbildung und -fortbildung genutzt wird.

Literatur

Baumert, B., Vierbuchen, M.-C. & Team BRIDGES. (2018). Eine Schule für alle – wie geht das? Qualitätsmerkmale und Gelingensbedingungen für eine inklusive Schule und inklusiven Unterricht. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, *69*, 526–541.

Gummels, I. (2020). *Wie kooperatives Lernen im inklusiven Unterricht gelingt. Entwicklung und Evaluation einer Lernumgebung für den Mathematikunterricht.* Wiesbaden: Springer Spektrum

Helmke, A. (2017). *Unterrichtsqualität – erfassen, bewerten, verbessern. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze: Kallmeyer.

Herkenhoff, J. (2020). *Inklusiver Mathematikunterricht. Entwicklung eines Instruments zur Planung von Mathematikunterricht in einem inklusiven Setting.* Wiesbaden: Springer VS

Meyer, H. (2016). *Praxisbuch: Was ist guter Unterricht?* (11. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Selter, C. (2017). *Mathe ist Trumpf. Guter Mathematikunterricht. Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt PIKAS*. Berlin: Cornelsen.

Völschow, Y., Israel, S. & Warrelmann, J.-N. (2019). Das elektronische Kompetenzentwicklungsportfolio als Reflexionsinstrument zur professionellen Identitätsentwicklung im Lehramtsstudium. In N. Safi, C. Bauer & M. Kocher (Hrsg.), *Lehrberuf: Vorbereitung, Berufseinstieg, Perspektiven. Beiträge aus der Professionsforschung* (S. 63–72). Bern: hep-Verlag.

Döhrmann, M., Grüßing, M., Schwarz, B. & Wilke-Runnebaum, S. (im Druck). Entwicklung einer Concept Map zur Darstellung von Merkmalen guten Mathematikunterrichts. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*, Münster: WTM-Verlag.

Martina Döhrmann, Universität Vechta
E-Mail: martina.doehrmann@uni-vechta.de

Ilka Gummels, Universität Vechta
E-Mail: ilka.gummels@gmx.de

Johanna Herkenhoff, Universität Vechta
E-Mail: johanna.herkenhoff@googlemail.com

Stefanie Brunner, Universität Vechta
E-Mail: stefanie.brunner@uni-vechta.de

Ein Film über die Entstehung des Beweisens im Unterricht

Neue Ansätze für eine seit Langem bestehende Herausforderung der Didaktik

Mario Gerwig

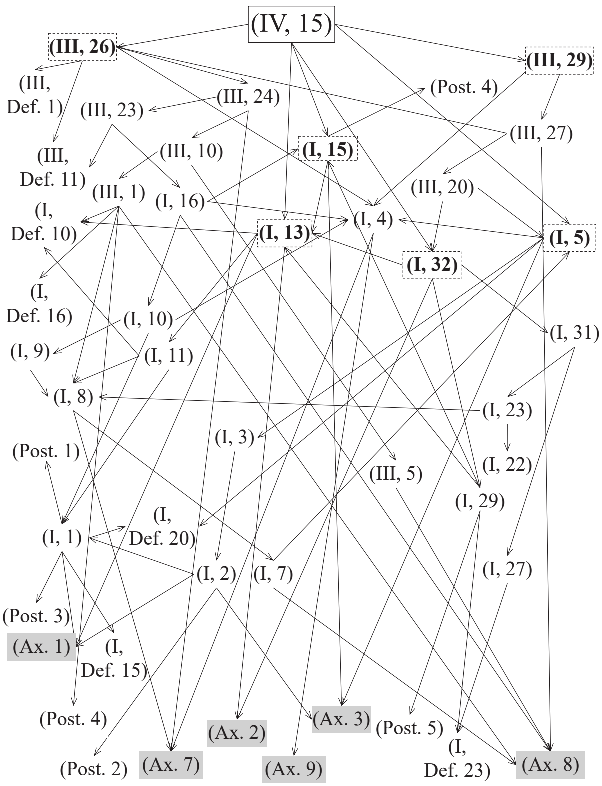
> Lässt man dieses [das Beweisen; M.G.] dergestalt allmählich entstehen, als eine natürliche, der mathematischen Aufgabe angepasste Art des Vorgehens, so lernt der Schüler nicht nur beweisen, sondern er lernt auch etwas viel Wichtigeres: nämlich, was es mit dem Beweisen auf sich hat. Er erlebt aus unmittelbarer eigener Erfahrung, daß dieses Beweisen nicht eine sinnlose Spielerei, eine komplizierte, aber konventionelle Erfindung der Mathematiker ist, sondern, daß es das natürliche Erkenntnismittel der Mathematik ist. Er lernt also, daß das Beweisen sein Heimatrecht in der Mathematik dem Umstand verdankt, daß es einer wohlbestimmten Funktion genügt.
>
> (Alexander I. Wittenberg, 1963, S. 61f.)

Es ist nach wie vor eine zentrale Frage der Mathematikdidaktik, wie das schwierige Thema *Beweisen* so in den Unterricht gelangen kann, dass die Schüler/-innen nicht nur einen konkreten Beweis nachvollziehen und verstehen, sondern auch die dahinter liegende Denkhaltung erfahren, d. h. erkennen, wie die mathematischen Wahrheiten aufeinander ruhen und was es mit dem Beweisen in der Mathematik auf sich hat. Die große Bedeutung dieser didaktischen Kernfrage wird deutlich bei einem Vergleich der *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (KMK, 2015) mit aktuellen Forschungsbefunden. Erstere beschreiben innerhalb der Kompetenz *Mathematisch argumentieren* ein Spektrum an Argumentationen „von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen“ (KMK, 2015, S. 14), dessen Ausprägungen u. a. das Wiedergeben und Anwenden von Routineargumentationen (Anforderungsbereich I), das Nachvollziehen von mehrschrittigen Argumentationen und logischen Schlüssen (Anforderungsbereich II) sowie das Nutzen, Erläutern und Entwickeln von Beweisen und anspruchsvollen Argumentationen (Anforderungsbereich III) umfassen. Dennoch ist es eine vielfach diagnostizierte Begebenheit, dass Beweise und vor allem die Tätigkeit des Beweisens in der Schule meist völlig unterrepräsentiert sind (Malle, 2002, S. 4; Brunner, 2014, S. 2). Sie werden häufig als ein Tätigkeitsfeld für begabtere Schülerinnen und Schüler angesehen, wodurch der Aufbau der Kompetenz, die ja für alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen gelten sollte, erschwert bzw. verunmöglicht wird. Zahlreiche empirische Befunde belegen, dass auch starke Schüler/-innen (Ufer/Heinze, 2008) sowie viele Studienanfänger/-innen (Nagel/Reiss, 2016) teils erhebliche Schwierigkeiten beim mathematischen Begründen haben. Und auch vielen Lehrpersonen fällt es schwer, dieses Thema zu unterrichten, da es sich auch für sie um eine hochanspruchsvolle Tätigkeit handelt, bei der Argumente der Lernenden häufig erst noch ergänzt und ggf. in die symbolische Sprache der Mathematik transformiert werden müssen.

> Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass beim Thema ‚Beweisen‘ eine größere Diskrepanz herrscht zwischen dem Anspruch, wie er sich beispielsweise in Bildungsstandards manifestiert, und der Wirklichkeit, realisiert als alltägliche Praxis des Mathematikunterrichts einzelner Lehrpersonen (Brunner, 2014, S. 2).

Insgesamt erscheint es daher nicht übertrieben, die obige didaktische Kernfrage als fachdidaktisches Zentralproblem zu markieren. Wie könnte eine Antwort aussehen?

Martin Wagenschein (1896–1988) hat bereits vor über 50 Jahren ein Unterrichtsbeispiel entworfen, welches sich mit der Entdeckung des Beweisens befasst (Wagenschein, 1968). Darin beschreibt er anhand eines prägnanten Exempels – der Radius eines beliebigen Kreises lässt sich genau sechsmal auf dessen Rand abtragen – die für die Entwicklung der Wissenschaften insgesamt und für die Mathematik im Besonderen entscheidende Entdeckung der Axiomatik durch Euklid von Alexandria. Wagenscheins Entwurf ist nicht nur ein historisches Beispiel, an welchem die von ihm verfolgte *Exemplarische Methode* und das *Genetische Prinzip* deutlich werden. Er kann trotz seines Alters auch heute noch Basis eines modernen Unterrichts sein, der die Erkenntnisse und Prinzipien der fachdidaktischen und empirischen Unterrichtsforschung beachtet und in dem der entscheidende und weitreichende Paradigmenwechsel weg von der früheren rezeptartig beschriebenen, praktischen Rechen- und Messkunst der alten Ägypter und hin zu jener axiomatisch fundierten und streng beweisenden *Wissenschaft*, die wir heute Mathematik nennen, lebendig wird.



Struktur des Sechsstern-Beweises Euklids (IV, §15). Die Basis des Beweises besteht aus Axiomen, Definitionen und Postulaten.

In einer modernisierten und aktualisieren Fassung ist Wagenscheins Entwurf in den letzten Jahren vielfach an verschiedenen Schulen in Deutschland und der Schweiz sowie in diversen fachdidaktischen und schulpädagogischen Universitätsseminaren unterrichtet und so stetig weiterentwickelt worden (Gerwig, 2015). Der größte Unterschied zur Fassung Wagenscheins besteht in der Hinzunahme des originären Beweises Euklids aus dessen *Elementen* (IV, §15). Damit gelingt es, den Satz über das Sechseck als Muster für die Entdeckungen der antiken Mathematik zu verstehen, an welchem demonstriert werden kann, wie die mathematischen Wahrheiten aufeinander ruhen, wie also ein auf Axiomen aufgebautes System des mathematischen Beweisens entstanden und begründet worden ist. Denn die Analyse des euklidischen Beweises verweist auf die hinter dem Beweis liegende Denkhaltung: Euklid greift in seinem Beweis direkt auf sechs Sätze zurück, die er zuvor bereits bewiesen hat. Diese Beweise beziehen sich wiederum auf zuvor bereits bewiesene Sätze. Was steht am Anfang dieser Argumentationskette? Es sind Definition, Postulate und Axiome. Verdeutlicht man die Struktur des Beweises in einem Diagramm, so wird dieses allgemeingültige und für die Entwicklung der Mathematik so zentrale Prinzip auf eindrückliche Weise deutlich (siehe Abbildung).

Eine Inszenierung dieses Unterrichts ist nun erstmals filmisch dokumentiert worden (Laufzeit: 56 min). Der erteilte, achtstündige Unterricht orientiert sich dabei an den Prinzipien der Lehrkunstdidaktik, die tief in der deutschen Didaktiktradition verwurzelt ist (Wildhirt, Jänichen, & Berg, 2016, S. 111–128). Sie befasst sich mit wissenschaftlich oder kulturell bedeutenden Ereignissen, welche die Sicht auf Kultur, Kunst und Wissenschaft maßgeblich verändert und beeinflusst haben und bis heute gelten. Dazu entwickelt sie mit großer Sorgfalt sogenannte Lehrstücke, in denen die Schüler/-innen in die Ausgangslage früherer Entdecker, Urheber oder Autoren versetzt werden und von welcher aus sie „nach-entdeckend" die Wege zu einer Entdeckung, einer Erfindung oder einem geschaffenen Werk im eigenen Lern- und Bildungsprozess erleben – das Lehrstück zur Entdeckung der Axiomatik ist eines von rund 50 Lehrstücken. Entscheidende Orientierungspunkte sind vor allem die *Exemplarische Methode* und das *Genetische Prinzip*, wie es Martin Wagenschein verfolgt und in seinen zahlreichen Unterrichtsskizzen beispielhaft ausgelegt hat, sowie die *Theorie der Kategorialen Bildung* (1959) Wolfgang Klafkis.

Im filmisch dokumentierten Unterricht zur Entdeckung der Axiomatik werden diese didaktischen und bildungstheoretischen Schwerpunktsetzungen insb. in der *Ouvertüre* sichtbar, in welcher den Schüler/-innen die scheinbar perfekt geschlossene Zirkelrose anhand authentischer Bilder aus Natur und Kultur als reizvolles *Phänomen* begegnet, entstehende *Sogfragen* (Schließt sich die Zirkelrose wirklich genau? Was bedeutet genau? Gibt es Perfektion in der Natur?) in einer möglichst ausgewogenen *Ich-Wir-Balance* untersucht werden, die Begegnung mit der *originären Vorlage* (Euklids Beweis aus den Elementen) in der Erstellung des *Denkbilds* (Zirkelrose) und der gemeinsamen Suche nach einer Begründung angebahnt wird und der *kategoriale Aufschluss* (Mathematik ist nicht autoritär; mathematische Wahrheiten sind begründbar und ruhen aufeinander) durch die eingenommene Fragehaltung und das Wechselspiel aus individuellem Nachdenken, kritischem Nachvollziehen, Diskutieren und Präsentieren vorbereitet wird.

Ein Trailer ist unter tinyurl.com/ycfcpozm abrufbar, dort finden sich auch die Bestelloptionen der DVD, die sich gut zum Einsatz in der Lehrpersonen-Ausbildung eignet. Der didaktische Begleittext (Booklet der DVD und frei zum Download) enthält darüber hinaus weitere Informationen zum erteilten Unterricht.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Heidelberg: Springer Spektrum.

Gerwig, M. (2015). *Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkunstdidaktik.* Heidelberg: Springer Spektrum.

KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Bonn und Berlin: KMK. Abgerufen unter* tinyurl.com/yczhuhek

Malle, G. (2002). Begründen – eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. Basisartikel. *Mathematik lehren*, *110*. Seelze: Friedrich-Verlag. 4–8.

Nagel, K., & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *19*(2), 299–328.

Ufer, S., & Heinze, A. (2008). Development of geometrical proof competency from grade 7 to 9: A longitudinal study. In *11th International Congress on Mathematics Education, Topic Study Group* 18, 6.

Wagenschein, M. (2008). *Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch* (4. Auflage). Weinheim: Beltz.

Wildhirt, S., Jänichen, M., & Berg, H. C. (2016). Lehrstückunterricht. In J. Wiechmann; S. Wildhirt (Hrsg.), *12 Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis* (6. Auflage, S. 111–128). Weinheim: Beltz.

Wittenberg, A. I. (1963). *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Klett: Stuttgart.

Mario Gerwig, Gymnasium Leonhard, Basel, Schweiz
E-Mail: mariogerwig@gmail.com

Machen E-Lectures die Studierenden faul?

Wolfram Meyerhöfer

Seit mehreren Jahren gibt es für Vorlesende an der Universität Paderborn die Möglichkeit, Vorlesungen elektronisch aufzeichnen zu lassen und diese Aufzeichnungen – E-Lectures genannt – den Studierenden im Internet zur Verfügung zu stellen. Diese Option verringert den Vorlesungsbesuch erheblich. In meinen Vorlesungen besuchen typischerweise 300 Studierende die erste Vorlesung, die Anzahl der Vorlesungsbesucher/-innen pendelt sich dann bis zur dritten Vorlesung bei 100 bis 150 ein. Werden E-Lectures angeboten, so sinkt diese Zahl auf 30 bis 50.

Im Laufe der Jahre entstand bei mir und meinen Mitarbeiter/-innen zunehmend der Eindruck, dass das Vorhandensein der E-Lectures dazu führt, dass die Studierenden sich den Vorlesungsstoff nicht mehr erarbeiten: Unsere Veranstaltungen umfassen 2 SWS Vorlesung, 2 SWS Übungen und Hausaufgaben. Der laufende Erwerb des Vorlesungsstoffes ist dabei für einen erfolgreichen Lernprozess vorausgesetzt. Unser Eindruck war, dass viele Studierende in den Übungen und bei den Hausaufgaben schlechte(re) Leistungen zeigen, weil sie das Rezipieren der Vorlesungsaufzeichnung nach hinten verschieben. Wir hatten also den Eindruck, dass E-Lectures die Studierenden zu Faulheit oder zu prokrastinativem Verhalten verführen und dass wir eventuell besser auf E-Lectures verzichten sollten. Da wir umgekehrt E-Lectures im Sinne der Vereinbarkeit von Studium und Familie, im Sinne von Studienfreiheit und wegen der Option von Wiederholung für sinnvoll halten, führten wir eine Untersuchung zur Nutzung der E-Lectures durch, die hier dokumentiert werden soll.[1]

[1] Unterstützung leistete hierbei Tabea Christel Elke Ophaus im Rahmen ihrer Masterarbeit mit dem Titel: E-Lectures in mathematikdidaktischen Vorlesungen, Universität Paderborn 2020. Die Forschungslage wird in diesem Artikel komplett aus dieser Arbeit heraus rezipiert. Auch die meisten Datenzusammenfassungen stammen von Tabea Ophaus.

Forschungslage

Bislang liegen wenige empirische Untersuchungen zu E-Lectures vor. Tillmann u. a. (2012, $n = 1.183$) identifizieren unterschiedliche Nutzer/-innen-Typen:

- Intensive Nutzer/-innen schauen die gebotenen E-Lectures meist vollständig an – unabhängig davon, ob die Präsenzlehre besucht wurde oder nicht. Das Onlineangebot wird häufig zum Nacharbeiten verwendet. Lediglich ein Teil der Nutzer/-innen zieht die E-Lectures als Alternative zur Präsenzlehre heran.
- Regelmäßige Nutzer/-innen schauen nur bestimmte Teilabschnitte der besuchten Vorlesung noch einmal nach, unter anderem zur Nachbereitung der Inhalte. Vorlesungen, die nicht besucht werden konnten, werden vollständig oder ausschnittweise online nachgeschaut.
- Gelegentliche bzw. alternative Nutzer/-innen greifen nicht auf die Online-Möglichkeiten zurück, wenn sie die Vorlesung besucht haben, nutzen die E-Lectures aber als Alternative zu der gegebenen Vorlesung.
- Selten- bzw. Nicht-Nutzer/-innen nutzen das Onlineangebot im Regelfall gar nicht. Lediglich im Rahmen der Klausurvorbereitung greift etwa ein Viertel dieser Studierenden auf die E-Lectures zurück.

Die Autor/-innen stellen fest, dass das Nutzungsverhalten stark davon abhängt, wie die Auswirkungen der E-Lectures auf den Lernerfolg eingeschätzt werden. Jene Studierende, die den positiven Einfluss auf den Lernerfolg als gering einschätzten, nutzten die E-Lectures innerhalb des Erhebungszeitraumes sehr selten. Leistungsstärkere Studierende nutzen E-Lectures intensiver als leistungsschwächere, insbesondere nutzen sie sie in stärkerem Maße, wenn sie die Vorlesung nicht besucht haben. Die leistungsschwächeren Studierenden reduzieren aufgrund des E-Lecture-Angebots ihre Vorlesungsbesuche in stärkerem Maße. Das Angebot an E-Lectures scheint also eine gewisse Polarisierung der Studierenden zu befördern. Diese Erkenntnis wird in Tillmann u. a. (2014) vertieft. Im Gegensatz zu meiner Erfahrung stellten die Autor/-innen fest, dass die Anwesenheit in den Vorlesungen durch das Vorhandensein von E-Lectures nur geringfügig reduziert wird.

Demetriadis und Pombortsis (2007) vergleichen zwei Gruppen in einem Pretest-Posttest-Setting mit zwischengeschalteten Wiederholungsfragen. Einer Gruppe wurde die gegebene Vorlesung nur im E-Lecture-Format angeboten und der Vergleichsgruppe nur in Form der Präsenzvorlesung. Allerdings wurden die E-Lectures in einem Studio aufgenommen und waren oft kürzer als die Präsenzvorlesung, da keine Interaktion mit den Studierenden möglich war. Es wurden keine signifikanten Unterschiede zwischen den Versuchsgruppen gefunden. Es wurde aber herausgearbeitet, dass für die E-Lecture-Gruppe die Interaktion zwischen Studierenden und Lehrkräften erschwert war.

Rahmenbedingungen der Untersuchung

Die Erhebung erfolgte in der Veranstaltung „Didaktik der Arithmetik in Klasse 3 bis 6“ an der Universität Paderborn im Wintersemester 2017/2018 und im Wintersemester 2018/2019. Vorlesender war Wolfram Meyerhöfer. In der genannten Veranstaltung saßen Grundschullehramtsstudierende im dritten bzw. vierten Mastersemester und Studierende des Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschullehramtes (HRSG) im zweiten oder dritten Bachelorsemester. Im Wintersemester 2018/2019 nahmen erstmalig Studierende des Lehramtes für sonderpädagogische Förderung teil, diese laufen im Bereich Mathematik komplett parallel zu den Grundschulstudierenden. Bei der Veranstaltung handelte es sich um eine Pflichtveranstaltung.

Den Studierenden, die in der Veranstaltung angemeldet waren, wurde auf der Lernplattform der Universität (2017/18 Moodle, 2018/19 Panda) automatisch ein Zugriff auf einen Ordner mit den Vorlesungsaufzeichnungen ermöglicht. Auf dieser Lernplattform wurden auch die Hausaufgaben, Hausaufgabenbewertungen, Aufgaben für die Übungen sowie das Vorlesungsskript zur Verfügung gestellt. Es erforderte dementsprechend keine Anmeldung auf einer neuen fremden Plattform, um auf die E-Lectures zugreifen zu können.

Innerhalb des Ordners für die Vorlesungsaufzeichnung wurden chronologisch sortiert die E-Lectures versammelt. Wählte man eine der Vorlesungen aus, öffnete sich ein Videofenster. Auf der linken Hälfte des Bildschirms wurden die Vorlesungsfolien präsentiert und auf der rechten Seite der Vorlesende. Wenn der Vorlesende mit einer Dokumentenkamera oder ähnlichem arbeitete, so wurde dies eingeblendet und die Handlung mit dem Vortrag des Dozenten unterlegt. Die Videowiedergabe gestattete es zu pausieren und die Vorlesung anzuhalten. Die Videos konnten beliebig oft und zu frei gewählten Zeitpunkten geschaut werden. Eine Videosequenz dauerte zwischen 70 und 90 Minuten.

Untersuchungsdesign

Befragt wurden die Studierenden in den Übungsveranstaltungen. Dies sind Pflichtveranstaltungen mit der Möglichkeit, an zwei bis drei Sitzungen

Bitte geben Sie Ihre Matrikelnummer an:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Welches Lehramt studieren Sie? Bitte kreuzen Sie an.

○ Grundschule (Master) ○ HRSG (Bachelor)

- Wie oft waren Sie in den letzten vier Wochen in der Vorlesung, wie viele der letzten 4 Vorlesungen haben Sie also besucht? (Termine waren: 6.12., 13.12., 20.12., 10.1.)
- Wie oft haben Sie in dieser Zeit die Vorlesungsaufzeichnung genutzt, und zwar
  * zusätzlich zum Vorlesungsbesuch
  * anstelle des Vorlesungsbesuchs
- Was meinen Sie: Sollen wir die Vorlesungsaufzeichnung künftig weiter anbieten oder nicht? Wichtig für uns wäre, die Gründe für Ihre Position zu erfahren.
- Für jene Wochen, in denen Sie weder die Vorlesung besuchen noch die Vorlesungsaufzeichnungen ansehen: Bitte beschreiben Sie kurz, ob und wie Sie sich Wissen für die Veranstaltung aneignen. Stichworte dazu:
  * Verschieben Sie das Lernen eher auf später im Semester?
  * Verschieben Sie das Lernen eher auf die Zeit in der Semesterpause?
  * Reicht es Ihnen, die Übung zu besuchen?
  * Arbeiten Sie mit Büchern? Wie intensiv?

Fragebogen

nicht teilzunehmen. Die Befragungen fanden zum Beginn des zweiten Januartermins statt, so dass die Teilnahmequote in den Veranstaltungen noch hoch war. Im Wintersemester 2017/18 waren 224 Personen für die Übungen angemeldet, von ihnen liegen 156 Fragebögen vor. Im Wintersemester 2018/19 waren 235 Personen angemeldet, von ihnen liegen 154 Fragebögen vor. Es liegen also 330 Fragebögen vor (von 459 Angemeldeten $\widehat{=}$ 72 %). (Grundschullehramtsstudierende im Master: $n = 207 \mathrel{\widehat{=}} 62{,}7\,\%$, HRSG im Bachelor: $n = 88 \mathrel{\widehat{=}} 26{,}7\,\%$, Sonderpädagogik im Master: $n = 34 \mathrel{\widehat{=}} 10{,}3\,\%$, keine Angabe zum Studiengang: $n = 1$.)

Die Studierenden wurden gebeten, ihre Matrikelnummern anzugeben, um den Zusammenhang von Vorlesungsnutzung und Klausurnoten untersuchen zu können. Dies ist für 239 Fragebögen möglich. Den Studierenden wurde zwar mitgeteilt, dass die Auswertung der Daten erst nach der Klausur erfolgt, nichtsdestotrotz ist nicht auszuschließen, dass bereits die Option der Angabe der Matrikelnummer sozial erwünschtes Antwortverhalten forciert.

Als ungünstig hat sich erwiesen, dass wir keine Frage dazu gestellt haben, ob Vorlesungsaufzeichnungen vollständig oder ausschnittweise geschaut werden. Die „Stichworte“, die als Anregung für einen narrativen Text gedacht waren, wurden von vielen Studierenden als Ankreuzoptionen gedeutet. Es wurden aber auch 65 Texte verfasst.

Auswertung

Als wenig erkenntnishaltig hat sich die Frage erwiesen, ob wir die Vorlesungsaufzeichnung künftig weiter anbieten sollen oder nicht. Es gab ausschließlich befürwortende Antworten mit den erwartbaren Begründungen.

Zunächst zur zentralen Frage: Verführen E-Lectures die Studierenden zu Faulheit oder zu prokrastinativem Verhalten? Das scheint sehr deutlich *nicht* der Fall zu sein. Nur 63 Studierende (19 %) geben an, dass sie weder die Online-Vorlesungen noch die Präsenzvorlesungen nutzen. Wir nennen diese Nutzer/-innen in Erweiterung von Tillmann u. a. (2012) „Gar-nicht-Nutzer/-innen“. Wenn man entlang meiner o. a. Erfahrungen bei einer Vorlesung ohne E-Lectures von einer Teilnahmequote von 50 % ausgeht, dann heißt das, dass E-Lectures die Vorlesungsrezeption stark erhöhen, weil die Gar-Nicht-Nutzung von geschätzten 50 % auf 19 % reduziert wird.

Ich hatte das Bedürfnis, aus jenen Studierenden, die weder die Online-Vorlesungen noch die Präsenzvorlesungen nutzen, jene herauszufiltern, die sich den Stoff selbständig erarbeiten. Unter der letzten Frage des Fragebogens kreuzen 29 Studierende an, dass sie mit Büchern arbeiten. Davon sind aber nur vier, die weder die Online-Vorlesungen noch die Präsenzvorlesungen nutzen. Es gibt unter der letzten Frage des Fragebogens kein Narrativ, das explizit eine selbständige Erarbeitung des Vorlesungsstoffes mit Büchern berichtet. Zehn Mal wird vermerkt, dass das Skript zusammen mit den Übungen und Hausaufgaben (inklusive Lektüre von hochgeladenen Texten) zur Stofferarbeitung genutzt wird. Von diesen zehn Studierenden nutzt aber nur eine/r weder die Online-Vorlesungen noch die Präsenzvorlesungen. Im Ganzen berichten also 5 der 63 „Gar-nicht-Nutzer/-innen“ von einer aktiven selbständigen Erarbeitung des Stoffes.

Wie sieht es auf der anderen Seite des Spektrums aus? 207 Studierende (63 %) geben an, von den vier Vorlesungen drei oder vier – persönlich oder digital – rezipiert zu haben. Auch in dieser Sichtweise wird die für Vorlesungen ohne E-Lecture-Angebot geschätzte Vorlesungs-Teilnahme-Quote von 50 % deutlich übertroffen. Die verbleibenden 60 Studierenden (18 %) liegen in ihrem Nutzungsverhalten irgendwo dazwischen.

Die Daten sind in Tabelle 1 versammelt.

Vorlesungsrezeption und Klausurnote

In Tabelle 1 sind auch die Klausurnoten für die angegebenen Nutzer/-innengruppen vermerkt. Die-

Tabelle 1. Verteilung der Anzahl der Vorlesungsbesuche, Klausurnoten

Anzahl Vorlesungsbesuche	Drei oder vier Mal (persönlich oder digital)	Keine (weder persönlich noch digital)	verbleibende
Anzahl der Studierenden	207	63	60
Prozentualer Anteil an allen Befragten	62,73 %	19,09 %	18,18 %
Arithmetisches Mittel der Noten	2,99	3,27	3,33
durchgefallen	10 %	7 %	21 %

se Daten sind mit größter Vorsicht zu genießen, denn es liegen nur für 239 von 330 Fragebögen Noten vor – und es ist völlig unklar, ob dies eine tendenziöse Auswahl ist. Zudem war die Klausur für die HRSG-Studierenden keine reine Didaktik-Klausur, sondern es wurde der Fachteil „Elemente der Arithmetik" mitgeprüft. Dieser Effekt ist deshalb bedeutsam, weil die HRSG-Noten dadurch tendenziell besser erscheinen als sie bei einer Benotung nur des Didaktik-Teils wären. Gleichzeitig sind die HRSG-Studierenden in der Gruppe der „Gar-nicht-Nutzer/innen" deutlich überrepräsentiert. Diese Gruppe erscheint also besser als sie in ihren didaktischen Leistungen ist.

Auch wenn wir davon ausgehen, dass die Leistungen der Nichtnutzer/-innen hier systematisch überschätzt werden, so zeigt sich doch immerhin, dass die Vorlesungsrezeption sich lohnt: Die Noten der Studierenden, die die Vorlesung rezipieren, sind deutlich besser als die der Nichtnutzer/-innen. Allerdings kann man durchaus auch ironisch auf diese Daten schauen, denn man hätte doch eher einen größeren Abstand zwischen „Vollnutzer/-innen" und „Gar-nicht-Nutzer/-innen" erwartet. Noch weniger erwartungsgemäß ist die Datenlage bezüglich der Durchfallquote.

Literatur

Demetriadis, S. & Pombortsis, A. (2007). E-Lectures for Flexible Learning: A Study on their Learning Efficiency. *Journal of Educational Technology & Society, 10*(2), 147–157.

Tillmann, A., Bremer, C., Krömker, D. (2012). Einsatz von E-Lectures als Ergänzungsangebot zur Präsenzlehre. Evaluationsergebnisse eines mehrperspektivischen Ansatzes. In G. Csanyi, F. Reichl & A. Steiner (Hrsg.), *Medien in der Wissenschaft (Band 61). Digitale Medien – Werkzeuge für exzellente Forschung und Lehre* (S. 235–249). Münster u. a.: Waxmann Verlag GmbH.

Tillmann, A., Niemeyer, J., Krömker, D. (2014). „Im Schlafanzug bleiben können". E-Lectures zur Diversifizierung der Lernangebote für individuelle Lernräume. In K. Rummler (Hrsg.), *Medien in der Wissenschaft (Band 67). Lernräume gestalten – Bildungskontexte vielfältig denken* (S. 317–331). Münster und New York: Waxmann Verlag GmbH.

Wolfram Meyerhöfer, Universität Paderborn; Schulzentrum am Stern, Potsdam
E-Mail: meyerhof@math.uni-paderborn.de

MathCityMap@home

Digitale Lernpfade mit gestuften Hinweisen und synchroner Schüler-Lehrer-Interaktion

Simon Barlovits, Simone Jablonski, Gregor Milicic und Matthias Ludwig

Arbeits- und Lernprozesse können in synchrone und asynchrone Tätigkeiten an gleichen oder unterschiedlichen Orten unterteilt werden (Johansen, 1988). Während Schülerinnen und Schüler im Klassenraum gemeinsam unterrichtet werden (synchrones Lernen an einem gemeinsamen Lernort mit face-to-face-Kommunikation), kann Homeschooling als synchrones oder asynchrones Lernen an unterschiedlichen Orten organisiert werden. Dabei ermöglicht es der Einsatz digitaler Medien, die Ortsbindung des Lernens aufzulösen und die Dichotomie von synchronem und asynchronem Lernen aufzuheben (Schwabe, 2001).

Die räumlich getrennte Organisation und Durchführung des Mathematikunterrichts in Zeiten von Corona stellt Lehrende und Lernende gleichermaßen vor eine Vielzahl von Herausforderungen: Zum einen verlangt das Lernen Zuhause von Schülerinnen und Schülern ein hohes Maß an Selbstorganisation und Disziplin. Zum anderen sind die Möglichkeiten der Lehrkräfte, den Lernenden individuell Hilfestellungen und Feedback zu geben und daraus Rückschlüsse auf den Lernstand zu ziehen, stark eingeschränkt. Hilbert Meyer (2020) formuliert in seinen Ansprüchen an Homeschooling und Fernunterricht die Bedeutung eines solchen synchronen Austauschs zwischen Lehrendem und Lernenden.

> Die Lehrperson soll durch die Rückmeldungen satt werden und das erfahren, was sie für die Steuerung der individuellen und gemeinsamen Lernprozesse wissen muss. Das ist – wenn auch bei erheblichem Arbeitsaufwand – mit digitalen Medien gut möglich. Es darf aber nicht nur darum gehen, dass fertige Arbeitsergebnisse kommentiert werden. (Meyer, 2020).

Entsprechend erscheinen während des Homeschoolings insbesondere die Unterstützung der Lernenden durch Hilfestellungen und die Überprüfung von Lösungen und Lösungswegen als besonders herausfordernd. Hingegen beschreibt eine Vielzahl von Studien (u. a. Hattie & Timperley, 2007) die herausragende Bedeutung effektiven Feedbacks, welches unmittelbar nach der Aufgabenbearbeitung erfolgen sollte (Reinhold, 2019).

Ursprünglich als Lernumgebung für außerschulische Lernorte zum Mathematiktreiben und -entdecken entlang mathematischer Wanderwege entwickelt, können Lehrkräfte MathCityMap auch als Werkzeug zur passgenauen und simultanen Unterstützung der Schülerinnen und Schüler nutzen. Neben den gestuften Hinweisen sowie einer unmittelbaren und automatischen Lösungsvalidierung ist dafür das sogenannte Digitale Klassenzimmer von zentraler Bedeutung. Es ermöglicht Lehrkräften trotz räumlicher Trennung den Lernprozess individuell und synchron zu begleiten. Die Lehrkraft kann innerhalb des Digitalen Klassenzimmers in Echtzeit nachverfolgen, welche Aufgaben von den Lernenden bearbeitet und gelöst werden. Mittels des Chats ist zudem eine synchrone Interaktion und Unterstützung möglich. Im Folgenden beschreiben wir die Funktionsweise des Digitalen Klassenzimmers und dessen Einsatzmöglichkeiten für den synchronen Online-Mathematikunterricht.

Das Digitale Klassenzimmer des MathCityMap-Systems

MathCityMap ist ein Zweikomponentensystem, um Mathematik außer Haus zu entdecken und zu betreiben. Entlang sogenannter mathematischer Wanderpfade (bzw. Mathtrails) lösen Schülerinnen und Schüler Mathematikaufgaben. Ausgestattet sind sie mit Messmaterial und der MathCityMap-Smartphone-App. Normalerweise ist es bei MathCityMap-Aufgaben unabdingbar, direkt vor Ort mathematisch aktiv zu werden, d. h. die Aufgaben lassen sich nur mithilfe eines Aufgabenobjektes oder einer Außer-Haus-Situation lösen (Gurjanow, Jablonski, Ludwig, & Zender, 2019).

In der Vorbereitungsphase nutzt die Lehrkraft das Webportal als erste Komponente des MathCityMap-Systems und legt dort Aufgaben an. Diese werden durch ein Bild, eine GPS-Position und eine Fragestellung beschrieben. Da die Schülerinnen und Schüler beim Ablaufen des Mathtrails in Kleingruppen und in der Regel ohne die Lehrkraft unterwegs sind, bietet das System die Möglichkeit zum Abrufen von im System hinterlegten Hinweisen (bis zu drei Hilfestellungen pro Aufgabe). Weiterhin überprüft die MathCityMap-App die eingegebene Antwort, gibt ein Feedback zur Lösungsqualität und ermöglicht die Anzeige einer Musterlösung.

Durch Kombination mehrerer Aufgaben entsteht ein Mathtrail. Dieser wird anschließend auf die zweite Komponente, die MathCityMap-Smartphone-App, geladen und mit deren Hilfe abgelaufen. Das primäre Werkzeug für die Organisation, Durchführung und Nachbereitung eines Mathtrails ist das Digitale Klassenzimmer. Es hilft der Lehrkraft insbesondere beim Ablaufen des Trails in Kleingruppen den Überblick über alle Gruppen zu behalten und mit ihnen, wenn nötig, in Kontakt zu treten. Dafür wird das Digitale Klassenzimmer passgenau auf das gewünschte Zeitfenster, z. B. eine Doppelstunde, terminiert. Während dieser Zeit stehen drei Kernfunktionalitäten zu Verfügung:

- Nachverfolgung der Laufwege von Schülerinnen und Schülern: Mittels GPS kann die Lehrkraft verfolgen, wo sich die Schülergruppen aufhalten und ihnen, sofern nötig, bei der Navigation behilflich sein.
- Chat zur direkten Interaktion zwischen Lehrkraft und den Lernenden: Beim Ablaufen steht ein Chat für eine Kommunikation in Echtzeit zur Verfügung. Während die Lehrkraft mit allen Gruppen individuell kommunizieren bzw. Nachrichten an alle Teilnehmenden senden kann, können die Schülerinnen und Schüler ebenfalls bei Problemen Nachrichten an die Lehrkraft senden.

- E-Portfolio zur Auflistung aller Ereignisse während der Nutzung des Digitalen Klassenzimmers: Das E-Portfolio übermittelt die Tätigkeiten der Gruppen in der MathCityMap-App in Echtzeit an die Lehrkraft. Sie kann beispielsweise einsehen, welche Lösungen zu welchem Zeitpunkt eingegeben wurden und bei wiederholt falscher Eingabe intervenieren. Auch nach dem Ablaufen des Trails stehen die Daten noch zur Verfügung und können zur Diagnostik, beispielsweise zum Identifizieren wiederkehrender Fehler beim Umrechnen von Größen, herangezogen werden.

MathCityMap@home

Der Kontext des „Homeschoolings“ stellt Lehrende und Lernende während der Corona-Krise vor neue Herausforderungen. Mittels MathCityMap@home können einerseits Schülerinnen und Schüler beim selbstständigen Lernen und Üben von Inhalten unterstützt werden. Andererseits ermöglicht es Lehrkräften einen Überblick über Lernstand und Fortschritt ihrer Schulklassen und bietet eine Möglichkeit zur unmittelbaren Interaktion mit den Lernenden. MathCityMap@home bedient sich weiterhin dem Ursprungskonzept und den zwei Komponenten von MathCityMap. Wie bei der außerschulischen MathCityMap-Nutzung legen Lehrkräfte für ihre Schülerinnen und Schüler Aufgaben im Webportal an und erstellen einen mathematischen Lernpfad. Die Schülerinnen und Schüler laden diesen Trail auf ihr Smartphone und lösen die Aufgaben mithilfe der Hinweise und automatischer Lösungsüberprüfung. Im Unterschied zum Ursprungskonzept werden die Aufgaben von MathCityMap@home jedoch so gestellt, dass sie nicht nur vor Ort, sondern von zu Hause gelöst werden können. Dabei bieten sich insbesondere sogenannte themenbasierte Trails an, also Lernpfade, die ein Unterrichtsthema, z. B. Lineare Funktionen oder Kombinatorik, behandeln und vertiefen.

Als Aufgaben eignen sich bereits bestehende MathCityMap-Aufgaben, bei denen reale Messwerte im Aufgabentext oder im Aufgabenbild ergänzt werden. Zudem ist es möglich, klassische Schulbuchaufgaben oder Problemstellungen in das System einzupflegen. Abbildung 1 zeigt die Aufgabe „Äpfel“ nach Bruder, Büchter und Leuders (2005), welche auf ein strategisches Rückwärtsarbeiten abzielt. Da strategische Hilfestellungen nach Hattie und Timperley (2007) als besonders effektiv gelten, verweist der erste Hinweis auf das notwendige Vorgehen zur Aufgabenlösung (Abb. 1). Die beiden weiteren Hinweise ergänzen jenen prozessorientierten Hinweis um eine inhaltsspezifische Komponente: Durch eine exemplarische Darstellung des ersten Rechenschrittes wird die Strategie des Rückwärtsarbeitens verdeutlicht. Da die Hinweise vom Aufgabenerstellenden selbst formuliert werden, ist es möglich, die Tipps auf die Bedürfnisse der Lerngruppe anzupassen. So können beispielsweise die Aufgabenstellung paraphrasiert, benötigte Formeln angegeben oder Modellierungsannahmen dargestellt werden.

Zusätzlich zu den zuvor eingegebenen Hilfestellungen und Musterlösungen besteht für die Lehrkraft mit dem Digitalen Klassenzimmer bei MathCityMap@home die Möglichkeiten, synchron mit den Schülerinnen und Schülern zu interagieren. Die Nachverfolgung der Laufwege unter Nutzung von

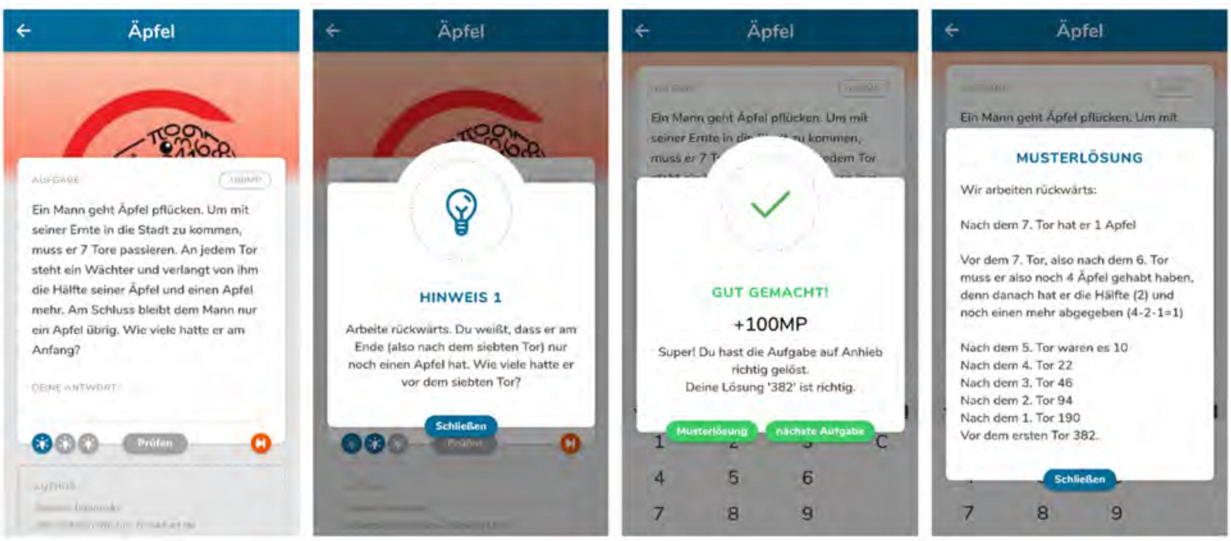


Abbildung 1. Die Aufgabenstellung „Äpfel“ in der MathCityMap-App: Aufgabenstellung, erster Hinweis, Ergebnisvalidierung der Lösung und Musterlösung (von links nach rechts)

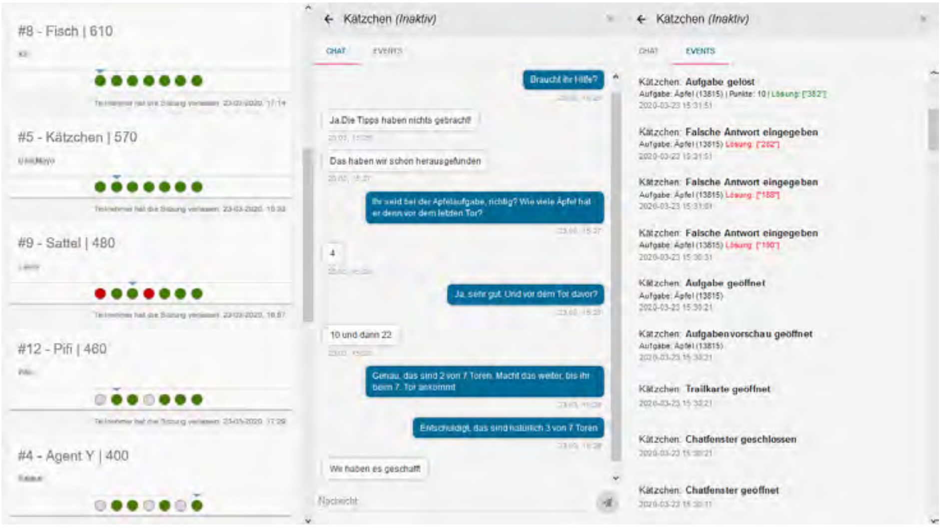


Abbildung 2. Nutzung des Digitalen Klassenzimmers: Gruppenübersicht, Nachrichtenverlauf zwischen Lehrkraft und Lernenden sowie E-Portfolio mit Auflistung der Ereignisse während des Bearbeitungsprozesses (von links nach rechts)

GPS ist natürlich nur beim tatsächlichen Einsatz für außerschulische Lernorte sinnvoll. Der Chat und das E-Portfolio hingegen können im Rahmen des MathCityMap@home-Konzepts auch für den Online-Mathematikunterricht gewinnbringend eingesetzt werden.

In Abbildung 2 ist eine reale und authentische Durchführung eines Mathtrails mit MathCityMap und der Nutzung des Digitalen Klassenzimmers dargestellt. Zum Mathtrail „Reihen und Folgen“ (Code: 012519) wurde für Schülerinnen und Schüler des „Junge Mathe-Adler Frankfurt“-Projektes ein Digitales Klassenzimmer eingerichtet. Der Lehrkraft steht eine Übersicht zur Verfügung, in der die einzelnen Gruppen mit den Teilnehmenden aufgeführt sind und der Bearbeitungstand für die Aufgaben des Mathtrails farblich codiert angezeigt wird (Abb. 2, links). So ist z. B. auf einem Blick für die Lehrkraft ersichtlich, dass die Aufgaben eins und vier den Teilnehmenden Probleme bereitet haben: Der erste und vierte rote Kreis bei der Gruppe „Sattel“ weist darauf hin, dass die Aufgaben falsch gelöst wurden, während die Gruppen „Pifi“ und „Agent Y“ die Aufgaben übersprungen haben, gekennzeichnet durch die Farbe Grau.

Während der Durchführung des Digitalen Klassenzimmers hat die Lehrkraft bei der Auflistung der Events im E-Portfolio (Abb. 2, rechts), mehrere falsche Eingaben der Gruppe „Kätzchen“ bemerkt und mittels der Chatfunktion direkt mit den Lernenden Kontakt aufgenommen. Wie im Chat mit der Gruppe beschrieben (Abb. 2, Mitte), waren die vorher definierten Hinweise für die Lernenden nicht ausreichend. Innerhalb des Chats hat die Lehrkraft anschließend den Lernenden direkt und unmittelbar weitere Unterstützung gegeben. Durch den Chat mit der Lehrkraft konnten die Lernenden anschließend die korrekte Lösung berechnen und somit die Aufgabe lösen.

Seit Mai 2020 ist es für die Lernenden zudem möglich, Fotos und Audio-Dateien an die Lehrkraft versenden. Dadurch wird es für die Lehrkräfte noch einfacher, die Lösungsprozesse der Lernenden nachzuvollziehen und individuell und gezielt Rückmeldung zu geben. Das E-Portfolio kann von der Lehrkraft zudem auch als Diagnose- und Evaluierungswerkzeug genutzt werden. Auf Basis der dort chronologisch aufgeführten Ereignisse, wie z. B. die Bearbeitungszeit der Aufgaben, die Nutzung von Hinweisen und die jeweiligen Eingaben, kann die Lehrkraft im Anschluss an den Mathtrail die Aufgabenstellungen adaptieren, Rückschlüsse über die Fehlvorstellungen der Lernenden ziehen und die Inhalte der nächsten Unterrichtsphasen planen. Umrechnungsfehler können z. B. bei fehlerhaften Potenzen leicht erkannt werden.

Die während der Nutzung des Digitalen Klassenzimmers gespeicherten Daten sind nicht personenbezogenen und werden nach sechs Monaten automatisch gelöscht, sodass das MathCityMap-System DSGVO-konform ist und folglich bedenkenlos im Schulbereich eingesetzt werden kann.

Zusammenfassung

Die exemplarische Darstellung des Digitalen Klassenzimmers verdeutlicht die Möglichkeiten von MathCityMap@home im Rahmen des Online-Mathematikunterrichts. Die vorher definierten und von den Lernenden selbstständig abrufbaren gestuften Hinweise stehen asynchron zur Verfügung. Falls diese nicht ausreichen, kann die Lehrkraft die Lernenden per der Chatfunktion zusätzlich synchron unterstützen. Der individuelle Bearbeitungsprozess ist für die Lehrkraft zudem in Echtzeit beim E-Portfolio einsehbar. Die automatische Lösungsvalidierung gibt den Lernenden unmittelbar Rückmeldung über die Güte ihrer Lösung. Falls ihre Eingabe fehlerhaft ist, können die Lernenden anhand der im System hinterlegten Musterlösung den Lösungsprozess abgleichen und korrigieren. Eine Lehrerin berichtet über ihre Erfahrung bei der Nutzung von MathCityMap@home:

> Ich denke, das Digitale Klassenzimmer hat den Vorteil, dass es den Schülern insofern etwas Struktur gibt, da der Zeitraum, wann die Matheaufgaben bearbeitet werden, festgelegt ist [...] Zum anderen hoffe ich, die Kinder damit motivieren zu können, da alle gleichzeitig an den Aufgaben arbeiten, wie es auch im Unterricht wäre. Auch stehe ich so regelmäßig mit ihnen in Kontakt und sie können mir direkt über die Chatfunktion Fragen zu den Aufgaben stellen. Für mich ist es auch eine Entlastung, da ich vorher alle Aufgaben, die die Schüler mir geschickt haben, korrigiert habe, um zu sehen, wo eventuell noch Schwierigkeiten liegen.

Während MathCityMap bereits seit 2013 entwickelt wird und aktuell über 13 000 Aufgaben auf der ganzen Welt angelegt wurden, ist MathCityMap@home erst mit den Schulschließungen im März 2020 in Folge der Corona-Pandemie entwickelt worden. Stand Mitte Mai 2020 wurden bereits 35 Lernpfade in sechs verschiedenen Sprachen (Deutsch, Englisch, Spanisch, Slowakisch, Indonesisch und Portugiesisch) angelegt, die zusammen mehr als 800 Mal auf ein Smartphone geladen wurden.

Literatur

Bruder, R., Büchter, A., & Leuders, T. (2005). Die „gute" Mathematikaufgabe – ein Thema für die Aus- und Weiterbildung von Lehrerinnen und Lehrern. In G. Graumann (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2005 (S. 139–146). Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Gurjanow, I., Jablonski, S., Ludwig, M., & Zender, J. (2019). Modellieren mit MathCityMap. Praxisbezogene Beispiele zum Modellieren am realen Objekt. In I. Grafenhofer, J. Maaß (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S. 95–105). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of educational research*, *77*(1), 81–112.

Johansen, R. (1988). *Groupware: Computer Support for Business Teams*. The Free Press.

Meyer, H. (2020). Didaktische Ansprüche an Homeschooling und Fernunterricht. Verfügbar unter tinyurl.com/yaq893zm.

Reinhold, F. (2019). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schwabe, G. (2001). Mediensynchronizität – Theorie und Anwendung bei Gruppenarbeit und Lernen. In F. Hesse, H. Friedrich (Hrsg.), *Partizipation und Interaktion im virtuellen Seminar* (S. 111–134). München: Waxmann.

Simon Barlovits, Goethe-Universität Frankfurt
E-Mail: barlovits@math.uni-frankfurt.de

Simone Jablonski, Goethe-Universität Frankfurt
E-Mail: jablonski@math.uni-frankfurt.de

Gregor Milicic, Goethe-Universität Frankfurt
E-Mail: milicic@math.uni-frankfurt.de

Matthias Ludwig, Goethe-Universität Frankfurt
E-Mail: ludwig@math.uni-frankfurt.de

Qualitätskriterien für Mathematik-Erklärvideos

Kriterienraster als Hilfestellung bei der Qualitätsbeurteilung und Produktion

Karl Marquardt

Das Lernen mit Videos hat im Zuge der Corona-bedingten Schulschließungen massiv Auftrieb erhalten. Auch der Verfasser dieses Artikels hat in der Isolationszeit seine Schulklassen durch mit einfachen Mitteln selbstproduzierte YouTube-Videos weiter unterrichten können (siehe KMarQ, 2020). Insbesondere Mathematik-Erklärvideo stehen sicher mit an vorderster Stelle, wenn sich Schüler/-innen zuhause eigenständig Wissen aneignen wollen oder sollen: Auf Online-Videoportalen erreichen viele dieser Videos weltweit Klickzahlen im Millionenbereich. Allerdings fehlen etablierte Werkzeuge, um die gesamtheitliche Qualität der Videos beurteilen und vergleichen zu können. Um diesem Missstand zu begegnen, wird im folgenden Artikel ein praktisch erprobtes Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos vorgestellt.

Wozu und wie die Qualität von Erklärvideos messen?

Im schulischen Bereich wurden Videos als Bildungsmedium spätestens mit der *Khan Academy* bekannt, deren Gründer 2006 begann, mit einfachen Mitteln Video-Lektionen zu schulmathematischen Inhalten zu erstellen und hochzuladen (Khan Academy, 2006). Mittlerweile hat die Khan Academy ein eigenes Bildungskonzept entwickelt und betreibt die weltweit größte freie, videobasierte Bildungsplattform (Khan Academy, 2020). *Erklärvideos* dieser oder ähnlicher Machart haben sich in den letzten Jahren auch im deutschsprachigen Raum etabliert und erreichen Hunderttausende von Aufrufen. Lehrenden geben die Videos die Chance, Lernstoff fassbarer, persönlicher und wirklichkeitsähnlicher – handelnd *und* sprechend – zu vermitteln; Lernenden kommt diese Art der Vermittlung entgegen. Und so ist die Zahl und Vielfalt der Videos heute unüberschaubar.

Auf diesen Tatsachen fußt eine grundlegende Annahme des Beurteilungsrasters, das hier vorgestellt werden soll: Es ist offensichtlich, dass (Mathematik-)Erklärvideos in der Fach- und Mediendidaktik nicht länger ignoriert werden dürfen, sondern zum einen als *ernstzunehmendes*, zum anderen als *beliebtes* Lernmedium und daher als Chance zu verstehen sind. Daraus folgt: Es muss ein wissenschaftliches Interesse an der *Qualität* der Videos geben. Auf Fragen wie ‚Welches Mathematik-Erklärvideo ist für meine Zwecke das beste?', ‚Welches Video kann ich meinen Schüler/-innen für zuhause weiterempfehlen?' oder ‚Worauf sollte ich selbst bei der Produktion eines Mathematik-Erklärvideos achten?' sollte es wissenschaftlich begründete Antworten geben.

Diesem Gedanken folgen zwei an der Universität Wien veröffentlichte Diplomarbeiten. Zunächst wurde das Ziel verfolgt, ein *Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos* zu entwickeln und auf diesem Wege die Qualität der Videos vergleichbar zu machen (Marquardt, 2016). Darauf aufbauend wurden in einer zweiten Arbeit das genannte Raster in der Praxis erprobt und auf der dadurch gewonnen empirischen Grundlage überarbeitet sowie sinnvolle Anwendungssituationen diskutiert (Fuchs, 2018).

Kriterienraster als Beurteilungswerkzeug für schulbezogene Medien

Bedarf, die Qualität von Bildungsmedien (*innerhalb* eines Medienformats) zu vergleichen, gibt es nicht erst seit Kurzem. Verfahren zur operationalisierten qualitativen Beurteilung existieren für Schulbücher längst unter dem Begriff *Schulbuchraster*. In den USA wurden früher bereits sogenannte *Checklists* in Rundfragen und Interviews eingesetzt, wobei Meinungen zu bestimmten Fragen gesammelt wurden (Bamberger, 1995, S. 58). Als Weiterentwicklung der amerikanischen Checklists lassen sich die *Schulbuchraster* im deutschsprachigen Raum betrachten, die an einzelnen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen ebenfalls für die Beurteilung von Schulbüchern entwickelt wurden und werden, durch theoretisch stärker abgesicherte Kriterien aber eine höhere Objektivität gewährleisten sollen (ebd., S. 60). Einen Überblick über fünf bedeutende Schulbuchraster bietet die genannte Diplomarbeit (Marquardt, 2016, S. 33ff).

Die angesprochenen Schulbuchraster verstehen sich allerdings als fächerübergreifend. Im spezifischeren Bereich der Mathematikschulbücher führte die weitverbreitete Beforschung von Einzelaspekten (siehe z. B. Boyer, 2003, S. 57f; Astleitner et al., 1998, S. 9) leider noch nicht zu einer aspekteübergreifende Theorie mathematikspezifischer Schulbuchforschung. Daher gibt es auch keine bekannten Schulbuchraster bzw. theoriefundierte, durchoperationalisierte, vollständige Kriterienkataloge speziell für das Fach Mathematik. Es finden sich in diesem Zusammenhang lediglich zuweilen „Checklists". Diese sind jedoch zum einen kaum operationalisiert oder theoriefundiert. Zum anderen beschränken sie sich oftmals auf Lehrwerke für die Primarstufe (vgl. etwa Krauthausen & Scherer, 2007, S. 262f). Nur einige wenige mathematikspezifische Kriterienkataloge stellen gewissermaßen Ausnahmen dar (vgl. etwa Marquardt, 2016, S. 39ff).

Trotz aller Probleme und Grenzen, die die verschiedenen Kriterienkataloge für Schulbücher mit sich bringen, bietet es sich an, bei der Entwicklung eines Beurteilungswerkzeugs für Mathematik-Erklärvideos nicht bei null anzufangen, sondern auf Bestehendem aufzubauen:

> Dabei kann und sollte die Erweiterung des Gegenstandsbereiches von Schulbuchforschung zur (Schul-)Medienforschung führen, die sich nicht mehr allein auf das Medium Schulbuch konzentriert, sondern die gesamte Medienpalette bis hin zum Computer zu berücksichtigen versucht. (Laubig et al., 1986, S. 28f)

Es fällt auf, dass also bereits sehr früh die Notwendigkeit erkannt wurde, auch *digitale* schulbezogene

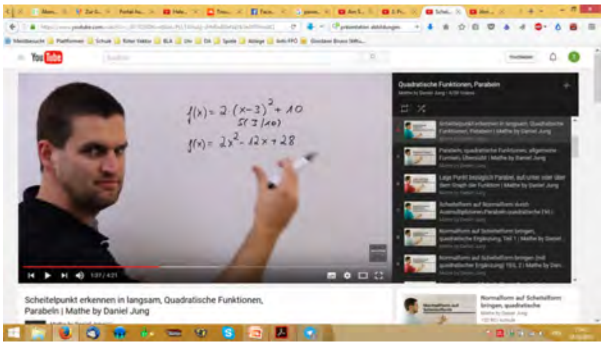


Abbildung 1. Beispiel für ein Erklärvideo im Whiteboard-Format (Mathe by Daniel Jung, 2014)

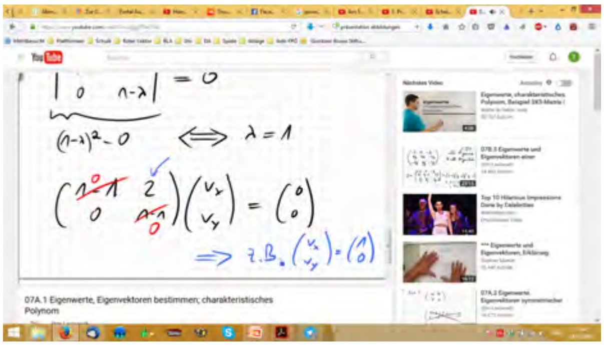


Abbildung 2. Beispiel für ein Erklärvideo im Screencast-Format (Jörn Loviscach, 2012)

Medien zu untersuchen. Daher ist es überraschend, dass sich kaum Beiträge finden, die explizit mit dem Medium (Schulstoff-)Erklärvideo zu tun haben. Ausführliche Suchen nach Kriterienkatalogen oder zumindest didaktischen Reflexionen zu Erklärvideos verliefen zumindest im Jahr 2016 weitestgehend ergebnislos.

Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos nach Marquardt

Grundlagen

Trotz der defizitären Lage der Schulbuchforschung (Laubig et al., 1986, S. 3f; Fuchs, 2011, S. 7 und 16) und der Forschung an Erklärvideos wurde der Versuch unternommen, auf Basis der Schulbuchforschung und Medienwissenschaften ein Kriterienraster zu entwickeln, mit dem die Qualität von Erklärvideos beurteilt werden kann.

Dabei wurde zunächst das Spezifikum „Mathematik-Erklärvideo“ näher untersucht: a) Welche Implikationen ergeben sich aus der Verschiedenheit der Nutzungstypen und Motivlagen unter den Nutzer/-innen? b) In welche Typen lassen sich die Produktionsformate der Videos unterscheiden? (a) Bereits bei Schulbüchern muss man von einem breiten Spektrum im Nutzungsverhalten (Rezat, 2009, S. 320; Marquardt, 2016, S. 10f) und einem daraus folgenden vom lernenden Subjekt bestimmten, relativen Qualitätsbegriff ausgehen. Daraus folgt eine erste wichtige Implikation, die auch für Erklärvideos gilt: Die Qualitätsbewertung muss von persönlicher Gewichtung bzw. Gewichtungsprofilen abhängen. b) Zudem können Erklärvideos in verschiedenen Formaten produziert werden. Verbreitet sind Formate, bei denen eine Tafel oder ein Whiteboard zur Darstellung benutzt wird, aber auch Videos im Khan-Style- (bzw. Screencast-)Format, also ein „digital tablet drawing format popularized by Khan Academy“ (Guo et al., 2014, S. 1). Vergleichbar dazu ist auch das klassische Stift-und-Papier-Format, bei denen das Schreiben mit einem Stift auf Papier abgefilmt wird. Und schließlich werden Videos auch häufig mithilfe der Präsentationsprogramme PowerPoint und Prezi produziert (einen Überblick über die Produktionsformate mit Beispielen bietet Marquardt, 2016, S. 12–14.)

Es gibt Hinweise darauf, dass die verschiedenen Produktionsformate unterschiedlich hohes „engagement“ der Lernenden erzeugen. Unter *engagement* wird die Intensität verstanden, mit der sich die Lernenden mit dem in Videos präsentierten Material beschäftigen (Guo et al., 2014, S. 1). So konnte in einer groß angelegten empirischen Studie gezeigt werden, dass zumindest bei tutorialartigen Videos (also „step-by-step problem solving walkthroughs“) eine Produktion im Khan-Style zu höherem *engagement* führt als eine im PowerPoint-Format. Generell scheint freie, natürliche Handschrift eher Interesse zu wecken als computergenerierte Schrift und es wird empfohlen, Bewegung und einen visuellen „flow“ einzubringen sowie den Sprechtext eher zu improvisieren als abzulesen (ebd., S. 2). Weitere Resultate betreffen z. B. auch Empfehlungen für die maximale Länge eines Videos und sind ebenfalls in den medienwissenschaftlichen Grundlagenteil eingeflossen.

Als ergiebig hat sich neben dem zuvor zitierten Beitrag auch Mayers *kognitive Theorie multimedialen Lernens* herausgestellt, die empirisch abgesicherte Prinzipien im Sinne von Empfehlungen für die Gestaltung multimedialer Lernumgebungen beinhaltet (Mayer, 2009; ausführlicher Mayer, 2014). Eines dieser Prinzipien ist bspw. das Personalisierungsprinzip, demzufolge ein persönlicher Sprachstil, bei dem Lernende direkt angesprochen werden, besser geeignet ist „als ein sachlicher Sprachstil“. Statt Formulierungen wie ‚Die Grafik stellt … dar‘ sollten etwa Formulierungen der Art ‚In dieser Grafik sehen Sie …‘ oder ‚In dieser Grafik siehst du …‘ verwendet werden. Kognitive Prozesse werden dabei dadurch angeregt, dass „personalisierte Sprache [...] der natürlichen Kommunikation mit einem

Gegenüber ähnlicher" ist (Niegemann et al., 2008, S. 268f).

Wie bereits angesprochen, wurde als eine weitere Grundlage für die Entwicklung des Mathematikvideo-Beurteilungsrasters die Schulbuchforschung gewählt. Neben den konkreten Schulbuchrastern und fachspezifischen Kriterienkatalogen kann die klassische Schulbuchforschung zur Kategorienbildung hinsichtlich der inhaltlichen Dimensionen, Forschungstypen und Strukturebenen auch beim Untersuchungsgegenstand ‚Erklärvideo' beitragen, steuert aber auch methodische Überlegungen bei. Beispielsweise lässt sich die Unterteilung der Schulbuchforschung in prozess-, produkt- und wirkungsorientierte Forschung (Weinbrenner, 1995, S. 22–26) für die Erforschung von Erklärvideos übernehmen (Marquardt, 2016, S. 67). Diese Kategorisierung macht in den Augen des Verfassers offenkundig, dass mit der Entwicklung und Verwendung von Beurteilungsrastern die Möglichkeiten in der Beforschung von Mathematik-Erklärvideos längst nicht erschöpft sind.

Und schließlich hält auch die Mathematikdidaktik Prinzipien und Überlegungen bereit, die für das Untersuchen von Mathematikvideos relevant sind. So lässt sich für das hier geschilderte Unterfangen beispielsweise das operative Prinzip nutzen, demzufolge (mathematische) Objekte anhand der an ihnen durchführbaren Handlungsgruppierungen deutlich gemacht werden sollen (Krauthausen & Scherer, 2007, 145f). Die Leitfrage dabei ist: „Was geschieht mit …, wenn …?" (Wittmann, 1981, S. 79) Dies ist selbstverständlich für jede Form der Vermittlung von Mathematik relevant.

Damit wurde ein Abriss über die Grundlagen gegeben, auf deren Stützen ein Beurteilungsraster für Erklärvideos entwickelt werden konnte.

Rahmenbedingungen und Vorgangsweise bei der Entwicklung des Rasters

Der hier vorgestellte Ansatz zur Evaluation von Mathematik-Erklärvideos folgt vornehmlich dem Forschungsansatz des Bielefelder Schulbuchrasters (Laubig et al., 1986). Selbiger wird von einem der Autor/-innen als pragmatisch, fachorientiert, primär inhaltsanalytisch und mehrdimensional charakterisiert (Weinbrenner, 1995). Pragmatisch sind beide Raster insofern, als sie von der konkreten Situation der Nutzer/-innen ausgehen und daher für unterschiedliche Gewichtungen offen sind. Ein pragmatischer Ansatz erscheint mit Blick auf das Bielefelder Schulbuchraster allerdings auch ironisch, da dessen Kriterienkatalog bis zu 480 Items umfasst. Dass sich aus diesem Detailreichtum sowie den „doch sehr hohe Ansprüche stellenden Erörterungen" eine Überforderung für Lehrkräfte, staatliche Stellen u. a. ergibt, liegt auf der Hand (Bamberger, 1995, S. 60f). Der Erfolg der Schweizer Evaluationsplattform für Schulbücher *levanto* (Wirthensohn, 2012) zeigt, dass ein Kriterienkatalog im Ausmaß von 58 bis 78 Kriterien indes praxistauglich sein kann, sodass hierdurch eine Orientierung für einen sinnvollen Umfang gegeben war.

Da bei der Beurteilung von Erklärvideos pragmatische Gesichtspunkte zentral sind, wurde vom Reutlinger Schulbuchraster (Rauch & Tomaschewski, 1986) zudem die Idee der Kennzeichnung einer Auswahl von *Minimalkriterien* übernommen, die für eine schlüssige, authentische Beurteilung in jedem Fall unverzichtbar sind. In weiterführenden Arbeiten sollte die konkrete Auswahl der Minimalkriterien objektiv begründet werden, da sie in der Erstfassung einer subjektiven Einschätzung unterliegt.

Für die Auswertung im hier vorgeschlagenen Verfahren scheinen Polar- und Barcharts besonders geeignet. Diese grafischen Darstellungsformen von Ergebnissen haben sich in der Evaluationsplattform *levanto* ebenfalls bewährt (Wirthensohn, 2012). In den Polarcharts werden sowohl die Bewertungen als auch die Gewichtungen eingetragen, sodass schnell ersichtlich wird, ob die Umsetzung eines Merkmals seiner Relevanz entspricht.

Die Entwicklung des Erklärvideo-Beurteilungsrasters verlief in mehreren Schritten, wobei wie beschrieben sowohl medienwissenschaftliche und mathematikdidaktische Gesichtspunkte als auch solche aus der allgemeinen und mathematikspezifischen Schulbuchforschung berücksichtigt wurden (Marquardt, 2016). Dabei war auf Unterschiede in der Funktionalität von Schulbüchern und Erklärvideos zu achten. Das betrifft bspw. Fragen der Lehrplantreue oder die „Verwendbarkeit als Lehr- und Nachschlagewerk", aber auch hinsichtlich eines ausreichenden Angebots an Aufgabenstellungen und Übungsmaterial müssen an Erklärvideos andere Erwartungen gerichtet werden als an ein Schulbuch (ebd., S. 63f). Insofern waren diverse Anpassungen an das Medium Erklärvideo vonnöten.

Der Kriterienkatalog

Das Beurteilungsraster für (Schul-)Mathematik-Erklärvideos ist das Resultat dieses Prozesses und liegt in Tabellenform als ausführlicher Kriterienkatalog sowie als verkürzter Raster mit einfacher Wertungsmöglichkeit vor (Marquardt 2016, S. 76ff). Die erste Fassung führt alle Items aus und gibt zu jedem Kriterium auch die entsprechenden Quellenbezüge an; in letzterer können schließlich in den jeweiligen Kästchen die Wertungen und Gewichtungen angekreuzt bzw. Beschreibungen eingetragen werden. Jedem Item sind Hinweise in Form von Anmerkungen und hilfreichen Fragestellungen beigefügt, um das jeweilige Kriterium möglichst

2.6 (*)	*Begründungen von Aussagen*	Sätze und Aussagen werden ausreichend begründet.	(Mikro- und Mesoebene) Sowohl die exemplarische Demonstration mathematischer Strenge als auch Plausibilitätsbetrachtungen sind als Mittel zur Begründung logischer Zusammenhänge möglich. Videoübergreifend sollten beide Herangehens-	A8	

Abbildung 3. Ausschnitt aus dem vollständigen Kriterienkatalog (Marquardt, 2016, S. 81)

Kriterien		Einschätzung					Gewichtung				
		0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
2.1	(*) Fachlich-didaktische Angemessenheit des Videos										
2.2	Videoübergreifende fachl.-didakt. Angemessenheit										
2.3	(*) Erfahrungsnahe Begriffsbildung										
2.4	(*) Veranschaulichung										
2.5	Vermeidung unnötiger Formalismen										

Abbildung 4. Ausschnitt aus dem Erklärvideoraster mit Wertungsmöglichkeit (Kurzfassung) (Marquardt, 2016, S. 90)

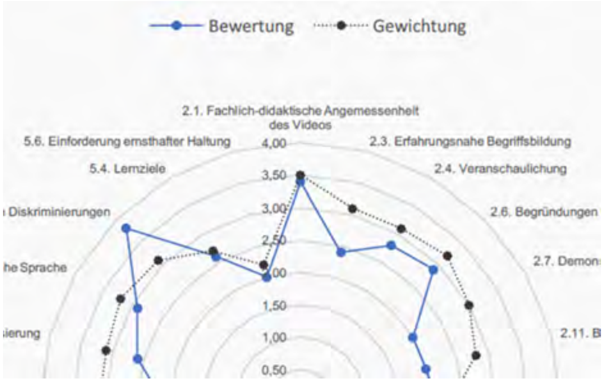


Abbildung 5. Ausschnitt aus einem Polarchart zu einem der Videos (Fuchs, 2018, S. 40)

eindeutig und genau einschätzen und bewerten zu können.

Insgesamt haben sich mit dem verwendeten Verfahren 17 beschreibende Merkmale und 46 eigentliche Kriterien ergeben, von denen 24 als Minimalkriterien definiert wurden. Im Detail teilen sich die Items auf folgende fünf Kategorien auf:

1. Allgemeiner Bereich (beschreibend)
2. Fachdidaktisch-inhaltlicher Bereich
3. Fachdidaktisch-methodischer Bereich
4. Medienwissenschaftlich-technischer Bereich
5. Pädagogischer Bereich

Es muss betont werden: Die Evaluation mit dem Raster soll keine Endpunktzahlen ‚ausspucken', deren Vergleich zu einer unmittelbaren Entscheidung führen muss. Bereits bei den Schulbuchrastern war im Idealfall die quantitative Beurteilung nur eine Hilfestellung für eine möglichst objektive Entscheidung per Diskussion oder Gutachten. Für die Bewertung von Mathematik-Erklärvideos wird dies ebenfalls als Idealziel angenommen.

Verbessertes Beurteilungsraster nach Fuchs

In ihrer Diplomarbeit führt Theresa Fuchs eine erste praktische Erprobung der Minimalversion des vorgestellten Beurteilungsrasters in Hinsicht auf dessen Qualität und Anwendbarkeit durch. Gleichermaßen war es das erklärte Ziel, „herauszufinden, inwiefern es sich für Lehrende Allgemeinbildender höherer Schulen (AHS) zur Bewertung von Erklärvideos für den Mathematikunterricht eignet" (Fuchs, 2018, S. 13).

Zu diesem Zweck wurde als Untersuchungsmethode ein Mixed-Methods-Design angewandt. Zunächst wurde „die Qualität fünf verschiedener Mathematikvideos zum selben Thema unabhängig voneinander" durch mehrere Gymnasiallehrer/-innen mithilfe des Beurteilungsrasters eingeschätzt (ebd., S. 24). Dabei „wird in einem ersten Schritt die durchschnittliche Bewertung bzw. Gewichtung der einzelnen Videos" in Polarcharts gegenüberstellend veranschaulicht. Wie zuvor ausgeführt,

> orientiert sich die Qualität eines Videos an der zugehörigen Gewichtungslinie. D. h. wenn die Bewertungslinie außerhalb der Kontur der Gewichtung – also näher am äußeren Kreisrand – liegt, sind die Anforderungen an das Video abgedeckt und es handelt sich um ein ‚gutes Video'. (Ebd., S. 36)

Zudem wurden auch die „(Häufigkeits-)Verteilungen zur Übereinstimmung von ausgewählten Items" analysiert (ebd., S. 36).

Gestützt auf die Ergebnisse aus diesem quantitativen Untersuchungsteil wurde in einem zweiten Teil mit denselben Lehrkräften eine Gruppendiskussion im Sinne einer qualitativen Befragung durchgeführt. Dabei wurde u. a. sowohl Feedback zu den Items eingeholt (Verständlichkeit, Vollständigkeit etc.) als auch über die Sinnhaftigkeit des Rasters und das Verständnis ausgewählter Kriterien, die sich im quantitativen Teil als problematisch herausgestellt haben, gesprochen (vgl. ebd., S. 33). Gründe dafür waren einerseits „Formulierungsschwächen bzw. nicht eindeutige Beschreibungen der Items", andererseits „nachlässiges Lesen durch die Testpersonen" (ebd., S. 65).

Im quantitativen Untersuchungsteil hat sich gezeigt, dass die Meinungen der Rating-Teilnehmer/-innen bei durchschnittlich schlechter eingeschätzten Videos stärker auseinandergingen als bei durchschnittlich als gut eingeschätzten. Insgesamt gab es starke Einschätzungsunterschiede bei vier bis fünf Kriterien (vgl. ebd., S. 49). Eine qualitative Analyse der Gruppendiskussion hat indes gezeigt, „dass es bei insgesamt acht der 24 Kriterien zu Interpretations- und Verständnisschwierigkeiten gekommen ist" (ebd., S. 53). Hieraus haben sich Verbesserungsvorschläge für mehrere dieser Kriterien ergeben.

Aus der Analyse des quantitativen und qualitativen Untersuchungsteils hat sich insgesamt ein „aktualisierter Kriterienkatalog zur Beurteilung von Mathematik-Erklärvideos" ergeben (ebd., S. 75ff).

Pragmatische Überlegungen zur Anwendbarkeit

Im weiteren Verlauf der geleiteten Gruppendiskussion stellten die Proband/-innen zudem fest,

> [...] dass das Raster zu viele Kriterien umfasst, um als geeignetes Instrument für die Einschätzung von Mathematik-Erklärvideos anwendbar zu sein. Sie können sich allerdings vorstellen, dass der Umfang für eine andere Zielgruppe durchaus angemessen sein kann. Denkbar sind hier Fachexpertengruppen von Schulbuchverlagen und Schulbehörden [...], die sich eine objektive und fundierte Beurteilung von Mathematik-Erklärvideos wünschen. (ebd., S. 66)

Diese Einschätzung erscheint dem Verfasser des Beurteilungsrasters nachvollziehbar. Angesprochen wird das Spannungsfeld *Differenziertheit versus praktische Verwendbarkeit*, das erfahrungsgemäß insbesondere für Schulpraktiker/-innen vermutlich nicht zufriedenstellend aufzulösen ist, wiewohl die Schulbuch-Evaluationsplattform *levanto* tatsächlich von Schweizer Lehrmittelkommissionen verwendet wird (Wirthensohn, 2012). Soll das Video-Beurteilungsraster für Lehrkräfte realistisch verwendbar sein, müsste der Kriterienkatalog erheblich gekürzt werden, so die Diskussionsteilnehmer/-innen. Die Lehrkräfte gaben an, Entscheidungen für oder gegen Videos im Regelfall zudem intuitiv zu treffen. Ein sinnvolles Einsatzszenario könnte allerdings sein, das Beurteilungsraster als eine Art Checkliste für die eigene Videoproduktion zu verwenden, „die zeigt, auf welche Kriterien beim Anfertigen eines Erklärvideos für das Fach Mathematik zu achten ist". Eine weitere Möglichkeit wäre außerdem eine „Prüfung der Qualität von mathematikbezogenen Lernvideos aus dem Internet durch Fachexpertinnen und -Fachexperten mit einer anschließenden Reihung", wobei die erstellte Rangliste anschließend für Lehrende zugänglich sein sollte (Fuchs, 2018, S. 72–74).

Fazit

Das vorliegende Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos ersetzt nicht Qualitätsüberlegungen, die Akteur/-innen und Lernende selbst vornehmen müssen. Welche Kriterien von wie großer Bedeutung sind, das kann nicht vorgegeben werden. Interdisziplinarität etwa kann für Lehrende ein erstrebenswertes Merkmal sein, während ein Schüler, der nur ‚schnell' die Kettenregel verstehen will, sich vielleicht weniger für ihre Anwendungsmöglichkeiten in anderen Disziplinen interessieren wird. Das Raster versucht aber möglichst vollständig relevante Merkmale sichtbar zu machen und zu benennen, deren Reflexion dann bei den Evaluator/-innen liegt. Erst durch die Beurteilung anhand derselben Kategorien und Items werden verschiedene Videos in ihrer Qualität und Nutzbarkeit vergleichbar.

Der Kriterienkatalog lässt sich jedenfalls auch als Checkliste verstehen, an der man sich bei der Produktion von Mathematik-Erklärvideos orientieren kann. An dieser Stelle soll noch einmal besonders auf die Ergebnisse und daraus folgenden Empfehlungen der groß angelegten edX-Studie von Guo et al. (2014) verwiesen werden, die eine gute allgemeine Orientierung zu grundlegenden Produktionsfragen bietet.

Um belastbare Aussagen über die Anwendbarkeit des Rasters im Allgemeinen und über die Validität und Qualität der konkreten Kriterien treffen zu können, wären aber jedenfalls noch weiterführende Untersuchungen bzw. weitere Bemühungen um theoretische Absicherung einiger Kriterien und ihrer Auswahl vonnöten. In diesem Sinne ist mit dem vorliegenden Beurteilungsraster die Hoffnung verbunden, dass dieses als ein Ausgangs- oder Orientierungspunkt verstanden wird, nicht als abgeschlossene Arbeit. Das Raster weiterzuentwickeln und zu testen erscheint dem Verfasser weiterhin notwendig.

Literatur und videobezogene Quellen

Astleitner, H. (2012). Schulbuch und neue Medien im Unterricht: Theorie und empirische Forschung zur Hybridisierung und Komplementarität. In J. Doll, K. Frank, D. Fickermann, K. Schwippert (Hrsg.), *Schulbücher im Fokus: Nutzungen, Wirkungen und Evaluation* (S. 101–111). Münster: Waxmann.

Bamberger, R. (1995). Methoden und Ergebnisse der internationalen Schulbuchforschung im Überblick. In R. Olechowski (Hrsg.), *Schulbuchforschung* (S. 46–94). Frankfurt am Main: Lang.

Boyer, L. (2003). Schulbuchforschung als gemeinsame Aufgabe von Erziehungswissenschaft, Fachwissenschaft und Fachdidaktik in Österreich. In W. Wiater (Hrsg.), *Schulbuchforschung in Europa – Bestandsaufnahme und Zukunftsperspektive* (S. 55–64). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Fuchs, E. (2011). Aktuelle Entwicklungen der schulbuchbezogenen Forschung in Europa. *Bildung und Erziehung, 64*(1), 7–22. doi:10.7788/bue.2011.64.1.7

Fuchs, T. (2018). Praktische Erprobung des Marquardt-Beurteilungsrasters für Mathematik-Erklärvideos (Diplomarbeit). Universität Wien. Verfügbar unter tinyurl.com/ybj5ngmw

Guo, P. J., Kim, J., & Rubin, R. (2014). How video production affects student engagement: An empirical study of MOOC Videos. In *L@S '14 Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference* (S. 41–50). New York, NY: ACM. doi:10.1145/2556325.2566239

Khan Academy. (2006). *Multiplication 7: Old video giving more examples | Arithmetic | Khan Academy* [Videodatei]. youtu.be/_k3aWF6_b4w

Khan Academy. (2020). Homepage. www.khanacademy.org

KMarQ. (2020). YouTube, Kanalübersicht. www.youtube.com/channel/UClIlNbhY4N2CK69uoIL14pw

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akad. Verlag.

Laubig, M., Peters, H., & Weinbrenner, P. (1986). *Methodenprobleme der Schulbuchanalyse: Abschlußbericht zum Forschungsprojekt 3017 an d. Fak. für Soziologie d. Univ. Bielefeld in Zsarb. mit d. Fak. für Wirtschaftswiss.* Bielefeld.

Loviscach, J. (2012). *07A.1 Eigenwerte, Eigenvektoren bestimmen; charakteristisches Polynom* [Videodatei]. youtu.be/ioggTPAe1GU

Marquardt, K. (2016). *Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos: Chancen, Grenzen und Durchführung einer Operationalisierung mittels Resultaten aus der Schulbuchforschung (Diplomarbeit).* Universität Wien. Verfügbar unter tinyurl.com/y87hmhm3

Jung, D. (2014). *Scheitelpunkt erkennen in langsam, Quadratische Funktionen, Parabeln | Mathe by Daniel Jung* [Videodatei]. youtu.be/_GCYDJ3DN-w

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia Learning* (2. Aufl.). New York, NY: Cambridge Univ. Press.

Mayer, R. E. (Hrsg.). (2014). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2. Aufl.). New York, NY: Cambridge Univ. Press.

Niegemann, H. M., Domagk, S., Hessel, S., Hein, A., Hupfer, M. & Zobel, A. (2008). *Kompendium multimediales Lernen*. Berlin: Springer.

Rauch, M. & Tomaschewski, L. (1986). *Reutlinger Raster zur Analyse und Bewertung von Schulbüchern und Begleitmedien*. Reutlingen.

Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers – eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Weinbrenner, P. (1995). Grundlagen und Methodenprobleme sozialwissenschaftlicher Schulbuchforschung. In R. Olechowski (Hrsg.), *Schulbuchforschung* (S. 21–45). Frankfurt am Main: Lang.

Wirthensohn, M. (2012). LEVANTO – Ein Tool zur praxisorientierten Schulbuchevaluation. In J. Doll, K. Frank, D. Fickermann & K. Schwippert (Hrsg.), *Schulbücher im Fokus: Nutzungen, Wirkungen und Evaluation* (S. 199–213). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. Ch. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.

Karl Marquardt, Islamisches Realgymnasium Wien
E-Mail: karl.marquardt1@bildung.gv.at

Videos für die Fernlehre

Von einem der auszog, Videos zu produzieren

Benjamin Rott

Die Corona-Krise und vor allem die „Social Distancing“-Maßnahmen haben in Bezug auf institutionelle Lehr-Lernprozesse Vieles in Bewegung gesetzt. Insbesondere im Bereich der Digitalisierung gab es große Entwicklungssprünge. Auf einmal ist es zumindest an Universitäten (problemlos?) möglich, ja sogar vorgeschrieben, Lehre auf Distanz durchzuführen; und sogar Prüfungen bis hin zu Disputationen werden digital abgehalten. Die konkrete Umsetzung unterscheidet sich von Standort zu Standort und von Lehrperson zu Lehrperson: Manche streamen Vorlesungen live in den „Äther“, andere stellen vorbereitete Videos oder Audiodateien zu Verfügung, manche vielleicht auch nur Texte und diskutieren dann in Videokonferenzen mit Studierenden über die Inhalte (ganz im Sinne von Flipped-Classroom-Konzepten).[1] All dies passiert in der Regel in geschützten Räumen: Videokonferenzen sind verschlüsselt und die Plattformen, auf denen Dateien zur Verfügung gestellt werden sind schon aus Copyright-Gründen passwortgeschützt.

Zusätzlich zu den genannten Ausprägungen von Fernlehre, die – wie gerade angedeutet – in der Regel auf einen bestimmten Empfängerkreis eingeschränkt sind, gibt es (mindestens) einen weiteren Bereich digitaler Information und Wissensvermittlung, der definitiv nicht neu ist, sich in der aktuellen Situation aber noch schneller entwi-

[1] Auf die schon fast zur Glaubensfrage hochstilisierte Wahl der Plattform – ob nun Zoom, Teams oder BigBlueButton – möchte ich hier gar nicht weiter eingehen.

ckelt und verbreitet als bisher schon: öffentlich zugängliche Videos. Die Vielfalt ist fast grenzenlos und reicht von mehrstündigen Gesprächsrunden und prägnanteren, kürzeren Vorträgen (beispielsweise „TED-Talks“), die oft vor Publikum gehalten und nachträglich ins Internet gestellt werden, über Wissenschafts-Podcasts (wie das Coronavirus-Update mit Christian Drosten) bis hin zu (in der Regel kurzen) Erklärvideos, die ausschließlich für Videoplattformen erstellt werden. Schaut man sich nur letztere an, gibt es immer noch ein breites Spektrum von aufwändig produzierten und animierten Sendungen (beispielsweise 3blue1brown) bis hin zu eher kalkülorientierter Nachhilfe, bei der Rechenverfahren an Tafeln vorgeführt werden (Mathe by Daniel Jung oder Lehrer Schmidt).

Mein subjektiver Eindruck dazu ist, dass es sehr viele Videos zu Fachinhalten gibt (die genannten Beispielkanäle behandeln alle vornehmlich mathematische Inhalte; in Nachbardisziplinen sieht es mit beispielsweise MinutePhysics oder maiLab ähnlich aus); es gibt aber kaum Angebote zu fachdidaktischen Inhalten, d. h. Videos, in denen Inhalte vermittelt werden, wie man sie als zukünftige Lehrerin oder zukünftiger Lehrer aus Fachdidaktik-Büchern oder in entsprechenden Vorlesungen oder Seminaren vermittelt bekommt.

Diesem Desiderat möchte ich mich mit dem hier vorgestellten Projekt widmen. Denn natürlich gibt es auch mathematikdidaktische Theorien und Erkenntnisse, die entsprechend aufbereitet und verbreitet werden können. Gestartet wurde ein YouTube-Kanal, für den bereits erste Videos produziert wurden, in denen mathematikdidaktisches Basiswissen vermittelt wird. Diese Videos sind bewusst für alle öffentlich zugänglich, damit nicht nur meine Studierenden etwas davon haben, sondern auch Kolleginnen und Kollegen sie in der Lehre einsetzen können oder interessierte Lehrerinnen und Lehrer einen Blick darauf werfen können. Im Gegensatz zum Lesen von Büchern und Artikel können Lehrinhalte auf diese Weise auch über audiovisuelle Kanäle wahrgenommen werden; im Gegensatz zum Vorlesungsstream können die Inhalte auch zu anderen Zeitpunkten und von mehr Personen als den live Anwesenden gesehen werden; auch können sie mehrfach aufgerufen und pausiert werden etc.

Ich habe allerdings nicht vor, eine Vorlesung zu den „Grundlagen der Mathematikdidaktik“ komplett einzusprechen; ein Anspruch auf Vollständigkeit besteht erst recht nicht. Die Videos sollen auf bestimmte Themen neugierig machen, überschaubare Inhalte ansprechen und dabei nach Möglichkeit 15 min nicht deutlich überschreiten sowie nicht zu viel Vorwissen verlangen; eine vertiefende Auseinandersetzung mit den Inhalten ist und bleibt weiterführender Literatur vorbehalten.

Ein weiteres, entscheidendes Konzept des Videokanals ist, dass nicht alle Inhalte von ein und derselben Person vorgetragen werden. In Anlehnung an den YouTube-Kanal „numberphile“ werden Vorträge von und Gespräche mit Kolleginnen und Kollegen zu bestimmten Themen eingebunden. Auf diese Weise kommen Personen zu Wort, die ihre Forschungs- und Interessengebiete vertreten und die Zuschauenden erhalten auf diese Weise sehr authentische Einblicke in die jeweiligen Inhalte. Beispielsweise habe ich mit Esther Brunner ein Gespräch zum Argumentieren und Begründen und mit Regina Bruder eines zum mathematischen Problemlösen aufgezeichnet; und Gilbert Greefrath hat einen Vortrag zum mathematischen Modellieren beigesteuert. Vielleicht lässt sich mithilfe solcher Videos unterschwellig auch vermitteln, dass es sich bei der Mathematikdidaktik um eine forschende Disziplin handelt, mit Expertinnen und Experten, die sich auf bestimmte Fragestellungen spezialisiert haben – auch wenn Vertreterinnen und Vertreter unserer Zunft selten in Talkshows eingeladen werden und daher nicht so sichtbar sind, wie derzeit die Virologen.

Wer jetzt ein wenig neugierig geworden ist, ist herzlich eingeladen, sich die ersten Videos auf dem Kanal *ars mathematica educandi* (tinyurl.com/yd983qpc)[2] anzuschauen. Ich danke ganz herzlichen allen, die bereits mitgemacht haben bzw. die sich schon dazu bereit erklärt haben, ein Gespräch mit mir aufzuzeichnen. Einige Kolleginnen und Kollegen werde ich demnächst sicherlich noch ansprechen, freue mich jedoch auch über Initiativanschreiben für die Erstellung eines gemeinsamen Videos. Kritik ist natürlich ebenfalls willkommen. Warum sollten sich viele von uns einzeln um digitale Lehr- und Lernangebote bemühen, wenn wir unsere Bemühungen auch bündeln können? Die Videos stehen, wie gesagt, allen Interessierten frei zur Verfügung.

Benjamin Rott, Universität zu Köln
E-Mail: benjamin.rott@uni-koeln.de

[2] Für die Idee des Kanal-Namens danke ich Markus Vogel, mit dem ich in letzter Zeit häufiger über Nutzungsmöglichkeiten schulisch erworbener Lateinkünste gefrotzelt habe.

Guten Mathematikunterricht mit digitalen Medien gestalten – auch und gerade im Fernunterricht mit Unterstützung des DZLM

Birgit Öttl, Thomas Lange, Daniel Thurm, Christoph Selter und Bärbel Barzel

Im Kontext von Bildung und Schule ist der Einsatz von digitalen Medien derzeit ein bestimmendes Thema der öffentlichen und bildungspolitischen Debatte. Durch den Fernunterricht in Zeiten von Corona hat diese Debatte um den sinnvollen Einsatz von digitalen Medien im Fachunterricht zusätzlich Fahrt aufgenommen. Das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) entwickelt seit seiner Gründung vor neun Jahren forschungsbasiert Unterstützungsangebote für Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren (Beratende, Fortbildende, Ausbildende), Lehrkräfte und Erzieherinnen bzw. Erzieher und erforscht, wie diese Unterstützungsangebote konzipiert sein müssen, damit Teilnehmende und damit der Mathematikunterricht nachhaltig davon profitieren. In enger Zusammenarbeit mit der Praxis gestaltet das DZLM so den fachbezogenen Erkenntnistransfer von der Forschung in die Praxis. Ein Fokusthema ist dabei, wie guter Mathematikunterricht mit digitalen Medien gestaltet werden kann. Initiiert von der Deutsche Telekom Stiftung, ist das DZLM ein bundesweites Hochschulkonsortium, bestehend aus neun Hochschulen: Humboldt-Universität zu Berlin (Sprecherhochschule und Geschäftsstelle), Freie Universität Berlin, Pädagogische Hochschule Freiburg, Ruhr-Universität Bochum, Technische Universität Dortmund, Universität Duisburg-Essen, Universität Osnabrück, Universität Paderborn, Universität Potsdam.

Lernen digital begleiten im Mathematikunterricht

Jegliche Medienintegration im Unterricht muss sich stets an den Zielen und Prinzipien eines guten Lehrens und Lernens im jeweiligen Fach orientieren. Daran muss jede Weiterentwicklung und jede Innovation ausgerichtet sein. Weitgehend konsolidiert sind über die Fächer hinweg die drei Basisdimensionen guten Unterrichts: Klare Unterrichtsorganisation, konstruktive Unterstützung und kognitive Aktivierung (Kunter & Voss, 2011). Dabei sind Unterrichtsorganisation und Unterstützung eher fächerübergreifende Konstrukte, wohingegen kognitive Aktivierung im Kern des fachlichen Lernens liegt (Lipowsky, Drollinger-Vetter, Klieme, Pauli, & Reusser, 2018), denn die Inhalte des Denkens liegen im Fach und bestimmen die Art der geistigen Auseinandersetzung. Dabei versteht man unter kognitiver Aktivierung alle Anregungen durch Aufgaben und Impulse, die Lernende zur aktiven mentalen Auseinandersetzung mit Lerninhalten auf einem für sie optimalen Niveau führen (Kunter & Voss, 2011; Fauth & Leuders, 2018). Unterricht ist u. a. dann kognitiv aktivierend, wenn er inhaltliches Verstehen unterstützt (Klieme, Pauli, & Reusser, 2009). Kognitive Aktivierung ist deshalb ein zentrales Prinzip jeglichen Mathematikunterrichts und muss deshalb auch bei der Frage des Medieneinsatzes im Fokus bleiben. Betrachtet man die Fülle der digitalen Angebote zum Mathematiklernen im Internet, so folgen viele Angebote nicht diesem Prinzip, sondern sind mehr auf Kalkül als auf Verstehen ausgerichtet.

Deshalb hat das DZLM sich in der Fortbildungsreihe *DigMa* zur Aufgabe gemacht, den Einsatz digitaler Medien immer in Verbindung zur kognitiven Aktivierung zu denken, selbst wenn es um das Lernen prozeduraler Fertigkeiten geht, denn auch diese müssen verständig und flexibel ausgeführt werden können. Damit steht auch immer der mathematische Lerngegenstand im Mittelpunkt und es versteht sich von selbst, dass jeglicher Medieneinsatz nicht auf der Ebene der Bedienung einer Software im Unterricht verharren sollte, sondern dass Medien stets mit Blick auf die fachlichen inhalts- sowie prozessbezogenen Ziele zu integrieren sind. Darüber hinaus bieten sie eine Reihe von fachdidaktischen Potenzialen (Clark-Wilson, Robutti, & Sinclair, 2014; Drijvers et al., 2016; Walter, 2018; Schulz & Walter, 2018; Thurm, 2020).

Fachdidaktische Potenziale von digitalen Medien

- Digitale Medien erleichtern, Mathematik zu entdecken
- Digitale Medien machen Komplexität beherrschbar
- Digitale Medien helfen, Grundvorstellungen zu entwickeln und Verständnis zu fördern
- Digitale Medien helfen beim Strukturieren
- Digitale Medien ermöglichen informative und adaptive Rückmeldung
- Digitale Medien erleichtern die Passung zwischen Handlung und mentaler Operation
- Digitale Medien fördern operative Rechenstrategien mit Multitouch-Technologien

– Digitale Medien fördern fachbezogene Kommunikations- und Interaktionsprozesse

Diese Potenziale wurden auf der DZLM-Selbstlernplattform *PIKAS digi* sowie im DZLM-Spotlight *Digitale Bildung in Unterricht, Fortbildung und Qualifizierung* auf dzlm.de mit Beispielen veranschaulicht. Die Realisierung dieser Potenziale benötigt jedoch gut qualifizierte und motivierte Lehrkräfte, weshalb Fortbildungen eine besondere Rolle zukommt.

Fortbildungen und Qualifizierungen zum Thema: Lernen digital begleiten

Die Lehrkraft ist der zentrale Faktor, um die Potenziale digitaler Medien im Fachunterricht zu realisieren (Clark-Wilson et al., 2014). Lehrkräfte müssen nach fachdidaktischen Kriterien entscheiden, ob, welche und wie digitale Medien Lernsituationen im Fachunterricht unterstützen und den unterrichtlichen Einsatz realisieren. Mittlerweile ist gut belegt, dass hierfür vielfältige Kompetenzen, wie etwa fachdidaktisches Wissen zu den Potenzialen und Risiken, von großer Bedeutung sind (ibid.). Daher ist es unerlässlich, Unterstützungsangebote für Lehrerinnen und Lehrer zu konzipieren. Dementsprechend hebt auch die KMK (2016) in der Strategie zur Bildung in der digitalen Welt hervor, dass der Lehrkräfteaus- und Fortbildung eine besondere Rolle im Zuge der Digitalisierung zukommt. Insbesondere reicht es nicht aus, nur exemplarische Unterrichtsmaterialien zur Verfügung zu stellen, denn der Medieneinsatz fordert Lehrkräfte heraus – sie müssen gegebenenfalls neue Handlungsroutinen im Unterricht entwickeln, Überzeugungen verändern, einen Conceptual Change vollziehen, ein gutes Selbstwirksamkeitserleben haben, um die Innovationen umzusetzen (Thurm, 2019; Clark-Wilson et al., 2014). Deshalb sind Fortbildungen von Lehrkräften eine zentrale Stellschraube für eine erfolgreiche digitale Bildung im Fachunterricht.

In verschiedenen Projekten hat das DZLM Unterrichtsmaterialien und Fortbildungen spezifisch für die digitale Begleitung des Mathematiklernens konzipiert und stellt diese kostenlos auf seiner Webseite zur Verfügung. Einen Überblick über die DZLM-Angebote in diesem Bereich werden im Spotlight *Digitale Bildung in Unterricht, Fortbildung und Qualifizierung*, wie unten dargestellt, zusammengefasst. Für den Primarbereich bietet das DZLM eine eigene Überblicksseite proprima.dzlm.de für mittlerweile zwölf Selbstlernplattformen mit verschiedenen Schwerpunkten. Darüber hinaus werden in dem Spotlight typische Lehrerhandlungen („Jobs“) beschrieben, die aus Sicht des DZLM zentral in diesem Bereich sind und deshalb im Fokus der jeweiligen Fortbildungen liegen.

Neben diesen fachspezifischen Unterstützungsangeboten zum Lernen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht gibt es eine Reihe von Hinweisen zu spezifischen Medien und Tipps organisatorischer, strukturierender und methodischer Natur, die hilfreich beim Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht sind. Auch wenn diese Aspekte in allen Fortbildungsmaterialien integrativ behandelt werden, so gibt es auch gezielt Hinweise auf solche Aspekte. In der Rubrik *Unterstützung* auf pikas-digi.dzlm.de findet man zum Beispiel Tipps für geeignete Apps und Webtools für die Organisation der einzelnen Phasen des Unterrichts, für die Administration von Geräten, für das Management von Klassen sowie für die Unterstützung von Schülerinnen und Schüler, beispielsweise durch Tabletregeln. Für die Sekundarstufe werden in der Video-Reihe *Mathematik lehren und lernen – „in distance“* im YouTube-Kanal des DZLM neben anderen wichtigen Aspekten auch Tipps und Hinweise zu diesem Thema gegeben. Die Angebote im YouTube-Kanal werden weiter unten nochmal ausführlicher beschrieben.

Um Fortbildungen zur digitalen Bildung in die Breite zu tragen, sind entsprechend qualifizierte Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren notwendig, die die Fortbildungen durchführen. Das DZLM unterstützt Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren bei ihrer Arbeit und arbeitet dabei eng mit Verantwortlichen in Landesinstituten und Ministerien bei der Qualifizierung von Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren zusammen. Da eine gute Multiplikatorin bzw. ein guter Multiplikator weit mehr können muss, als eine sehr gute Lehrkraft zu sein, erforscht das DZLM intensiv deren Lernwege und wie Qualifizierungen gestaltet sein müssen, damit die Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren später gute Fortbildungen geben. In der Arbeit im DZLM hat sich gezeigt, dass Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren in hohem Maße von sogenannten Lern-Landkarten profitieren, die die spezifischen Jobs in den Blick nehmen, die eine Lehrkraft zu den spezifischen Lerngegenständen ausüben muss (Prediger, 2019). Diese „Landkarten“ geben eine praktische Orientierung bei der Planung und Durchführung von Fortbildungen und bieten gerade beim Thema *Einsatz digitaler Medien* die Möglichkeit, die Fülle an neuen Anforderungen für Lehrkräfte als auch die vielen möglichen hilfreichen Orientierungen gut zu strukturieren und im Blick zu behalten.

Und dann kam Corona – Lernen digital begleiten im Fernunterricht

Eine für alle Beteiligten besondere Herausforderung ist aktuell der Fernunterricht, der als Folge der Corona-Pandemie quasi über Nacht deutsch-

Unterstützung für Lehrkräfte

Unterrichtsmaterialien und didaktische Selbstlernangebote für Lehrkräfte

Primarstufe
- pikas-digi.dzlm.de
- Selbstlernmodul zur digitalen Bildung auf primakom.dzlm.de zu finden

Sekundarstufe
- YouTube-Kanal mit der Video-Reihe zum Thema Mathematik lehren und lernen – „in distance“

Fortbildungsreihen

Primarstufe
- Mündigkeit in der digitalen Welt – Am Beispiel „Raum & Form“ in der Grundschule

Sekundarstufe
- DigMA – Digitale Medien zur Kognitiven Aktivierung

Unterstützung für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

Fortbildungsmaterialien

Primarstufe
- Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule – PIKAS digi Fortbildungsmodul, pikas-digi.dzlm.de/node/32
- Programmieren im Mathematikunterricht der Grundschule –– PIKAS digi Fortbildungsmodul, pikas-digi.dzlm.de/node/32
- Diagramme im Mathematikunterricht der Grundschule – PIKAS digi Fortbildungsmodul, pikas-digi.dzlm.de/node/32

Sekundarstufe
- Lehren und Lernen mit digitalen Werkzeugen
- Einstieg in die Stochastik in der Oberstufe – mit Simulation mittels digitaler Werkzeuge

Unterstützungsangebot für Lehrkräfte und Multiplikatorinnen und Multiplikatoren

landweit umgesetzt werden musste. Das DZLM hat vielfältige Angebote, Anregungen und Informationen zusammen- und neu bereitgestellt, um Lehrkräfte bei dieser Herausforderung zu unterstützen, welche im Spotlight *Mathematikunterricht in Zeiten von Corona* zusammengefasst sind.

Für die Primarstufe haben Christoph Selter und sein Team auf der Selbstlernplattform PIKAS den Bereich *Lernen auf Distanz* eingerichtet mit umfassenden Informationen zum Fernunterricht in Mathematik in der Grundschule für Lehrkräfte und Eltern (pikas.dzlm.de/node/1255). Hier werden Informationen, Material und Tipps zur Verfügung gestellt, wie in der aktuellen Situation das Lernen auf Distanz umgesetzt werden kann. Die vier Kategorien – Elterninfos, zu Hause lernen, Erklärvideos und Auf Distanz unterrichten – werden kontinuierlich mit weiteren Anregungen und Ideen gefüllt. In der Kategorie *Auf Distanz unterrichten* beispielsweise werden gegenwärtig folgende Themen fachbezogen behandelt: Webunterricht durchführen, Videokonferenzen durchführen, Erklärvideos erstellen, Aufgaben stellen, Rückmeldungen erhalten und Umfragen erstellen. Die Website mahiko.dzlm.de (Mathehilfe kompakt) bietet zudem Anregungen, wie Kinder beim Lernen von Mathematik (individuell oder in Kleingruppen) gefördert und unterstützt werden können. Die Inhalte der Seite werden als Videos und als ergänzender Text angeboten. Zielgruppe sind alle Personen, die Lernende fachbezogen fördern. Die dort dargebotenen Informationen sind auch für Eltern, Großeltern etc. und damit für das Distanzlernen relevant.

Für die Sekundarstufe haben Bärbel Barzel und ihr Team eine Reihe neuer Videos zum Lernen auf Distanz auf dem ebenfalls neu eingerichteten DZLM-YouTube Kanal erstellt. In einem der Videos findet man die Aufzeichnung eines Online-Seminars zum Thema *Mathematik lehren und lernen – „in distance“* mit einem Überblick, mit welchen Herausforderungen Lehrkräfte im Fernunterricht im Fach Mathematik konfrontiert sind und wie diesen begegnet werden kann. Was ist neu im Fernunterricht und was bleibt gleich? Dies wird für alle Phasen des Lehr-Lern-Prozesses an exemplarischen Beispielen erörtert. Dabei geht es darum, wie das inhaltliche Lernen gestützt durch spezifische Organisationsformen so geschehen kann, dass kognitive Aktivierung und Sinnstiftung erhalten bleiben. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die technischen Rahmenbedingungen so sind, dass alle Lernenden über ein Endgerät mit Internetzugang verfügen, wohlwissend, dass dies nicht immer gegeben ist. Das Online-Seminar schließt mit einem Überblick über die relevanten Medien in Zeiten von Schulschließungen. Dazu gehören nicht nur die mathematikspezifischen Medien (z. B. Werkzeuge, Apps, Videos) sondern auch die Medien zur allgemeinen Kommunikation, mit denen die Abstimmung zwischen Lehrkraft und Schülerinnen und Schülern, der Datentransfer, der Austausch mit der Gruppe (synchron und asynchron) sowie die kooperative Arbeit zwischen Schülerinnen und Schülern gelingen kann.

Neben dem aufgezeichneten Online-Seminar als Einstieg und Überblick in Mathematikunterricht „in distance“ gibt es weitere Lernvideos von jeweils 5-10 Minuten Länge für Lehrkräfte, die einzelne Medienarten und ihre Integration im Unterricht in den Blick nehmen. Dabei stehen stets inhaltliche Kriterien im Mittelpunkt, die für die Auswahl der Medien oder für die spezifischen Möglichkeiten des Einsatzes relevant sind. Zentral ist dabei immer die Frage, ob Schülerinnen und Schüler wirklich kognitiv aktiviert werden oder nicht. So erklärt Marcel Klinger (DZLM) in knapp sieben Minuten, warum es sinnvoll sein kann, Lernvideos im (Fern-)Unterricht einzubauen und welche Vorteile Lernvideos für Schülerinnen und Schüler bieten. Dabei steht die Frage nach der Auswahl des richtigen Lernvideo im Fokus. Beispielsweise gibt es für das Thema *Quadratische Funktion* mehr als 100 Videos auf YouTube. Marcel Klinger gibt Lehrkräften im Lernvideo Qualitätskriterien für die Auswahl von Lernvideos auf YouTube an die Hand, die ihnen die Einbindung von Lernvideos in ihren (Fern-)Unterricht erleichtern sollen. Auf diese und weitere Qualitätskriterien wird im nächsten Abschnitt eingegangen, die generell für den Einsatz digitaler Medien gelten, nicht nur im Fernunterricht.

Bisher sind Lernvideos zu den folgenden Themen im DZLM-YouTube-Kanal veröffentlicht:
– *Lernvideos auswählen und nutzen* von Marcel Klinger (DZLM),
– *Lernumgebungen auswählen und nutzen* von Marius Friedemann (Projektteam der DZLM-Fortbildung DigMA),
– *Diagnose und Förderung digital gestalten* von Daniel Thurm und Bärbel Barzel (beide DZLM),
– *Die Produktion eines Lernvidoes planen und durchführen* von Jens Lindström (Projektteam der DZLM-Fortbildung DigMA),

In Planung:
– *Möglichkeiten der digitalen Kommunikation* von Oliver Wagener und Patrick Ebers (beide DZLM)

Qualitätskriterien für die Auswahl digitaler Medien im Mathematikunterricht

Es gibt verschiedene Perspektiven für den Einsatz digitaler Medien allgemein und insbesondere für den Mathematikunterricht, die zu unterschiedlichen Qualitätskriterien bei der Auswahl digitaler Medien führen. Das DZLM hat derzeit spezifische Kriterienkataloge für drei unterschiedliche Arten von digitalen Medien. Dazu gehört die Auswahl von Software bzw. Apps (PIKAS digi), die Auswahl von Lernumgebungen für einen spezifischen Unterrichtsgegenstand und die Auswahl von Lernvideos.

Alle drei Kriterienkataloge basieren auf den oben dargestellten Perspektiven und Potenzialen digitaler Medien und sind im grauen Kasten aufgelistet. Sie werden in der Selbstlernplattform PIKAS digi bzw. den im grauen Kasten genannten Lernvideos für Lehrkräfte ausführlich beschrieben. Im Video *Lernumgebungen auswählen und nutzen* werden die Qualitätskriterien an Hand konkreter interaktiver Lernumgebungen zum Thema *Rauminhalt eines Quaders* erläutert und die unterschiedlichen Lernumgebungen miteinander verglichen, die sich äußerlich nur wenig unterscheiden, aber diese kleinen Unterschiede sind entscheidend für die fachdidaktische Qualität und die Verstehensorientierung. Dabei wird gezeigt, wie Aufgaben zu digitalen Lernumgebungen zu gestalten sind, damit tiefes, verständiges, kognitiv aktivierendes Lernen erreicht werden kann.

Qualitätskriterien für die Auswahl von Lernsoftware auf PIKAS digi

Fachdidaktische Potenziale
- Vernetzt die Software Darstellungsebenen?
- Strukturiert die Software Darstellungsebenen?
- Werden mentale Operationen digital dargestellt?
- Werden Denk- und Arbeitsprozesse umgelagert in der Software?
- Ermöglicht die Software eine informative fachdidaktische Rückmeldung?

Unterrichtsorganisatorische Potenziale
- Besitzt die Software eine große Auswahl an Material?
- Kann die Software Inhalte und Ergebnisse gut veranschaulichen und schnell allen Schülerinnen und Schülern zugänglich machen?
- Können Lernprozesse in der Software dokumentiert werden?

Das PIKAS-Team hat auch eine Checkliste zusammengestellt, welche Lehrkräften die Auswahl geeigneter Software erleichtern soll.

Qualitätskriterien für die Auswahl von Lernvideos aus dem Lernvideo „Lernvideos auswählen und nutzen“
- Ist das Video zum Einstieg oder zum Üben gedacht?
- Wie ist das Video technisch umgesetzt?
- Ist das Video fehlerfrei und angemessen?
- Ist das Video sinnstiftend und motivierend?
- Ist das Video kalkülorientiert oder verstehensorientiert?
- Wie passt das Video zum aktuellen Unterrichtsstand?

Qualitätskriterien für die Auswahl von Lernumgebungen aus dem Lernvideo „Lernumgebungen auswählen und nutzen“
- Passung der Lernumgebung zum Unterricht, der Unterrichtsphase und dem Lernziel
- Sind die Lernumgebungen strukturell klar umgesetzt?
- Werden die Darstellungsebenen in der Lernumgebung vernetzt?
- Ist die Lernumgebung kognitiv aktivierend?
- Knüpft die Lernumgebung an Vorwissen an?

Zum Schluss

„Work in fast Progress“ – und das in hohem Maße kooperativ. Das kennzeichnet aktuell die Lage zum Medieneinsatz im Mathematikunterricht und das sicher nicht nur im DZLM. Die große Nachfrage an Unterstützung von Lehrkräften, Ausbildenden, Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren, aber auch von Personen, die in den administrativen Strukturen verantwortlich für Professionalisierung der Lehrkräfte sind, ist fast schon berauschend. Bedarf, Nachfrage und Motivation, sich mit digitalen Medien zu befassen ist so groß wie nie (vgl. deutsches Schulbarometer, tinyurl.com/ydylfhr2). Gegenwärtig entstehen – sicher wie in vielen anderen Standorten – in der Mathematikdidaktik viele Projekte und Programme, um diese aktuellen Herausforderungen für Lehrkräfte wie Multiplikatorinnen bzw. Multiplikatoren zu erfassen und zu unterstützen.

Um ein besseres Bild des Medieneinsatzes im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe insbesondere zu Corona-Zeiten zu bekommen, ist das DZLM mit dem Team von Bärbel Barzel an einer internationalen Studie in Kooperation mit der Universität Utrecht, der Universität Antwerpen sowie den belgischen, niederländischen und deutschen MINT-Lehrerverbänden (NVVW, MNU) beteiligt. Hierzu wird erhoben, welche fachdidaktischen Ansätze Mathematiklehrkräfte wählen, welche digitalen Medien in welchen Phasen genutzt werden, welche Überzeugungen und Selbstwirksamkeit sie aufweisen und wie sich diese Aspekte durch die Erfahrungen des digitalen Fernunterrichts verändert haben. Ebenfalls werden auch Überzeugungen und Arbeitsweisen von den Schülerinnen und Schüler erhoben. Die hohen Teilnehmerzahlen an der Studie (mehr als 1600 Lehrkräfte aus Deutschland) zeigen, dass diese Aspekte von hoher Aktualität sind. Erste Ergebnisse aus der Studie sollen noch Anfang Juli veröffentlicht werden, um Bildungsadministration und fachdidaktischer Community eine bessere Informationsgrundlage zu liefern, um Unterstützungsangebote zielgerichtet und teilnehmendenorientiert weiterzuentwickeln.

Ebenfalls gibt es Bestrebungen, konkrete, bewährte Programme aus anderen Ländern auch im deutschen Raum umzusetzen. Dazu gehört die Übersetzung des SMART-Programms aus Australien (smartvic.com), ein umfassendes Programm zur vorstellungsorientierten und nicht nur kalkülorientierten Online-Diagnostik und sicher viele andere Projekte im Rahmen der GDM.

Literatur

Clark-Wilson, A., Robutti, O. & Sinclair, N. (Hrsg.). (2014). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development*. Dordrecht, Niederlande: Springer.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. London: Springer.

Lipowsky, F., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2018). Generische und fachdidaktische Dimensionen von Unterrichtsqualität – Zwei Seiten einer Medaille? In M. Martens, K. Rabenstein, K. Bräu, M. Fetzer, H. Gresch, I. Hardy & C. Schelle (Hrsg.), *Konstruktionen von Fachlichkeit: Ansätze, Erträge und Diskussionen in der empirischen Unterrichtsforschung* (S. 183–202). Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Fauth, B., & Leuders, T. (2018). *Kognitive Aktivierung im Unterricht*. Stuttgart: Landesinstitut für Schulentwicklung.

Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2009). The Pythagoras Study: Investigating effects of teaching and learning in Swiss and German mathematics classroom. In T. Janík, & T. Seidel (Hrsg.), *The Power of Video Studies in Investigating Teaching and Learning in The Classroom* (S. 137–160). Münster: Waxmann.

KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland) (Hrsg.). (2016). Bildung in der digitalen Welt: Strategie der Kultusministerkonferenz. Zugriff 3. Juni 2020 unter tinyurl.com/y9clh2hd.

Kunter, M., & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften – Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 85–113). Münster: Waxmann.

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 31* (4), 367–392.

Schulz, A., & Walter, D. (2018). Stellenwertverständnis festigen – Potentiale und Nutzungsweisen einer Software zum Darstellungswechsel. In *Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn* (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM.

Thurm, D. (2020). *Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht integrieren: Zur Rolle von Lehrerüberzeugungen und der Wirksamkeit von Fortbildungen*. Wiesbaden: Springer.

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps: Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Birgit Öttl, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: birgit.oettl@dzlm.de

Thomas Lange, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: thomas.lange@dzlm.de

Daniel Thurm, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: daniel-thurm@dzlm.de

Christoph Selter, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Technische Universität Dortmund
E-Mail: christoph.selter@dzlm.de

Bärbel Barzel, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: baerbel.barzel@dzlm.de

Elemente der Arithmetik – dynamisiert und anschaulich

Daniela Götze und Nicole Seidel

Nicht erst seit der weltweiten Corona-Pandemie, sondern eigentlich in nahezu jedem Semester stellt sich die große Herausforderung, dass viele Grundschullehramtsstudierende nicht sonderlich mathematikaffin sind. Sie zeigen teilweise große Schwierigkeiten beim Verständnis elementarer mathematischer Zusammenhänge (Kempen, 2019) und eine eher statische Sichtweise mathematischen Lernens (Grigutsch et al., 1998; Winter, 2003). Ein erheblicher Teil würde das Fach Mathematik nicht freiwillig wählen, wenn es optional wäre (Winter, 2003). In NRW ist der Lernbereich mathematische Grundbildung aber im Umfang von etwa 38 CP im Bachelor und weiteren ca. 12 CP im Master verpflichtend zu studieren. Es stellt sich daher im Übergang von der Schule zur Hochschule – und nicht nur in der aktuellen Lage der digitalen Lehre im totalen Lockdown – die Frage, wie die bestehenden mathematischen Wissenslücken gefüllt und gleichermaßen alte „Überzeugungsstrukturen zur Mathematik“ (Barzel, Eichler, Holzäpfel, Leuders, Maaß, & Wittmann, 2016, S. 38) aufgebrochen werden können.

> Damit eine fachwissenschaftliche Veranstaltung zum Aufbau eines angemessenen Bildes von „Mathematik als Prozess“ beiträgt, muss sie begleitet sein von umfangreichen Lernsituationen der individuellen mathematischen Aktivität. (Barzel et al., 2016, S. 38)

In dem im Rahmen eines Fellowships für Innovationen in der digitalen Hochschullehre vom MKW NRW und vom Stifterverband geförderten Projekt „Arithmetik digital“ wurden daher bereits im Jahr 2019 Videos zu verschiedenen Themenbereichen der Arithmetik erstellt und auf der Projektwebseite adi.dzlm.de verfügbar gemacht. Darunter sind sowohl illustrierende als auch beweisende Videos aber auch Videos zur Exploration von Illustrationen oder Beweisen zu finden. Aktuell sind auf der Projektwebseite über 45 verschiedene Videos zu den zentralen Themenbereichen der elementaren Arithmetik verfügbar. Dabei wurden vor allem die arithmetischen Inhaltsbereiche gewählt, die gängigerweise an allen Universitäten Deutschlands Bestandteil der Grundschullehramtsausbildung in den ersten Semestern sind, aber natürlich auch Bestandteil anderer Lehramtsstudiengänge (vor allem Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschule) sein können. Folgende Beweis- und Illustrationsvideos sind auf der Webseite zu finden.

Teilbarkeit
– Transitivität der Teilbarkeitsrelation
– Summenregel*
– Differenzregel*
– Produktregel*
– Teilerproduktregel*
– Teileranzahl
– Gemeinsame Teiler und ggT
– Euklidischer Algorithmus
– Zusammenhang ggT und kgV
– Lineare Diophantische Gleichungen

Rechengesetze
– Konstanz der Summe
– Konstanz der Differenz
– Konstanz des Produkts
– Konstanz des Quotienten

Stellenwerte
– Quersummenregel im Dezimalsystem
– Quersummenregel im 7er-System
– Endstellenregel im Dezimalsystem
– Endstellenregel im 8er-System
– Schriftliche Subtraktion mit Auffüllen im Dezimalsystem*
– Schriftliche Subtraktion mit Auffüllen im 7er-System
– Schriftliche Subtraktion mit Entbündeln im Dezimalsystem*
– Schriftliche Subtraktion mit Entbündeln im 6er-System
– Schriftliche Subtraktion mit Erweitern im Dezimalsystem*
– Schriftliche Subtraktion mit Erweitern im 8er-System
– Umrechnung vom Dezimal- in ein b-System*
– Direkte Umrechnung vom 2er- ins 4er-System

Kombinatorik
– Produktregel
– Summenregel
– Binomialkoeffizient
– Kombination mit Wiederholung

Figurierte Zahlen
– Quadratzahlen
– Rechteckszahlen
– Dreieckszahlen
– Fünfeckszahlen
– Satz von Sylvester

Die *Beweisvideos* setzen bei angemessenen Elementarisierungen an, bei denen häufig vereinfachende und anschauliche Darstellungsmittel eine zentrale Rolle spielen (Biehler & Kempen, 2016). So werden zentrale Sätze der Arithmetik vor allem anschaulich (am Rechenstrich oder auch mit Hilfe von Flächen) oder auch generisch bewiesen. Ein wichtiges Anliegen dieser Elementarisierung ist einerseits mathematisches Beweisen zu vereinfachen aber andererseits die Beweisidee bzw. den Beweisinhalt nicht zu verfälschen und somit den Studierenden ein Verständnis für diese Beweise zu ermöglichen (Biehler & Kempen, 2016; Kirsch, 1977).

Die *visualisierenden Videos* geben Hilfestellungen beim Verständnis und bei der Durchdringung zentraler Algorithmen und Regeln (schriftliche Subtraktion, euklidischer Algorithmus, Lösungsmengen von diophantischen Gleichungen, Endstellenregel, Quersummenregel, Konstanzgesetze ...).

Da das Verständnis für derartig inhaltlich-anschauliche und auch generische Beweise und Visualisierungen davon abhängig ist, ob und inwiefern der Betrachtende den zu beweisenden oder zu veranschaulichenden Satz, die anschauliche Darstellung sowie das im Beweisvideo Gesagte selbstständig miteinander verknüpft (Kempen, 2019), wurden im Projekt Variationen von ausgewählten Beweisvideos und Visualisierungen zur vertiefenden Auseinandersetzung entwickelt:

- Abbrechender Sprechertext: Der zu beweisende oder zu illustrierende Sachverhalt wird gezeigt. Bei Beweisen werden die Voraussetzungen für den Beweis erläutert. Anschließend verstummt der Sprecher. Die Animation hingegen läuft weiter. Die Studierenden sollen versuchen, einen eigenen Sprechertext zu schreiben.
- Sprechertext mit Fehlern: Von Fehlern anderer zu lernen, kann den Verstehens- und Erkenntnisprozess maßgeblich beeinflussen. Zudem können fehlerhafte Sprechertexte die angehenden Lehrkräfte dafür sensibilisieren, wie wichtig eine eindeutige Sprache beim inhaltlich-anschaulichen oder generischen Beweisen ist. Diese Filme stoppen nach Klärung der Voraussetzung. Eine Zwischeneinblendung signalisiert, dass die folgende Kommentierung des Beweises nicht angemessen ist. Die Studierenden sollen überlegen, an welchen Stellen der Sprechertext verbessert werden muss und korrigierte Sprechertexte erstellen.
- Auswahlantworten: Im Beweisvideo bleibt offen, welcher Satz bewiesen wird. Dazu wird der Beweis gezeigt, aber nicht kommentiert. Am Ende wird gefragt, welcher Satz in diesem Video bewiesen wurde. Aus verschiedenen Antwortalternativen muss eine begründet ausgewählt werden.

Zu den in der obigen Liste mit einem Sternchen versehenden Inhalten wurden solche Explorationsvideos erstellt. Zu manchen Sätzen auch verschiedene Varianten. So gibt es zur Summenregel beispielsweise sowohl ein Explorationsvideo zum eigenständigen Schreiben des Sprechertextes als auch eines zur Fehlerkorrektur.

Die Beweis- und Illustrationsvideos und auch die Variationen können nicht nur im Rahmen einer Präsenz- oder auch digitalen Vorlesung eingesetzt werden. Vielmehr bieten sich weitere ggf. auch neuartige Einsatzmöglichkeiten an. So können – zumindest in der Präsenzlehre – die Videos auch zur individuellen Unterstützung einzelner Studierender in den Übungen dienlich sein (spontane oder geplante Unterstützung im Bearbeitungsprozess), denn durch die freie Verfügbarkeit aller Videos auf der Webseite adi.dzlm.de haben die Studierenden jederzeit Zugriff auf die Beweis- und Illustrationsvideos. Bearbeitungsprozesse von Studierenden in den Übungen können somit noch mehr individualisiert unterstützt werden. Ebenso bieten sich neue Hausaufgabenformate an: Sprechertexte korrigieren, Sprechertexte selbst schreiben ...

Schlussendlich würden wir uns freuen, wenn die Inhalte der Webseite auch anderen Lehramtsstudierenden an anderen Standorten helfen würden, die Elemente der Arithmetik besser zu verstehen. Obwohl wir die Videos im coronabedingten Online-Sommersemester 2020 nicht wirklich genutzt haben, denn die Elemente der Arithmetik werden in Siegen stets im Wintersemester gelesen, überraschen uns doch die beachtlichen Zugriffszahlen der Seite. Es scheint so zu sein, dass auch andere Standorte unsere Seite rege nutzen. Das freut uns natürlich sehr, wir sind aber auch dankbar über Anregungen, Kommentare und Rückmeldungen.

Danksagung
Wir danken dem MKW NRW und dem Stifterverband für die finanzielle Unterstützung dieses Projektes. Ebenso danken wir Benjamin Pilger und Philipp Heimers für die tatkräftige Unterstützung bei der konzeptionellen Erstellung der Videos. Martin Durlik danken wir für die technische Umsetzung unserer Ideen und für die digitale Videoerstellung.

Literatur

Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, L., Leuders, T., Maaß, K., & Wittmann, G. (2016). Vernetzte Kompetenzen statt träges Wissen – Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 33–50). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 141–179.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19*(1), 3–45.

Götze, D. (2019). Arithmetisches Verständnis bei Grundschulstudierenden fördern – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt „Arithmetik digital". In R. Rink & D. Walter (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der universitären Lehrerbildung* (S. 115–132). Münster: WTM.

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität.* Springer: Spektrum.

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5*(2), 87–101.

Winter, M. (2003). Einstellungen von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik – Erfahrungen und Perspektiven. *mathematica didactica, 26*(1), 86–110.

Daniela Götze, Universität Siegen
E-Mail: daniela.goetze@uni-siegen.de

Nicole Seidel, Universität Siegen
E-Mail: nicole.seidel@uni-siegen.de

Erklärvideos: Chancen und Risiken

Zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen

Sabrina Bersch, Andreas Merkel, Reinhard Oldenburg und Martin Weckerle

Erklärvideos treffen den Zeitgeist, sie stillen einen Bedarf nach überall verfügbaren Erklärungen, der besonders in Zeiten von Pandemien und Klausuren hoch ist, andererseits scheinen sie aus der Zeit gefallen: in den letzten Jahrzehnten hat sich ein Verständnis von Lernen als aktiven Konstruktionsprozess durchgesetzt (z. B. Reich, 2000). Was könnte da unsinniger sein, als ein Video, das den Lernenden in eine gänzlich passive Rolle zwingt. Auch der Leser eines Textes ist einer Menge an vorgefertigten Informationen ausgesetzt, aber er kann die Informationsaufnahme flexibel gestalten, sich ohne Probleme zwischendrin seine Gedanken machen und das Gelesene in eigene Vorstellungen überführen (Situationsmodell). Der Zuschauer eines Videos dagegen wird sogar in der Geschwindigkeit seines Denkens gelenkt. Die sinnvolle und oft gehörte Aufforderung, den Pause-Button zu drücken, ist nach eigenen Erfahrungen gar nicht so einfach, weil selten die richtige Stelle für ein eigenes „Zwischendenken" getroffen wird. Immerhin haben einige Videos markierte Stellen zum Anhalten – aber das dann vorgedacht und nicht vom Lernenden aktiv gesteuert.

Andererseits hat die Lernpsychologie überzeugend nachgewiesen, dass direkte Instruktionen mit Lernformaten, die mehrere Kanäle ansprechen (Multimedia Effekt, z. B. Mayer, 2009) sehr effektiv sein können. Neben dem Multimedia Effekt, der sich auf sehr viele Lerngegenstände anwenden lässt, spielt die Dynamik eine besondere Rolle in der Mathematik. Zum einen steigert Bewegung ganz unspezifisch die Aufmerksamkeit, zum anderen gibt es mathematische Prozesse, deren Dynamik Lerngegenstand ist. Geometrische Operationen wie Drehungen und Scherungen bilden prototypische Beispiele dafür (und werfen auch gleich die Frage auf, ob nicht die aktive Durchführung in einem dynamischen Geometrieprogramm für das Lernen noch effektiver ist als das Ansehen eines entsprechenden Videos). Zum anderen hat die in der Mathematik weit verbreitete Arbeit mit Kalkül eine eigene symbolische Dynamik: es scheint beispielsweise äußerst schwer, die Durchführung einer Polynomdivision durch das Anschauen einer fertigen Polynomdivision zu lernen. Das Lernen am Modell durch einen Meister (cognitive apprenticeship, siehe z. B. die Darstellung von Bransford et al., 2009) scheint dabei gut zu funktionieren und ist im Einklang mit den Ergebnissen der Forschung zu ausgearbeiteten Lösungsbeispielen (Renkl et al., 2009).

Das Augsburger Analyse- und Evaluationsraster AAER

Das Augsburger Analyse- und Evaluationsraster (AAER, Fey, 2017) für analoge und digitale Bildungsmedien wurde entwickelt, um qualitativ-inhaltliche Merkmale von Lehr-Lern-Mitteln anhand pädagogisch-didaktischer Kriterien beurteilen zu können und so einen Beitrag zur Qualitätssicherung von Bildungsmedien, insbesondere im digitalen Bereich, zu leisten. Für die Entwicklung wurden unterschiedliche Unterrichtskonzepte und -theorien, die wissenschaftliche Diskussion über guten Unterricht, das Konzept des kompetenzorientierten Lehrens und Lernens sowie die Möglichkeit zu inhaltlicher Einflussnahme auf Lernende miteinbezogen (Fey, 2017).

Das Raster besteht aus den acht Dimensionen (I) *Diskursive Positionierung*, (II) *Makrodidaktische bzw. bildungstheoretische Fundierung*, (III) *Mikrodidaktische Umsetzung*, (IV) *Aufgabendesign*, (V) *Kognitive Strukturierung*, (VI) *Bild- und Textkomposition*, (VII) *Anlehnung an Curriculum und fachspezifische Bildungsstandards* und (VIII) *Unterrichtspraktische Anwendbarkeit und Anwendungstransparenz*. Die Dimensionen werden durch sogenannte Items spezifiziert und konkretisiert, Kriterien, anhand welcher die Qualität im Bereich dieser Dimension beurteilt werden kann. Für die Anwendung zur Einschätzung der fachdidaktischen Qualität von Erklärvideos sind insbesondere die Dimensionen II bis VI von großer Bedeutung und sollen deswegen hier näher erläutert werden.

Die *Makrodidaktische bzw. bildungstheoretische Fundierung* umfasst Items zur Handlungsorientierung, zur Bezugnahme auf die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler und zur Förderung der Urteilsfähigkeit der Lernenden, verbunden mit einer Verantwortungsübernahme für das eigene Lernen. Die Items zur *Mikrodidaktischen Umsetzung* betreffen einen didaktisch angemessenen Methoden- und Medieneinsatz (auch im Hinblick auf Medienkompetenz) sowie die Ermöglichung individualisierter Lernwege und einer binnendifferenzierenden Unterrichtsgestaltung. Im Bereich des *Aufgabendesigns* finden sich Items zur Sequenzierung von Aufgaben, Aktivierung durch Aufgaben (insb. wird gefragt, ob das Lehr-Lern-Mittel eine umgreifende, motivierende Problemstellung zugrunde liegen hat) und zur Existenz multipler Lösungswege für enthaltene Aufgaben. Die Dimension *Kognitive Strukturierung* legt mit Hilfe ihrer Items Wert auf die „höheren" kognitiven Prozesse im Sinne einer Transfer- und Anwendungsorientierung, auf einen kumulativen Aufbau von Wissen, Fertigkeiten und Kompetenzen sowie auf lernwegunterstützende Elemente an den Schlüsselstellen des Lehr-Lern-Mittels. Die Dimension *Bild- und Textkomposition* umfasst mit ihren Items die verwendete verbale Sprache, Bildsprache und die Anreicherung durch zusätzliche kommunikative Elemente. Dabei wird auf eine klare, verständliche Sprache und auf einen passenden Einsatz von bildlichen Elementen Wert gelegt (Fey, 2017). Insbesondere bei der Beurteilung von Erklärvideos kommt der Abstimmung von visuellen und auditiven, sprachlichen und bildlichen Elementen eine hohe Bedeutung zu.

Balcke und Bersch erprobten die Anwendbarkeit des AAER auf mathematische Bildungsmedien anhand exemplarisch ausgewählter Kurse des OER-Angebots von *Serlo – die freie Lernplattform*. Aus fachdidaktischer Perspektive fielen dabei fachspezifische Eigenschaften der Kurse auf, die durch das AAER nicht direkt abgebildet werden. Speziell mathematikdidaktische Prinzipien wie beispielsweise die Idee von Grundvorstellungen und die Orientierung an (mathematischen) Grundprinzipien der Kompetenzorientierung (z. B. Heckmann & Padberg, 2012) werden durch das allgemein gehaltene AAER nicht erfasst. Auch eine Überprüfung der Repräsentation des Faches und der fachwissenschaftlichen Korrektheit innerhalb des Bildungsmediums wird als sinnvolle Ergänzung zum AAER vorgeschlagen (Balcke & Bersch, 2019). Diese mathematikspezifischen Kriterien sollten auch bei einer Beurteilung von Erklärvideos zwingend berücksichtigt werden.

Welche Erklärvideos nutzen Schüler und Schülerinnen und wozu?

Um zu verstehen, wie Schülerinnen und Schüler YouTube zum Lernen von Mathematik nutzen, soll zuerst ein Blick auf das große Angebot an Mathematik-YouTube-Kanälen geworfen werden (Tabelle 1). Auf Basis dieser Bestandsaufnahme hat einer der Autoren eine Befragung von Schülerinnen und Schülern durchgeführt.

Für die Didaktik ist interessant, welche Kanäle Jugendliche tatsächlich nutzen. In einer Studie eines Autors wurde diese Frage weiter spezialisiert auf die Phase der Abiturvorbereitung und es wurden 465 Schülerinnen und Schüler befragt, welche dieser Kanäle sie kennen und wenn ja auch nutzen. Die Nennungen sind in den rechten beiden Spalten von Tabelle 1 dokumentiert. Wie zu erwarten, zeigte sich eine klare Präferenz der befragten Schülerinnen und Schüler für rein deutschsprachige Kanäle mit deutschen YouTubern wie „DorFuchs", „Mathe by Daniel Jung" und „Mathe – SimpleClub". Es ist fast schon verwunderlich, dass nur zwei der Befragten den amerikanischen Kanal „Khan Academy" kannten, welcher zum Zeitpunkt der Befragung mit

4 991 699 die meisten Abonnenten hatte, und davon sogar nur ein einziger Schüler angab, diesen zu nutzen. Der Befund klärt sich durch die Analyse, dass für die erfolgreiche Nutzung guter englischsprachiger Erklärvideos drei Kompetenzen notwendig sind: (1) Allgemeines englisches Sprachverständnis, (2) Kenntnis der englischen mathematischen Fachsprache, (3) Bewertung der Inhalte auf ihre Relevanz angesichts unterschiedlicher Curricula.

Deswegen bleiben gute Angebote dieser Kanäle auch zu oberstufenrelevanten Themen hierzulande faktisch wirkungslos. Dies zeigt, dass didaktische Begleitung notwendig ist, um das durchaus vorhandene Potential der Erklärvideos bei YouTube voll zu erschließen. Eine solche Anleitung muss die Passung der Videos an die Bedürfnisse der Lernenden im Blick haben, also auf gewissen diagnostischen Informationen beruhen und einen realistischen Lernpfad planen, und – nicht zuletzt – die Aktivierung der Lernenden unterstützen. Dies gilt um so mehr, als unsere Befragung ergab, dass vor allem Schülerinnen und Schüler mit schlechteren Mathematiknoten YouTube stärker zum Lernen einsetzen als leistungsstarke.

Tabelle 1. Zahlen der Abonnenten und Kanalaufrufe einer Auswahl von YouTube-Kanälen (Daten vom 19. 8. 2019) und in den rechten beiden Spalten die Nennungen in unserer Stichprobe

YouTube-Kanal	Charakterisierung	YouTube-Daten		Schülerstichprobe	
		Abonnenten	Aufrufe	Bekannt	Genutzt
Mathe – Simpleclub	Ziel: Deutschlands „coolste“ Nachhilfe-Plattform zu sein. Vertonte (Prezi)-Präsentationen, professionell produziert; kommerziell	766.998	118.859.217	381	201
Mathe by Daniel Jung	Abgefilmter Tafelanschrieb, kommerziell genutzt in Kooperation mit „Study Help“	541.435	185.156.634	187	113
DorFuchs	Verbindung von Mathematik und Musik	180.632	28.692.223	105	22
Lehrerschmidt	Abgefilmte handschriftliche Rechnungen (Dokukamera)	195.712	23.015.039	24	11
Koonys Schule	Abgefilmte handschriftliche Rechnungen	23.468	6.667.916	5	4
Jörn Loviscach	Vertonte handschriftliche Tablet-Aufzeichnungen	75.184	29.762.715	2	2
Matheretter	Vertonte Präsentationen	37.637	7.164.171	8	3
Christian Spannagel	Elementarmathematik für Lehramtsstudierende	60.271	11.285.384	9	5
Mathehilfe24:	Abgefilmter Tafelanschrieb	26.650	6.516.486	19	7
musstewissen Mathe	Aufwändig von ARD und ZDF mit Green Screen und Animationen produzierte Videos	36.759	1.029.102	34	15
Herr Mathe	Vertonte Präsentationen, teilweise handschriftlich ergänzt	40.634	7.652.088	10	5
schoolseasy	Vertonte Präsentationen	120.763	20.723.101	25	8
Khan Academy	Englischsprachiges, sehr breites Angebot	4.991.699	1.678.136.100	2	1
Die Merkhilfe	Vertonte Präsentationen in allen Fächern inklusive Lerntipps	103.981	19.144.589	37	14
3Blue1Brown	Aufwändig animierte Mathematik in englischer Sprache[a]	2.028.348	85.278.242	3	1
Sebastian Schmidt	Vertonte ppt-Präsentationen für den eigenen FC Unterricht[b]	3.135	928.666	4	1

a. Ziel dieses englischen Kanals ist es, durch eine geschickte Auswahl von Themen und deren Animation für viele Zuschauer eine neue Sichtweise auf die Mathematik zu kreieren.

b. Im Vergleich zu den anderen vorgestellten Kanälen ist dies der einzige Kanal, der explizit das Unterrichtskonzept „Flipped Classroom“ realisiert.

Mathematikdidaktische Betrachtungen

Mathematische Erklärvideos können unterschiedliche didaktische Funktionen erfüllen, die sich im Wesentlichen entlang der Artikulationsformen des Unterrichts entwickeln lassen:

- Vorbereitung/Hinführung: z. B. ein Video über ein Objekt oder einen Prozess, das/der modelliert werden soll,
- Erarbeitung: z. B. Herleitung neuer mathematischer Inhalte oder Demonstration eines Prozesses,
- Sicherung: z. B. konzentrierte Darstellung von Definitionen, Sätzen, Beweisen,
- Wiederholung: z. B. Zusammenfassung eines Themas.

Aus der obigen Betrachtung populärer Kanäle ist klar, dass aktuell die Nutzung zur Wiederholung im Sinne von Nachhilfe dominiert. Da in der aktuellen Homeschooling-Zeit aber sehr viele dieser Videos auch als Unterrichtsersatz herhalten müssen, nehmen wir eine breitere Perspektive ein und knüpfen damit an unsere jahrelange fachdidaktische Diskussion an. Seit Jahren sichten und evaluieren wir Videos, u. a. um die dabei gemachten Beobachtungen und Erfahrungen in universitären Lehrveranstaltungen und Oberseminaren zur Diskussion zu stellen. Angesichts der vielen möglichen Verwendungsweisen (s. o. und ggf. zusätzlich Differenzierung (Nachhilfe, aber auch Zusatzthemen für Leistungsstarke jenseits der Standardthemen)) und angesichts der Fülle an Angeboten sind pauschalisierende Beurteilungen schwierig. Wie oben dargestellt, stoßen auch allgemeine medienpädagogische Qualitätskriterien teilweise an ihre Grenzen. Ausgehend von einem modernen, kompetenzorientierten Verständnis von gutem Unterricht, wie es z. B. in den Begleitbüchern der KMK zu den Bildungsstandards (Blum et al., 2005; Blum et al., 2015) dargestellt wird, und unter Einbezug der Dimensionen des AAER versuchen wir trotzdem eine Zusammenfassung unserer Erkenntnisse in der Form einiger kritischer Thesen, die auch durch die angegebenen Beispiele gestützt werden.

- Es fehlt den Videos oft eine Einbettung in einen sinnstiftenden Kontext, etwa durch ein tragfähiges inner- oder auch außermathematisches Einstiegsproblem oder einen Ausblick mit Anwendungsbezug. Positive Ausnahmen bilden bspw. viele Videos des Kanals „3blue1brown“ oder das Video zu Wachstum und Zerfall von alpha Lernen: youtu.be/QgYeiw7_yOQ.

Wer selbst einmal ein Erklärvideo erstellt hat und den hohen zeitlichen Aufwand dabei erfahren hat, wird über sprachliche Holprigkeiten, die auch in den angegebenen Beispielen mitunter zu beobachten sind, hinwegsehen. Es erstaunt jedoch schon die Verbreitung grundlegender Mängel:

- In vielen Videos wird wenig Wert auf die Verwendung einer korrekten Fachsprache gelegt. Beispiel: In youtu.be/iUeeLtl3yLE (ab 3:15) wird die Herkunft des Begriffs Limes folgendermaßen erklärt: „Ihr lasst ja euer x gegen ’nen Wert laufen, aber nicht weiter, genau gegen den Wert. Der ist also sowas wie ’ne Grenze und dat heißt auf Latein? Rischtisch: Limes.“
- Fachliche Fehler treten in etlichen Videos auf. Einige Beispiele: Im Video youtu.be/4EphJRvJBZY wird behauptet, dass auch die Umkehrung des Zwischenwertsatzes gälte, in youtu.be/Zs35WkrmUHk werden relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit identifiziert, in youtu.be/gP-Xx26p_kc wird (ab 2:26) eine „Normalverteilung“ gezeigt, deren Wendepunkte ganz nahe am Maximum liegen, im Video youtu.be/_rVt6qTkea8 wird der Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte als Wahrscheinlichkeit fehlinterpretiert (bei 1:58).

Paradoxerweise können fachliche Fehler die Videos aus Nutzersicht sogar attraktiv machen, weil sie die Dinge noch einfacher machen als sie sind. So wird der „Mut“ zur falsch vereinfachten Aussage, Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeiten seien das Gleiche, im ersten Kommentar zum Video youtu.be/Zs35WkrmUHk belohnt: „Meine Mathe-Lehrerin Kann es mir in 10 Std net erklären,und du in 5 Min. DANKE“.

Dass sich viele fachliche Fehler selbst in Videos finden, die seit Jahren online sind und häufig gesehen werden, zeigt ein Defizit an Qualitätskontrolle auf. Unseres Erachtens sollten die Universitäten dabei eine Rolle spielen. Universitär produzierte Videos (beispielsweise adi.dzlm.de) demonstrieren, dass fachliche Richtigkeit die Verständlichkeit erhöhen kann!

Nach breitem didaktischem Konsens ist Lernen ein aktiver Vorgang. Deswegen ist die folgende Beobachtung besonders gravierend:

- Eine wenigstens partiell eigenständige Erarbeitung des Sachverhalts durch den Zuseher ist zumeist nicht vorgesehen. Beispielsweise werden Gelegenheiten, die Zuschauer zu eigenen Argumentationen aufzufordern, meist nicht genutzt, wie etwa im Video youtu.be/DoOYpLEmWUw, in dem die Kriterien für parallele und orthogonale Geraden einfach mitgeteilt werden, ohne dass die Zuschauenden Gelegenheit haben, eigene Vermutungen anzustellen.

Um diesen Punkt noch etwas zu pointieren: Videos sind Frontalunterricht mit minimaler Interaktion. Sie festigen die Unterteilung des Unterrichts in eine Phase des Belehrt-Werdens und eine Phase des Übens. Kompetenzen wie Argumentieren oder Problemlösen können so kaum erworben werden.

Bei der Analyse von Videos, die für sich in Anspruch nehmen, dem Prinzip des „Flipped Classroom" zu folgen, entsteht gerne der Eindruck, dass das eigentlich didaktisch interessante Konzept sehr deutlich in Richtung „teaching to the test" verschoben ist, auch wenn dies ohne Einblick in den an die Videos anschließenden Unterricht natürlich nicht abschließend beurteilt werden kann.

- Technische Möglichkeiten des Mediums Video, z. B. durch flexibles Implementieren weiterer Programme, wie etwa einer Dynamischen Geometrie Software oder eines Tabellenkalkulationsprogramms, werden kaum genutzt. Ein Themenbereich, der geradezu zum Einsatz eines Schiebereglers mit Zugmodus in Dynamischer Software einlädt, sind Funktionsscharen. Dies fehlt gänzlich z. B. in youtu.be/jCjDEUVtDfs.
- In den Videos dominiert die Vermittlung prozeduralen gegenüber der Vermittlung konzeptuellen Wissens, z. B. youtu.be/SXkBPZhLov8 (für diese Unterscheidung: Rittle-Johnson & Schneider, 2015).
- In einigen Videos wird ein Bild von Mathematik gezeichnet, das bestenfalls als „notwendiges Übel" beschrieben werden kann, keinesfalls jedoch als „anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld" (KMK, 2003, S. 6). Dieses Bild ist oft sehr abschätzig. Beispiele: „Wahrscheinlichkeitsrechnung – so ein Rotz" zu Beginn von youtu.be/gP-Xx26p_kc, der Titel „Limes: Was zum Fick?" sowie die Übersicht über „Dumme Mathe Sachen", kommentiert mit den Ausdrücken „wäh", „ih" und „würg" (ab 1:03) in youtu.be/iUeeLtl3yLE, oder die Bezeichnung der Ortskurve als „olle Kackpratze" zu Beginn von youtu.be/SXkBPZhLov8.

Allgemeine Kritik und Fazit

Trotz dieser didaktisch fundierten Kritik sind die Kommentare zu den Videos häufig positiv und es erfahren die Macher der Videos mitunter hohe Anerkennung in Form von Auszeichnungen und Preisen oder auch Klickzahlen. Es ergibt sich die widersprüchliche Situation, dass die Videos einerseits häufig elementare didaktische Kriterien offenkundig nicht erfüllen, andererseits aber zumindest von Teilen der schulischen Zielgruppe geschätzt werden und offenbar dazu beitragen können, den Schulalltag und schulische Prüfungssituationen zu bewältigen. Lässt sich hier also mit dem aus der Medizin bekannten Leitsatz „Wer heilt, hat Recht" urteilen? Die Frage nach Art, Form und Inhalten schulischer Prüfungen drängt sich hier stark auf: Wie kann es sein, dass Nachhilfe-Videos, die zentrale Kompetenzen wie Argumentieren, Kommunizieren oder Modellieren nicht im Geringsten adressieren, so erfolgreich sind?

Grundlage jeder Bewertung und Beurteilung von YouTube-Videos muss die Frage nach der Zielsetzung des jeweiligen Videos und dessen Einsatzes sein. Soll dieses zum Zwecke der Nachhilfe Grundlagen vor einer Prüfung auffrischen, soll damit im Sinne des „Flipped Classroom" ein Teil des Unterrichts ausgelagert werden oder muss ein Video als Notlösung in einer Krisensituation, wie der aktuellen, zumindest Basisfertigkeiten vermitteln, auf die später aufgebaut werden kann?

Ziel der ausgeführten Kritik ist es nicht, Lernenden die oft dringend gebrauchte Unterstützung „wegzunehmen", sondern zu reflektiertem Umgang mit vorhandenen Videos anzuregen. Die dargestellten Kriterien können eine Hilfe bei der Beurteilung von Videos bieten, auf Grundlage derer beispielsweise Lehrkräfte Videos auswählen können, welche sie ihren Schülerinnen und Schülern zur Ergänzung oder – im Extremfall – zum Ersatz von Unterricht empfehlen können. Dabei gibt es Kriterien, beispielsweise die fachliche Korrektheit, die in keinem Fall verletzt sein dürfen und Kriterien, deren Beachtung die Qualität eines Videos steigert, beispielsweise die Handlungsorientierung oder der Einsatz geeigneter Software. Umgekehrt ist auch denkbar, weniger geglückte Videos für eine kritische Analyse, beispielsweise der verwendeten Fachsprache, durch die Schülerinnen und Schüler heranzuziehen. Es gibt Lerninhalte, beispielsweise die Anwendung von Algorithmen oder Kalkülregeln, deren Vermittlung durch Lösungsbeispiele in Videos unterstützt werden können und andere, beispielsweise das Argumentieren oder Problemlösen, welche sich gegen eine Vermittlung im Video geradezu sträuben. Aus diesen Gründen ist die didaktische Expertise von Lehrkräften zur Bewertung von Lehrmaterialen unabdingbar, um den aktuellen Hype um Erklärvideos zur Verbesserung des Lernens von Mathematik zu nutzen und dabei nicht das Verständnis von Lernen als aktiven Konstruktionsprozess zu ignorieren und auch noch das leider weit verbreitete negative Bild von Mathematik zu festigen.

Vermutlich gibt es kein Video, das allen oben genannten Kriterien in vollem Umfang gerecht wird, aber das ist vielleicht auch nicht notwendig, wenn zumindest die für die jeweilige Situation relevantesten Bewertungsitems positiv eingeschätzt werden können.

Für Videos, die aktuell unter Zeitdruck von Lehrkräften erstellt werden, um ihren Schülerinnen und Schülern ein Lernen zu Hause überhaupt zu ermöglichen, müssen dafür weniger strenge Maßstäbe angesetzt werden als für YouTube-Kanäle, die ihr Angebot dauerhaft und zumeist mit kommerziellem Interesse anbieten.

Literatur

Balcke, D. & Bersch, S. (2019). Mathematik lernen mit Open Educational Resources (OER): Exemplarische Analysen von Angeboten der Serlo-Lernplattform. In E. Matthes, T. Heiland & A. von Proff (Hrsg.), *Open Educational Resources (OER) im Lichte des Augsburger Analyse- und Evaluationsrasters (AAER): Interdisziplinäre Perspektiven und Anregungen für die Lehramtsausbildung und Schulpraxis* (S. 93–107). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2005). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen.

Blum, W., Vogel, S., Drüke-Noe, C. & Roppelt, A. (Hrsg.). (2015). *Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Fey, C. (2017). Das Augsburger Analyse- und Evaluationsraster für analoge und digitale Bildungsmedien: Eine Einführung. In: C. Fey & E. Matthes (Hrsg.), *Das Augsburger Analyse- und Evaluationsraster für analoge und digitale Bildungsmedien (AAER) (S. 15–46). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.*

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Verfügbar unter tinyurl.com/ydy59m4a

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2. Aufl.). New York: Cambridge UP.

Reich, K. (2006). *Systemisch-konstruktivistische Pädagogik* (3. Aufl.). Neuwied u. a.: Luchterhand.

Renkl, A., Hilbert, T. & Schworm, S. (2009). Example-Based Learning in Heuristic Domains: A Cognitive Load Theory Account. *Educational Psychology Review*, 21(1), 67–78. doi:10.1007/s10648-008-9093-4

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (S. 1102–1118). Oxford, UK: Oxford University Press.

Sabrina Bersch, Universität Augsburg
E-Mail: sabrina.bersch@math.uni-augsburg.de

Andreas Merkel, Universität Augsburg
E-Mail: andreas.merkel@math.uni-augsburg.de

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
E-Mail: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Martin Weckerle, Universität Augsburg
E-Mail: martin.weckerle@math.uni-augsburg.de

Was lehrt uns das „Lernen zuhause“ im Hinblick auf den (zukünftigen) Einsatz digitaler Technologien im Mathematikunterricht?

Hans-Georg Weigand

Es kam plötzlich, unvermittelt und unerwartet. Von heute auf morgen mussten Lehrkräfte von ihrem gewohnten regulären, realen, „normalen“ Unterricht auf einen virtuellen Fernunterricht umstellen. Von heute auf morgen mussten Lehrkräfte völlig neue Fragen unmittelbar und sofort beantworten, etwa:

- Wie kann ich einen Unterricht gestalten, bei dem das individuelle Lernen im Vordergrund steht, der aber nur aus der Ferne angestoßen und initiiert werden kann, und bei dem auch Rückmeldungen und Feedback digital zu organisieren sind?
- Wo finde ich Hinweise, Leitlinien oder Konzepte für das jetzige „digitale Unterrichten“[1] und von welchen Erfahrungen anderer kann ich profitieren?

[1] Hier soll der gegenwärtige Modeausdruck übernommen werden, auch wenn es eigentlich *Unterricht mit Hilfe digitaler Technologien* heißen müsste.

- Wie kann ich das über die Schule oder das Bundesland vielfach schon länger verfügbare – bisher aber eher selten oder nie genutzte – Lehr-Lern-System sinnvoll in einen virtuellen Unterricht integrieren (wobei man schnell feststellt, dass diese Systeme sehr bald an ihre Kapazitätsgrenzen stoßen)?
- Welche Einheiten eines traditionellen Unterrichts können beim Unterrichten mit Kommunikationssystemen wie ZOOM, WebEx oder MS Teams in gleicher oder ähnlicher Weise genutzt werden bzw. welche Neuansätze und Änderungen sind notwendig? Dabei stellt die Einarbeitung(szeit) in die technische Handhabung dieser Systeme nur eine geringe Hürde dar und spielt eine untergeordnete Rolle.
- Welche Voraussetzungen für eine Kommunikation auf digitaler Ebene sind bei mir als Lehrkraft gegeben, welche erwarte ich auf Seiten der Schülerinnen und Schüler und welche sind tatsächlich vorhanden?

Wohl wissend, dass die Problempalette bei einem „digitalen Unterrichten“ sehr groß ist und viele Aspekte des Unterrichts analysiert werden müss(t)en, werde ich mich hier auf den Einsatz digitaler Technologien beschränken, da er gerade jetzt in technischer Hinsicht eine neue Bedeutung erhält und damit auch methodische und didaktische Fragen – zumindest teilweise – neu gestellt und beantwortet werden müssen.

Die Rückständigkeit Deutschlands im digitalen Bereich

Jenseits der technischen Probleme und Schwierigkeiten fühlten sich viele Lehrkräfte vielfach bei der Beantwortung obiger Fragen hinsichtlich methodischer und didaktischer Strategien eines Online-Unterrichts alleine gelassen und überfordert. Dabei scheiterten didaktische Reflexionen über einen zielorientierten Online-Unterricht häufig bereits an den technischen Voraussetzungen. Nach dem Mitte Mai 2020 erschienen „Schul-Barometer“ vom Institut für Bildungsmanagement und Bildungsökonomie der Pädagogischen Hochschule Zug (Huber et al., 2020), bei dem 7000 Personen aus dem Bildungsbereich in Deutschland, Österreich und der Schweiz in den letzten beiden Monaten befragt wurden, erreichte nur die Hälfte der Schulen alle Schüler zumindest einmal technisch per Internet. Bei der technischen Ausstattung schneidet Deutschland – wieder einmal – gegenüber den Nachbarländern am schlechtesten ab. Über die Hälfte der Lehrkräfte in Deutschland sehen die technische Ausstattung als nicht ausreichend für webbasierte Lehre an. Zwei Drittel der befragten Schulen setzen nach wie vor auf Email als bevorzugtes Kommunikationsmedium.

Obwohl in den letzten Jahren immer wieder auf die Rückständigkeit Deutschlands im Hinblick auf die digitale technische Ausstattung hingewiesen wurde (vgl. www.gfdb.de/icils-2018/), schritt sie an den Schulen nur sehr langsam voran. Dazu trugen auch – wie in Deutschland üblich – Kompetenzstreitigkeiten zwischen Bund und Ländern bei. Nach mehrjährigem Anlauf wurde der *Digital-Pakt Schule* am 15. März 2019 vom Bundesrat (nach dem Bundestag) beschlossen, doch bis Anfang 2020 wurden nur verhältnismäßig wenig Mittel abgerufen. Hauptgrund waren angeblich die fehlenden Medienkonzepte der Schulen. Doch die Diskussion um die Weiterentwicklung einer digitalen Grundlage der Bildung reicht weiter zurück. Die von Bund und Ländern initiierte „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ stammt vom Herbst 2016. In ihrer Stellungnahme hierzu hat die GDM bereits 2017 auf die fachdidaktische Komponente des „Primats der Pädagogik“ und auf notwendige Qualitätsstandards beim Einsatz digitaler Technologien hingewiesen (vgl. tinyurl.com/yc2spsbm). Auch heute mangelt es nicht an Empfehlungen für digitale Medien, Werkzeuge und Internetseiten mit didaktisch-methodischen Hinweisen (vgl. www.bildungsmanagement.net/Schulbarometer/). Doch – wieder einmal – zeigt sich, dass die technischen Voraussetzungen notwendig aber nicht aus- oder hinreichend sind. Genauso wenig wie im Überfluss bereit gestellte Materialien nicht zu einer verstärkten Verwendung im Unterricht führen. Das Entscheidende im Hinblick auf die Unterrichtsgestaltung sind nach wie vor die eigenen Erfahrungen, die eine Lehrkraft in einer konstruktiven Auseinandersetzung mit den Inhalten, der Situation und technischen Gegebenheiten gewinnt. Und dazu bedarf es vielfacher Unterstützungssysteme. Eines davon ist die Fachdidaktik.

Die Versäumnisse der letzten Jahre

Es besteht neben der berechtigten Forderung nach adäquater technischer häuslicher Ausstattung für Lehrkräfte und Lernende kein Mangel an Hinweisen auf die Notwendigkeit von „Online-Konzepten“ oder „Konzepten eines digitalen Lernens“. Gelegentlich wird auch bereits zum nächsten Schritt übergegangen, wie etwa in dem bildungsökonomischen Aufruf von 92 Ökonom/-innen in Deutschland: „Gleichzeitig müssten pädagogische Fachkräfte inklusive der Lehrer/-innen mit Blick auf die Konzeption digitalen Unterrichts und Lernens schnellstmöglich geschult werden“ (Danzer et al., 2020). Dem wird niemand widersprechen, doch es stellt sich die Frage, wo diese Konzeption digitalen Unterrichts sind. Sicherlich gibt es Erfahrungen von Fernuniversitäten (in Deutschland etwa seitens der Universität Hagen, der Virtuellen Hochschule Bayern oder in den USA der Khan Academy), es gibt zahlreiche MOOCs, die vor allem von amerikanischen Universitäten kostenlos angeboten werden (in der Praxis allerdings mit hohen Abbruchquoten zu kämpfen haben und deren Beliebtheit sinkt), und es gibt viele medienpädagogische Überlegungen zum Einsatz von Kommunikationssystemen (vgl. www.jff.de/kompetenzbereiche/digitaler-wandel/). Schauen wir aber auf den Mathematikunterricht, dann gibt es zwar zahlreiche, fast unüberschaubar viele Überlegungen zum Einsatz digitaler Technologien im Unterricht, die aber nur bedingt für die gegenwärtige Situation des „Lernens zuhause" geeignet sind, die jedenfalls an die aktuelle Entwicklung angepasst, auf diese übertragen und damit auch entsprechend abgewandelt werden müssen. Das ist aber nicht in einem ad hoc Verfahren möglich, sondern erfordert grundsätzliche konzeptionelle Überlegungen und eine substanzielle Neuorientierung. Woran liegt es, dass gegenwärtig praktikable Konzepte für den Fernunterricht zumindest für den Mathematikunterricht (aber wohl auch in anderen Fächern) fehlen? Was sind die diesbezüglichen Versäumnisse der letzten Jahre? Bei einer durchaus auch selbstkritischen Reflexion sehe ich eine ganze Liste von Unzulänglichkeiten und Versäumnissen im Hinblick auf die aktuelle Situation:

- Der Unterricht mit digitalen Technologien, was bisher überwiegend Einsatz von Taschenrechnern und Taschencomputern bedeutete, war zu sehr auf den Präsenzunterricht im Klassenzimmer ausgerichtet. Das von vielen oder gar allen Schülerinnen und Schülern praktizierte individuelle Arbeiten mit Smartphones oder Tablets zuhause wurde von Lehrkräften nicht unterstützt, häufig gar nicht wahrgenommen, jedenfalls nicht als konstruktives Entwicklungspotenzial in den Unterricht integriert. Dabei gehört die Verwendung von Programmen oder Apps wie Math42 oder Photomath für viele Schülerinnen und Schüler zum täglichen (Kontroll-) Standard.
- Individuelle Entwicklungen und Möglichkeiten wurden im deutschen Schulsystem stets zugunsten der Gleichförmigkeit im Klassenraum vernachlässigt. Ein Beispiel ist die möglichst anzustrebende Ausstattung aller Schülerinnen und Schüler mit den gleichen Geräten. Individuelle Vielfalt ist nicht erwünscht. Der Aufruf „BYOD – Bring your own device" ist weitgehend nur aus angelsächsischen Ländern bekannt.
- Der Einsatz digitaler Technologien war und ist sehr stark auf die Verwendung in Prüfungen fokussiert. Sie wurden zu wenig für das verwendet, was Fachdidaktiker/-innen immer wieder als zentral und wichtig herausstellen, für die Entwicklung adäquater Begriffsvorstellungen oder nachhaltiger Kompetenzen, etwa im Bereich des Begründens und Argumentierens oder Modellierens. Gerade jetzt können aber digitale Technologien beim eigenständigen Erarbeiten von neuen Inhalten dazu einen wichtigen Beitrag leisten. Dies erfordert aber Erfahrungen mit eigenständigem konstruktivem Arbeiten.
- Die Möglichkeiten des Internets und das Einbeziehen mathematischer Lernsoftware wurden zu wenig thematisiert und genutzt. Jetzt suchen Lehrkräfte, Eltern und Lernende nach entsprechender Unterstützung. Programme wie „Anton App" oder „Sofatutor" erfreuen sich großer Beliebtheit, wobei man sehr schnell feststellt, dass viele – gerade auch kostenpflichtig – auf dem Markt angebotene Programme nur partiell sinnvoll eingesetzt werden können und es vielfach fachkundiger Hinweise, Korrekturen und Erläuterungen bedarf.
- Die Konkurrenz der „Internetlehrer" wurde ignoriert. Alternative im Internet zugängliche Lehrwege – rhetorisch gut dargeboten und technisch gut erstellt, aber doch meist oder häufig neuere (und vielleicht auch ältere) didaktische Erkenntnisse ignorierend –, wie etwa die Erklärvideos von Daniel Jung oder „Lehrer Schmidt", erfreuen sich jetzt großer Beliebtheit. Sie waren schon immer (fast) allen Schülerinnen und Schülern bekannt, wurden von vielen regelmäßig angesehen. Partiell wurde in der Fachdidaktik eine kritische Auseinandersetzung mit dieser Lehrform geführt, es fehlte und fehlt aber – sicherlich ist es auch nicht einfach – an konstruktiven Entwicklungen von „Best practice"-Beispielen.[2]
- Das – im Zusammenhang mit dem Erledigen von Hausaufgaben und im Hinblick auf Prüfungsvorbereitungen – Verwenden von Kommunikationssystemen wie Facebook oder WhatsApp seitens der Schülerinnen und Schüler war für viele Lehrkräfte im Hinblick auf den Unterricht nicht zielführend, störend und nicht unterstützenswürdig. Jetzt ist gerade die Kommunikation unter Lernenden auf dieser virtuellen Ebene ein wichtiger Pfeiler für sonst nicht vorhandenes Feedback.

[2] Ein hoher Standard, allerdings für Universitätsmathematik, ist www.3blue1brown.com/.

Überlegungen für die kommende Zeit – kurz- und langfristig

Das Aufzeigen von Versäumnissen ist noch kein konstruktiver Lösungsvorschlag. Aber es ist wichtig, um Erfahrungen und Erkenntnisse der Vergangenheit im Hinblick auf Neukonzeptionen für die Zukunft kritisch zu reflektieren, und es ist ein erster Schritt für zukunftsorientierte Überlegungen.

Bzgl. der gegenwärtigen Situation sehe ich zwei grundsätzlich unterschiedliche Ziele, ein *kurzfristig umzusetzendes* und ein langfristig *anzustrebendes* Ziel.

1. Lehrkräfte benötigen kurzfristig Hilfen beim „Lernen zuhause", bei der Entwicklung und Gestaltung von Einheiten in virtuellen Lernumgebungen. Dabei ist davon auszugehen, dass die gegenwärtige Situation sich wohl partiell verändert, das „Lernen zuhause" aber noch eine längere Zeit bedeutsam bleiben wird.
2. Lehrkräfte und Schulen – und hier ist insbesondere die Fachdidaktik gefordert – benötigen mittel- und langfristig Konzepte eines sinnvollen Einsatzes digitaler Technologien, die über den realen Unterricht hinaus auch für den virtuellen Unterricht tragfähig sind.

Zu 1

Die Konzepte bzgl. des 1. Ziels müssen pragmatisch ausgerichtet sein. Digitale Technologien sind als *technische Medien* die Voraussetzung für einen virtuellen Unterricht, sie sind aber auch *Unterrichtsmedien und Werkzeuge* zum Erreichen inhaltlicher Ziele des Unterrichts. In der gegenwärtigen Situation gilt es zunächst die Voraussetzungen zu schaffen, also den technischen Medienaspekt zu betonen. So bedarf es eines *asynchronen Systems*, im Allgemeinen eines Lehr-Lern-Managementsystems, mit dem vorausschauende Tages- und Wochenpläne übermittelt, Arbeitsblätter verteilt und schriftliche Rückmeldungen eingesammelt werden können. Es bedarf aber auch eines *synchronen Kommunikationssystems*, mit dem eine unmittelbare Ansprache der Schülerinnen und Schüler möglich ist. Unterricht ist ohne persönlichen Kontakt, ohne verbalen Austausch, ohne Feedback, ohne Bestätigungen, aber auch ohne konstruktiver Kritik nicht möglich. Wir wissen ja nicht erst seit der Hattie-Studie (Hattie, 2013), dass formativer Evaluation und konstruktivem Feedback zentrale Rollen im Hinblick auf den Unterrichtserfolg zukommen.

Technische Medien sind die Voraussetzung, auf der fachliche und didaktische Überlegungen in virtuellen Umgebungen aufbauen. Das Leitprinzip ist und bleibt aber – ob realer oder virtueller Unterricht – die Gestaltung von Lernumgebungen, die zur kognitiven Aktivierung der Lernenden führen. Digitale Unterrichtsmedien, wie elektronische Lehrbücher, internetbasierte Apps und Lernpfade oder auch digitale Texte unterstützen diesen Prozess (z. B. adi.dzlm.de oder www.mathematik-digital.de), indem sie – wiederum ob realer oder virtueller Unterricht – zentrale, wichtige Unterrichtsziele und -prinzipien unterstützen. Länder und Verlage haben hier schnell reagiert: Unterstützende Unterrichtsmaterialien und -vorschläge für die Corona-Zeit gibt es mittlerweile von allen Bundesländern, das Angebot an Webinaren ist groß[3], und es erscheinen neue Zeitschriften, wie etwa „digital unterrichten". Insbesondere *digitale Werkzeuge*, also Computeralgebra-Systeme, Dynamische Geometriesoftware oder Tabellenkalkulation können und sollten wie im realen Unterricht eingesetzt werden. Allerdings benötigen Schülerinnen und Schüler hierzu die Fähigkeit, eigenständig und zielgerichtet damit zu arbeiten. Ein Ziel, das es im realen Unterricht anzubahnen gilt.

Zu 2

Die Entwicklung von Konzepten im Hinblick auf das 2. Ziel ist wesentlich komplexer. Hier gilt es über kurzfristige Hilfen hinaus, „durchdachte, stimmige didaktische Szenarien unter Nutzung moderner digitaler Technologien mit hohem Potenzial für alle relevanten Lehr-Lernprozesse" (Reinmann, 2020) zu entwickeln. Jetzt geht es um das Design von Lernumgebungen und die Integration von Lehrmaterialien mit Hilfe digitaler Technologien wie Videos, Quizzes, Lernpfade, Erklärvideos, Online-Tests, digitaler Lehrbücher, Animationen und Simulationen. Hier geht es nicht darum, dass die einzelne Lehrkraft diese Materialien selbst entwickelt, aber es geht darum, Kriterien zu kennen, nach denen gute Materialien ausgewählt werden können. Digitale Technologien sind Werkzeuge und Unterrichtsmedien (die Grenzen sind hier fließend), – im wörtlichen Sinne von Medien – Mittler zwischen den „Ecken" des didaktischen Dreiecks von Lehrkräften, Lernenden und Inhalten, die unter dem Primat des Ziels eingesetzt werden. Und dieses Ziel heißt Verstehen, Begreifen, Erklären, Anwenden und Probleme lösen können. Es geht um die Aktivierung der Lernenden im Sinne einer eigenständigen Wissenserschließung.

Vielleicht kommt gerade in der jetzigen virtuellen Situation Worten wie Unterrichten oder gar Vermitteln, die in vielen sog. konstruktivistischen Lernumgebungen häufig ignoriert oder als nichtexistent angesehen werden, wieder eine neue ver-

[3] Siehe etwa dzlm.de/node/2393/, mathematik-lehr-netzwerk.de, t3deutschland.de/de/t3-europe.

stärkte Bedeutung zu. Vermitteln im Sinne von Auswählen, Abwägen, Vorstrukturieren, Erklären, Bereitstellen oder Vorausdenken. Ohne eine solche verstärkte Vorstrukturierung von Unterrichtseinheiten erscheint ein digitaler oder virtueller Unterricht kaum oder nicht möglich zu sein. Doch hier werden die Überlegungen spekulativ. Das ist der Ausgangspunkt für Forschungsfragen, die es dann zukünftig auf theoretischer und empirischer Ebene zu beantworten gilt. Erst auf dieser Basis ist dann die Frage zu beantworten, welche der in der Notsituation des virtuellen Unterrichts evtl. spontan und intuitiv entwickelten Ideen (im Hinblick auf den Einsatz digitaler Technologien) auch in der Nach-Corona-Zeit bestehen bleiben sollten, dann aber – hoffentlich – in enger Wechselbeziehung zum realen Unterricht.

Literatur

Danzer, A. M., Danzer, N., Felfe de Ormeno, Ch., Spieß, K., Wiederhold, S., & Wößmann, L. (2020). *Bildung ermöglichen! Unterricht und frühkindliches Lernen trotz teilgeschlossener Schulen und Kitas, Bildungsökonomischer Aufruf.* Verfügbar unter tinyurl.com/yb7bjcfl.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen.* Baltmannsweiler: Schneider.

Huber, St. G., Günther, P. S., Schneider, N., Helm, Ch., Schwander, M., Schneider, J., & Pruitt, J. (2020). *COVID-19 und aktuelle Herausforderungen in Schule und Bildung. Erste Befunde des Schul-Barometers in Deutschland, Österreich und der Schweiz 2020.* Münster, New York: Waxmann. Verfügbar unter tinyurl.com/yay4bray.

Reinmann, G. (2020). *Digitalisierung in der universitären Lehre JETZT*. Verfügbar unter tinyurl.com/ya9po2o2.

Hans-Georg Weigand, Universität Würzburg
E-Mail: weigand@dmuw.de

Die „eine“ und die „andere“ Mathematik: Assoziationen zu einem grundlegenden Aspekt der Mathematikdidaktik

Michael Neubrand

Kurzum, man kann eine Welle nicht isoliert betrachten, ohne dabei die vielfältigen Aspekte mit einzubeziehen, die zu ihrer Bildung zusammenwirken, desgleichen die ebenso vielfältigen, die sie von sich aus bewirkt.

Italo Calvino (2018, S. 10)

Welche Implikationen hat es für die mathematikdidaktische Arbeit, welche Eigenart der Mathematik man für das jeweilige Problem wählt? Diese Frage umkreise ich in 15 Assoziationen und orientiere mich dabei an zwei bekannten und einem aktuellen Beispiel.

Die Assoziationen in diesem Aufsatz beziehen sich alle auf eine Dialektik, die ich kürzlich in den *GDM-Mitteilungen* als das „Balance-Problem“ (Neubrand, 2018) angesprochen habe. Dort ging es zwar noch eher vordergründig um die Balance zwischen fertigkeits- und verständnisorientierten Ausrichtungen des Mathematikunterrichts. Diese Balance ist aber viel tiefer auszutarieren. Sie betrifft das Grundverständnis der Mathematik selbst.

Es gibt immer „die eine“ Seite der Mathematik (später kurz mit „E“ gekennzeichnet), nämlich nach funktionaler Verwendung und effektiven Verfahren zu suchen und diese auch zu beherrschen, bzw. im logischen Aufbau der Mathematik sich mittels formaler Mittel der Richtigkeit eines Satzes zu versichern. Es gibt aber auch „die andere“ Seite (folglich später kurz „A“ genannt), die auf Struktur, innere und kontextuelle Kohärenz, begriffliche Entwicklung fokussiert. Das sind zwei grundsätzliche und zueinander komplementäre Sichtweisen auf die Mathematik. Sie treten in der elaborierten mathematischen Forschung genauso auf wie in der Schulmathematik, und sie können folglich auch in der mathematikdidaktischen Reflexion nicht ausgeblendet werden. Die spezifisch mathematikdidaktische Herausforderung besteht dabei darin, diese Dialektik selbst dann noch zu erkennen und zu bearbeiten, wenn – wie es ja bei den nur allzu geläufigen Gegenständen des schulischen Curriculums der Fall ist – die verhandelten Inhalte weit unterhalb von sog. „großen“ mathematischen Problemen liegen.

Anstöße, sich mit dieser Thematik zu befassen, können von weit außen kommen, oder eben direkt aus dem inner-disziplinären Diskurs.

Von außen: Im Programm Bayern 2 des Bayerischen Rundfunks lief am 16. 4. 2019, 9:30 Uhr in der Reihe „radioWissen“ die Sendung „Italo Calvino – Schriftsteller einer Generation“ von Christina Hamel. Auch das als Motto vorangestellte Zitat kam dort vor – und fesselte mich unmittelbar. Denn tatsächlich meint auch „die andere“ Mathematik, dass man keinen mathematischen Gegenstand „isoliert betrachten“ (siehe Motto) kann. Der „Herr Palomar“ versucht zwar alles assoziativ zu umkreisen. Schließlich muss er aber konstatieren, dass man sich nicht auf einen Aspekt allein konzentrieren kann; es gehe dann „wie bei jenen Bildern, vor denen man nur die Augen zu schließen braucht, und wenn man sie wieder öffnet, hat sich die Perspektive verändert“ (Calvino, 2012, S. 13). Wohl nicht die unpassendste Metapher für die Fragilität in Lern- (und Lehr-) Prozessen.

Nun von innen: Heinz Griesel hat sich wie nur eine kleine Gruppe deutscher Kolleginnen und Kollegen zeitlebens um Grundsatzfragen der Mathematikdidaktik gekümmert. Sein soeben posthum erschienener letzter Aufsatz (Griesel et al., 2019) fordert explizit heraus: „Es ist für die Didaktik der Mathematik außerordentlich wichtig, dass über diese Grundsatzfragen diskutiert wird, um dadurch eine Fortentwicklung unserer Wissenschaft zu befördern.“ (S. 125) Im Beitrag von Griesel et al. (2019) geht es dabei um mentale Repräsentationen mathematischer Begriffe, insbesondere in der Gestalt von Grundvorstellungen. Das ist sicher eine der fundamentalen Fragen der Mathematikdidaktik: die Begriffe und das Individuum.

Ebenso wichtig ist die sozusagen darüber (oder darunter) liegende Seite, wie denn der ganze Gegenstandsbereich, also die Mathematik, sich formt und entwickelt, auch ohne den sofortigen Blick auf die individuellen Prozesse, aber durchaus unter der Perspektive, dass wir über Mathematik im Rahmen allgemeiner Bildung reden. In diese Problematik kann die „eine und die andere“ Mathematik etwas gedanklichen Halt bringen. Dies ist ein gewagtes

Unternehmen, denn „man kann eine Welle nicht isoliert betrachten", wie Herr Palomar bemerkte. Und die Perspektive der Mathematikdidaktik ist eben nicht einfach nur die der analytischen „Philosophie der Mathematik", so sehr man diese auch braucht.

Daher wähle ich einen assoziierenden Zugang, indem ich drei inhaltlich ganz unterschiedliche Beispiele, auf die ich kürzlich gestoßen bin, aufgreife und sie zwar unsystematisch, aber immerhin sich in ihrer Reichweite steigernd, unter diversen Aspekten der „einen und der anderen" Mathematik diskutiere (vgl. dazu auch Neubrand, 2015a). Die Reihe der 15 Assoziationen zieht sich über die drei Beispiele hin.

Das erste Beispiel stammt aus einer Quelle, die wohl häufiger bei der Suche nach Übungsaufgaben zur Elementaren Zahlentheorie konsultiert wird, dem Buch von Adler & Coury (1995). Dort finden sich zahlreiche „Problems and Solutions", und als 1 bis 29 auf S. 21 auch der folgende Satz samt dem Beweis. Ich übersetze so wörtlich wie möglich und markiere, das Label „E" für die *eine* Mathematik nutzend, diesen Satz als „E-Arithmetik":

Satz E-Arithmetik: Seien p und $p+2$ zwei Primzahlen mit $p > 3$. Zeige, dass deren Summe $2p+2$ durch 12 teilbar ist.

Beweis: Da $2p+2 = 2(p+1)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $p+1$ durch 6 teilbar ist. Weil p ungerade ist, ist $p+1$ gerade und deswegen durch 2 teilbar. Weiterhin ist p von der Form $3k+1$ oder $3k+2$; aber wenn $p = 3k+1$ wäre, dann wäre $p+2 = 3(k+1)$ durch 3 teilbar und deswegen keine Primzahl. Wir schließen, dass $p = 3k+2$ ist und daher $p+1$ durch 3 teilbar. Da 2 und 3 Teiler von $p+1$ sind und $(2,3) = 1$, folgt, dass $p+1$ durch 6 teilbar ist.

Der Satz ist damit schlüssig bewiesen, na sagen wir mal, man hätte der Vollständigkeit halber noch $k \in \mathbb{N}$ hinzufügen und (2,3) als den ggT kennzeichnen können. Als ich aber diesen Satz und Beweis (als einen unter den vielen auf diesen Seiten) einfach so ansah, gab es bei mir spontan diese Reaktion: Diente da einfach ein leicht formulierbares Problem, um das Beweisen, genauer wohl: die technischen Fertigkeiten zum Beweisen, einzuüben, oder handelt es sich hier tatsächlich um ein Stückchen Mathematik, das irgendwo dazu gehört, das irgendeine Bedeutung hat, das das eigene Wissen irgendwie vermehrt? Dazu kommen dann rasch ein paar Ideen: Die Voraussetzung „p und $p+2$ sind Primzahlen" bewirkt den Gedanken: Aha: Primzahlzwillinge! Dahin gehört das also! Aber „die Summe"? Auch hier geht es relativ schnell: Darum geht es gar nicht, und der erste Schritt im Beweis zeigt schon den Kern: Es geht um „$p+1$", und das ist die Zahl zwischen den beiden Zwillingen. Aha: Es ist doch etwas Inhaltliches bewiesen worden, nämlich – unserer Kennzeichnung „A" folgend – ein Satz „A-Arithmetik". Diesen kann man nachträglich ganz anders beweisen, und zwar so, dass die Aussage Einordnungen erfährt in ein Geflecht elementarer Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

Satz A-Arithmetik: Die Zahl, die zwischen zwei Primzahlzwillingen liegt, ist durch 6 teilbar, abgesehen vom Paar $(3,5)$.

Beweis: Aufeinanderfolgende natürliche Zahlen wechseln immer ab: Ist die eine ungerade, wie es bei Primzahlen ab 3 gilt, ist die darauffolgende gerade. Die Zahl nach dem ersten Zwilling ist also durch 2 teilbar.

Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen, und so liegen die beiden Primzahlzwillinge und die Zahl dazwischen, ist immer eine, die durch 3 teilbar ist. Die beiden Primzahlen können es nicht sein, es sei denn man nähme das Paar $(3,5)$. Also ist die Zahl zwischen den beiden Primzahlen durch 3 teilbar.

Da 2 und 3 zueinander teilerfremd sind, sind durch 2 und 3 teilbare Zahlen auch durch 6 teilbar.

Der darstellerische Unterschied beider Sätze und beider Beweise ist evident, obwohl der sachliche Kern der gleiche ist. Wie geht man mit dieser Diskrepanz um? Ist solche Doppelgesichtigkeit vielleicht sogar typisch für den Umgang mit Mathematik? Steckt darin möglicherweise Potential zu weiteren Reflektionen?

Natürlich liegt der in den beiden Sätzen angesprochene mathematische Sachverhalt nicht sehr tief, wie man so sagt, aber das ist ja eben die mathematikdidaktische Herausforderung. Die folgenden Assoziationen zeigen, dass man mit der Gegenüberstellung beider Vorgehensweisen durchaus Relevantes ansprechen und illustrieren kann, insbesondere wie die Mathematik in didaktischen Kontexten auftritt.

(1) Es gibt kein „besser" und „schlechter" in einem irgendwie normativen Sinn. Es kommt immer auf den Kontext der jeweiligen Verwendung an. Um spezifische Schwierigkeiten von Studierenden bei der korrekten Formulierung von formalen Beweisen zu erkennen und zu diskutieren, kann man durchaus Satz/Beweis „E-Arithmetik" nehmen. Aber die Entwicklung von inhaltlichem Wissen gelingt so wohl nicht. Lernen lebt nämlich von der Vernetzung von Wissenselementen. Satz/Beweis „E" in einem Lehrbuchtext zu nehmen muss also sehr genau von den speziellen Absichten an einer bestimmten Stelle des Textes her entschieden werden. (Und die

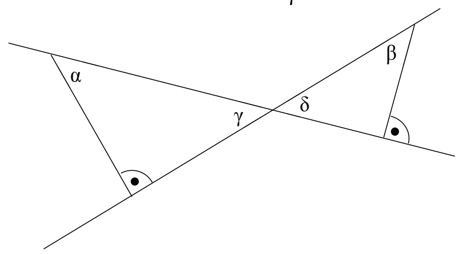
Leserinnen und Leser sollten das auch erkennen können.)

(2) Natürlich zählt am Ende eines Beweises die Schlüssigkeit. Aber viele Autoren – ich nenne stellvertretend Gila Hanna – haben überzeugend dargelegt, dass das Beweisen als spezifische Tätigkeit der Mathematik mehr ist als logische Rechtfertigung, dass es vielmehr auch um Erklärungen und Einbettungen geht. Diese beiden Seiten des Beweisens referieren auf die beiden Seiten der Mathematik selbst, eben die „eine" (also „E") und die „andere" (also „A") Mathematik.

(3) Wenn aber zur Entwicklung von inhaltlichem Wissen auf den Typus A schwerlich verzichtet werden kann, könnte man dann Lernen dennoch auch aus Satz/Beweis E initiieren? Im Sinne der Balance ja, wenn man bewusst den Kontrast zu Typ A sucht. Zu den formalen Ansätzen kann stets deren inhaltliche Bedeutung benannt werden, die formalen Darstellungen sind explizit zu machen als Mittel, bestimmte Inhalte umzusetzen, sozusagen als „Chiffren" zu begreifen. Wenigstens an zwei Stellen im Beweis E-Arithmetik wird das sichtbar: (a) Die Summe der beiden Primzahlen meint eigentlich das Doppelte der mittleren Zahl. (b) Mit $3k$, $3k+1$, $3k+2$ drückt man, um an die Teilbarkeit durch 3 formeltechnisch heranzukommen, ein Tripel dreier aufeinanderfolgenden Zahlen aus; es ist herauszufinden, welche der drei Darstellungen zu p, $p+1$ und $p+2$ passt. Und nach dieser Dechiffrierung im Kleinen könnte man auch übergreifend fragen: Was wird bezweckt, wenn in Beweisen begriffliche Zusammenhänge in formale Ausdrücke übersetzt oder gar versteckt werden? Was kommt zuerst, die Idee oder die formale Expression der Idee?

Das zweite Beispiel stammt aus der Elementargeometrie, die gerade in der Schule – nicht zu Unrecht (Neubrand, 2010) – als geeignetes Feld für die Erschließung des Beweisens gilt. Heinze und Ufer (2013, S. 146) haben herausgearbeitet, dass das Beweisen – als individueller Problemlöseprozess – keineswegs auf der Ebene des Detailwissens oder der technischen Umsetzung beginnt, sondern eher mit dem Erkennen einer „prototypischen figuralen Konfiguration". Auch empirisch scheint sich also abzuzeichnen, dass eine Komplementarität besteht zwischen dem eher komplexen Zugang zur Gesamtkonfiguration („Wie fügt sich das insgesamt zueinander, wo gehört das hin?" – der „A"-Zugang) und dem Aufstellen einer formalen Argumentationskette („Wie setze ich es technisch um, wie kann ich chiffrieren?" – die „E"-Darstellung). Beide Wissenskategorien sind notwendig für Beweisfähigkeit von Schülerinnen und Schülern. Heinze und Ufer (2013) nehmen als Beispiel einen Satz, den sie nur durch eine Skizze und die Aufforderung „Beweise!" formulieren. Sie geben selbst keinen konkreten Beweis an, aber implizit wird im Text deutlich, dass sie letztlich an eine lineare Argumentation über die Winkelsumme im Dreieck denken. Ich zeichne die Figur neu in etwa so wie bei Heinze & Ufer (2013, S. 146), rekonstruiere ihren Beweis und markiere den Satz nun als *„E-Geometrie"*:

Satz E-Geometrie: Beweise $\alpha = \beta$.



Beweis: In den beiden Dreiecken beträgt die Winkelsumme:

$$180° = \alpha + 90° + \gamma \quad \text{bzw.} \quad 180° = \beta + 90° + \delta$$

Da es sich um Scheitelwinkel handelt, gilt $\gamma = \delta$. Folglich ist

$$\alpha = 180° - 90° - \gamma = 180° - 90° - \delta = \beta$$

und somit $\alpha = \beta$.

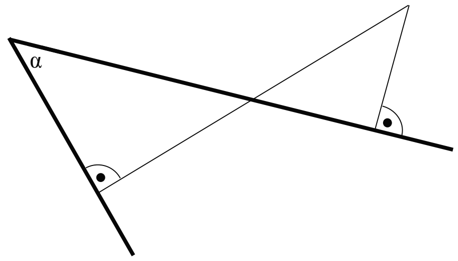
Satz bewiesen! Aber auch hier stellt sich wieder die „A"-Frage: „Wo gehört das hin?" Gibt es einen Rahmen, innerhalb dessen man solche Sätze („Sätzchen") ansiedeln kann? Und bedarf nicht das Erkennen einer „prototypischen figuralen Konfiguration" mehr „Über"-Sicht als nur das Sehen von zwei Dreiecken?

Tatsächlich – und das war wohl der Grund, warum mir die Figur bei Heinze und Ufer sofort auffiel – kenne ich die hinter der Konfiguration in Satz E-Geo stehende Aussage schon seit meiner Schulzeit. Diese hatte bei uns im Mathematikunterricht sogar einen eigenen Namen: „Doppellotsatz", und dies war – für mich jedenfalls – wohl eines der ersten Beispiele dafür, dass man in der Mathematik überhaupt argumentieren muss und es auch schon nach den ersten Anfangserkenntnissen kann, dass die Argumentationen auch auf immer komplexeren schon bewiesenen Einsichten („Sätze") aufbauen können, dass man solche Sätze zur besseren Identifikation mit Namen versehen kann, kurzum dass die Behandlung der Elementargeometrie auch den – von uns Schülerinnen und Schülern damals natürlich niemals explizit so benannten – Zweck hatte, „Vorbild für Mathematik" zu sein (nach Artmann, vgl. Neubrand, 2010), mithin dem Aufbau der „anderen" Mathematik zu dienen.

Dieses Meta-Ziel des Geometrieunterrichts ist heute mehr und mehr in den Hintergrund getreten, wenngleich man gelegentlich in den Lehrplan-

Präambeln und auch in den Bildungsstandards Anklänge dafür findet. Die „andere" Mathematik sollte dann auch in Formulierung und Begründung von Satz „*A-Geometrie*" zum Ausdruck kommen.

Satz A- Geometrie: Errichtet man auf den Schenkeln eines Winkels α Senkrechte, so schneiden sich diese ebenfalls im Winkel α (oder im Ergänzungswinkel $180° - \alpha$).

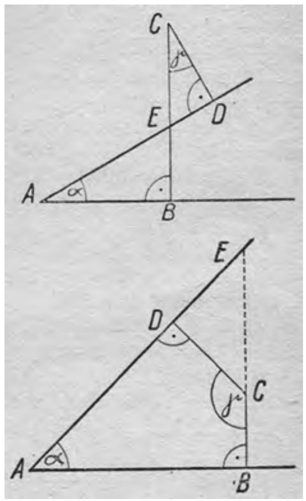


Beweis: Wir sehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die so zusammenstoßen, dass an der gemeinsamen Spitze ein Paar von Scheitelwinkeln auftritt. Scheitelwinkel sind gleich, daher auch die beiden anderen Winkel, denn in einem rechtwinkligen Dreieck legt der eine nicht-rechte Winkel den anderen fest.

(Schneiden sich die beiden Lote innerhalb des Winkelfelds von α, so liegt dem Winkel α der Winkel $180° - \alpha$ gegenüber, denn wieder sieht man zwei rechtwinklige Dreiecke, die sich zwar überlappen, aber dennoch einen Winkel, den an der Ecke E in der folgenden Figur unten, gemeinsam haben – hier ohne Skizze; siehe die zweite Figur unten.)

Man beachte, dass die Zeichnung fast identisch ist zu der im Satz E-Geo. Es sind lediglich ein paar Elemente hervorgehoben (die beiden Schenkel von α), andere Elemente verkürzt dargestellt (die Senkrechten), und nur das gegebene Datum (der Winkel α) ist eingetragen. Aber alle diese Elemente haben nun eine geometrische Bedeutung zugeschrieben bekommen, zeichnerisch und inhaltlich. Es liegt keine zufällige Konfiguration mehr vor, sondern man redet über einen Winkel (also über eine ganze geometrische „Gestalt", um dieses Wort zu gebrauchen) und über das Errichten von Senkrechten (also über eine geometrische Relation). Beides, der Winkel und die Senkrechte, sind zentrale Begriffe der Elementargeometrie. Die zu beweisende Aussage „gehört" also zum Erkunden des Geflechts der Eigenschaften elementarer geometrischer Figuren.

Sinnvollerweise gehört bei dieser Sicht der Satz dann in ein entsprechendes Schulbuchkapitel. Da Lehrpläne aber heute keine Einzelstoffe mehr ausweisen, muss man weit zurückgehen, um konkrete Schulbuch-Quellen zu finden mit dem „Doppellotsatz" (der nirgends wirklich so heißt). Ein Beispiel ist die alte Planimetrie von Christian Renner (1948). Dort gehört der Satz in das Kapitel „Winkel-Sätze".

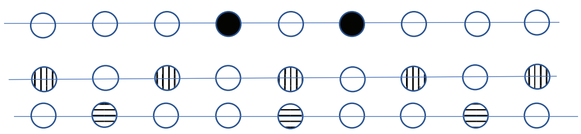


Die oben schon begonnene Reihe der Assoziationen zum Thema „die eine und die andere Mathematik" kann ich nun fortsetzen mit dem zusätzlichen Beispielmaterial.

(4) Eine Konsequenz aus dem Kontrast der Sätze *E-Geometrie* vs. *A-Geometrie* ist, dass man nun das vage „Wo gehört das hin?" durchaus konkreter fassen kann. Die „andere" Mathematik organisiert sich nicht in unverbundenen Einzelproblemen und Einzelkonfigurationen, sondern verlangt systematische kohärente „Kapitel", freilich nicht unbedingt streng deduktiv aufgebaut und nicht ohne die Eröffnung je persönlicher Um- und Auswege, aber eben doch kohärent durch Verweise, Bezüge, bewusst gemachte Variationen, logische Herleitung und kontextuellen Zusammenhalt.

(5) Das geometrische Beispiel verweist in natürlicher Weise auf visuelle Fähigkeiten. Man muss die Dreiecke, über die man urteilt (Typ A) oder in denen man Rechnungen anstellt (Typ E), erst sehen und figural diskriminieren. Auch das will im Mathematikunterricht bewusst gelernt werden; ich habe einmal den darstellenden („kontemplativen") und den operativen („aktiven") Zugang zu Visualisierungen herausgehoben (Neubrand, 1987). Bei E-Geometrie dominierte eher das darstellend-erkennende Vorgehen. Einen visuell-operierenden Beweis hingegen kann man sich sehr gut bei A-Arithmetik vorstellen: Markiert man auf einer Kette, die die aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellt, das Paar der Primzahlzwillinge in schwarz, dann darf auf dem Platz der beiden Primzahlen weder eine gerade (vertikal schraffiert), noch

eine durch 3 teilbare Zahl (horizontal schraffiert) liegen. Das Verschieben der geraden/ungeraden Reihe bringt immer einen schraffierten Punkt unter eine der Primzahlen. Beim Verschieben der 3-er-Reihe aus der gezeichneten (erlaubten) Lage kommt sowohl beim Verschieben um 1 wie beim Verschieben um 2 ein schraffierter Punkt unter eine der Primzahlen. Die gezeichnete Lage der Vielfachen relativ zu den Primzahlzwillingen ist also die einzig mögliche.



(6) Nun zeigt sich ein weiteres Kennzeichen der „anderen" Mathematik: Jetzt kann man variieren, weitergehen, verallgemeinern. Ein Beispiel: Wenn man in obiger Skizze auch noch „teilbar durch 5" betrachten will, dann sieht man: Wenn ein Vielfaches von 5 in der Mitte liegt, ist dort sogar ein Vielfaches von 30: Zwillinge mit Endziffern 9 und 1 treten demnach nur vor und hinter $30, 60, 90, \ldots$ auf (aber eben nicht immer!). Und so kann man das Spielchen fortsetzen. Ebenso ist es im Fall der geometrischen Sätze: Was geschieht, wenn statt der Lote Geraden in irgendeinem Winkel ϕ auf den Schenkeln des gegebenen Winkels errichtet werden? Das wären die sog. „non-perpendiculars" (Neubrand, 2016), und der Satz gilt selbst dann noch. In beiden Beispielen ist solches Weitermachen aber nur dann möglich, wenn man von der *einen* zur *anderen* Mathematik übergegangen ist; ja, es ist geradezu ein Kennzeichen der „anderen" Mathematik, dass man überhaupt weitergehen kann.

(7) Aber muss man bei diesen einfachen Beispielen überhaupt in der Richtung ‚gegebener Satz' → ‚zu suchender Beweis' denken (und ggf. lehren)? Es liegt ja geradezu auf der Hand, offen und problemorientiert vorzugehen: Welche Eigenschaften findest Du heraus über die Zahlen zwischen einem Primzahlzwillingspaar? Betrachte Beispiele! – Errichte Senkrechte auf den Schenkeln eines Winkels! Beobachte, welche Fälle auftreten! Untersuche die auftretenden Winkel! – Nun kommt die Überzeugung (und meist sogar der Beweis) zuerst, und dann erst der ausformulierte (auszuformulierende) Satz. Wieder regiert der Zweck die Form: Wenn Beweis „A" ideell zuerst war, dann wäre Beweis „E" eine nachgeschobene Übung im Formalisieren. Und umgekehrt, wenn man eine Berechnung zuerst hat, fragt man nach den Zusammenhängen. Die „andere" Mathematik beinhaltet also auch die Haltung, gegenüber den eigenen Denkprodukten bewertend und kritisch zu sein.

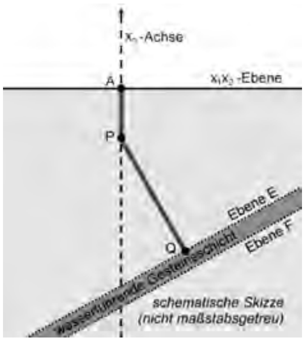
(8) Die ersten sieben Randnotizen fokussierten letztlich auf diesem Gedanken: Woher kam die Frage, die ich, wie oben geschildert, beim ersten Lesen der beiden Beispiel-Sätze in der E-Form hatte: „Wohin gehört das?" Diese Frage zu stellen ist gewissermaßen die Essenz moderner Auffassungen vom Lernen: Lernen ist Umstrukturieren und Erweitern des bisherigen Wissens, in allen Fächern. Elsbeth Stern hat es ganz aktuell illustriert in ihrer Antwort auf die Frage, ob man denn schon kleinen Kindern Fremdsprachen beibringen kann: Ja, man könne, aber nur wenn der Kontext dem des natürlichen Spracherwerbs nahekomme. Jedoch andernfalls: „Solange man noch keine Konzepte von Sprache und keine Vorstellung davon hat, dass Menschen in unterschiedlichen Teilen der Erde unterschiedliche Sprachen sprechen, bringt direkte Instruktion nichts" (Stern, 2018). Die Sätze/Beweise vom Typus „E" setzten eine solche Einbettung in einen „natürlichen", d. h. nach Gründen fragenden Lernkontext nicht um. Solche Sätze instruieren gewissermaßen, ohne eine Idee aufzuzeigen, worum es eigentlich geht. Der Zweck der E-Sätze liegt eher im Ausfächern der einzelnen Schritte (und der Möglichkeit diese beispielsweise in einer mathematikdidaktischen Analyse nachzuvollziehen) als im Bestreben, Vorstellungen zu erzeugen und inhaltliches Wissen aufzubauen.

(9) Elsbeth Stern hat andererseits auch auf die Bedeutung des Wissens für das Lernen hingewiesen: „Erst wer explizites Wissen über Grammatik und Satzbau in der Erstsprache hat, kann verstehen, was in der Fremdsprache anders oder ähnlich ist." (Stern, 2018) Das bringt für die beiden hier diskutierten Sätze einen weiteren Aspekt: Alles Vergleichen und Reflektieren bringt nichts, wenn nicht die notwendigen Begriffe als Wissenselemente vorhanden sind. Im ersten Beispiel ist das der Begriff der Primzahl. Wollte man also diese Beweis-Aufgabe – im entdeckenden Sinn – in der Schule realisieren, dann müssen „Primzahlen" Teil des Curriculums sein, offenbar derzeit nicht überall garantiert. Ebenso sind die „Winkelsätze" – welche davon man immer im Einzelnen in die konkrete Bearbeitung bringt – darauf angewiesen, dass im Curriculum Platz ist für eine hinreichende Entfaltung der Elementargeometrie, darunter des Begriffs des Winkels. Dies ist die von mir (Neubrand, 2018) als Curriculum-Problem adressierte aktuelle Herausforderung an den Mathematikunterricht. Man kann eben nicht beliebig inhaltliche Streichungen (gleich ob es nun um Primzahlen oder elementargeometrische Sätze oder andere zentrale Begriffe geht) vornehmen, wenn man nicht Kohärenz, und damit die Grundlage für die inneren Verknüpfungen beim Lernen verlieren will. Das Bild von der

„anderen" Mathematik im Kopf zu haben, sollte genug Impuls sein, hier achtsam und ggf. auch konstruktiv zu sein.

Kohärenz und innere Verknüpfungen beim Lernen artikulieren sich nicht selten auch in dieser Frage: „Wie passt das zusammen?" Ein drittes aktuelles Beispiel, das soeben durch die öffentlichen Medien ging, kann dies illustrieren. Im Mai 2019 protestierten Schülerinnen und Schüler in den sozialen Medien gegen vermeintlich zu schwere Mathe-Aufgaben im Abitur 2019. Genannt wurde auch diese Aufgabe:

Abitur-2019-Bayern – Teil B: Geometrie-Aufgabengruppe 1 (nur Ausschnitte)



Eine Geothermieanlage fördert durch einen Bohrkanal heißes Wasser aus einer wasserführenden Gesteinsschicht an die Erdoberfläche. In einem Modell entspricht die x_1x_2 -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems der horizontal verlaufenden Erdoberfläche. [...]
Der Bohrkanal besteht aus zwei Abschnitten, die im Modell vereinfacht durch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ mit den Punkten $A(0|0|0)$, $P(0|0|-1)$ und $Q(1|1|-3,5)$ beschrieben werden (vgl. Abbildung).

(a) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells die Gesamtlänge des Bohrkanals auf Meter gerundet.
(b) [...]

Im Modell liegt die obere Begrenzungsfläche der wasserführenden Gesteinsschicht in der Ebene E und die untere Begrenzungsfläche in einer zu E parallelen Ebene F. Die Ebene E enthält den Punkt Q. Die Strecke $[PQ]$ steht senkrecht auf der Ebene E (vgl. Abbildung).

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
(d) [...]
(e) [...]
(f) [...]

Quelle: tinyurl.com/y7dag7ya

Die Aufgabe gehört dem Teil B an, der laut Erläuterungen des Ministeriums „umfangreichere, zusammenhängende Aufgaben" enthält. Zudem ist offenbar ein Realitätsbezug da, also ein Kontext; mithin ist das keine „E"-Aufgabe. Oder doch? Ich stelle die „A"-Frage in der Form „Wie passt das zusammen?". Aus der Perspektive dessen, der da „erzählt", sagen wir der Firma, die die Zugangsbohrungen vornimmt, ist eines klar: Lange bevor der Bohrkanal gezogen wurde, war die wasserführende Schicht schon da. Und dass man dann so bohrt, dass man senkrecht auf die Schicht aufsetzt, kann gute technische Gründe haben. Aber sozusagen umgekehrt aus der Richtung der Bohrung die Ebene, auf die man doch gezielt hat, nachträglich zu bestimmen, das ist nachgeschoben, um die Anwendung der Normalenform der Ebenengleichung abzuprüfen. Also doch Typ „E"! Man könnte dieses nur allzu oft zu beobachtende Phänomen mangelnde kontextuelle Kohärenz nennen. So ist es in den anderen Teilaufgaben auch: Abstand zwischen zwei Punkten, Winkel zwischen zwei Vektoren, Bestimmung von Punkten auf der Ebene, etc., sind alles Standardaufgaben; sie kommen hier nur dünn mit Realitätsbezügen bedeckt vor. Dies wäre ja dennoch legitim, in einer „high-stakes"-Prüfung vielleicht sogar nichts als fair.

Aber nun entstehen erst die eigentlichen Probleme, auf die der Gedanke von „der einen oder anderen" Mathematik (und Mathematikdidaktik) vielleicht etwas Licht werfen könnte. Ich setze also die Assoziationen dazu weiter fort:

(10) Ob die vorliegende mangelnde kontextuelle Kohärenz tatsächlich die Schülerinnen und Schüler bei ihren Lösungen behindert, d. h. die Aufgabe „schwer" gemacht hat, ist eine offene, letztlich nur empirisch zu beantwortende Frage. Man kann sich ihr von „der einen oder der anderen" Seite der (nunmehr) Mathematikdidaktik nähern. Einerseits können Lösungsquoten, statistische Aufgaben-Parameter und -Charakteristiken, Vergleiche mit den Vorjahresnoten, usw. angestellt werden; das hat z. B. der bayerische Kultusminister den Schülerinnen und Schülern nach den Protesten versprochen (und dann nichts Auffälliges bemerkt). Die andere Art mathematikdidaktischer Untersuchungen – auch diese können in Teilen durchaus quantitativ ausgerichtet sein – könnte sich aber auf die Lösungswege, -irrwege, -umwege der Schülerinnen und Schüler beziehen, vielleicht sogar auf nachträgliche Gespräche mit Schülerinnen und Schülern. Daten sollten, selbst im sensiblen Bereich Abitur, nach gewissem zeitlichen Abstand greifbar sein. Die Auswertungskriterien erfordern aber differenzierte Bewusstheit über das eine und das andere Bild von der Mathematik. Gerade Daten aus Ab-

schlussprüfungen wären dann besonders wertvoll (vgl. Neubrand & Neubrand, 2010 über die „ZP-10“ in NRW).

(11) Die „A“-Fragen „Wo gehört das hin?“ und „Wie passt das zusammen?“ erinnern durchaus auch an ein in der modernen kognitiven Psychologie derzeit z. B. aus linguistischer Sicht diskutiertes Problemfeld: Welche Sprache benutzt man, um komplexe abstrakte Begrifflichkeiten aufzubauen, und dominiert nicht schon die Art der Sprache den Aufbau der Sache? Woźny (2018) nimmt sich einen mehr oder weniger standardisierten Universitätskurs in abstrakter Algebra (Mengen – Abbildungen – Gruppen – Ringe – Körper) vor, um zu demonstrieren, wie Mathematik aufgebaut wird, indem man sich sog. „small spatial stories“ bedient, also Bildern aus dem Feld der menschlichen Handlungen in Raum und Zeit. Er betrachtet bewusst einen ganzen Kursus systematisch, um „doing cognitive poetics“ zu vermeiden. Aber, abgesehen davon, dass auch dieser Zugang die ganze kontinuierlich-geometrische Welt der Mathematik außen vor lässt, ist dies nicht der systemische Gedanke, der hinter der „anderen“ Mathematik in meinem Sinne steckt; es ist gewissermaßen der umgekehrte Zugang: Während Woźny nach dem Kern des mathematischen Verstehens in den Bildern der Sprache und des konkreten menschlichen Handelns sucht (vgl. auch Núñez, 2000), schaut die „andere“ Mathematik von vorneherein auf die innermathematischen Querverbindungen, die freilich keineswegs dem strengen logischen Aufbau, schon gar nicht den kanonisierten Arrangements ungebrochen folgen müssen. Auch hier kann der Zusammenhang aus Bildern und Analogien kommen. Die „small spatial stories“ von Woźny erzeugen mentale Anknüpfungspunkte, die „andere“ Mathematik aber eröffnet, gerade wenn sie Platz lässt für je persönliche Zugänge, systematischen und geordneten Wissensaufbau inklusive der innermathematischen Bilder, soweit sie adäquat und weiterführend sind. Die Entwicklungsdynamik des Aufbaus mathematischen Wissens muss dann aber Gegenstand der u.U idiosynkratischen Aneignungsprozesse sein (vgl. Schmitt, 2017).

(12) Aus der Gegenüberstellung von Satz/Beweis vom Typ „E“ und vom Typ „A“ lassen sich auch Hinweise zu einem ebenfalls aktuell diskutierten schul-/hochschulpolitischen mathematikdidaktischen Problemkreis ableiten, dem Übergang von Schule zur Hochschule. Zunächst zur Funktion von sog. Brückenkursen: Wenn es stimmt, was viele Mathematiker sagen, dass mangelndes Verständnis für das Beweisen das eklatante Defizit beim Übergang von der Schule in die Universität ist, dann ist die Aufgabe von Brückenkursen gerade nicht, den Studierenden „E“-Beweise beizubringen. Jedenfalls macht das, nach den obigen Bemerkungen über den natürlichen Lernkontext, erst dann Sinn, wenn das Konzept einer begründenden und strukturierenden Mathematik (also „A“) hinreichend reflektiert ist. Der didaktische Weg, mit dieser Problematik umzugehen, ist das „Sprechen über Mathematik“ (Neubrand, 2000): Welche Auffassungen über Mathematik, die „eine“ oder die „andere“, kommen jeweils zum Ausdruck? Wie steht es um die logische und die sprachliche Qualität? In welchen weiteren Rahmen gehört der verhandelte Gegenstand? Dass angehende Studierende offen sind für solche Reflexionen, das ist die wirkliche Bringschuld, das „commitment“ (Neubrand, 2015 b), der Schule, und umgekehrt gehört es zur universitären Lehre, sich auf solche Reflexionen einzulassen. Mit ausschließlich der „einen“ Mathematik („E“) kommt man nicht aus, weder hier noch dort.

(13) Nun vom anderen Ende her gedacht: Wenn es stimmt, und auch dies ist recht plausibel, ja sogar empirisch untermauert, was Rüede et al. (2019) konstatieren, dass „wesentliche Komponenten der basalen mathematischen Kompetenzen für allgemeine Studierfähigkeit [...] nicht erst auf der gymnasialen Sekundarstufe 2, sondern bereits auf der Sekundarstufe 1, teilweise sogar auf der Primarstufe entwickelt [werden]“ (Rüede et al., 2019, S. 91), dann ist es umso mehr geboten, gerade auf den unteren Stufen bereits „die andere“ Mathematik hinreichend zur Geltung zu bringen.

(14) Nach diesen Streifzügen in die Ebene der bildungspolitischen Realitäten ist man versucht in große Höhen (Tiefen) aufzusteigen (abzusinken). Das wäre naheliegend, ja geradezu zwingend. Mit Volker Gerhardt, Philosoph an der Humboldt-Universität, kann man auf unsere „A“-Fragen nämlich auch so antworten: „Im Normalfall des Wissens aber müssen die somatischen, sozialen, psychischen, semantischen und logischen *Sinnbedingungen* erfüllt sein, damit es zutreffend verstanden, angemessen beurteilt und vernünftig gebraucht werden kann.“ (Gerhardt, 2016, S 47; meine Hervorhebung) So allgemein zu denken hat in der Mathematikdidaktik durchaus Tradition. Heinrich Winter etwa nimmt vier „Charakteristika der geistigen Existenz des Menschen“ als Ausgangspunkt, allgemeine Lernziele für die Mathematik in der Schule zu formulieren, nämlich den Menschen als „schöpferisches“, „Einsicht suchendes“, „wirtschaftendes“ und „sprechendes Wesen“ zu begreifen (alle Zitate aus Winter, 1975, S. 116). Diese Charakteristika konfrontiert Winter dann mit den Möglichkeiten der Mathematik. Eine breite Sichtweise der Mathema-

tik, die eine und die andere, ist dann unabdingbar; auch dies ist eben eine „Sinnbedingung". Übrigens scheint die Notwendigkeit sinnkonstituierende Prozesse in den Fachunterricht einzubeziehen in jüngerer Zeit weiter an Aufmerksamkeit zu gewinnen. Freilich darf man diese nicht einengen auf vordergründige Aspekte einer (oft nur vermeintlichen) Nützlichkeit. Nicht weniger als „Zehn Grundsätze zur Bedeutung der Sinnkategorie in schulischen Bildungsprozessen" haben Birkmeyer et al. (2015) herausgearbeitet, darunter zentral auch das Erkennen von Zusammenhängen, z. B. durch das Erzählen von Geschichten oder – siehe den nächsten, dann abschließenden Abschnitt – dadurch, den eigenen Standort zu reflektieren, als „Identitätsarbeit", wie es bei Birkmeyer et al. (2015) heißt.

(15) Tatsächlich zeigt ein aktuelles ZDM-Heft über „Identity in mathematical education" auf, wie weit die Spanne mathematikdidaktischer Konzepte noch zu ziehen ist. Auch wenn ich hier nicht explizit darüber geredet, ja das Individuelle und das Soziale ganz ausgeblendet habe, so trifft doch auch auf die „andere Mathematik" zu, dass dieser Diskurs, analog zu dem über „identity", dorthin verweist, „[...] where the social, the individual, as well as the cognitive and the emotional are expected to meet and turn into inseparable, co-constitutive aspects of one phenomenon" (Sfard, 2019, S. 556). Dies führt, nach „Wo gehört das hin?" und „Wie passt das zusammen?", zu einer dritten Art von Frage, die der Gedanke von der „anderen" Mathematik impliziert: „Welchen Wert hat das?" Denn „Wert" ist von vorneherein an subjektive oder soziale Referenzsysteme gebunden und muss je persönlich verhandelt, d. h. dementsprechend auch relativiert werden. Ob das Thema Primzahlzwillinge einen Wert hat, wird von Person zu Person verschieden sein; ob es „attraktiv" wird, hängt auch von den jeweiligen Situationen ab. Dass der Doppellotsatz seinen Wert als tool beim Beweisen entfalten kann, bedingt einen Zugang zur Elementargeometrie, der das Beweisen als Kern der Mathematik wertschätzt. Ob die Grundaufgaben der analytischen Geometrie „wert"-voll sein können, erweist sich daran, wie sehr es gelingt ihren Basischarakter jenseits von einzelnen Anwendungen erfahrbar zu machen. Es darf schon verlangt werden, dass für Fragen nach dem Wert hinreichend Raum im Mathematikunterricht bleibt; das wäre Roland Fischers alte Vision (Fischer, 1984), den Mathematikunterricht auch als einen Prozess der „Befreiung vom Gegenstand" zu sehen.

Die hier vorgetragenen Assoziationen zu den beiden sehr elementaren Sätzen aus dem Feld der Arithmetik und der Geometrie und auch die kritischen Anmerkungen zur Konstruktion der Abituraufgabe zeigen jedenfalls, dass mathematikdidaktische Reflexionen vor einem weiten Horizont stattfinden sollten, jedoch ohne die jeweilige Konkretisierung zu verlieren. Denn mit dem Gedanken der „anderen" Mathematik wird herausgearbeitet, dass auch in den einfachsten Gegenständen schon das Potential des authentischen mathematischen Denkens liegt. Dieses Potential ist im Mathematikunterricht bewusst zu entfalten: Man muss „die Welle lesen" (Calvino, 2018) lernen. In dem Gedanken der „anderen", d. h. Kohärenz als zentrales Element begreifenden Mathematik liegt somit analytische, in der weiteren Perspektive aber auch konstruktive Energie.

Wer noch weiter von Italo Calvinos ebenso nüchternem wie reflektierendem Herrn Palomar zum Nachdenken angeregt werden will, der oder dem empfehle ich die Geschichten mit den Ordnungszahlen 3.2.1 oder auch 3.2.3, letztere weil gerade diese fast direkt mit Mathematik zu tun hat. Fokussierend und daher als End-Motto passend erscheint mir das folgende Zitat. Hinter der Geschichte mit der Ordnungszahl 3.1.2 *Schlangen und Schädel*, aus der es stammt, steht immerhin auch ein Kontext von Lehren und Lernen, so dass das Zitat vielleicht doch nicht ganz unbedacht aus dem Zusammenhang gerissen ist:

> *Doch er [Herr Palomar; M.N.] weiß: Nie könnte er das Bedürfnis in sich ersticken, zu übersetzen, überzugehen aus einer Sprache in eine andere, von konkreten Figuren zu abstrakten Worten, von abstrakten Symbolen zu konkreten Erfahrungen, wieder und wieder ein Netz von Analogien zu knüpfen. Nicht zu interpretieren ist unmöglich, genauso unmöglich wie sich am Denken zu hindern.*
>
> Italo Calvino (2018, S. 97)

Literatur

Adler, A. & Coury, J.E. (1995). *The Theory of Numbers: A Text and Source Book of Problems*. Boston, MA: Jones and Bartlett Publishers.

Birkmeyer, J., Combe, A., Gebhard, U., Knauth, Th., & Vollstedt, M. (2015). Lernen und Sinn. Zehn Grundsätze zur Bedeutung der Sinnkategorie in schulischen Bildungsprozessen. In U. Gebhard (Hrsg.), *Sinn im Dialog: Zur Möglichkeit sinnkonstituierender Lernprozesse im Fachunterricht* (S. 9–31). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Calvino, I. (2018; italienisches Original 1983). *Herr Palomar* [aus dem Italienischen von Burkhart Kroeber]. Frankfurt a. M.: Fischer Taschenbuch.

Fischer, R. (1984). Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik, 5*(1–2), 51–85.

Gerhardt, V. (2016). *Glauben und Wissen: Ein notwendiger Zusammenhang* [Reclams Universal-Bibliothek Nr. 19405]. Stuttgart: Reclam.

Griesel, H., vom Hofe, R. & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(1), 123–133.

Heinze, A. & Ufer, S. (2013). Die Interaktion von Wissen mit Problemlösestrategien am Beispiel geometrischer Beweisprobleme. In I. Bausch, G. Pinkernell & O. Schmitt (Hrsg.), *Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung. Festschrift für Regina Bruder* (S. 141–150). Münster: WTM-Verlag.

Hilton, P. (1991). The mathematical component of a good education. In P. Hilton, F. Hirzebruch & R. Remmert (Eds.), *Miscellanea mathematica* (pp. 145–154). Berlin, Heidelberg: Springer.

Neubrand, J. & Neubrand, M. (2010). *Mathematikdidaktische Analysen der zentralen Prüfungen 2008 in Mathematik am Ende der Klasse 10 in Nordrhein-Westfalen: Analysen von Aufgabenstellungen und Aufgabenbearbeitungen. Hinweise zu Aufgabenkonstruktion und zur Fachunterrichtsentwicklung*. Vechta, Oldenburg: Universität Vechta & Carl-von-Ossietzky-Universität/ Düsseldorf: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Verfügbar unter uol.de/michael-neubrand.

Neubrand, M. (1987). Visualisieren: Beispiele zum darstellenden und operativen Charakter. *Der Mathematikunterricht, 33*(4), 30–36.

Neubrand, M. (2000). Reflecting as a didaktik construction: Speaking about mathematics in the mathematics classroom. In I. Westbury, St. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Teaching as a Reflective Practice: The German Didaktik Tradition* (pp. 251–265). Mahwah, N.J.; London: Lawrence Erlbaum Associates.

Neubrand, M. (2010). Inhalte, Arbeitsweisen und Kompetenzen in der (Schul-) Geometrie: Versuch einer theoretischen Klärung. In M. Ludwig & R. Oldenburg (Hrsg.), *Basiskompetenzen in der Geometrie* (S. 11–34). Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand M. (2015a). Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts (Kap. I.3). In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 51–73). Berlin, Heidelberg: Springer.

Neubrand, M. (2015b). Schulmathematik und Universitätsmathematik: Gegensatz oder Fortsetzung? Woran kann man sich orientieren? In J. Roth, Th. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 137–147). Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Neubrand, M. (2016). Conway's non-perpendiculars as a tool: The case of the law of cosines. *The Mathematical Intelligencer, 38*(1), 1–3.

Neubrand, M. (2018). The challenges, reforms, and future prospects of elementary and lower secondary mathematics education in Germany. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 105, 30–36.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Takahara & M. Koyama, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–22). Hiroshima: University, Dept. Mathematics Education.

Renner, Ch. (1948). *Planimetrie. Ein Leitfaden mit reichhaltiger Aufgabensammlung*. München: Franz Ehrenwirth Verlag.

Rüede, Ch., Weber, Ch. & Eberle, F. (2019). Welche mathematischen Kompetenzen sind notwendig, um allgemeine Studierfähigkeit zu erreichen? Eine empirische Bestimmung erster Komponenten. *Journal für Mathematik-Didaktik 40*(1), 63–93.

Schmitt, O. (2017). *Reflexionswissen zur linearen Algebra in der Sekundarstufe II.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Sfard, A. (2019). Making sense of identities as sense-making devices. *ZDM – Mathematics Education, 51*(3), 555–564.

Stern, E. (2018). Lern- statt Leistungsorientierung (Fragen an die Lernforscherin Elsbeth Stern). *Forschung und Lehre, 25*(7), 582–585.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*, 106–116.

Woźny, J. (2018). *How We Understand Mathematics: Conceptual integration in the language of mathematical description*. Cham (CH): Springer International Publishing.

Michael Neubrand,
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
E-Mail: michael.neubrand@uni-oldenburg.de

Realistischer Konstruktivismus

Ein unwissenschaftlicher Beitrag

Reinhard Oldenburg

Der radikale und der soziale Konstruktivismus haben in der Didaktik der Mathematik viele Anhänger gefunden, obwohl er weitreichende metaphysische Annahmen macht, deren Bedeutung in pädagogischen Handlungsfeldern ungeklärt ist. Erstaunlicherweise werden aber in der didaktischen Diskussion fast nur Aussagen des Konstruktivismus benutzt, die auch aus einer Reihe anderer Erkenntnistheorien folgen. Der Aufsatz argumentiert, dass ein moderner Realismus, ein realistisch gewendeter Konstruktivismus, eine bessere Hintergrundtheorie für mathematikdidaktische Überlegungen darstellt als der radikale Konstruktivismus.

Einleitung

Didaktisches Handeln benötigt eine Theorie des Wissens und des Lernens zur Begründung von Methoden und Inhalten. Einen wesentlichen Einfluss haben in den letzten Jahren konstruktivistische Ansätze gewonnen (z. B. Reich, 2006). Minimalkonsens dieser Ansätze ist die Überzeugung, dass Wissen nicht passiv aufgenommen, sondern vom Individuum aktiv konstruiert wird. Diesem Standpunkt ist uneingeschränkt zuzustimmen, er ist theoretisch fundiert und durch unterrichtspraktische Erfahrung legitimiert. Diese Erkenntnis ist auch keineswegs auf die Strömungen beschränkt, die sich selbst als Teil des Konstruktivismus sehen. Trotzdem ist sie das Markenzeichen des Konstruktivismus und dieser hat in der Didaktik große Fortschritte bewirkt, weil u. a. viele Ideen, die in der Reformpädagogik schon angelegt waren, neuen Schwung bekommen haben. Der Konstruktivismus in dieser weiten Form gab eine neue theoretische Erklärung und Rechtfertigung für die Wichtigkeit des eigenen Tuns. Er motivierte eine intensivierte Untersuchung individueller Verstehensprozesse und ermöglicht so z. B. einen neuen und fruchtbaren Zugang zur Diskussion von Schülerfehlern. Diese werden nun eingebettet gesehen in den Kontext der individuell erworbenen Schülerkonstrukte (z. B. Hatano, 1996). Diese Leistungen sollen ausdrücklich anerkannt werden und es soll mit den folgenden kritischen Überlegungen nicht bestritten werden, dass Lernen als individueller und konstruktiver Vorgang zu verstehen ist.

Der Konstruktivismus im eigentlichen Sinne ist durch weitere Aussagen gekennzeichnet, deren didaktischer Nutzen in diesem Aufsatz einer kritischen Diskussion unterzogen werden soll. Dabei wird auch beleuchtet, welche Konstruktion von „Konstruktivismus“ von vielen Didaktikern verwendet wird, und welche Aspekte davon für die Praxis relevant sind. Gleichzeitig wird in diesem Aufsatz eine Gegenposition zum radikalen Konstruktivismus entworfen, die aber durchaus Nähe zur Mainstream-Konstruktivismus-Konstruktion hat, sodass ich sie „realistischen Konstruktivismus“ nenne.

Kritik an konstruktivistischen Positionen gab es auch schon viele. Zuletzt hat Sill (2019) in dieser Zeitschrift kritische Fragen gestellt. Wenn man bedenkt, dass der Konstruktivismus vor allem eine Erkenntnistheorie ist, erscheint es geradezu paradox, dass dieser in der Philosophie kaum Anhänger gefunden hat. Allerdings gibt es einige relativistische Positionen, die eine Nähe zum Konstruktivismus haben. Wohl deswegen hat sich in den letzten 15 Jahren eine Gegenbewegung etabliert, die teilweise unter der Bezeichnung „Neuer Realismus“ firmiert (Boghossian, 2013; Gabriel, 2014; Ferraris, 2015). Während in der Philosophie eine offene Debatte im Gang ist, wurde der vorliegende, mathematikdidaktisch inspirierte Aufsatz bereits von zwei Zeitschriften abgelehnt als „unwissenschaftlich“ und mir wurde gesagt ich sei „verblendet“. Wenn Sie diesen Beitrag jetzt lesen, so sollten Sie das wissen. In dieser leichten Überarbeitung versteht er sich nicht als wissenschaftlich, sondern als Meinungsäußerung. Diese Abgrenzung ist wichtig, weil man sie aus konstruktivistischer Perspektive eigentlich gar nicht machen kann.

Rezeption und Einfluss

Diese Arbeit setzt sich mit verschiedenen Spielarten des Konstruktivismus auseinander, konzentriert sich aber in gewissem Sinne auf den radikalen Konstruktivismus, da dieser am besten greifbar ist, während der soziale Konstruktivismus durch die Vielzahl der Autoren schwer einheitlich dargestellt werden kann.

Eine bemerkenswerte Leistung von Ernst von Glasersfeld (1997) besteht darin, seinen radikalen Konstruktivismus als einzige Alternative zu einer simpel-empiristischen Abbildtheorie des Wissenserwerbs stilisiert zu haben.

> Wenn der Westen 3000 Jahre lang geglaubt hat und mit Sprachen gelebt hat, die es als selbstverständlich hinstellen, dass Wissen immer irgendwie eine Darstellung der Realität sein muss, dann ist es sehr schwer diesen Begriff des Wissens aufzugeben. (von Glasersfeld, 1997, S. 324)

Mit dieser Vereinfachung hat er sogar in so herausragenden Büchern wie Malles „Didaktik der elementaren Algebra“ (Malle, 1993, Kapitel 1.7) seine Spuren hinterlassen.

> Schon seit längerer Zeit werden in der Pädagogik bzw. Didaktik zwei grundsätzlich verschiedene Auffassungen des Lernens gegenübergestellt. [...] ‚Lernen als Abbilden' und ‚Lernen als Konstruieren' (Malle, 1993, S. 31)

Bedenklich daran ist, dass die Konstruktivisten ihren argumentativen Erfolg erzielen in einer Auseinandersetzung mit einer Erkenntnisphilosophie (der Abbildtheorie), die seit mehr als einem Menschenleben von keinem Philosophen mehr vertreten worden ist. Der letzte ernsthafte Versuch in diese Richtung dürfte in Wittgensteins „Tractatus logico-philosophicus“ gescheitert sein.

> Constructivists claim that knowledge is actively constructed by the child, not passively received from the environment.' Using this conception of the essence of constructivism, virtually every modern theory of cognitive science can claim to be based on constructivist philosophy. (Lesh & Doerr, 2003, S. 532)

Folgerichtig schreibt auch Suchting in Bezug auf die Verwendung der Piaget'schen Theorie durch von Glasersfeld und die Beschränkung des Individuums auf seine individuelle Erfahrung:

> In essence it sets out simply some central features of a fairly standard, middle-of-the-road, more or less recent empirist position. (Suchting, 1992, S. 68)

Neben dem radikalen Konstruktivismus ist für die Didaktik vor allem der soziale Konstruktivismus mit all seinen Spielarten von Bedeutung. In seiner Kritik an konstruktivistischen Positionen konzentriert sich Boghossian (2013) ausschließlich darauf.

Wichtige Teile weder des sozialen noch des radikalen Konstruktivismus sind keineswegs bahnbrechend, sondern moderner Standard (wie durch Beispiele auch noch belegt werden wird).

In der weiteren Rezeption des Konstruktivismus zeigt sich, dass eine Reihe von Didaktikern evolutionäre Denkweisen in Verbindung mit dem Konstruktivismus bringen.

> Die erstaunliche Effizienz der Mathematik wird von Konstruktivisten auf den bei der Naturbeschreibung allen Menschen gemeinsamen, während der Evolution auf eine effektive Naturwahrnehmung hin selektierten Erkenntnisapparat zurückgeführt. (Leuders, 2003, S. 25) Hier werden Einflüsse der evolutionären Erkenntnistheorie spürbar. (Modrow, 2002, S. 20)

Allerdings unterscheidet sich die evolutionäre Erkenntnistheorie (etwa im Sinne von Riedl) deutlich vom Konstruktivismus und das spiegelt sich in der klaren Aussage von von Glasersfeld wider:

> Lorenz schrieb: ‚Die Anpassung an bestimmte Bedingungen der Umwelt ist äquivalent dem Erwerb von Information über diese Umweltbedingungen.' Dies ist die fundamentale Annahme seiner Schule, und sie ist völlig unbegründet. Der biologische Begriff der Viabilität verlangt überhaupt nicht, dass Organismen oder Arten Informationen über eine unabhängig von ihnen gegebene Umwelt besitzen oder Eigenschaften mit dieser teilen. [...] In der Theorie der Evolution wie auch im Konstruktivismus bedeutet ‚passen' nichts anderes, als [...] durchgekommen zu sein. (von Glasersfeld, 1997, S. 87)

In diesem Sinne nun einige weitere zentrale Thesen von Glasersfelds, die auch von anderen Konstruktivisten geteilt werden, die aber bei Fachdidaktikern, die sich selbst als Konstruktivisten sehen, kaum beachtet werden:

> Über das Sein kann ich von meinem Gesichtspunkt überhaupt nichts sagen. (von Glasersfeld, 1997, S. 329)
>
> Es gibt auch keinen Grund zu der Annahme, dass die ontologische Realität etwas besitzt, was wir Struktur nennen könnten. (Richards & v. Glasersfeld, zitiert nach Nüse et al., 1991, S. 101)
>
> The test for knowledge is not whether or not it accurately matches the world [...] but whether or not it fits the pursuit of our goals. (von Glasersfeld, zitiert nach Nola, 1997, S.52)

Eine zentrale These des sozialen Konstruktivismus ist, dass Tatsachen soziale Konstrukte sind. Nun ist es ja völlig trivial, dass es soziale konstruierte Tatsachen gibt. Dass einem bunt bedruckten Stück Papier ein Wert zukommt, ist eine sozial konstruierte Tatsache. Sozialer Konstruktivismus ist dagegen die These, dass alle Tatsachen sozial konstruiert seien. Diese These ist so stark, dass man als Kritiker darüber Witze machen könnte, wenn die Realität nicht noch erstaunlicher wäre. So berichtet Boghossian (2013, S. 33) vom Ergebnis französischer Wissenschaftler, dass die Obduktion der Mumie von Ramses II zum Schluss führte, dass dieser wohl an Tuberkulose gestorben sei. Der Konstruktivist Bruno Latour hat das bestritten. Zitat Latour: „Wie konnte er an einem Bazillus sterben, der 1882 von Robert Koch entdeckt wurde?“, und weiter „Vor Koch hatte der Bazillus keine wirkliche Existenz“.

Immer wieder werden konstruktivistische Positionen mit Ergebnissen der Gehirnforschung in Verbindung gebracht. Die Behauptung, die Gehirnforschung habe den radikalen Konstruktivismus bewiesen, ist aber völlig unbegründet. Der radikale Konstruktivismus macht weitreichende Unmöglichkeitsaussagen (wie die oben zitierten), die überhaupt nicht empirisch überprüfbar sind. Die Ergebnisse der Gehirnforschung sind auch mit anderen Ansätzen kompatibel und teilweise sogar besser interpretierbar – dazu später mehr. Die Liebe der Konstruktivisten zur Hirnforschung scheint auch einseitig zu sein. So findet man keine Erwähnung des Konstruktivismus in dem großen Sammelband (Roth & Wulliman, 2001). Schon der Versuch, die biologische Autorität von Piaget zu nutzen ist fraglich, denn „Piaget's overall position is that of a scientific realist.“ (Nola, 1997, S. 43). Manfred Spitzer bemerkt zu einigen Theorien über Medien, diese Debatten würden

> [...] unter Berufung auf den sogenannten radikalen Konstruktivismus angeführt, einer Richtung des Theoretisierens, deren philosophische Schwächen hier nicht weiter erörtert werden sollen (Spitzer, 2005, S. 188).

Suchting (1992) hat beispielhaft vorexerziert, was vom radikalen Konstruktivismus einer ernsthaften philosophischen Probe standhält. Das Buch von Nüse et al. (1991) zielt in eine ähnliche Richtung.

Eine Besonderheit der Rezeption zum Schluss: Die primären Autoren des Konstruktivismus sehen in ihrer Theorie eine umfassende Erklärung der Lernprozesse. In Abwandlung eines Zitats von Watzlawick könnte man also sagen, man kann gar nicht nicht konstruktivistisch lernen. Auch das, was etwa bei einem Vortrag von einem (äußerlich) passiven Zuhörer gelernt wird (wenn es denn überhaupt etwas ist), wird durch aktive Konstruktion gelernt. In der didaktischen Rezeption dagegen ist es üblich geworden konstruktivistisches Lernen als (höherwertigen) Spezialfall von Lernen zu begreifen. Beispiel:

> Zum Ziel wird es vielmehr, Lernumgebungen zu schaffen, die Lernen im konstruktivistischen Sinne ermöglichen. (vom Hofe, 2001, S. 6)

Defizite des Konstruktivismus

Den eingangs erwähnten Verdiensten des Konstruktivismus stehen auch weniger wünschenswerte Effekte gegenüber. Sie wurden teilweise schon angesprochen und sollen nun verstärkt in den Blick genommen werden. Dabei werden schon die Konturen einer modifizierten, realistischen Position deutlich.

Zunächst ist bedauerlich, dass konstruktivistische Didaktik dazu neigt, empirisch gut abgesicherte Befunde zur Wirksamkeit von (sinnvoll gemachter) direkter Instruktion nicht zur Kenntnis zu nehmen, wie sie z. B. in Kirschner et. al (2006) zusammengestellt wurden. Auch Klauer und Leutner (2007) beklagen:

> Dennoch plädieren konstruktivistisch orientierte Lehr-Lernforscher – den Bogen mitunter weitüberspannend – vehement dafür, dass Schülerinnen und Schüler sich neues Wissen grundsätzlich selbstregulierend [...] aneignen sollen (Klauer & Leutner, 2007, S. 325).

Der gelegentlich gemachte Vorwurf, der Konstruktivismus sei ein Solipsismus trifft m. E. nicht zu. Die Trennlinie ist aber so diffizil, dass es nach meinen Erfahrungen nicht möglich ist, in Gesprächen mit Lernenden ein angemessenes Verständnis zu erzielen.

Konstruktivistische Didaktiker haben meistens Schülerinnen und Schüler im Blick, seltener Lehrerinnen und Lehrer – eine Unterlassungssünde, denn gerade hier zeigt sich seine wohltuend befreiende Kraft. Die Objektivität des Lehrers z. B. bei der Zensurenvergabe, kann aus konstruktivistischer Sicht nicht einmal mehr als Korrektiv gefordert werden. Viabel ist, womit man durchkommt, und als Lehrer kommt man mit ziemlich Vielem durch.

Die referentielle Abgeschlossenheit des Menschen löst zwar das philosophische Problem der Referenz – in dem es abgeschafft wird – schafft aber neue Probleme. Der beliebte Modellbildungskreislauf mit Prüfung an der Realität kann so nicht verwendet werden. In der Praxis lösen viele Didaktiker das Problem so, dass sie „werktags“ einem naiven Realismus anhängen.

Besonders bedauerlich finde ich, dass man ein großes Wunder einfach abschafft, nämlich das Staunen darüber, dass Mathematik auf die Welt passt. Statt einer tiefen Erklärung, wie sie etwa Piaget für Aspekte des Zahlbegriffs gibt, bleibt einem nur die Ernüchterung, dass gar kein Wunder vorliegt: Wegen der Selbstreferentialität ist es ja gar nicht so, dass Mathematik auf die Welt passt, sie passt nur auf unsere Konstruktion der Welt.

Der Konstruktivismus betont zu Recht die Autonomie des Subjekts in der Konstruktion eines viablen Systems des Wissens. Dabei wird viabel aber nur als passend interpretiert („man kommt damit durch“). Es gibt aus der Sicht des Konstruktivismus kein objektives Kriterium, eine viable Konstruktion einer anderen viablen vorzuziehen. Es ist deshalb nicht zu erklären, dass die geistige Aktivität bezüglich eines Problems auch anhält, nach dem eine viable Interpretation erreicht wurde. Nur wenn man dem Individuum – entgegen der genannten Grundposition des Konstruktivismus – zugesteht, Information über die Welt zu bekommen, wird das klar. Evolutionär gesprochen hat das Lebewesen mit möglichst viel Information über die Umwelt die größten Erfolgsaussichten. Während für Konstruktivisten Lernen mit Perturbationen beginnt, erklärt eine realistische Sichtweise auch den Sinn von geistiger Eigenaktivität ohne aktuelle Perturbation. Realistisch betrachtet wird die Aktivität des Individuums also weiter aufgewertet. Diese Sichtweise stimmt mit der von Wolf Singer in folgendem Zitat überein:

> Wie versucht wurde zu zeigen, tun wir gut daran, uns das Gehirn als distributiv organisiertes, hochdynamisches System vorzustellen, das sich selbst organisiert, anstatt seine Funktionen einer zentralistischen Bewertungs- und Entscheidungsinstanz unterzuordnen; als System, das [. . .] auf der Basis seines Vorwissens *unentwegt* (Hervorhebung RO) Hypothesen über die es umgebende Welt formuliert, also die Initiative hat, anstatt lediglich auf Reize zu reagieren. (Singer, 2002, S. 111)

Der letzte Gedankenzug hat auch eine emotionale Wertigkeit: Die Behauptung, die Welt sei „nur" eine Konstruktion ohne Reales dahinter, mindert die Bereitschaft zu Anstrengungen. Eine realistische Sicht dagegen belohnt mit dem Versprechen, reale Erkenntnisse gewinnen zu können. Eine Motivation, die in der Geschichte der (Natur–)Wissenschaften eine treibende Kraft gewesen ist, und m. E. auch in Zukunft sein sollte.

Dieser wichtige Kritikpunkt soll noch einmal destilliert ausgesprochen werden: Der Konstruktivismus unterschätzt systematisch die Bedeutung der Eigenaktivität des Gehirns, weil er deren Nutzen – den Vorteil durch bessere Vorhersagen künftiger Ereignisse – nicht erklären kann.

Die Einsicht in die Beschränktheit der menschlichen Erkenntnis führt notwendig zur Aufgabe absoluter Positionen und damit zu einem gewissen Relativismus. Das Hintergrundbuch zur Sokalaffäre (Sokal & Bricmont, 1999) gibt ein illustratives Beispiel: Zwischen einem Richter und einem Polizisten kam es zum Streit, ob ein bestimmtes Beweismittel übergeben worden sei. Als Realist ist man motiviert, das zu erforschen, aber in einem Interview zu diesem Problem erklärte der Kommunikationsanthropologe Yves Winkin:

> Es gibt keine transzendente Wahrheit. Deshalb glaube ich auch nicht, dass Richter Doutrewe oder der Polizeibeamte Lesage etwas verbergen: Beide erzählen die Wahrheit. Wahrheit ist immer mit einer Ordnung verknüpft, sie hängt davon ab, was als wichtig empfunden wird. (Sokal & Bricmont, 1999, S. 121)

Gegen solche Sichtweisen muss m. E. eine aufgeklärte Pädagogik klar Stellung beziehen. Das wird ihr aber nicht gelingen, wenn sie sich auf den Konstruktivismus stützt, der eben solchem Relativismus Vorschub leistet und „alternative Tatsachen", wie sie der amtierende US-Präsident gerne benutzt, für völlig normal hält. Nun könnte man meinen, hier ein Scheinproblem vor sich zu haben. Allerdings habe ich selbst schon erlebt, dass Mathematikdidaktiker im Gespräch die Auffassung vertreten haben, eine mathematische Aussage könne für Diplom–Studenten fachlich falsch, für Lehramtsstudenten aber richtig sein.

Ein attraktiver Zug des Konstruktivismus liegt in seiner Liberalität und Offenheit für verschiedene Konstrukte. Modrow nennt dies explizit als eines der wichtigsten Pro-Argumente. In der Realität äußert sich diese Liberalität etwa so:

> So sei den Kritiken des Konstruktivismus zu bedenken gegeben, dass die Denkstruktur der absoluten Wahrheiten, der verbindlichen Lehrpläne, der eindeutigen Antworten, der objektiven Erkenntnisse solchen Gesellschaftssystemen entspricht, für die hierarchische, autoritäre, technokratische Strukturen charakteristisch sind. (Siebert, 1999, S. 44)

Operatoren und Ontologie: Ein physikalisches Zwischenspiel

Ein Kennzeichen des Konstruktivismus ist seine Ontologie-Feindlichkeit. Aus didaktischer Sicht ist daran problematisch, dass ontologische Fragen für Schüler sehr wichtig sind. Andererseits ist eine naive Alltagsontologie offensichtlich unhaltbar. Es scheint mir in dieser Situation wichtig, dass man zumindest durch eine Analogie eine Vorstellung bekommt, wie sich die Einschränkung auf die lokale Erkenntnistätigkeit eines Subjekts mit objektiven Strukturen verträgt. Mir hat dazu die Quantenfeldtheorie als Modell wichtige Impulse gegeben. Das mag überraschen, denn häufig wird gerade der von vielen Quantenphysikern verwendete Slogan „Realismus ist nicht haltbar" von Konstruktivisten als Bestätigung interpretiert. Allerdings ist der damit gemeine physikalische Anti-Realismus (z. B. Friebe et al., 2015) lediglich die Anerkenntnis, dass messendes System und gemessenes System verschränkt sind und damit eine irreduzible Unbestimmtheit vorliegt – deren Größe aber quantifizierbar ist.

Im Gegensatz zu vielen anderen Modellen der Physik startet die algebraische Quantenfeldtheorie (im Sinne von Haag, 1992) nicht notwendig mit ontologischen Annahmen. Ausgangspunkt kann vielmehr die Algebra der Operatoren observabler Größen sein, also die abstrakte Beschreibung der dem erkennen Subjekt möglichen Messoperationen und deren Beziehungen. Die Beschreibung der Zustände – sprich die ontologische Bühne – erfolgt durch Vektoren eines (Pseudo-)Hilbert-Raumes, der aber nicht vorgegeben wird, sondern sich aus der Algebra der Operatoren (und zwar bis auf Isomorphie eindeutig!) konstruieren lässt (siehe z. B. Haag, 1992, Kapitel IV). Das bedeutet, dass zwei lokale Systeme, die die gleichen Operationen ausführen können, zu isomorphen Beschreibungen der Ontologie kommen. Also gibt es entgegen naheliegender Vermutung keine Inkompatibilität von realistischen Positionen (sogar eine isomorphe Realität) und ihrer lokalen Rekonstruktion.

Interessanterweise liefert die Quantenfeldtheorie auch gleich noch ein eindrucksvolles Beispiel für das vieldeutige Verhältnis von Zustand und Zustandsbeschreibung. Dies liefert ein physikalisches Analogie-Argument, dass die konstruktivistische Gleichsetzung von Objektivität und Abbildungsprinzip unzulässig ist. In der Eichfeldtheorie wird systematisch die theorieimmanente Freiheit zum Umdefinieren untersucht: Es gibt Transformationen, die alle Observablen invariant lassen. Diese sogenannten Eichtransformationen haben nun die verwunderliche Eigenschaft, dass sie bestimmte Entitäten, die Fadeev-Popov-Geister, verschwinden lassen können. Man kann also im Rahmen dieses Modells, die Ontologie durch willkürliche Wahl verkleinern, allerdings um den Preis, dass die resultierende Formulierung nicht mehr invariant unter Lorentztransformationen ist (Ryder, 1996, S. 254).

Das Verständnis dieser physikalischen Theorien ist für didaktisches Handeln natürlich nicht wichtig. Sie werden hier nur angeführt, um am Beispiel zu zeigen, dass die Beziehung von Realität und ihrer Beschreibung so ist, dass das Konzept eines in hohem Maße frei konstruierenden Individuums mit dem Konzept einer objektiven Realität keineswegs im Widerspruch steht. Außerdem gibt das Beispiel eine schöne Analogie, die zeigt, dass die Konstruktion von Objekten aus Prozessen, wie sie beispielsweise von der Reifikationstheorie (Sfard, 2001) postuliert wird, eine universelle Vorstellung ist.

Evolutionäre Erkenntnistheorie

Konrad Lorenz hat eine biologische Erklärung für Probleme der Erkenntnistheorie angeregt, in dem er vermutete, die Kantschen a priori der Erkenntnis ließen sich evolutionär als a posteriori deuten. Von diesem Startpunkt aus wurde die evolutionäre Erkenntnistheorie u. a. von Vollmer (1990) und Riedl (1988) zu einem detaillierten System aufgearbeitet. Zentrale Aussagen sind:

- Der Mensch besitzt keinen direkten Zugang zur Realität, die biologische Anpassung seiner Sinnesorgane und seines Erkenntnisapparates sorgen aber dafür, dass man als „hypothetischer Realist“ davon ausgehen kann, dass sich z. B. verschiedene Menschen auf dieselbe Realität beziehen.
- Die Welt besitzt Strukturen die unserer Sinnesorgane affizieren (wenn auch nicht treu abbilden!).
- Denken und Bewusstsein sind Funktionen des Gehirns.
- Alle Wissenschaft bleibt hypothetisch.
- Der Vorgang der Wahrnehmung ist konstruktiv interpretierend: „Wahrnehmung = Interpretation = Bedeutungszuweisung“ (Irrgang, 2001, S. 85).
- Die Bildung von Invarianten ist ein Grundprinzip der Wahrnehmung: Die Interpretation versucht Invarianten zu konstruieren, auf niedrigster Ebene z. B. Richtungs- und Farbkonstanz bei visuellen Wahrnehmungen.
- Lernen ist ein individueller Vorgang, ermöglicht durch evolutionär ausgebildete Strukturen des Gehirns.

Mir ist besonders wichtig, dass eine der zentralen Aussagen des Konstruktivismus, die aktive Konstruktion von Wissen auch in der evolutionären Erkenntnistheorie zentral ist. Irrgang schreibt, mit Bezug auf Wuketits:

> Kognition bei Menschen oder bei anderen Lebewesen ist stets ein aktiver Vorgang und kein Prozess der bloßen Repräsentation bestimmter Objekte der Außenwelt eines Lebewesens. Kognitive Prozesse sind keine bloßen Anpassungsprozesse an eine gegebene Außenwelt, sondern zugleich immer auch Interpretationsprozesse. (Irrgang, 2001, S. 113)

Andererseits zeigen diese Punkte auch deutliche Unterschiede zum Standpunkt von Glasersfeld, wie er anfangs dargelegt wurde. Riedl stellt die Differenz klar:

> Alle für die Interpretation der Wirklichkeit entwickelten Symbole sind Erfindungen der Evolution, wenn man will: Konstruktionen. Und es wäre unsinnig zu behaupten, dass die von uns applizierte Interpretationsweise die einzig mögliche wäre. [. . .] Aber zu erwarten, dass aus diesem Grunde unser Weltbild mit der Wirklichkeit nichts zu tun haben könnte, wie die Konstruktivisten meinen (z. B.: von Förster, Gla-

> sersfeld, Maturana, ...), kann auch nicht richtig sein. (Riedl, 2000, S.37)

Naturalisierte Erkenntnistheorie

Willard van Orman Quine ist vermutlich der einflussreichste amerikanische Philosoph des 20. Jahrhunderts. Seine detaillierten Analysen des Erkenntnisprozesses haben zu vielen Debatten Anlass gegeben. Dennoch ist er, gerade in Deutschland, außerhalb der Philosophie kaum bekannt. Es ist deshalb angezeigt, seine Ideen etwas breiter darzustellen. Bedauerlicherweise wird Quine als Schüler Carnaps gelegentlich als Neopositivist eingestuft, obwohl er diese Position nachdrücklich kritisiert hat.

> Konkret ging Quines Philosophie aus der detaillierten immanenten Kritik des logischen Positivismus hervor. (Ortner, zitiert von Nida-Rümelin, 1991, S. 475)

Seine umfassenden Abhandlungen zu Beobachtungssätzen und Fragen der Logik mögen diese Fehleinschätzung unterstützt haben. Gegenüber traditionellen empiristischen Positionen macht Quine geltend, dass es keine reinen Beobachtungen gibt, da diese stets schon Interpretationen und Verallgemeinerungen umfassen.

> Die Rede über physikalische Objekte lässt sich nicht in eine Sinnesdatensprache übersetzen. Was – im Sinne der Wissenschaft – gesehen, gehört, ertastet etc. wird, ist nicht einfach gegeben, sondern wird als theoretische Setzung postuliert. (Lauener, 1982, S. 26)

Indem Quine den Versuch durch Introspektion an objektive Sinnesdaten heranzukommen ablehnt, nimmt er eine Position ein, die als behavioristisch gekennzeichnet werden kann. Da er aber dem Individuum sehr viel Freiheit in seinen Konstruktionen einräumt, hat dieser Behaviorismus einen deutlich anderen Charakter als der von Skinner.

Quine ist Realist, d. h. er geht davon aus, dass es eine Außenwelt gibt, die unabhängig von uns existiert, und von der unsere Sinnesorgane – möglicherweise fehlerhafte – Informationen bekommen, die uns dazu bringen, bestimmte Beobachtungssätze zu äußern und für richtig zu halten. Diese gehen in das individuelle geistige Netz eines jeden Menschen über. Quine hat dieses Netz gelegentlich als Kraftfeld beschrieben: Die Beobachtungen bestimmen dessen Randbedingungen, die gesamte Struktur aber wird stark durch innere Gesetzmäßigkeiten beschrieben.

> Die Gesamtheit unseres sogenannten Wissens oder Glaubens, angefangen bei den alltäglichen Fragen der Geographie oder der Geschichte bis hin zu [...] Atomphysik oder reinen Mathematik und Logik, ist ein von Menschen geflochtenes Netz, das nur an seinen Rändern mit der Erfahrung in Berührung steht. (Quine, 1979, S. 47) Als Empirist denke ich mir das begriffliche Schema der Wissenschaft nach wie vor als Werkzeug, schließlich und endlich zur Vorhersage künftiger Erfahrung aufgrund vergangener Erfahrung. Physikalische Objekte werden begrifflich in diese Situation importiert, als gelegen kommende Vermittler – nicht durch Definition aufgrund von Erfahrung, sondern einfach als nicht reduzierbare Setzungen, epistemologisch den Göttern Homers vergleichbar. (Quine, 1979, S. 48)

Das Individuum baut aus den Informationen ein möglichst stimmiges System. Dieses ist aber von den Erfahrungen nicht eindeutig bestimmt. Verschiedene individuelle Konstrukte können kompatibel mit allen Beobachtungsdaten sein, Quine sagt, das Netz ist von der Erfahrung her unterbestimmt.

Die Überzeugung, dass bei Eintreten eines Widerspruchs nicht klar ist, welche Aussage falsifiziert wurde, führt zum semantischen Holismus, nach dem niemals einzelne Aussagen, sondern nur umfassende Theoriesysteme der Erfahrung gegenübertreten. Da die Sprache Teil des geistigen Netzes ist, stellt Quine folgerichtig fest, dass einzelne Wörter im Allgemeinen zu kleine Einheiten sind, um bedeutungstragend sein zu können. Da man beim Lernen einer fremden Sprache aber immer auf kleine Teile angewiesen ist, bleibt eine Unbestimmtheit der Übersetzung, die sich z. B. in einer Unerforschbarkeit der Referenz niederschlägt (Man vergleiche mit der referentiellen Abgeschlossenheit des Konstruktivismus). Quine stellt weiter fest, dass solche Übersetzungsprobleme auch innerhalb einer Sprache auftreten, zuerst beim lernenden Kind. Er konstatiert wiederum eine Unbestimmtheit und schreibt weiter:

> Dies ergab die Unerforschlichkeit der Referenz, die uns selbst betrifft; und so wurde die Referenz zu Unsinn. Nicht zu Unrecht; Referenz ist Unsinn, es sei denn, man relativiert sie auf ein Koordinatensystem. Dieses Relativitätsprinzip löst unser Dilemma auf. (Quine, 1975, S. 70)

Diese ontologische Relativität ist, wie Quine im Folgenden nachweist, ausreichend für die Zwecke der Wissenschaft. Er lässt aber auch keinen Zweifel daran, dass ontologische Fragen geklärt werden müssen: Die Ontologie bestimmt nämlich die Bedeutung der Quantoren (über welche Objekte läuft eine Variable, wenn wir „für alle" sagen), und ohne sie ist keine mächtige Sprache denkbar.

Die ontologische Relativität setzt einerseits unseren Fähigkeiten zu referenzieren Grenzen (dies tut auch der Konstruktivismus), zeigt aber auch auf, in welchem Rahmen eine (relative) Referenz eben doch möglich ist (eine solche positive Bestimmung fehlt im Positivismus). An dieser Stelle kann man sofort eine nützliche didaktische Regel ableiten: Grundsätzlich neue mathematische Objekte und Konzepte liegen außerhalb des bisherigen ontologischen Referenzrahmens, müssen also konstruktiv aufgebaut werden, und dazu braucht das Individuum viel Raum für den Prozess der Hypothesenbildung und der inneren evolutionären Anpassung des Netzes. Sobald aber der ontologische Referenzrahmen ausreichend ist, können Informationen und Wissen wesentlich einfacher transportiert werden können. Ein Beispiel: Es ist nicht möglich, einem Lernenden den mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff „zu geben". Nachdem er ihn (und die mit ihm vernetzen Konzepte) aber (re)konstruiert hat, ist sein ontologischer Referenzrahmen ausreichend, bestimmte Informationen aufzunehmen. Im Kontrast dazu liefert der Konstruktivismus die pauschale Empfehlung, der Lehrer müsse für jeden Inhalt einen umfangreichen Konstruktionsprozess initiieren.

Synthese: Realistischer Konstruktivismus

Die Ansätze der evolutionären und der naturalisierten Erkenntnistheorie sind weitgehend kompatibel. Vollmer sieht die evolutionäre Erkenntnistheorie als Konkretisierung des Programms von Quine (persönliche Mitteilung). Das liegt sicher auch daran, dass beide Ansätze die Ideen und Erkenntnisse von Piaget verarbeiten und weiterentwickeln. Diese Synthese braucht hier auch nicht expressis verbis formuliert werden, sie sollte sich aus obigem zwanglos ergeben.

Fazit

Der radikale Konstruktivismus lässt die enormen Anstrengungen von Menschen, Wahrheit zu gewinnen und Realität zu erkennen in einem sehr zweifelhaften Licht erscheinen, und hat deshalb auf der emotionalen Seite negative Auswirkungen bei Lernenden. Dagegen darf sich ein rührig forschender Realist Hoffnungen machen kann, wertvolle Erkenntnisse zu gewinnen, die die Welt besser verstehbar machen. Aus der Sicht des Didaktikers ist es erfreulich, dass bewährte Konzepte wie das epistemologische Dreieck oder der Modellierungskreislauf in bewährter Form beibehalten werden können. Darüber hinaus bieten die umfassend ausgearbeiteten evolutionären und naturalisierten Theorien reichlich Material, das in didaktischen Fragen erkenntnisleitend sein kann. Aus dem semantischen Holismus ergibt sich sofort die Forderung, dass die Einführung von neuen Begriffen, die nicht auf einem bereits etablierten Referenzrahmen verortet werden können, notwendig umfassende Kommunikation erfordert. Die These von der Unbestimmtheit der Übersetzung lässt Kommunikationsprobleme im Unterricht in einem neuen Licht erscheinen. Sie ermutigt den Lehrer, sich seinen Schülern empirisch forschend zu nähern, also z. B. durch Experimente herauszufinden, in wieweit Schülerkonzepte ähnlich sind zu den intendierten Konzepten.

Die realistische Sichtweise unterstützt nachdrücklich den gesamten Modellbildungskreislauf, also inklusive Bewährung in der Realität. Insbesondere wenn man Realität hier so weit fasst, dass auch gesellschaftliche Realität darunterfällt, kann die Modellbildung zur Leitidee des Unterrichts werden.

Der hier nur skizzierte realistische Konstruktivismus muss in Zukunft sowohl theoretisch weiter ausgearbeitet werden als auch sich in seiner Anwendung auf didaktische Fragen bewähren. Es ist charakteristisch für eine naturalisierte Position, dass der hypothetische Charakter auch für die Theorie selbst gilt, und der Realismus gibt Anlass zur Hoffnung, dass sich evolutionär eine Verbesserung erreichen lässt.

Literatur

Berghossian, P. (2013). *Angst vor der Wahrheit*. Berlin: Suhrkamp.

Dörfler, W. (1988). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. Wien.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. New York, New York Press.

Ferraris, M. (2015). *New realism*. London: Bloomsbury.

Friebe, C. et al. (2015). *Philosophie der Physik*, Berlin: Springer.

Gabriel, M. (Hrsg.) (2014). *Der Neue Realismus*. Berlin: Suhrkamp.

Girgensohn-Marchand, B. (1992). *Der Mythos Watzlawick und die Folgen*. Weinheim.

Glaseresfeld, E. v. (1997). *Radikaler Konstruktivismus*. Frankfurt: Suhrkamp.

Haag R. (1992). *Local Qunatum Physics*. Berlin: Springer.

Hatano, G. (1996). A conception of knowledge aquisition and its implications for mathematics education. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer Hrsg.), *Theories of Mathematical Learning* (S. 197–217). Mawah, NJ: Erlbaum.

Irrgang, B. (2001). *Lehrbuch der Evolutionären Erkenntnistheorie*. Stuttgart: UTB.

Keil, G. (2002). *Quine*. Hamburg.

Klauer, K., & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen*. Weinheim: Beltz.

Kirschner, P. A., & Sweller, J.; Clark R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching, *Educational Psychologist, 41*(2), 75–86.

Lauener, H. (1982). *Willard v. Quine*. München: Beck.
Leisen, J. (2002). Hausphilosophien im Unterricht. *MNU 55*(8).
Leuders, T. (2003). *Mathematikdidaktik*. Berlin: Cornelsen.
Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism*. London: Lawrence Erlbaum Associates.
Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Vieweg.
Modrow, E. (2002). *Pragmatischer Konstruktivismus und fundamentale Ideen als Leitlinien der Curriculumentwicklung*. Halle.
Matthews, M. R. (Ed.) (1998). *Constructivism in Science Education*. Dordrecht.
Nüse, R., Groeben N., Freitag B. & Schreier M. (1991). *Über die Erfindungen des radikalen Konstruktivismus*. Weinheim.
Nida-Rümelin, J. (1991). *Philosophie der Gegenwart*. Stuttgart.
Nola, R. (1998). *Constructivism in Science and in Sciene Education*. In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht.
Oeser, E., & Seitelberger, F. (1988). *Gehirn, Bewusstsein und Erkenntnis*. Darmstadt: WBG.
Piaget, J. (1973). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1975). *Ontologische Relativität und andere Schriften*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1979). *Von einem logischen Standpunkt*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Quine, W. v. O. (1989). *Die Wurzeln der Referenz*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Reich, K. (2006). *Konstruktivistische Didaktik – Ein Lehr- und Studienbuch*. Weinheim: Beltz.
Riedl, R. (2000). Strukturen der Komplexität. Berlin.
Roth, G. (1997). *Das Gehirn und seine Wirklichkeit*. Suhrkamp, Frankfurt: Suhrkamp.
Ryder, L. H. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge, Cambridge.
Scheunpflug, A. (2001). *Biologische Grundlagen des Lernens*. Berlin: Cornelsen.
Sfard, A. (2001). Symbolizing Mathematical Reality into Being. P. Cobb et al., *Symbolizing and Communication: Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (S. 37–98).
Siebert, H. (1999). *Pädagogischer Konstruktivismus*. Neuwied: Beltz.
Sill, H.-D., (2019). Zu Sinn und Unsinn des konstruktivistischen Lernmodells. *Mitteilungen der GDM*, 106, 21–23.
Singer, W. (2002). *Der Beobachter im Gehirn*. Suhrkamp. Frankfurt: Suhrkamp.
Spitzer, M. (2005). *Vorsicht Bildschirm! Elektronische Medien, Gehirnentwicklung, Gesundheit und Gesellschaft*. Stuttgart: Klett.
Suchting, W. A. (1998). Constructivism Reconstructed, In M. R. Matthews (Ed.), *Constructivism in Science Education* (S. 223–254). Dordrecht: Kluwer Academic.
Sokal, A., & Bricmont, J. (1999). *Eleganter Unsinn*. München: Beck.
Vollmer, G. (1990). *Evolutionäre Erkenntnistheorie*. Stuttgart: S. Hirzel.
Wittmann, G. (2002). *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

Reinhard Oldenburg, Universität Ausgburg
reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Die Fermat-Zahlen und der Fundamentalsatz der Algebra

CAS-unterstützte Zugänge zum Beweisen in der Hochschulmathematik

Kinga Szűcs

Problemstellung: Die Kluft zwischen Schule und Hochschule

Langjährige Erfahrungen, die ich als Hochschuldozentin an der Friedrich-Schiller-Universität Jena in der Mathematiklehrerausbildung im Zeitraum 2008 bis 2019 gesammelt habe, zeigen, dass die Studierenden den Übertritt von der Schule in die Hochschule als *Kulturschock* erleben. An anderen Hochschulen mag dies nicht viel anders sein. Aber nicht nur persönliche Wahrnehmungen, sondern auch bestimmte Tatsachen bestätigen, dass es zweifelsohne eine große Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik klafft, beispielsweise die hohen Abbruchquoten in mathematisch-naturwissenschaftlichen Studienfächern, aber auch die Vielzahl an einfallsreichen Überbrückungsmaßnahmen wie Kurse (sie heißen auch so: „Brückenkurse"), Tutorien, Camps (Szűcs & Traxl, 2020, S. 1). Die Gründe hierfür sind vielfältig und zahlreich und um nur einige von ihnen zu erwähnen: die – meines Erachtens Missinterpretation der – Bildungsstandards für die Unterrichtspraxis, die Reduktion der Stundenzahlen der Mathematik, aber auch technische Errungenschaften, die in die Schulen einen schnelleren Einzug haben, als in die Hochschule. Pauschal gesagt, es herrscht nicht nur eine andere mathematische Kultur in der Schule, als an der Hochschule, sondern es wird auch ein ganz anderes Bild von der Mathematik vermittelt: Während Mathematik in der Schule überwiegend als fertig, abgeschlossen, dafür aber gut in der Praxis anwendbar erscheint und als ein solches Fach vermittelt wird, wird Mathematik an der Hochschule als ein System von Definitionen, Sätzen, Beweisen und Lemmata, also eine reine theoretische Wissenschaft rübergebracht. Um Missverständnisse zu vermeiden: Einen Unterschied zwischen Schule und Hochschule hat es schon vor 20 bis 30 Jahren und auch schon zu Felix Kleins Zeiten gegeben, den wird es und soll es immer geben. Dadurch aber einerseits, dass beispielsweise *Beweise* aus der Schule praktisch komplett verschwunden sind (Brunner, 2014, S. 2), während technische Werkzeuge wie CAS (unter CAS – Computeralgebrasystem – wird in dem vorliegenden Beitrag ein Taschenrechner oder ein digitales Gerät mit entsprechender Software verstanden, das mit Variablen in Termen, Gleichungen, Funktionen umgehen kann) und Computer langwierige und komplexe Berechnungen im Nu herbeizaubern, entsteht bei den Lernenden oft der Eindruck, Mathematik ist *nur* eine Anwendung von Formeln und Rechenverfahren. Dafür wird von Studierenden gerade in der Anfangsphase ihres Studiums erwartet, dass sie schnell den Anschluss an Beweisverfahren und -strategien finden und die Mathematik als *reine deduktive Wissenschaft* zu schätzen wissen. Wenn sie das nicht oder nicht in dem erwarteten Tempo können, wird dies als mathematische Unfähigkeit interpretiert, während aber die Kompetenzen, auch technischer Natur, die diese Studierenden aus der Schule mitbringen, nur zum Teil beachtet werden.

Da die Gründe für das skizzierte Problem zahlreich und vielfältig sind, kann es auch keine einfache und pauschale Lösung geben. Sicherlich wird es in der Zukunft notwendig sein, in der Schule mehr Zugänge zu der theoretischen Seite der Mathematik und auch zu deren Entstehen (nämlich der Theorie) zu verschaffen, dass gerade bei der Argumentations- und Beweiskultur Nachholbedarf besteht, wird auch in dem Maßnahmenkatalog der DMV, der GDM und der MNU bestätigt (Koepf, Götze, Eichler & Heckmann, 2019). An dieser Stelle möchte ich aber dafür plädieren, die bereits vorhandene technische Kompetenz der Studierenden bei der Führung von Beweisen in der Hochschulmathematik zu verwerten. Beispielsweise ist der CAS-Einsatz in Thüringen ab der 9. Klasse im Unterricht und hierdurch in der Abiturprüfung verbindlich, in vielen anderen Bundesländern ist er im Unterricht zwar fakultativ vorgesehen, aber trotzdem verbreitet. Auf solche Vorkenntnisse sollte man in der Hochschulmathematik zurückgreifen, und zwar nicht nur, wenn es um Anwendungen geht (Berechnung von Determinanten größerer Matrizen, Nullstellen von Polynomfunktionen höheren Grades u. Ä.). Mit dem vorliegenden Beitrag wird also beabsichtigt, konkrete Beispiele dafür zu geben, wie die Thematisierung von Beweisen an der Hochschule durch den CAS-Einsatz für Studierende anschlussfähiger gemacht werden kann. Ein langfristig erhofftes Ziel dabei ist, Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik einen neuen Blick auf Beweise zu vermitteln und hierdurch zumindest den Boden für eine neue Unterrichtskultur (eine Beweiskultur!) in der Schule – wenn sie selbst Lehrpersonen sind – zu bereiten. Aus diesem Grund werden nachfolgend zwei Sätze, nämlich die Teilbarkeit der Fermat-Zahlen durch 3 sowie der Fundamentalsatz der Algebra unter dem Gesichtspunkt thematisiert, inwieweit das CAS in den Prozess der Satz- und Beweisideefindung erfolgreich eingebunden werden kann. Beide Sätze haben gemeinsam, dass sie unter Rückgriff auf die Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel bewiesen werden können. Meine Erfahrungen zeigen, dass heutzutage selbst diese Verallgemeinerungen den Studierenden Schwierigkeiten bereiten, deswegen wird in einem ersten Schritt ein – ebenfalls CAS-unterstützter – Zugang zu ihnen vorgeschlagen. Hierauf kann man in der Unterrichtspraxis natürlich verzichten, falls diese Verallgemeinerungen den Studierenden bekannt und flexibel zugänglich sind.

Die Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel

In der Schulmathematik werden die 1. ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), die 2. ($(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$) und die 3. ($(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) binomische Formel etwa in der Klassenstufe 8 thematisiert, oft auch geometrische Begründungen der Formeln durch Flächenzerlegungen und -umwandlungen gegeben. Etwa in der Klassenstufe 10 erfolgt die Auseinandersetzung mit dem binomischen Lehrsatz ($(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} (\binom{n}{k}) a^k \cdot b^{n-k}$), der als Verallgemeinerung der 1. binomischen Formel und mit der Substitution $b := -b$ auch der 2. binomischen Formel gilt. Mögliche Verallgemeinerungen der 3. binomischen Formel bleiben allerdings außer Acht, obwohl sie sich gerade beim Beweisen als nützliche Hilfsmittel erweisen. Da die hier gemeinten Verallgemeinerungen meines Erachtens bereits in der Schule thematisiert werden können, werden in diesem Abschnitt sowohl Lernende in der Schule als auch Studierende an der Hochschule bzw. deren Lehrpersonen und Dozierenden, angesprochen.

Satzfindung mit CAS

Betrachtet man die 3. binomische Formel – und dies sollte den Lernenden und/oder Studierenden so vermittelt werden –, so stellt sich zuerst die Frage, welche Komponenten der Formel überhaupt auf einer allgemeineren Ebene formuliert werden können. Schaut man auf $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, so wird sofort klar, dass auf der linken Seite ein Produkt steht, dessen Faktoren zwar höhere Exponenten als 1 haben können, diese Terme aber durch den binomischen Lehrsatz bereits zur Verfügung stehen. Die rechte Seite aber könnte zu $a^n - b^n$ verallgemeinert werden. Weiterhin, die 3. binomische Formel besagt nichts anderes, als dass aus dem Term $a^2 - b^2$ sowohl $a - b$ als auch $a + b$ ausgeklammert werden kann. Gilt dies für höhere Potenzen? Welche/r Term/e kann/können aus $a^n - b^n$ ausgeklammert werden? Hierdurch entsteht zunächst eine offene Fragestellung, die man mit Hilfe eines CAS erkunden kann und man zur Formulierung entsprechender *Vermutungen*, nämlich, dass aus dem Term $a^n - b^n$ der Faktor $a - b$ immer, der Term $a + b$ für gerade Werte von n ausgeklammert werden kann, gelangt. Auf der Hand liegend ist bei $n = 3$ anzufangen, n sukzessiv zu erhöhen und jeweils eine Faktorisierung durchzuführen, was beispielsweise der Befehl factor liefert (Abb. 1, oben). In *Analogie* dazu kann auch der Term $a^n + b^n$ auf seine Faktorisierbarkeit hin überprüft (Abb. 1, unten) und eine einschlägige Vermutung kann formuliert werden.

Abbildung 1. Faktorisierung von Termen der Form $a^n - b^n$ sowie $a^n + b^n$ für n= 3,. . . 10, mit CASIO Classpad II

Finden einer Beweisidee mit CAS

Eine *Beweisidee* kann die Analyse der restlichen Faktoren sowie eine Rückmultiplikation der Faktoren liefern. Bei der Analyse können Regelmäßigkeiten wie Symmetrie der Terme in den beiden Variablen, abwechselnde Vorzeichen erkannt werden. Zu der Rückmultiplikation würde sich der Befehl expand erst eignen, wenn der Modus auf Assist gestellt ist (Abb. 3 oben), sonst fasst das CAS die Glieder unsichtbar und demzufolge unnachvollziehbar zusammen (Abb. 2). Überdies empfiehlt es sich die Restfaktoren zu einem Term zusammenzufassen sowie nach dem Grad des Faktors a zu sortieren, damit bei der Multiplikation die Glieder, die einander aufheben, nebeneinander auftreten (Abb. 3 unten). Dieses gegenseitige Aufheben ist Dreh- und Angelpunkt eines einschlägigen Beweises, den ab hier *händisch* zu führen nicht mehr schwerfällt und der entweder auf der Multiplikation eines passenden Terms mit $a - b$ bzw. mit $a + b$ oder auf der Durchführung einer entsprechenden Polynomdivision beruhen kann.

Abbildung 2. Rückmultiplikation mit dem Befehl expand im Algebra-Modus mit CASIO Classpad II

Abbildung 3. Rückmultiplikation mit dem Befehl expand im Assist-Modus ohne und mit Sortieren der Glieder

Eine *Rückschau* sollte die Auseinandersetzung mit diesen Verallgemeinerungen abrunden: Lernende und/oder Studierende sollen selbst formulieren, was sie in der hier skizzierten Unterrichtseinheit gelernt haben, etwa in der Form: Die Differenz zweier n-ten Potenzen kann immer in Produkt umgeformt werden, das Ausklammern der Differenz der beiden Basen ist für jedes n, die Summe der Basen für gerades n möglich. Dieser Zusammenhang wird nachfolgend als 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel genannt. Die Summe zweier n-ten Potenzen kann für ein ungerades n in ein Produkt umgeformt werden, und zwar kann die Summe der Basen ausgeklammert werden. Dieser Zusammenhang wird nachfolgend mit 2. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel bezeichnet.

Teilbarkeit der Fermat-Zahlen

Mit den Fermat-Zahlen werden die Studierenden bereits zu Beginn ihres Studiums konfrontiert, etwa in einer Vorlesung zu Zahlentheorie oder zu linearer Algebra. Auch deren Teilbarkeitseigenschaften werden im Zusammenhang mit der Frage der Fermat-Primzahlen angesprochen, beispielsweise ist bekannt, dass die Fermat-Zahlen, bis auf die erste ($F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$) alle den Rest -1, bzw. was damit Gleichwertig ist, den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen. So ist es denkbar, in einer einschlägigen Lehrveranstaltung nicht nur den nachfolgenden Beweis von Johann von Bolyai (1802–1860) zu thematisieren, sondern sich hierzu basierend auf den Gedanken des hervorragenden ungarischen Mathematikers einen modernen, CAS-unterstützten Zugang zu verschaffen.

Der Beweis von Johann von Bolyai

Laut Kiss (1999, S. 99) hat sich der junge Bolyai, Mitendecker der hyperbolischen Geometrie, viel mit der Primfaktorzerlegung der Fermat-Zahlen beschäftigt. In seinem Nachlass wurden der folgende Satz und der einschlägige Beweis gefunden (Kiss, 1999, S. 99, übersetzt von der Autorin):

> Die Zahlen von der Form $2^{2^m} + 1$ haben immer die Form $6n - 1$, folglich sind sie nie durch 3 teilbar.
>
> [und]
>
> Da $2^{2m-1} + 1 = (2 + 1) \ldots)$ folgt der Reihe nach, dass $2^{2m-1} + 1 = 3n$, $2^{2m-1} = 3n - 1$, $2^{2m} = 6n - 2$, jede gerade Zweierpotenz ist also von der Form $6n - 2$. Dann ist aber $2^{2m} + 1$, also $2^{2^k} + 1$ von der Form $6n - 1$.

Hier merkt Kiss fehlerhaft an, dass $m, n \geq 1$ und $k \geq 0$ gelten soll. $k = 0$ kann einerseits offensichtlich nicht gelten, da $F_0 = 3$ und somit durch 3 teilbar ist, andererseits aber betont Bolyai in seinem Beweis, dass er Zahlen von der Form *gerade* Zweierpotenz $+1$ meint, und dies trifft auf F_0 wegen $2^0 = 1$ ungerade nicht zu.

Diesen wenigen Zeilen kann man viel Information entnehmen: Bolyais Fokus war offensichtlich auf der Teilbarkeit durch 3 gerichtet, obwohl er dies zum Schluss – wahrscheinlich aus Bequemlichkeit – in Form von Teilbarkeit durch 6 zum Ausdruck brachte. Überdies war der Ausgangspunkt seiner Überlegungen die Faktorisierbarkeit der Summe einschlägiger ungerader n-ten Potenzen, da man hier die Summe der Basen, also $2 + 1 = 3$ als Faktor ausklammern kann. Aus dieser Überlegung leitete er *einen allgemeinen Zusammenhang* für Zahlen von der Form „gerade Zweierpotenz +1“ ab, die Fermat-Zahlen bilden dabei einen Spezialfall. Er hat also eine Eigenschaft der Fermat-Zahlen eingesehen und bewiesen, indem er einen deutlich stärkeren Satz bewiesen hat. All diese Informationen finden nachfolgend Anwendung und Verwertung.

Satzfindung mit CAS

Der oben formulierte Satz kann gerade durch den Einsatz von CAS bei der Thematisierung der Teilbarkeit der Fermat-Zahlen schnell gefunden werden. Die Fermat-Zahlen sind per definitionem ungerade, eine erste eigentliche Frage entsteht, wenn man sich die Teilbarkeit durch 3 anschaut. Mit Hilfe des Befehls Define können die Fermat-Zahlen als Funktionswerte abhängig von k festgelegt werden. Einige von ihnen kann man auch berechnen lassen, um ein Gefühl für das exponentielle Wachstum mit exponentiell wachsendem Exponenten zu bekommen (Abb. 4 oben). Der Befehl $iMod(F(k), 3)$ liefert den Rest der jeweiligen Fermat-Zahl modulo 3 (Abb. 4 unten). Die *Vermutung,* dass sie bis auf den Fall $k = 0$ alle den Rest 2 lassen, liegt auf der Hand.

Finden einer Beweisidee mit CAS

In einem nächsten Schritt sollen – im Sinne des Beweises von Bolyai – Zahlen der Form $2^{2m} + 1$ auf ihre Teilbarkeit durch 3 überprüft (Abb. 5 oben) und eine entsprechende Vermutung soll wiederum formuliert werden. Es kann hierbei auch die Frage gestellt werden, wie diese Zahlen mit den Fermat-Zahlen zusammenhängen. Den Studierenden soll klar werden, dass es hier um eine Verallgemeinerung geht. Anschließend sollen noch Zahlen der Form $2^{2m-1} + 1$ analog zu den obigen Überlegungen untersucht werden (Abb. 5 unten). Da es hier um die Summe von ungeraden Potenzen geht, kommen die Studierenden auf die passende Begründung (2. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel) vermutlich selbst. Findet man diesen Schritt aufgezwungen, so kann einfach die Frage

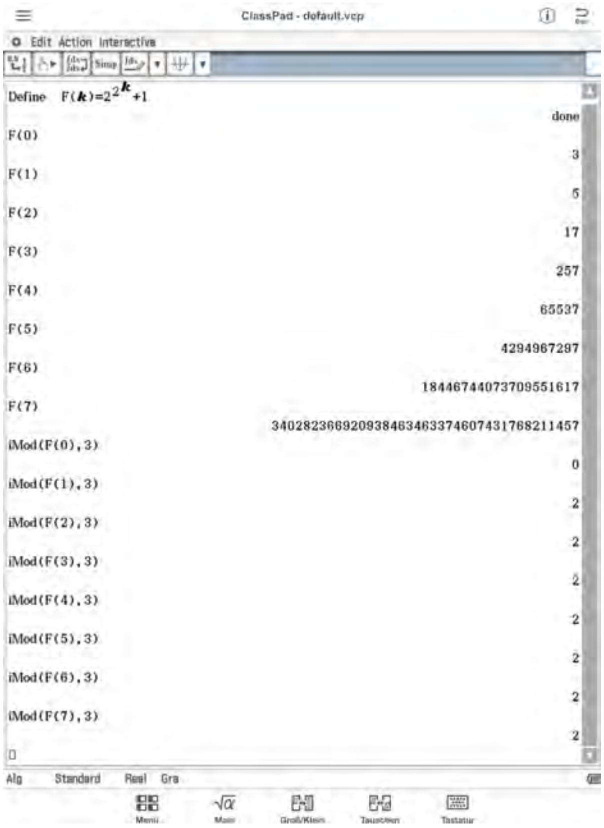


Abbildung 4. Die ersten acht Fermat-Zahlen und deren Rest modulo 3

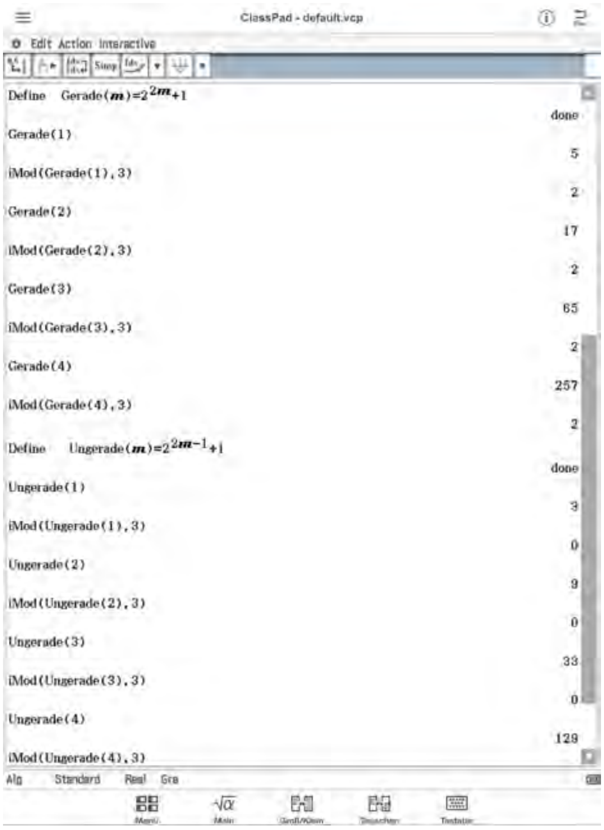
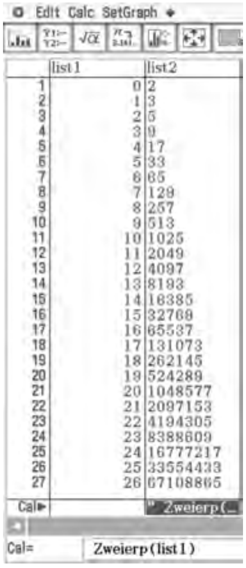


Abbildung 5. Gerade und ungerade Zweierpotenzen und deren Rest modulo 3

Abbildung 6. Zweierpotenzen und deren Rest modulo 3

aufgeworfen werden, dass vielleicht alle Zahlen der Form „Zweierpotenz+1" den Rest 2 bei der Division durch 3 lassen. Dass dies nicht der Fall ist, kann wieder mit dem CAS schnell überprüft werden und ein systematisches Vorgehen hierbei motiviert die Sortierung der Potenzen in gerade und ungerade Exponenten (Abb. 6).

In einem vorletzten Schritt soll der Zusammenhang zwischen den Zweierpotenzen mit ungeraden und geraden Exponenten hergestellt werden. Um dies anzuregen, lohnt es sich, eine Tabelle anzulegen (Abb. 7), hier kann, muss aber kein CAS eingesetzt werden. Hier können verschiedene Regelmäßigkeiten erkannt werden, ganz im Sinne des Bolyai-Beweises ist beispielsweise die Erkenntnis, dass jede Zahl der Form $2^{2m}+1$ aus der vorhergehenden Zahl der Form $2^{2m-1}+1$ hervorgeht, indem letztere mit 2 multipliziert und aus dem Ergebnis 1 abgezogen wird. Die Zusammenhänge $3 \cdot 2 = 5 + 1$, $9 \cdot 2 = 17 + 1$, $33 \cdot 2 = 65 + 1$ usw. legen dies nahe, ein algebraischer Nachweis für den allgemeinen Fall ($(2^{2m-1}+1) \cdot 2 = 2^{2m} + 2 = (2^{2m}+1) + 1$ soll folgen. In einer kurzen Rückschau soll zum Schluss reflektiert werden, dass hier ein als komplex erscheinender Fall dadurch gezeigt wurde, dass er zuerst verallgemeinert und dieser anschließend auf einen bereits bekannten Zusammenhang zurückgeführt wurde.



	list1	list2
1	0	2
2	1	3
3	2	5
4	3	9
5	4	17
6	5	33
7	6	65
8	7	129
9	8	257
10	9	513
11	10	1025
12	11	2049
13	12	4097
14	13	8193
15	14	16385
16	15	32769
17	16	65537
18	17	131073
19	18	262145
20	19	524289
21	20	1048577
22	21	2097153
23	22	4194305
24	23	8388609
25	24	16777217
26	25	33554433
27	26	67108865

Cal= Zweierp(list1)

Abbildung 7. Die ersten 27 Zahlen der Form „Zweierpotenz+1"

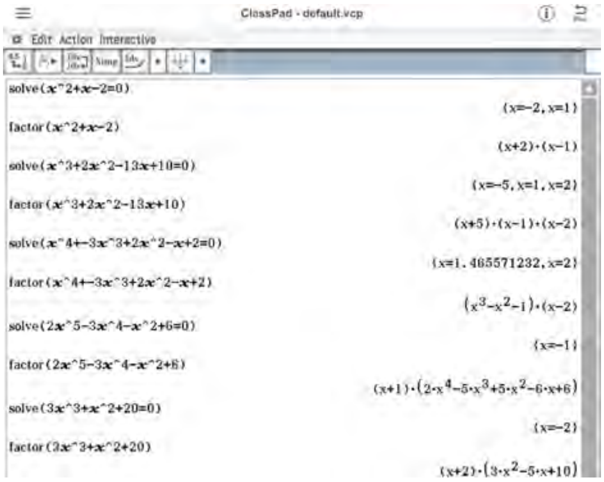


Abbildung 8. Erkundungen zum Finden des Fundamentalsatzes der Algebra mit CAS

Der Fundamentalsatz der Algebra

Der Fundamentalsatz der Algebra bildet einen zentralen Inhalt in der linearen Algebra, zahlreiche Varianten seines Beweises werden in einschlägigen Vorlesungen vermittelt. Auch hier entsteht auf Studierendenseite das Problem, dass weder der Inhalt des Satzes noch dessen Beweis motiviert werden. Fischer & Malle (1985, S. 201) schlagen zwar wohlwollend den Einsatz einer sogenannten Aufgabensequenz (damals noch für Lernende in der Schule!) vor, aber meines Erachtens verfehlen sie das Ziel, indem sie sich auf die sukzessive Erhöhung des Abstraktionsgrades (angefangen bei einer konkreten kubischen Polynomfunktion bis hin zu allgemeinen Polynomfunktionen n-ten Grades) fokussieren, dabei aber die Beweisidee, nämlich die Erweiterung mit Null in geeigneter Form schlicht und einfach bereits am Anfang ihrer Aufgabensequenz vorgeben. Wo kommt die Erweiterung des Funktionsterms mit Null her? Und warum wird diese Null abgezogen und nicht addiert? Warum als Funktionswert einer Nullstelle? Solche Fragen könnten Studierende stellen. Nachfolgend wird versucht, auch zu diesem Satz und zu dessen Beweisidee einen Zugang mit Hilfe des CAS zu verschaffen.

Satzfindung mit CAS

Erkundungen an konkreten, immer allgemeiner werdenden Polynomfunktionen können mit einem CAS schnell durchgeführt werden. Die Befehle solve und factor liefern Nullstellen sowie Faktorisierungen (Abb. 8), sodass die entsprechende Vermutung formuliert werden kann.

Finden einer Beweisidee mit CAS

Um auch den Beweis (bzw. einen von den vielen) zugänglich zu machen, sollte man die Frage stellen, aus welchen Polynomen denn beispielsweise $x-1$, $x+2$, $x-5$ etc. ausgeklammert werden kann. Hierzu sollten passende – anfangs offensichtliche (wie x^5-1, $2x^4-2$, $10x^{10}-10$ etc. zum Term $x-1$), später weniger „durchschaubare" Polynome (wie x^5+2x^4-3, $10x^{10}+x^5+2x^4-13$, usw. ebenfalls zum Term $x-1$) vorgegeben werden. Einerseits wir dadurch der Rückgriff auf die erste Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel deutlich, andererseits wird *die Überprüfung* der Entscheidungen mit dem CAS beschleunigt. Die Beweisidee kann nun dadurch motiviert werden, dass man die Studierenden auffordert, Polynome derart mit einer reellen Zahl zu ergänzen, dass z. B. der Term $x-1$ / $x+2$ / $x-5$, $x-a$ ausgeklammert werden kann (beispielsweise soll beim Polynom $p(x) = 10x^{10}+x^5+2x^4-\alpha$ der Term $x-1$ ausklammerbar sein). Das CAS kann wiederum bei der Überprüfung helfen. Dass hier genau der Wert der entsprechenden Polynomfunktion an der Stelle $1/-2/5/a$ abgezogen werden muss, ist klar, da bereits ein Bezug zu der 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel hergestellt wurde. Bestimmt man anschließend die Nullstellen der *erzeugten* Polynomfunktionen, stellt man fest, dass gerade die vorgegebenen Stellen $1/-2/5/a$ welche sind. Eine *Reflexion* der Arbeit liefert auch die Begründung: Die Polynomfunktionen wurden dadurch erzeugt, dass aus $p(x)$ der Reihe nach $p(1)$, $p(-2)$, $p(5)$ uns $p(a)$ abgezogen wurde. Diese Operation hat die Stellen $1/-2/5/a$ zur Nullstelle der neuen Polynomfunktionen gemacht (Abb. 9)! Der Einwand

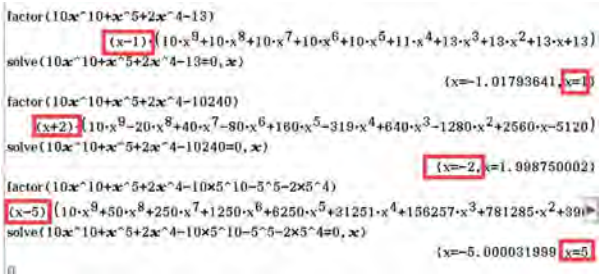


Abbildung 9. Die erzeugten Polynomfunktionen haben Nullstellen an den vorgegebenen Stellen

könnte jetzt formuliert werden, dass hierdurch nur gezeigt wurde, wenn ein linearer Term aus einem Polynom ausgeklammert werden kann, dann ist die Gegenzahl des konstanten Gliedes im linearen Term eine Nullstelle der entsprechenden Polynomfunktion. Meines Erachtens haben wir nicht nur dies gezeigt, sondern eine Motivierung des Beweises, der auf einer Ergänzung mit Null als Funktionswert einer beliebigen Polynomfunktion $P(x)$ in einer Nullstelle $x_0 = \alpha$ beruht. Nun ist *nicht mehr weit hergeholt*, diesen Funktionswert, der ja Null beträgt, als $P(\alpha)$ aufzuschreiben und *abzuziehen*, damit die 1. Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel angewendet werden kann.

Fazit

Die hier vorgestellten Ansätze zum Einsatz von CAS bei der Satzfindung sowie bei der Findung einer Beweisidee während des Prozesses des Beweisens sollen als Anregung dienen, wie, in welcher Form und in welchem Umfang auf – in erster Linie technische – Vorkenntnisse der Studierenden in der Hochschulmathematik zurückgegriffen werden kann. Ziel war nicht dabei, weniger Mathematik zu vermitteln, sondern Kenntnisse aus der Schule in der höheren Mathematik aufgreifen und zum Vorteil machen zu können. Sicherlich kann der Einwand formuliert werden, dass solche und ähnliche Ansätze viel Zeit in Anspruch nehmen und dadurch doch weniger Mathematik vermittelt werden kann. Ich persönlich teile diese Meinung nicht. Zweifelsohne nimmt die Realisierung solcher Ansätze mehr Zeit in Anspruch, als das bloße Anschreiben an die Tafel der entsprechenden Sätze und Beweise, geschweige denn vom Einblenden in einer PPT-Präsentation, und sicherlich kann dieses Vorgehen nicht überall in der Hochschulmathematik praktiziert werden. Dennoch vertrete ich die Meinung, und bin fest davon überzeugt, dass die hier skizzierten Unterrichtsabläufe eine Brücke zwischen Schule und Hochschule schlagen können, und zwar nicht ausschließlich wegen des CAS-Einsatzes, sondern auch wegen des hierdurch ermöglichten induktiven Vorgehens. Die Studierenden lernen selbst Vermutungen zu formulieren, Sätze zu finden, Beweisideen zu finden und schließlich formal zu beweisen. Überdies werden sie mit wichtigen heuristischen Strategien wie Analogiebildung, Verallgemeinern, Fallunterscheidung, Zurückführen auf Bekanntes, aber auch mit konkretem Methodenwissen wie die Erweiterung mit Null vertraut, was langfristig zu mehr mathematischem Verständnis führt.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. doi:10.1007/978-3-642-41864-8

Fischer, R. & Malle, G. (1989). *Mensch und Mathematik.* Zürich: Bibliographisches Institut.

Kiss. E. (1999). *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Koepf, W., Götze, F., Eichler, A., & Heckmann, G. (2019). Mathematik – 19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule–Hochschule. Verfügbar unter tinyurl.com/yd7u9z9a.

Szűcs, K. & Traxl, L. (im Druck). Einstellung von Lehramtsstudierenden mathematischen Beweisen gegenüber – Erstellung eines Kategoriensystems. Beiträge zur 54. Jahrestagung als Onlinetagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 28. September – 1. Oktober 2020 in Würzburg.

Kinga Szűcs, Universität Erfurt
E-Mail: kinga.szuecs@uni-erfurt.de

Zu „Das Epsilon-Delta Spiel und Schach“

GDM-Mitteilungen 108 (2020), S. 45–48

Stefan Götz

Im Abschnitt „Grenzwert einer Funktion“ wird behauptet, dass die Ungleichungen $8 < x^2 < 10$ „klarerweise“ erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{8}$ (S. 47, linke Spalte). Das ist meines Erachtens nicht richtig. Für $x = 3.17$ ist zwar $|3.17 - 3| < 3 - \sqrt{8} = 0.1715\ldots$, aber $x^2 = 10{,}04\ldots > 10$! (In dem Zusammenhang ist bei $3 - \sqrt{8} \approx 1.7$ ebenda offenbar ein Druckfehler passiert.)

In der rechten Spalte auf S. 47 wird allgemein behauptet, dass die Ungleichungen $9 - \varepsilon < x^2 < 9 + \varepsilon$ notwendigerweise erfüllt sind, wenn $|x - 3| < 3 - \sqrt{9 - \varepsilon}$. Ich habe diese Behauptung nicht nachvollziehen können und daher versucht, diese nachzurechnen. So bin ich überhaupt erst auf den Fehler und das obige Gegenbeispiel gekommen.

Wie sieht nun eine passende δ-Umgebung für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ für die stetige Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ aus? – Es ist $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$. Denn wenn $|x - 3| < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ ist, dann folgt daraus entweder

1. $x - 3 < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ oder
2. $3 - x < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

Im ersten Fall ist $x < \sqrt{9 + \varepsilon}$ und damit $x^2 < 9 + \varepsilon$.

Der zweite Fall ist etwas aufwändiger. Aus $x > 6 - \sqrt{9 + \varepsilon}$ folgt durch Quadrieren $x^2 > 45 - 12\sqrt{9 + \varepsilon} + \varepsilon$. Wir versuchen $45 - 12\sqrt{9 + \varepsilon} + \varepsilon > 9 - \varepsilon$ und erkennen durch Äquivalenzumformungen die zweifellos richtige Aussage $\varepsilon^2 > 0$.

Tatsächlich ist die von den Autoren angegebene δ-Umgebung ein bisschen zu groß. Setzen wir nämlich $3 - \sqrt{9 - \varepsilon} > \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ an, so liefern wiederum einige Äquivalenzumformungen die Ungleichung $9 > \sqrt{81 - \varepsilon^2}$, die unstrittig ist.

Natürlich ändert meine Bemerkung nichts an der Gesamtaussage des Artikels, und das ist ja das Wichtigste. Dennoch meine ich, dass auch die technischen Details Augenmerk verdienen.

Stefan Götz, Universität Wien
E-Mail: stefan.goetz@univie.ac.at

Laudatio für den GDM-Förderpreis 2020

Rudolf Sträßer im Namen der GDM-Förderpreis-Jury

Der Förderpreis der GDM wird im Jahr 2020 an Frank Reinhold (Technische Universität München) für seine Dissertation mit dem Titel *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive* und an Johanna Rellensmann (Westfälische Wilhelms-Universität Münster) für ihre Dissertation mit dem Titel *Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren* vergeben. Johanna Rellensmann geht in ihrer Arbeit auf der Grundlage von Begriffen und Theorien zum Modellieren und zum Visualisieren der Frage nach, inwieweit selbst erstellte Skizzen das Modellieren mit Mathematik unterstützen. Frank Reinhold verarbeitet in seiner Arbeit mathematikdidaktische Konzepte (etwa Grundvorstellungen) und psychologische Konzepte (wie Cognitive Load Theory, Adaptivität und Feedback in Lernumgebungen), um die Frage zu untersuchen, wie nach diesen Konzepten gestaltete (digitale) Lernumgebungen die Entwicklung des Bruchzahlbegriffes unterstützen.

Beide Arbeiten erfüllen in hervorragender Weise die Basis-Kriterien der Förderpreis-Jury: Sie behandeln ein bedeutsames Thema im Kern der Disziplin Mathematikdidaktik. Johanna Rellensmann liefert eine qualitative hypothesen-generierende Arbeit zu einem klar umrissenen Problem der Mathematikdidaktik, indem sie den Einsatz einer bestimmten Strategie beim mathematischen Modellieren analysiert. Frank Reinhold fundiert in einer Entwicklungs- und Evaluationsarbeit den Bruchzahlbegriff, einen zentralen Konzeptbereich der Schulmathematik. Mit einer breit angelegten Analyse vorhandener Forschungsliteratur und einer versierten Verbindung theoretischer Konzepte aus Mathematikdidaktik und Psychologie differenziert er zudem bereits existierende und etablierte Ansätze. In beiden Arbeiten wird in hervorragender Weise die einschlägige Forschungsliteratur aufgearbeitet und für die Zwecke der jeweiligen Dissertation fokussiert. Beide Dissertationsthemen werden auf verschiedene und zugleich auf jeweils äußerst gescheite methodische Weise bearbeitet. Die ausgezeichneten Arbeiten setzen innovative Auswertungsmethoden gekonnt ein. Zudem sind beide Arbeiten formal und sprachlich ausgesprochen leser/-innenfreundlich und gut nachvollziehbar gestaltet.

Die Jury sah sich auch nach langer vergleichender Diskussion nicht in der Lage, eine der Arbeiten der anderen vorzuziehen. Die Arbeiten unterscheiden sich fundamental in Vorgehensweise und eingesetztem Forschungsparadigma, sodass die Jury beide als gleichermaßen herausragend angesehen hat. Der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik sind beide Dissertationen zur Auszeichnung mit dem Förderpreis vorgeschlagen worden. Die GDM folgt diesem Vorschlag und gratuliert der Preisträgerin und dem Preisträger. Alle Teilnehmer/-innen der nächsten Tagung der GDM werden sich über diese beiden Arbeiten in gesonderten Vorträgen informieren können.

Rudolf Sträßer, Justus-Liebig-Universität Gießen
E-Mail: rudolf.straesser@math.uni-giessen.de

Qualifizierungsangebote und Reisebeihilfen Was wünscht sich der wissenschaftliche Nachwuchs?

Ralf Nieszporek, Silke Neuhaus, Maximilian Pohl, Pauline Linke, Julia Joklitschke und Raja Herold-Blasius

Der wissenschaftliche Nachwuchs steht nicht nur beim Einstieg in die Arbeitswelt, sondern auch in den verschiedenen Phasen der Weiterqualifizierung vor vielfältigen Herausforderungen. Während bei einigen Aspekten wie der eigenen Forschungsidentität selbstständig ein Weg gefunden werden muss, stehen die Nachwuchswissenschaftler/-innen immer auch vor anderen Herausforderungen. Die GDM und insbesondere die GDM-Nachwuchsvertretung möchten bei diesem gesamten Prozess bestmöglich unterstützen. Für zielgerichtete Angebote wurde deswegen zunächst eine Umfrage realisiert, durch welche die tatsächlichen Bedarfe des wissenschaftlichen Nachwuchses in Erfahrung gebracht werden sollten.

Die eingesetzte Online-Fragebogen bestand neben allgemeineren Fragen wie beispielsweise zum Stellenumfang aus verschiedenen Fragen zu zwei großen Themengebieten: (1) Wünsche und Bedarfe bzgl. Qualifizierungsangeboten und (2) die bisherige Finanzierung von Reisekosten, z. B. für die Teilnahme an Tagungen.

Insgesamt haben 158 Personen des wissenschaftlichen Nachwuchses an dieser Umfrage teilgenommen, wovon 113 an ihrer Promotion arbeiten, 43 Personen die Promotion erfolgreich abgeschlossen haben und zwei Personen in der akademischen Welt tätig sind, ohne eine Promotion anzustreben. Diese zwei Personen wurden aufgrund der kleinen Gruppengröße und nur sporadischer Dateneingabe im weiteren Verlauf nicht weiter betrachtet. Des Weiteren müssen die Antworten aufgrund der eher kleinen Stichprobe hinsichtlich ihrer Generalisierbarkeit mit Vorsicht behandelt werden; dennoch lassen sich bereits Tendenzen und Wünsche des wissenschaftlichen Nachwuchses innerhalb der mathematikdidaktischen Community aus den Daten ablesen.

Bedarfe und Wünsche bzgl. Fortbildungsangeboten

Bei den Fragen zum *Bedarf an Fortbildungsangeboten* wurde zwischen Doktorand/-innen und Post-Doktorand/-innen unterschieden. Die Teilnehmer/-innen konnten aus einer Liste von zehn Themenvorschlägen drei Wunschworkshops inklusive deren zeitlichen Turnus auswählen, die teilweise an den jeweiligen Adressatenkreis angepasst wurden (z. B. wissenschaftliches Schreiben einer Dissertation vs. wissenschaftliches Schreiben einer Habilitation).

Bedarfe und Wünsche bei Doktorand/-innen

Der angegebene Bedarf an Qualifizierungsangeboten bei Doktorand/-innen ($n = 110$) kann Abbildung 1 entnommen werden.

Den größten Weiterbildungsbedarf sehen die Doktorand/-innen in zwei Bereichen. Einer davon ist das *Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten* (89,1 %), wobei ein größeres Interesse auf dem *Schreiben der Dissertation* (51,8 %) gegenüber *dem Schreiben von Artikeln* (37,3 %) liegt. Fortbildungen bezüglich *Planen und Analysieren von wissenschaftlichen Untersuchungen* (83,6 %) stellen dabei den zweitwichtigsten Themenbereich dar. Dieser gliedert sich auf in *Datenerhebung* (24,5 %) auf der einen Seite und *Datenauswertung* (59,1 %) auf der anderen. Zusätzlich zu diesen zwei Schwerpunkten wünschen sich Doktorand/-innen auch Fortbildungsangebote zum *Formulieren von Forschungsfragen* (28,1 %). Dabei präferieren die meisten Doktoranden/-innen, viele Workshops halbjährlich bzw. jährlich durchzuführen.

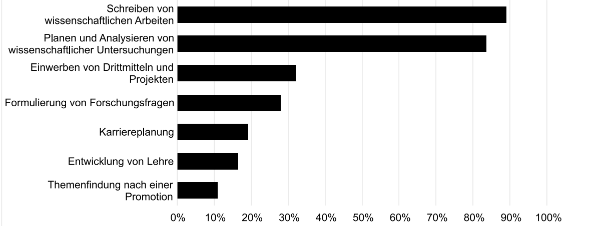


Abbildung 1. Umfrageergebnisse zum Fortbildungsbedarf der Doktorand/-innen ($n = 110$), bis zu drei Mehrfachnennungen pro Person möglich, kategorisiert nach thematischen Gruppen.

Bedarfe und Wünsche bei Post-Doktorand/-innen

Eine andere Schwerpunktsetzung ergibt sich bei den Post-Doktorand/-innen ($n = 39$, vgl. Abb. 2).

Es zeigt sich, dass vor allem das *Einwerben von Drittmitteln und Projekten* (97,5 %) als ein relevantes Thema angesehen wird, wobei der Einwerbung von Projekten (51,3 %) und dem Stellen von DFG-Anträgen (43,6 %) ein größeres Interesse zugesprochen wird als der Einwerbung von Reisemitteln und Stipendien (2,6 %). Aber auch Bereiche wie das *Planen und Analysieren von wissenschaftlichen Untersuchungen* (59 %) gefolgt vom *Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten* (46,2 %) stellt bei den Post-Doktorand/-innen einen hohen Fortbildungsbedarf dar. Zusätzlich würden auch knapp 40 % der Post-Doktorand/-innen Workshops zum Thema *Karriereplanung* besuchen. Auch der Großteil der Post-Doktorand/-innen wünscht sich eine zeitliche Workshop-Taktung von halbjährlich bzw. jährlich.

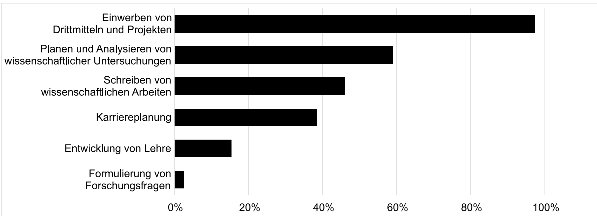


Abbildung 2. Umfrageergebnisse zum Fortbildungsbedarf der Post-Doktorand/-innen ($n = 39$), bis zu drei Mehrfachnennungen pro Person möglich, kategorisiert nach thematischen Gruppen.

Zwischenfazit

Insgesamt ist auffällig, dass ein Prioritätenwechsel beim Statuswechsel vom Doktoranden zum Post-Doktoranden stattfindet. Während Doktorand/-innen ihren Bedarf beim *Schreiben von wissenschaftlichen Arbeiten* (89,1 %) am größten ansehen, ist das *Einwerben von Drittmitteln und Projekten* (97,5 %) für Post-Doktorand/-innen am wichtigsten. Darüber hinaus interessiert sich diese Gruppe auch für die eigene Karriereplanung. Workshops zum Thema *Planen und Analysieren wissenschaftlicher Untersuchungen* sind für beide Personenkreise interessant (59 % bzw. 84 %). Sowohl die Doktorand/-innen als auch die Post-Doktorand/-innen sind für einen halbjährlichen bis jährlichen Turnus zwischen den Wiederholungen der Workshops.

Bereits vorhandene Angebote für den wissenschaftlichen Nachwuchs

Zu den aktuellen Qualifizierungsangeboten zählen die regelmäßig stattfindenden Workshops während der GDM-Jahrestagung, bei der GDM-Nachwuchskonferenz oder Einzelveranstaltungen, z. B. zum Stellen von DFG-Anträgen. Diese scheinen in weiten Teilen den Bedarfen der Nachwuchswissenschaftler/-innen zu entsprechen. Trotzdem könnte das Gesamtangebot z. B. im Bereich des wissenschaftlichen Schreibens, insbesondere von Monographien, ausgeweitet werden.

Nach Auswertung der Umfrage und unter Beachtung der bisherigen Angebote nehmen wir als Nachwuchsvertretung für uns mit, die meisten Workshops jährlich bis zweijährlich anzubieten. Eine häufigere Taktung thematisch gleicher Workshops (z. B. halbjährlich), wie es sich eine Vielzahl von Doktorand/-innen wünscht, ist aufgrund von z. B. zeitlichen Faktoren nur schwer umzusetzen. Allerdings besteht hier eventuell die Möglichkeit auf ein Online-Angebot überzugehen. Diese Option wird derzeit geprüft.

Finanzierung von Reisekosten

Das zweite Themengebiet der Befragung befasste sich mit der *Finanzierung von Tagungen*. Dies war vor allem dadurch motiviert, dass die von der GDM zur Verfügung gestellte Reisebeihilfe zur Förderung von Tagungsteilnahmen bisher nur selten abgerufen werden.

Die Umfrageergebnisse der 104 Doktorand/-innen und Post-Doktorand/-innen zeigen, dass 32 % der Reisen nicht über Projektmittel oder Haushaltsmittel finanziert werden. Diese übrigen Kosten werden zu ca. 18 % durch Stipendien und Reisebeihilfen gedeckt, allerdings tragen Nachwuchswissenschaftler/-innen immer noch ca. 14 % der anfallenden Kosten selbst. Außerdem zeigt unsere Auswertung, dass ungefähr 60 % der Nachwuchswissenschaftler/-innen auch immer einen, wenn auch kleinen, Eigenanteil zur Finanzierung der Reisekosten selber tragen.

Damit die GDM-Reisebeihilfe beantragbar ist, müssen verschiedene Voraussetzungen erfüllt werden (siehe didaktik-der-mathematik.de/de/nachwuchs.html). Eine davon besagt, dass der eigene Stellenanteil weniger als 67 % einer Vollzeitstelle betragen muss. Abbildung 3 zeigt, dass 37,2 % der an dieser Befragung teilnehmenden Doktorand/-innen und 11,6 % der Post-Doktorand/-innen dieses Kriterium erfüllen und auf diese Art der Reiseunterstützung potenziell zurückgreifen könnten. Auch ein Stipendium gilt als eine Voraussetzung, um Reisebeihilfen beantragen zu können. In dieser Umfrage hatten vier Doktoranden/-innen ein Stipendium, wobei allerdings zwei Personen einen Stellenanteil von weniger als 67 % vorwiesen und daher auch in der zugehörigen Gruppe der Doktorand/-innen bereits abgebildet sind.

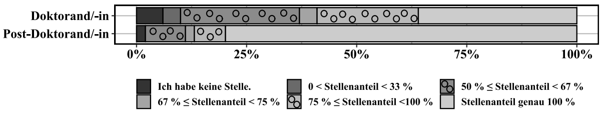


Abbildung 3. Stellenumfang aufgeteilt nach Doktorand/-innen ($n = 113$) und Post-Doktorand/-innen ($n = 43$)

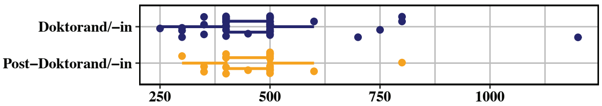


Abbildung 4. Jitter und Boxplot der bevorzugten Förderhöhen in Euro der Doktorand/-innen ($n = 46$) und Post-Doktorand/-innen ($n = 23$)

Die Teilnehmer/-innen der Umfrage wurden zusätzlich befragt, ob ihnen die GDM-Tagungsförderungen bekannt waren. Da über 55 % der Umfrageteilnehmer/-innen die Reisebeihilfe der GDM nicht bekannt war, scheint eine präsentere Werbung und bessere Informierung über das Angebot nötig.

Von den Befragten, die diese Unterstützungsmöglichkeit kannten (69 von 158), haben 57 Personen noch nie einen entsprechenden Antrag eingereicht. Die Hauptgründe für eine bisherige Nichtbeantragung der GDM-Reisebeihilfe waren, dass ihr Stellenanteil größer als 67 % war (49,3 %) oder ihre Reise von anderen Finanzierungsmöglichkeiten bereits übernommen wurde (43,9 %). Positiv hervorzuheben ist, dass fast alle Anträge auf Reisebeihilfen durch die GDM der Umfrageteilnehmer/-innen genehmigt wurden. Allerdings wurde in den zusätzlichen Kommentaren (in Form von Freitextfeldern) erwähnt, dass für Personen in Elternzeit in der Regel keine Reisekosten von den Universitäten übernommen werden und auch der Antrag auf Reisebeihilfen von der GDM abgelehnt wurde.

Auch von den Personen, die die GDM-Reisebeihilfe nicht kannten (89 von 158 Personen), wurde als stärkstes Ausschusskriterium der Stellenanteil von größer als 67 % (von 75 % der Befragten) genannt, gefolgt von der Übernahme der Reisekosten von anderen Stellen (von 42 % der Befragten).

Es zeigte sich in der Umfrage außerdem, dass 64 von 127 Personen eine Höhe der Reisebeihilfen von 200 € als zu gering ansehen. Abbildung 4 zeigt, dass die Doktorand/-innen und Post-Doktorand/-innen abgesehen von einigen Ausreißern eine Unterstützung in Höhe von ca. 400 € bis 500 € als angemessen einstufen würden.

Fazit

Die Fortbildungsangebote für den wissenschaftlichen Nachwuchs treffen bereits verschiedene Bedürfnisse für deren Weiterqualifikation. Gleichzeitig müssen sie aber weiter ausgebaut und v. a. regelmäßig angeboten werden.

Bezüglich der Reisekosten zeigt die Umfrage, dass Teile des wissenschaftlichen Nachwuchses zu wenig über die GDM-Reisebeihilfe informiert sind. Auch stufen die Befragten eine Höhe der Reisebeihilfe von max. 200 € als zu gering ein, wohingegen eine Höhe von 400 € bis 500 € als angemessen angesehen wird. Darüber hinaus erfüllt nur ein Bruchteil der Umfrageteilnehmer/-innen und wohlmöglich auch des wissenschaftlichen Nachwuchses die Voraussetzungen, um die Reisebeihilfe überhaupt beantragen zu dürfen.

Möglicherweise könnte hier der Personenkreis erweitert werden, indem z. B. der Prozentsatz von 67 % auf 75 % angehoben wird. In diesem Zuge wäre auch denkbar, Reisebeihilfen beispielsweise für Nachwuchswissenschaftler/-innen mit Kleinkindern anzubieten, damit auch Personen in Elternzeit gefördert werden können.

Basierend auf den Ergebnissen der Umfrage sehen wir einige erste Anregungen für mögliche Änderungen im Bereich der Qualifizierungsmaßnahmen und Reisebeihilfe für Tagungen. Einige dieser Punkte werden wir als GDM-Nachwuchsvertretung versuchen umzusetzen. So werden wir beispielsweise prüfen, welche Angebote für den wissenschaftlichen Nachwuchs noch umsetzbar sind und in welcher konkreten Form. Auch die Informationsweitergabe über mögliche Fortbildungsangebote oder Reisebeihilfen werden wir verstärkt kommunizieren. Bei anderen Punkten, z. B. der konkreten Realisierung der GDM-Reisebeihilfe, hoffen wir auf eine rege Diskussion.

An dieser Stelle danken wir allen Umfrageteilnehmer/-innen und freuen uns über weitere Anregungen aus der gesamten Community.

Ralf Nieszporek, Universität Paderborn
E-Mail: ralf.nieszporek@math.upb.de

Silke Neuhaus, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
E-Mail: silke.neuhaus@ovgu.de

Maximilian Pohl, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: maximilian.pohl@uni-due.de

Pauline Linke, Freie Universität Berlin
E-Mail: pauline.linke@math.fu-berlin.de

Julia Joklitschke, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: julia.joklitschke@uni-due.de

Raja Herold-Blasius, Technische Universität Dortmund
E-Mail: raja.herold-blasius@math.tu-dortmund.de

Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

Ludwigsburg, 30.–31. 10. 2020

Renate Motzer

Der Arbeitskreis Frauen und Mathematik plant seine Herbsttagung vom 30.–31. Oktober 2020 in Ludwigsburg. Näheres wird auf der Homepage des Arbeitskreises bekannt gegeben: www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/frauenbeauftragte/arbeitskreis-frauen-und-mathematik/

Renate Motzer, Universität Augsburg
E-Mail: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis: Grundschule

Herbsttagung 2020 verschoben

Elke Binner im Namen des Specher/-innenrats

Angesichts der unklaren Situation dieses Jahr hat der Sprecher/-innenrat nach längerer Überlegung entschieden, die diesjährige Tagung des Arbeitskreises Grundschule (6.–8. 11. 2020) zu verschieben. Dies nicht zuletzt deshalb, da weder eine womöglich nur unter spezifischen Hygiene- und Kontaktauflagen zu realisierende Präsenztagung noch eine eher anonyme digitale Tagung zur lebendigen Austausch- und Begegnungskultur unseres Arbeitskreises passen.

Die für dieses Jahr geplante Herbsttagung wird im kommenden Jahr vom 5.–7. 11. 2021 stattfinden. Die Tagungsstätte ist wieder das relexa hotel Bad Salzdetfurth, An der Peesel 1, 31162 Bad Salzdetfurth, Telefon: +49 (0)5063 290 (www.relexa-hotel-bad-salzdetfurth.de).

Das Thema der Herbsttagung 2021 lautet „Blick auf Schulcurricula – empirische Fundierung?“.

Weitere Informationen dann auch unter didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/.

Elke Binner, Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM),
Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: elke.binner@hu-berlin.de

Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore Mathematik

Herbstagung 2020 fällt aus

Jürgen Roth

Die Herbsttagung des AK Lehr-Lern-Labore Mathematik (ak-lll.mathe-labor.de) fällt in diesem Jahr Corona-bedingt aus.

Die nächste und 6. Herbsttagung des AK Lehr-Lern-Labore Mathematik wird von Donnerstag, den 23. 9. 2021 bis Freitag, den 24. 9. 2021 unter dem Rahmenthema „Inklusion und Lehr-Lern-Labore“ in Paderborn stattfinden. Nähere Informationen dazu sind unter der Adresse ak-lll.mathe-labor.de/herbsttagung_2021/ abrufbar.

Jürgen Roth, Universität Koblenz-Landau
E-Mail: roth@uni-landau.de

Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Schloss Rauischholzhausen, 9.–10. 10. 2020

Anke Lindmeier und Daniel Sommerhoff

Die Herbsttagung des Arbeitskreis Psychologie und Mathematikdidaktik wird am 9. und 10. Oktober 2020 stattfinden. Informationen zum Arbeitskreis, aktuelle Hinweise zur Tagung sowie die Möglichkeit zur Anmeldung finden Sie unter akpsy.didaktik-der-mathematik.de.

Anke Lindmeier, Friedrich-Schiller-Universität Jena
E-Mail: anke.lindmeier@uni-jena.de

Daniel Sommerhoff, LMU München
E-Mail: sommerhoff@math.lmu.de

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Online-Tagung, 30. 10. 2020

Tanja Hamann und Markus A. Helmerich

Der Arbeitskreis Mathematik und Bildung wird seine Herbsttagung am 30. 10. 2020 im Online-Format durchführen. Ein inhaltlicher Schwerpunkt wird – wie bereits in den letzten beiden Jahren – auf den Auswirkungen der Digitalisierung auf die mathematische Bildung liegen.

- Was bedeutet eigentlich „digitale Bildung", und inwiefern kann der Mathematikunterricht hierzu einen Beitrag leisten?
- Welchen Einfluss hat die Nutzung digitaler Technologien auf mathematische Bildung?
- Welche Chancen bietet Digitalisierung für den Mathematikunterricht und seine Weiterentwicklung, und wo liegen Grenzen?
- Wo liegen die entscheidenden Unterschiede zwischen analogen und digitalen Darstellungen (etwa im Hinblick auf das Begriffsverständnis oder das Wesen mathematischer Objekte)?

Daneben ist die Tagung offen für die Betrachtung weiterer Facetten des Bildungsaspekts, gerne auch mit Bezug zur aktuellen Situation.

Interessierte sind herzlich eingeladen teilzunehmen; auch Beiträge werden gern entgegengenommen.

Tanja Hamann, Universität Hildesheim
E-Mail: hamann@imai.uni-hildesheim.de

Markus A. Helmerich, Universität Siegen
E-Mail: helmerich@mathematik.uni-siegen.de

Landesverband GDM Schweiz

Wintertagung 2020

Esther Brunner

Der Landesverband GDM Schweiz konnte – noch vor den zahlreichen Corona-bedingten Absagen vieler Tagungen – seine ordentliche Wintertagung zum Thema „Mathematisieren, Modellieren, Darstellen und Kommunizieren" am 17. Januar 2020 in Zürich in gewohnter Weise durchführen.

Zwei Hauptvorträge

Die beiden Hauptvorträge beleuchteten die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen. Katja Maass von der PH Freiburg i. Br. sprach zum Mathematisieren und Modellieren und beleuchtete insbesondere die Notwendigkeit authentischer Modellierungen im Mathematikunterricht. Mit ihrem Vortrag zum Thema „Die Lernenden sind mit authentischen Anwendungsaufgaben überfordert!" stellte sie insbesondere Unterrichts- und Fortbildungsansätze beim Modellieren und deren Wirkung auf Lehrende und Lernende ins Zentrum der Ausführungen. Das vorgestellte Fortbildungskonzept hat zum Ziel, Lehrende zu befähigen, Modellierungen in den Unterricht zu integrieren. Teil des Fortbildungskonzeptes ist es auch, Vorstellungen und Befürchtungen von Lehrenden aufzugreifen und gemeinsam zu reflektieren.

Im zweiten Vortrag referierte Barbara Ott von der PH St. Gallen zum Thema „Kinder entwickeln Darstellungen und sprechen darüber". Im Fokus dieses Vortrags stand das Darstellen und das Sprechen über Darstellungen. Dies wurde anhand von Beispielen und anhand der Reflexion diagrammatischer Aktivitäten aufgezeigt.

Acht Ateliers

Die beiden interessanten, thematisch gut aufeinander aufbauenden Vorträge wurden ergänzt durch zahlreiche Ateliers, geleitet von Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern der GDM Schweiz. Diese Ateliers der Kolleginnen und Kollegen ermöglichen jeweils einen vielfältigen Einblick in aktuelle Arbeiten in der Schweiz. Einzelne Ateliers griffen das Tagungsthema „Mathematisieren, Modellieren, Darstellen und Kommunizieren" auf, andere wählten weitere thematische Schwerpunkte.

Hans Walser stellte unter dem Titel „Kinematische Geometrie" vor, wie geometrische Fragen und Überlegungen mit kinematischen Modellen illustriert werden können, wobei er unter „Modellen" nicht in erster Linie mentale Modelle verstand, sondern dreidimensionale Gebilde oder zweidimensionale Figuren.

André Marty, Edmund Steiner und Dario Zenhäusern stellten unter dem Titel „Förderung räumlicher Fähigkeiten: Was kann Augmented Reality (AR) dazu beitragen" vor, wie die reale Umgebung durch virtuelle Elemente in Form von Texten, Grafiken, Animationen, Videos, statischen oder bewegten 3D-Objekten digital angereichert werden kann.

Mit dem Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht befasste sich auch Micaela Turina in ihrem Atelier. Gegenstand ihrer Ausführungen war insbesondere ein Einblick in Sprachprozesse bezüglich des räumlichen Denkens durch Einsatz digitaler Medien. Dies wurde am Beispiel „Baudiktate zum Somawürfel" aus einer 6. Klasse aufgezeigt.

Auch Henrike Allmendiger befasste sich mit 3D und zwar mit der mathematischen Welt der Körper. Anhand von unterschiedlichen Exponaten konnten die Teilnehmenden deren Potenzial testen und in einen Erfahrungsaustausch miteinander treten.

Modellieren war auch Thema des Ateliers von Beat Jaggi, allerdings in Verbindung mit dem Prognostizieren und unter Verwendung von Excel. Themen wie „Bauernsterben", „tägliches Tablettenschlucken", „Pestizide in der Umwelt" und andere wurden aufgegriffen, und es wurde gezeigt, wie anhand mathematischer Modellierung Prognosen erarbeitet werden können.

Marco Hübner widmete sich in seinem Atelier Fermifragen und stellte diese anhand konkreter Beispiele und Bearbeitungen von Schülerinnen und Schülern grundsätzlich zur Diskussion.

Katrin Kocher und Lis Reusser gaben in ihrem Atelier einen Einblick in die Neuausgabe der Schweizer Zahlenbücher 1–4 und zeigten insbesondere im Vergleich mit bisherigen Versionen auf, welche Elemente weiterentwickelt wurden und mit welchen Zielsetzungen.

Kurt Hess stellte in seinem Atelier mathematisch-fachliche Orientierungspunkte per Ende Kindergarten und entwicklungsorientierte Zugänge zum Lehrplan 21 zur Diskussion.

Rück- und Ausblick

Die Tagung mit den beiden Hauptvorträgen und den acht unterschiedlichen thematischen Ateliers wurde von gut 50 Personen besucht. Die nächste Wintertagung wird – hoffentlich – am Freitag, 15. Januar 2021 in Kreuzlingen an der PHTG stattfinden. Es handelt sich um eine Thementagung, die mit zwei Hauptvorträgen ein aktuelles Thema aufgreift und dieses anschliessend in moderierten Diskussionsgruppen vertieft. Thematischer Fokus der Wintertagung 2021 ist die „Interaktion im Mathematikunterricht". Dies wird im Referat von Christine Pauli, Universität Fribourg und von Uta Häsel-Weide, Universität Paderborn aus unterschiedlichen Perspektiven heraus beleuchtet werden. Wir freuen uns auf eine interessante Tagung, die gleichzeitig unserem 20-jährigen Jubiläum gewidmet sein wird: 2001 wurde der AK Schweiz-Liechtenstein gegründet, aus dem dann 2014 der Landesverband GDM Schweiz wurde.

Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau
Email: esther.brunner@phtg.ch

Arbeitskreis: Problemlösen

Herbsttagung in Köln, 17.–18. 10. 2019

Lukas Baumanns und Benjamin Rott

Die Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen wurde vom 17. bis 18. Oktober 2019 an der Universität zu Köln ausgetragen. Unter dem kölschen Motto „Wat jitt dat, wenn et fädich es?" haben 35 Teilnehmende aus 17 verschiedenen Standorten in Deutschland, Ungarn und Finnland zusammengefunden. In 18 Vorträgen haben sie ein reichhaltiges Programm zum Austausch, zur Diskussion und Vernetzung im Hinblick auf das Leitthema des Arbeitskreises zusammengetragen. Die Beiträge haben das mathematische Problemlösen in unterschiedlichen Alters- und Leistungsstufen beleuchtet. Theoretische Überlegungen haben konzeptuelle Diskussionen zum Problemlösen angeregt. So wurden beispielsweise Schülerfehler im mathematischen Problemlöseunterricht beleuchtet. Ein anderer Beitrag betrachtete detailliert die heuristische Vorgehensweise des Rückwärtsarbeitens aus theoretischer Perspektive. Auch über den Tellerrand des Problemlösens hinaus wurden Aspekte mathematischer Intuition und des Aufwerfens mathematischer Probleme vorgestellt. Als Abschluss unserer Herbsttagung haben wir uns darüber gefreut, den Psychologen Prof. Dietrich Dörner für unseren Hauptvortrag gewinnen zu können. Dieser hat das Problemlösen aus politischer Perspektive analysiert und diskutiert.

Im Anschluss an die Haupttagung am Samstag, den 19. Oktober, haben sich einige Teilnehmende zu einer Satelliten-Tagung zusammengefunden. Das Ziel war es, Problemlösen aus sehr unterschiedlichen Perspektiven zu analysieren. Vorab wurde hierzu allen Teilnehmenden das Video eines Problemlöseprozesses sowie ein zugehöriges Transkript zur Verfügung gestellt. Die Forschungsgruppen wurden eingeladen, diesen Prozess mit einer von ihnen gewählten Forschungsmethodik auszuwerten. Im Rahmen der Satelliten-Tagung wurden die unterschiedlichen Analysen, die verschiedenen Perspektiven und die Erkenntnisse, die sich aus den jeweiligen methodischen Vorgehensweisen ergeben, präsentiert und diskutiert.

Die Artikel zu den Vorträgen, die auf der Tagung gehalten wurden – inklusive der Diskussionsergebnisse der Satelliten-Tagung – werden wie gewohnt im Herbst in einem Tagungsband in der Problemlöse-Reihe des WTM-Verlags erscheinen.

Für die zukünftigen Herbsttagungen waren bzw. sind die Standorte Ludwigsburg und (in Kooperation mit dem GDM-Arbeitskreis Ungarn) Budapest geplant. Die Corona-Krise sorgt aber für Verschiebungen. In diesem Jahr wird aufgrund des SARS-CoV-2 die Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen online abgehalten. Nähere Informationen finden sich dazu u. a. auf der Madipedia-Seite des Arbeitskreises.

Lukas Baumanns, Universität zu Köln
E-Mail: lukas.baumanns@uni-koeln.de

Benjamin Rott, Universität zu Köln
Email: benjamin.rott@uni-koeln.de

Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

Aufgrund der Corona-Pandemie konnte das übliche Frühjahrstreffen des Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" nicht stattfinden.

Gleichwohl ist der Arbeitskreis aktiv. Zu nennen sind vor allem zwei umfangreiche Aktivitäten. Die eine ist die Dokumentation der internationalen Tagung „Tamás Varga 100", die in Budapest vom 6. bis zum 8. November 2019 stattgefunden hat. (Der für die GDM-Jahrestagung 2020 geplante Vortrag darüber von Ödön Vancsó, Csaba Csapodi und Zsuzsanna Jánvári fiel wegen der Absage der Tagung leider aus.). Die andere ist die fortlaufende Arbeit an der Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" (Hrsg.: Éva

Vásárhelyi und Johann Sjuts) beim WTM-Verlag (Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster). In besonderer Weise leistet der Arbeitskreis zudem Unterstützung bei Promotionsvorhaben, bei Forschungskooperationen und bei gemeinsamen Publikationen. Er fördert die Zusammenarbeit von ungarischen Mathematikdidaktiker/-innen und Doktorand/-innen mit zahlreichen Personen mehrerer Universitätsstandorte in verschiedenen deutsch- und ungarischsprachigen Ländern und Regionen Europas.

Tagung „Tamás Varga 100"

Zu den herausragenden ungarischen Persönlichkeiten in Mathematik und Mathematikdidaktik zählt Tamás Varga (1919-1987). Anlässlich seines 100. Geburtstages fand zur Erinnerung an ihn und seine Konzeption „Komplexer Mathematikunterricht" eine internationale Tagung (Connecting Tamás Varga's Legacy and Current Research in Mathematics Education) an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest statt.

Das Projekt Current Complex Mathematics Education (MTA-ELTE) hat die Tagung mit finanziellen Mitteln gefördert. Eine weitere Unterstützung erfolgte durch die Ungarische Akademie der Wissenschaften. Ein besonderer Dank gilt Csaba Csapodi für seine hervorragende Arbeit als Leiter des lokalen Organisationskomitees.

Die Tagung diente vor allem dem Ziel, Vargas Arbeit in einen internationalen Kontext zu stellen und die Relevanz für den heutigen Mathematikunterricht aufzuzeigen. Zugleich bot sie ein Forum für aktuelle internationale Forschung zum Mathematikunterricht in verschiedener Hinsicht und für die Pflege von Kooperationen und Verbindungen zwischen ungarischer Forschung in Mathematikdidaktik und internationaler Forschung auf diesem Gebiet.

Um Vargas Werk und seine Auswirkung auf aktuelle Forschungsentwicklungen in der Mathematikdidaktik zu verdeutlichen, beschäftigten sich viele Beiträge mit dem Lehren und Lernen mathematischer Themengebiete, die im Fokus von Vargas Interesse standen, nämlich Logik und algorithmisches Denken, diskrete Mathematik, Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Hinzu kamen Querschnittsthemen: problemorientiertes Lernen und die Entwicklung von Lernverläufen, manipulative und semiotische Werkzeuge bei der Entwicklung mathematischer Konzepte, Mathematikunterricht von früher Kindheit an, Mathematik als spielerische und kreative Tätigkeit, Differenzierung und Diversität im Mathematikunterricht, Einfallsreichtum und Gestaltungsvermögen von Lehrkräften.

Zum 100. Geburtstag von Varga wurden Videointerviews mit ungarischen und ausländischen Kolleginnen und Kollegen sowie mit Familienmitgliedern von Tamás Varga geführt. Auf der Tagung wurde ein aus diesen Interviews zusammengestellter 45-minütiger Film gezeigt, und zwar während der feierlichen Eröffnungsveranstaltung im Festsaal der Akademie unmittelbar nach dem Hauptvortrag von Katalin Gosztonyi über Tamás Varga und sein Werk. Der eindrucksvolle Film fand beim Publikum begeisterten Anklang. Eine würdigende Anerkennung gilt hier Gergely Szmerka für seine Tätigkeit als Reporter und Drehbuchverfasser und Ödön Vancsó für die wissenschaftliche Leitung.

Während der gesamten Konferenz konnte im Forschungszentrum für Humanwissenschaften, dem Veranstaltungsort für das weitere Programm, eine Ausstellung über Vargas Leben und Werk besucht werden.

Einige Zahlen zur Tagung „Tamás Varga 100": Teilgenommen haben 131 Personen aus 16 europäischen Ländern sowie Australien und den USA. Es gab vier Hauptvorträge, eine Podiumsdiskussion, 60 Einzelvorträge, 7 Workshops und 11 Poster.

Zu den Vortragenden gehörte auch Eszter Varga (Enkelin von Tamás Varga) (E-Mail: vargaesztermail@gmail.com). Sie ist Mathematiklehrerin und Doktorandin an der Doktorandenschule für Mathematikdidaktik der Eötvös Loránd Universität Budapest. Weitere Informationen zur Tagung: varga100.sciencesconf.org

Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn"

Nach dem Band 1 „Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren", herausgegeben von Éva Vásárhelyi und Johann Sjuts, geht es nun um die nächsten drei Bände. Alle Bände sind dem Ziel verpflichtet, die in Ungarn traditionell hohe kulturelle und wissenschaftliche Bedeutung der Mathematik, die damit verbundene beispielgebende Rolle des Landes und den inspirativen Austausch über Grenzen hinweg zum Ausdruck zu bringen.

Band 2: „Komplexer Mathematikunterricht. Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht"
Ausgewählte Beiträge der Hauptveranstaltung „Tamás Varga 100" und der im Zusammenhang mit ihr organisierten Tagungen (zu erwähnen ist etwa die 6. Herbsttagung des Arbeitskreises in Budapest vom 20./21. September 2019) sowie weitere Aufsätze bilden den Inhalt von Band 2 (Hrsg.: Gabriella Ambrus, Johann Sjuts, Ödön Vancsó, Éva Vásárhelyi), der weitgehend fertiggestellt ist. Er erinnert in persönlichen und thematischen Beiträgen an Tamás Varga mit der Würdigung seiner Verdienste und der

auf ihn zurückgehenden Ideen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts. Das Buch zeigt: Die in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelten und erprobten Konzepte hatten einen grundlegenden Einfluss auf den ungarischen Mathematikunterricht und weit darüber hinaus. Sie sind in vielfacher Hinsicht noch heute aktuell.

Band 3: „Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken"

Als Logo der Buchreihe dient der Gömböc. Mit dem Gömböc fanden die ungarischen Mathematiker Gábor Domokos und Péter Várkonyi im Jahr 2006 eine Lösung für einen dreidimensionalen Körper mit der Eigenschaft, nur eine stabile und nur eine labile Gleichgewichtslage zu haben. Überhaupt kann Ungarn über Jahrhunderte hinweg auf zentrale wissenschaftliche Erkenntnisse in der Geometrie verweisen. Erwähnenswert ist auch die ungarische Unterrichtstradition mit einem hohen Stellenwert von Geometrie.

Der Band 3 widmet sich neuen Ansätzen zur Geometrie in der Schulmathematik. Theoretische und empirische Analysen gehen der Frage nach, inwieweit diese Ansätze zum geometrischen Denken beitragen.

Band 4: „Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche"

Am 1. Januar 1894 startete in Ungarn die erste Schülerzeitschrift in Mathematik. Sie ist unter dem Kürzel KöMaL (Középiskolai Matematikai Lapok, dt.: Mathematische Blätter für Mittelschulen) bekannt und wurde von Dániel Arany, einem Mathematiklehrer für Mittelschulen, gegründet. Sie erscheint seitdem, abgesehen von einigen Jahren um 1945, und wurde 1959 um einen Teil für Physik erweitert. Sie dient einer in der Breite angelegten Talentförderung. Über Generationen hinweg haben viele junge Menschen durch KöMaL ihre Problemlösefähigkeiten in Mathematik intensiv geschult und fortwährend verbessert (darunter János Neumann, Pál Erdős, László Lovász und zahlreiche weitere namhafte Persönlichkeiten).

Die Herausgabe einer Schülerzeitschrift in Mathematik in Verbindung mit einem Mathematikwettbewerb kann als Pionierleistung für eine früh beginnende, gezielte und niveauvolle Förderung von Kindern und Jugendlichen in Mathematik gelten.

Der Band 4 nimmt Bezug auf diese ungarische Pionierleistung und beschäftigt sich in vertiefter Weise mit mathematischen Schülerzeitschriften verschiedener Länder, mit nationalen und internationalen Mathematikwettbewerben sowie weiteren Maßnahmen zur Talentförderung.

Beiträge für die vorgesehenen Bände 3 und 4 sind sehr willkommen. Für weitere Informationen stehen Éva Vásárhelyi (E-Mail: vasareva@gmail.com) und Johann Sjuts (E-Mail: sjuts-leer@t-online.de) zur Verfügung.

Sonstiges

An der voraussichtlich stattfindenden Online-Tagung des GDM-Arbeitskreises „Problemlösen" im Herbst 2020 wird sich der GDM-Arbeitskreis „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" beteiligen.

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität Budapest
E-Mail: ambrusg@cs.elte.hu

Johann Sjuts, Universität Osnabrück
E-Mail: sjuts-leer@t-online.de

mathe.delta 11/12. Mathematik für das Gymnasium, Basisfach, Baden-Württemberg, herausgegeben von Axel Goy

Rezensiert von Wolfgang Kühnel und Franz Lemmermeyer

Dieses Buch verdankt seine Entstehung der Wiedereinführung von Leistungs- und Basiskursen in Baden-Württemberg mit einem inhaltlich reduzierten 3-stündigen Basiskurs, bei dem ein Viertel des Stoffes für die bisherigen 4-stündigen Kurse gestrichen werden sollte. Unsere Rezension bezieht sich auf den seit Mai 2020 verfügbaren Teildruck mit den Kapiteln 1–3. Die weiteren Kapitel mit Integralrechnung, Analytischer Geometrie und Stochastik gab es zu dem Zeitpunkt ebensowenig wie den Vorgängerband für Klasse 10.

Die neue Struktur

Am Anfang heißt es:

> Alle Kapitel haben dieselbe Struktur und sind aus denselben Gliederungseinheiten aufgebaut. Die Konzeption hat die besonderen Anforderungen der mündlichen Abiturprüfung dabei von Anfang an im Blick.

Der zweite Satz davon kann durchaus ambivalent gesehen werden im Sinne von: „Was muss ich mindestens können, um nicht durchzufallen?“ Diese Struktur kann mit den folgenden Schritten beschrieben werden: „Startklar (Vorwissen) – Entdecken – Verstehen – Merke (meist eingerahmte mathematische Regeln ohne Begründung) – Aufgaben – Nachgefragt – Klausurvorbereitung – Abiturvorbereitung – Alles im Blick (Wiederholung: das haben wir jetzt gelernt) – Horizonte (Ausblick auf weiteres).“

Auf S. 114 etwa soll man erst die Kostenfunktion beim Straßenbau „entdecken“ und dann „verstehen“, dass nach dem „obersten Gebot“ der „Gewinn möglichst groß“ sein soll. Direkt nach Abschnitt 3.1. „Krümmung und Wendepunkte“ folgt unvermittelt Abschnitt 3.2 „Matrix-Schreibweise und Gauß-Algorithmus“, ein seltsamer Bruch. Der Gauß-Algorithmus zielt übrigens ausnahmsweise auf eine linke obere Dreiecksmatrix über der Nebendiagonalen.

Die neue Kürze

Überall spürt man das Bemühen der Autoren, es den Schülern möglichst leicht und angenehm zu machen, sie von theoretischer Mathematik fernzuhalten und gleichzeitig Anwendungsbeispiele zu behandeln. Dieses Bemühen ist als solches nicht negativ zu sehen, aber es mündet allzuoft in Kurzversionen grundlegender mathematischer Sachverhalte, die dann ohne tiefere Begründung geglaubt werden müssen. Jedem Kapitel ist eine Wiederholung von Themen aus Klasse 10 vorangestellt (das sog. „Vorwissen“). Zum Vorwissen bei der in Klassen 10 eingeführten Ableitung gehört (S. 14) etwa:

> Als Ableitung bezeichnet man den Grenzwert des Differentialquotienten (sic!); die Ableitung einer Funktion in einem Kurvenpunkt gibt also (!) die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Kurvenpunkt an,

und dann folgt die bekannte Formel zu der „h-Methode“. Nur auf S. 15 wird die „h-Methode“ in einer Übungsaufgabe für $f(x) = x^2$ vorgeführt – das letzte Bollwerk gegen die Reduzierung der Differentialrechnung auf bloßen Formelkram ohne Grenzwerte. Heute steht lapidar mit dem Befehl „Merke“ auf S. 19 die Potenzregel $f'(x) = nx^{n-1}$ (ausdrücklich für natürliche Exponenten n) ohne Begründung; und schon auf der nächsten Seite 20 wird die Potenzregel dann auf negative und später auf gebrochene Exponenten angewendet ohne jede Erläuterung.

Schaubilder statt Begründungen

Selbst elementare Regeln werden gerne nur durch Schaubilder erläutert, und es heißt „man erkennt leicht, dass [...]“. So leicht ist es gar nicht, diesen Schaubildern etwas Konkretes anzusehen. Der Eindruck ist nicht ganz von der Hand zu weisen, dass man versucht, sich um alles herumzumogeln, was irgendwie unbequem sein könnte. Ist das nicht genau diejenige „alte“ Schulmathematik, die man aus Sicht der Kompetenzorientierung immer kritisiert hat? Hieß es doch immer: „Man soll verstehen, was man macht, und eben nicht stur Formeln auswendig lernen!“ Und Herleitungen von Formeln und Beweise sind das „Herz der Mathematik“.

Dass man auch mal Übungsaufgaben auf Englisch einstreut, ist eigentlich nur zu begrüßen, aber dann sollte die mathematische Fachsprache berücksichtigt werden; derivate (S. 27) statt derivative und monotony (S. 33) statt monotonicity sind nur zwei Beispiele.

Die Kettenregel wird ab S. 30 behandelt; allerdings leidet die Darstellung etwas darunter, dass immer nur die Variable x verwendet wird, für die innere wie für die äußere Funktion (mit einer Ausnahme: Aufgabe 7 auf S. 32). In älteren Schulbüchern wurde die Kettenregel durch Umformen von Differenzenquotienten begründet, inzwischen reicht die lapidare Feststellung: „Zwar genügen drei Positivbeispiele (sic!) nicht, um einen Satz zu beweisen, aber immerhin, um ihn plausibel zu machen. Wir können also festhalten [. . .]“, und es folgt die „Ableitungsregel für verkettete Funktionen“ mit der Anweisung „Merke“. Zu gerne wüsste man, wie die Autoren die drei Positivbeispiele 3, 5 und 7 der Aussage, jede ungerade Zahl sei prim, bewerten würden.

Grafiken, die nicht zum Text passen

Sehr beliebt sind inzwischen Aufgaben vom Typ: Welcher der folgenden Graphen gehört zur Funktion f bzw. zu ihrer Ableitung f'? Im vorliegenden Buch richtet man auch da eine Verwirrung an. So sind die Zuordnungsaufgaben auf S. 27 (Aufg. 14), S. 34 (Aufg. 16) und S. 42 (Aufg. 1) nicht lösbar, weil bei allen drei Aufgaben kein einziger der angebotenen Graphen der richtige ist. Man stelle sich vor, solche Aufgabe wird unbesehen als Hausaufgabe gestellt.

Wachtsumsfunktionen ohne Zinseszinsrechnung

Die e-Funktion wird unter allen Exponentialfunktionen als diejenige definiert, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die „annähernd stetige Verzinsung“ mit dem Faktor $(1 + \frac{1}{n})^n$ dagegen (eigentlich eine anschauliche und folgerichtige Anmerkung zur Zinsrechnung) wird nicht erwähnt, auch der Grenzwert für $n \to \infty$ kommt nicht vor. Die Zahl e entnimmt man nur noch einem Probieren mit dem Taschenrechner (S. 59). Der natürliche Logarithmus wird eingeführt, aber nicht als Funktion abgeleitet. Dafür gibt es logarithmische Skalen, die aber nicht präzise erklärt werden. Stattdessen soll das in Übungsaufgabe 21 auf S. 73 irgendwie selbst herausgefunden werden.

Der angebliche Anwendungsbezug

Von den „realitätsnahen“ Aufgaben des Buchs sind nur zwei realitätsnah: die Modellierung der Ebola-Epidemie 2014 in Sierra Leone und die Datierung von „Ötzi“ mit C-14. Dabei wird im ersten Beispiel eine Exponentialfunktion gesucht, welche die bekannten Zahlen der Infizierten interpoliert, um dann a posteriori die Gesamtzahl der Infizierten nach einem Jahr „vorherzusagen“. Die Autoren kommen durch eine Verwechslung von 14 Tagen mit 3 Wochen auf ungefähr $260 \cdot e^{0{,}34 \cdot 17}$ $\approx 79\,275$ Infizierte, während normale Taschenrechner bei diesen Zahlen 84 177 Infizierte angeben; eine korrekte Anwendung der angegebenen Formel $f(t) = 260 \cdot 1{,}4^t$ mit 14 Tagen als 2 Wochen ergibt $260 \cdot 1{,}4^{26} = 1\,637\,956$ Infizierte nach einem Jahr. Nach den Zahlen der WHO waren es aber insgesamt keine 15 000 (tinyurl.com/y9efyy7c).

Der Anwendungsbezug bei anderen Aufgaben ist stellenweise absurd (modelliert $f(x) = -2^x$ die Größe von Hundewelpen in cm?), bei anderen Beispielen sind die Aufgabentexte endlos lang (z. B. auf S. 120), ohne dass sie als solche irgendeinen Erkenntnisgewinn versprechen – ein solcher ist ja nicht das Ziel des Buches: alles dient der Vorbereitung auf die Abiturprüfung.

Fazit

Zusammenfassend stellt sich die Frage, ob dieses Buch empfohlen werden kann oder nicht. Weil es nur konsequent den Zielen der Landesregierung, die Mathematik für den Basiskurs zu vereinfachen und von Theorie zu „entrümpeln“, entgegenkommt, kann man Autoren nicht dafür schelten, wenn sie eben dies umsetzen. Man kann aber wohl erwarten, dass dies auf fachlich korrekte Weise geschieht, und das ist hier – im Gegensatz zu den bereits erschienenen Bänden bis Klasse 9 – definitiv nicht der Fall; dafür sind die Fehler (keine Tippfehler!) zu seltsam und viel zu zahlreich.

Axel Goy (Hrsg.), *mathe.delta 11/12. Mathematik für das Gymnasium, Basisfach, Baden-Württemberg*, Verlag C. C. Buchner. Teildruck 2. Auflage, 1. Druck 2020, ISBN 978-3-661-63021-2

Wolfgang Kühnel, Universität Stuttgart
E-Mail: kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de

Franz Lemmermeyer, Gymnasium St. Gertrudis, Ellwangen
E-Mail: hb3@ix.urz.uni-heidelberg.de

Nachruf auf Roland Fischer

Willibald Dörfler

Roland Fischer ist am 7. November 2019 verstorben, nach mehreren Jahren einer ernstlichen Erkrankung, die ihn physisch, aber in keiner Weise psychisch und mental eingeschränkt hat. Oder besser gesagt: er hat sich davon nicht einschränken lassen. Das verdankte er einer Energie und Konsequenz, die sein ganzes berufliches und auch privates Leben bestimmt und mitgestaltet haben. Ich durfte Roland als Freund und Kollege begleiten, wir haben zumindest in den Jahren, in denen Klagenfurt sein Dienstort war, viele gemeinsame Aktivitäten durchgeführt. Auch danach konnte ich, etwa in meiner Funktion als Rektor unserer Universität, Roland bei der Realisierung seiner Ideen unterstützen. Dieser enge Kontakt macht es einerseits einfacher einen Nachruf zu schreiben, aber ich musste doch bestrebt sein, die emotionale Seite im Hintergrund zu halten. Dabei ist ein gewisser zeitlicher Abstand zu seinem Ableben ein Vorteil. Dennoch gebe ich zu bedenken, dass ich mein Bild des Menschen Roland Fischer, meine Erfahrungen mit ihm beschreibe. Das ist mir wichtiger als eine Besprechung einzelner seiner vielen Publikationen, die ja leicht nachzulesen sind.

Roland Fischer wurde am 15. 9. 1945 in der Nähe von Brünn geboren. Seine Familie durchlebte wie viele andere schwierigste Zeiten und kam schließlich nach Wien, wo Roland die Volksschule besuchte. Nach dieser und einem Wechsel nach Zwettl absolvierte er dort das Gymnasium. An der Universität Wien folgte das Studium von Mathematik und Physik, zuerst für das Lehramt und nach einer kurzen Phase als Lehrer das Doktoratsstudium in Mathematik, das er mit der Promotion 1971 abschloss. Die akademische Laufbahn begann als Assistent an der Universität Salzburg bei Professor Schweiger und führte sehr rasch zur Habilitation für das Fach Mathematik (Jänner 1974). Die Arbeitsgebiete waren Ergodentheorie und Graphentheorie, und ich verweise dafür auf das Schriftenverzeichnis. Die entscheidende Weichenstellung im Leben von Roland Fischer war dann seine Berufung im Herbst 1974 an die damalige Hochschule für Bildungswissenschaften in Klagenfurt als Hochschulprofessor (später Universitätsprofessor) für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik. Dieser Zusatz war für Roland und seine weitere wissenschaftliche Arbeit nicht nur ein schmückendes Beiwort sondern Auftrag und Aufgabe. Und dafür bot die junge Universität, die eben das Jubiläum des ersten halben Jahrhunderts ihres Bestehens feiert, die besten Voraussetzungen für den dabei erforderlichen Freiraum im Denken und Handeln. Nachdem Roland Fischer die ersten akademischen Jahre der Mathematik als Forschungsgebiet gewidmet hatte, verlagerte sich für ihn die Perspektive auf die Mathematik zunehmend von innen nach außen. Die didaktische, philosophische, soziale und bildungstheoretische Reflexion über Mathematik und später über Lernen und Wissen ganz allgemein, würde ich als das Zentrum der wissenschaftlichen und organisatorischen Arbeit bei Fischer ansehen. Auch in seinen allgemeinen Überlegungen und Theoriebildungen blieb die Mathematik oft der Testfall, der Gegenstand, an dem Konzepte exemplarisch eingesetzt und erkundet werden konnten. Mich erinnert das an das analoge Vorgehen bei Ludwig Wittgenstein, etwa bei dessen Reflexionen über die Bedeutung von Zeichen. Wenn also so manches, etwa seine bildungstheoretischen Konzepte, bei Fischer abstrakt und abgehoben wirken mag, bringt die Spezialisierung oder Fokussierung auf die Mathematik Einsicht in die Ziele und Konsequenzen der allgemeinen Vorschläge. Diese Rückbindung an die Mathematik ergibt andererseits auch wichtige alternative und innovative Sichtweisen auf sie selbst und insbesondere auf ihre Didaktik. Dass dabei auch kritische Standpunkte eingenommen werden, ist nicht überraschend, macht jedoch einen wichtigen Teil der praktischen Relevanz und Wirksamkeit des Denkens von Roland Fischer aus.

Und hier komme ich zu einem aus meiner Sicht zentralen Punkt des Lebenswerkes von Roland. Für ihn war es immer wichtig, nicht nur Veränderungen oder Reformen vorzuschlagen, sondern diese auch zu bewirken und in der sozialen Realität umzusetzen. Das hatte zur Konsequenz, dass er sich in vielfältiger Weise und in verschiedensten Formen und Funktionen engagierte und der Kooperation mit anderen große Bedeutung zumaß. Dieses praktische und organisatorische Handeln im sozialen Kontext erfolgte dabei stets vor dem Hintergrund und auf Basis theoretischer Überlegungen und Konzepten, die auch öffentlich gemacht wurden. In der Zusammenarbeit mit Roland wusste man also, worauf man sich einlässt, wofür oder auch wogegen er arbeitete, kämpfte und stritt. Bemerkenswerter Weise hat er auf einer Metaebene solche Entwicklungsprozesse thematisiert, analysiert und konzipiert, wie etwa in dem langjährigen Projekt „Vernetzung und Widerspruch". Dafür hat er immer „Mitdenker" gesucht und auch gefunden. Dass es nicht nur „Mitdenker" sondern auch „Gegendenker" gab, darf bei einem derartigen, auf zum Teil weitreichende Veränderungen angelegten Programm nicht verwundern.

Eine der ersten Aufgaben, denen sich Fischer in Klagenfurt widmete, war die Institutionalisierung der Mathematikdidaktik, wobei sich unsere Interessen und Aktivitäten in großem Umfang überschnitten. Dahinter stand die Einsicht, dass man Didaktik nicht dem zufälligen Wohlwollen von Fachwissenschaftlern oder engagierten Lehrern überlassen darf, wenn diese eine wissenschaftliche Disziplin werden soll. So war Fischer an der Gründung des Journals für Didaktik der Mathematik (JMD) beteiligt, der ersten deutschsprachigen Fachzeitschrift mit wissenschaftlichem Anspruch, etwa durch ein striktes Reviewing System. Es ging dabei auch um die Bildung einer scientific community über die bisherigen natürlich auch wichtigen Beiträge von Einzelpersonen hinaus. Dazu trugen auch die in Klagenfurt organisierten internationalen Tagungen bei sowie die daraus entstandenen Tagungsbände. Klagenfurt konnte so sehr bald seinen Ruf als österreichisches und internationales Zentrum für Mathematikdidaktik erwerben. Parallel dazu erfolgte der personelle Ausbau durch die Bestellung von Mitarbeiterinnen mit einschlägigen Interessen. Im Lauf der Jahre führte dies zu zahlreichen Promotionen und Habilitationen zum Thema Mathematikdidaktik: Das von Fischer gepflanzte Samenkorn trug also unter seiner sorgfältigen Pflege reichlich Früchte. Wenn heute im deutschsprachigen Raum Mathematikdidaktik eine wohl etablierte universitäre Disziplin darstellt, so beruht dies sicher auch auf den von Fischer gesetzten Maßnahmen und den dahinterstehenden Ideen. Zu den Indikatoren dafür gehören die zahlreichen Professuren und die rasant gestiegene Anzahl der Teilnehmer an den Tagungen. Die erfolgreiche Entwicklung der Mathematikdidaktik sehe ich als ein paradigmatisches Beispiel für die langfristige Wirksamkeit des theoretischen und strategischen Denkens von Roland Fischer. Mit seinen Schriften war er nicht primär an der Verlängerung seiner Publikationsliste interessiert, sondern wollte andere Menschen damit erreichen und motivieren, sich dafür einzusetzen, was er als wichtig im jeweiligen Bereich erachtete. Die wissenschaftliche Arbeit von Fischer war somit immer an einer Praxis orientiert, aus der sie wichtige Anregungen und Problemstellungen bezog und auf die sie wieder zurückwirken wollte. Roland verkörperte für mich auf diese Weise das Beispiel eines nicht egoistischen Wissenschaftlers, der aber natürlich für diese Wirkungsweise auch Ansehen und Bedeutung erwerben musste.

In dieses Bild passt sehr gut die Konzeption und Publikation eines Schulbuches für Mathematik in der Sekundarstufe II, gemeinsam mit Heinrich Bürger und Günther Malle. Darin finden sich viele innovative Ideen für den Unterricht, die allerdings (und leider) durch die Orientierung an Kompetenzmodellen und die damit verbundene Atomisierung des Gegenstandes teilweise heute an Relevanz verloren haben. Viele der didaktischen Grundideen für das Lernen und Lehren von Mathematik finden sich im Buch „Mensch und Mathematik", verfasst gemeinsam mit Günther Malle. Schon der Titel ist Programmatik: Mathematikdidaktik hat sich an der Mathematik aber mindestens im selben Umfang an den Lernenden zu orientieren. Das Buch konnte den Stellenwert eines Standardwerkes in der Mathematikdidaktik erobern. Jedoch würde ich es auch Fachmathematikern zu Lektüre empfehlen, weil darin eine „Außensicht" auf die Mathematik entwickelt wird, ein didaktisches Bild von Mathematik gemäß der Einsicht, dass Derartiges für das Lernen und Lehren unabdingbar ist. Didaktik muss Mathematik von „innen" und „außen" analysieren und reflektieren und trägt dadurch zum Verständnis mathematischer Tätigkeiten bei. Und genau dort setzt „Mensch und Mathematik" an.

Der zentrale Faktor bei jeder Veränderung von Unterricht sind die Lehrer. Roland Fischer hat dies klar gesehen und gemeinsam mit Kolleginnen und Kollegen (Peter Posch, Werner Peschek, Edith Schneider, u. a.) unter dem Titel „Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrer (PFL)" ein komplexes Programm zur Lehrerfortbildung (nicht nur in Mathematik) entwickelt und durchgeführt, das auch jetzt noch angeboten wird. Ohne Übertreibung kann PFL als das bisher erfolgreichste Fortbildungsprogramm seiner Art angesehen werden und kann als Modell für solche Programme genommen werden. Es beruht ganz entschieden auf der Eigentätigkeit der Teilnehmer/-innen, die nicht bloß belehrt werden, sondern, angeregt durch Input, eigenständig reflektieren und ihren Unterricht gestalten.

Grob gesprochen war der Schwerpunkt von Roland Fischers Arbeit in der ersten Hälfte seiner Zeit an der Universität Klagenfurt die Verbesserung der Bedingungen für das Lernen und Lehren von Mathematik und das Verständnis der hier auftretenden Prozesse und Probleme. Vor allem mit der Verlegung seines Dienstortes an den Standort Wien, der Fakultät für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung (deren erfolgreicher Dekan er viele Jahre war), verschob oder besser erweiterte Fischer seine Überlegungen und den Inhalt seiner Publikationen auf allgemeine Fragen von Schule, Bildung und Ausbildung, individuelles und soziales/gesellschaftliches Lernen bis hin zu Fragen gesellschaftlicher Entwicklung und bildungspolitischen Themen. In Funktionen, zum Beispiel als Mitglied des (ministeriellen) Qualitätssicherungsrates zur Lehrerbildung, hatte er auch die Möglichkeit, sich für die Implementierung der allgemeinen und abstrakten Konzepte einzusetzen. Mit seiner ausdrücklichen Zustimmung darf ich zur Würdigung dieser Arbeiten aus der Rede von Peter Posch anlässlich der Beisetzung von Roland Fischer zitieren:

> Roland hat viel Bleibendes geschaffen. Er war aber auch ein Visionär und ich möchte ihn selbst noch zu Wort kommen lassen. Die Bürger müssen in der Lage sein, über das, was Experten vorschlagen, zu urteilen und verantwortliche Entscheidungen zu treffen. Die Förderung von „Urteils- und Entscheidungsfähigkeit" war für Roland Fischer eine der wichtigsten Aufgaben des Bildungswesens. Dieses anspruchsvolle Postulat zieht sich in zahlreichen Variationen wie ein roter Faden durch viele seiner Veröffentlichungen und Diskussionsbeiträge.
> Eine weitere zukunftsweisende These Roland Fischers: Die künftige Kultur des Lehrens und Lernens wird statische Kulturelemente ebenso umfassen müssen wie dynamische und eine Neubestimmung des Verhältnisses zwischen beiden erfordern, eine Sicht des Lernens, die sich nicht auf eine Belehrung durch jene, die wissen, für jene, die nicht wissen beschränkt, sondern auch „ein gemeinsames Suchen, gemeinsames Probehandeln und gemeinsames Bewusstwerden für mögliche Zukünfte" einschließt.
> Ein wichtiges ethisches und demokratiepolitisch bedeutsames Anliegen war für Roland Fischer auch die Klärung der Frage, was eigentlich zur Grundbildung jedes Menschen gehört, damit eine gemeinsame Kommunikationsbasis entstehen kann, die den einzelnen Bürger dazu befähigt, über Problemlösungsangebote von Experten zu urteilen und den Zusammenhalt der Gesellschaft zu sichern. Dabei ging es ihm nicht um eine Aufzählung sogenannter unverzichtbarer Inhalte oder Kompetenzen, sondern um den Prozess, durch den die Inhalte der Grundbildung bestimmt werden sollen. Im Unterschied zur gängigen Praxis, bei der Gruppen von Fachwissenschaftlern die Lehrplaninhalte definieren und meist Partikularinteressen der Fachvertreter die Lehrpläne anschwellen lassen, plädierte er dafür, dass an diesem Prozess die ganze Bevölkerung beteiligt werden müsste. Was als verbindliche Grundbildung angesehen wird, müsste Ergebnis eines Aushandelns sein, bei der in unterschiedlichem Ausmaß Schüler, Lehrer, zufällig ausgewählte und nicht von den Parteien entsandte Vertreter der Bürgerschaft beteiligt werden sollten. Nur so könne sichergestellt werden, dass nicht Einzelinteressen dominieren, sondern eine Verantwortung für das Gesamte entsteht. Und: Diese verbindliche Grundbildung sollte nur die Hälfte der Unterrichtszeit in Anspruch nehmen, damit die andere Hälfte Spielraum für spezielle Interessen der Schülerinnen bieten kann. Roland war sich dessen bewusst, dass es sich bei diesen Überlegungen um eine Vision handelt, aber sie ist stark genug, um ihn zu überleben.
> Roland Fischer hat gewusst, dass viele dieser Ideen ohne eine professionell handelnde Lehrerschaft unerfüllbar sind. Die Lehrerschaft darf nicht nur passiv Anordnungen von oben umsetzen, sondern muss auch aktiv auf die gesellschaftliche Entwicklung des Bildungswesens Einfluss nehmen.
> Bis zuletzt hat sich Roland der Frage gewidmet: Wohin wollen wir, die Gesellschaft, uns entwickeln und was ist dafür zu lernen, damit Menschen in Freiheit, Würde und Wohlstand leben können? Die Förderung von „Urteils- und Entscheidungsfähigkeit" und der Fähigkeit, mit Experten zu kommunizieren war für ihn ein zentrales Ziel des Bildungswesens. Eine seiner letzten Initiativen war der anspruchsvolle Versuch, diese Idee in ein konkretes Projekt münden zu lassen, das Jugendliche gemeinsam mit Erwachsenen in einen Bildungsdiskurs einbezieht, der ihnen erleichtern soll, in eine Haltung der Verantwortung für die Gesellschaft hineinzuwachsen.

Noch zum Privaten, das bei Roland nicht so einfach fassbar ist, weil sein Leben eine homogene Identität hatte, in der sich Beruf und „Hobby" nicht trennen lassen: Seine Arbeit und sein wissenschaftliches Denken forderten den ganzen Menschen, wobei aber bei dieser Arbeit die Kommunikation, die Kooperation und Konfrontation mit anderen Menschen ganz wichtig waren. Roland Fischer war alles andere als ein isolierter oder esoterischer Forscher! Seine Tochter Ilse ist erfolgreiche Mathematikerin an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien.

In Nachrufen auf Mathematiker wird meist angeführt, welches ihre wichtigsten „Ergebnisse" waren, und man kann das dann durch die Anführung eines mathematischen Satzes belegen. Derartiges macht (mit Ausnahme seiner frühen mathematischen Jahre) bei Roland Fischer einfach keinen Sinn. Das „Ergebnis" seiner vielfältigen Arbeit ist, was er damit bewirkt hat, und was seine Ideen auch in Zukunft noch bewirken werden. Seine Ergebnisse sind die vielen Menschen, die mit ihm und von ihm gelernt haben, die seine Visionen ernst nehmen und weiter daran arbeiten werden. Das tröstet über den Verlust durch seinen Tod, weil man seine Ideen als Vermächtnis für die Zukunft des Lernens sehen kann und soll.

Schriftenverzeichnis (Auswahl)

Mathematik

The capacity and equivocation of a transducer and a connection with Billingsley dimension. J. Math. Anal. Appl. 75, 1980, no. 2, 549–561.
Sofic systems and graphs. Monatsh. Math. 80, 1975, no. 3, 179–186.
Über die optimale Beleuchtung einer geraden Strasse. Monatsh. Math. 79, 1975, 191–199.
mit Schweiger, Fritz The number of steps in a finite Jacobi algorithm. Manuscripta Math. 17 (1975), no. 3, 291–308
Ergodische Eigenschaften affiner Modulo-1-Transformationen. J. Reine Angew. Math. 271, 1974, 1–7.
Über die maximale Entropie bei f-Entwicklungen. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II 182, 1974, 1–20.
Mischungsgeschwindigkeit für Ziffernentwicklungen nach reellen Matrizen. Acta Arith. 23, 1973, 5–12.
Über Graphen mit isomorphen Gerüsten. Monatsh. Math. 77, 1973, 24–30.
Konvergenzgeschwindigkeit beim Jacobialgorithmus. Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1972, 156–158.
Ergodische Eigenschaften komplexer Ziffernentwicklungen. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II 180, 1972, 49–68
Ergodische Theorie von Ziffernentwicklungen in Wahrscheinlichkeitsräumen. Math. Z. 128, 1972, 217–230.

Didaktik und Bildungstheorie (Auswahl)

Beiträge in Sammelwerken

Interdisziplinarität als Bewegung. In: G. Dressel, W. Berger, K. Heimerl, V. Winiwarter (Hrsg.): Interdisziplinär und Transdisziplinär forschen. Praktiken und Methoden Bielefeld: transcript, 2014, S. 13–15.
Profession als “Reflective, Intervening Community”. In: Christof, E., Schwarz, J.F. (Hrsg.): Lernseits des Geschehens. Über das Verhältnis von Lernen, Lehren und Leiten. Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2013, S. 101–102.
Entscheidungs-Bildung und Mathematik. In: R. M., H. M., K. R., L. K., N. G. (Hrsg.): Mathematik im Prozess. Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2013, S. 335–345.
Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 9–17.
Bildung als Aushandelung von Bildung. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Linz: Trauner Verlag + Buchservice, 2012, S. 18–30.
Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 31–59.
Entscheidungsgesellschaft, Bildung und kollektives Bewusstsein. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 277–288.
Bildung von Individuum und Gesellschaft. In: F. R., G. U., B. H. (Hrsg.): Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, S. 262–276.
Bildungsforschungsgeleitete Fachstudien für die LehrerInnenbildung. In: B. G., A. R. (Hrsg.): Perspektiven der PädagogInnenbildung in Österreich. Ivo Brunner zum 60. Geburtstag. Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2012, S. 110–114.
Grundsätzliche Überlegungen zu einer vorsorgenden Gesellschaft und der Rolle von Wissenschaft. mit Winiwarter V., Schmid M., Schendl G., Veichtlbauer O.: In: E. H., S. M. (Hrsg.): Jenseits traditioneller Wissenschaft? Zur Rolle von Wissenschaft in einer vorsorgenden Gesellschaft. München: oekom Verlag, 2012, S. 49–70.

Beiträge in Zeitschriften

Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Mit Peschek W.: In: Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Berlin: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 2010, S. 92–101.
Schulpolitik und LehrerInnenprofessionalität. In: ide (Informationen zur Deutschdidaktik). Innsbruck, Wien, Bozen: StudienVerlag, 2009, S. 127–128.
Kein Reinheitsgebot für die Wissenschaft! Kritik zu „Fehlfunktionen der Wissenschaft“ von Klaus Fischer. In: Erwägen Wissen Ethik 2007, S. 20–21.
Materialization and Organization: Towards a Cultural Anthropology of Mathematics. In: J. Maasz u. W. Schlöglmann (eds.): New Mathematics Education Research and Practice. Rotterdam: Sense Publishers 2006
Zur Entstehung des Journals – Erinnerungen der ersten Herausgeber. Mit Vollrath H.-J., Kirsch A.: In: Journal für Mathematik-Didaktik 2004, S. 183–190.

Fach- oder Lehrbuch

Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung. Mit Greiner U., Bastel H.: (Hrsg.). (1. Auflage). Linz: Trauner Verlag + Buchservice GmbH, 2012, 302 S.
Materialisierung und Organisation. Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik. 1. Auflage, 2006, 292 S.
Pädagogik und Fachdidaktik für Mathematiklehrer. Mit Krainer K., Malle G., Posch P., Zenkl M.: (Hrsg.). (Schriftenreihe der Mathematik, Band 14). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1985, 394 S.

Willi Dörfler, Universität Klagenfurt
E-Mail: willi.doerfler@aau.at

Das Original dieses Textes ist in den *Internationalen Mathematischen Nachrichten*, IMN 243 (2020), 43–52, erschienen. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers.

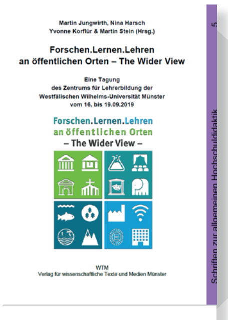
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

■ *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel, Institut für Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel. Tel. 0561 . 804-4310 eichler@mathematik.uni-kassel.de
■ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641 . 99-32221, katja.lengnink@math.uni-giessen.de
■ *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31, 06110 Halle (Saale). Tel. 0345 . 5523-880, torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de
■ *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Universität Siegen, Fakultät IV, Department Mathematik, Didaktik der Mathematik, Herrengarten 3, 57072 Siegen, Tel. 0271 . 740-3538, goetze@mathematik.uni-siegen.de
■ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
■ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Grafische Gestaltung: Christoph Eyrich, Berlin ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

Neuerscheinungen im WTM-Verlag 2020



M. Jungwirth, N. Harsch, Y. Korflür, & M. Stein: Forschen.Lernen. Lehren an öffentlichen Orten – The Wider View. Eine Tagung des Zentrums für Lehrerbildung der Westfälischen Wilhelms-Universität. Münster vom 16. bis 19.09.2019.

Münster 2020, ca. 370 S., davon viele farbig.

ISBN 978-3-95987-135-8, 37,90 €.

Frank, St. Krauss, K. Binder: Beiträge zum Mathematikunterricht 2019.

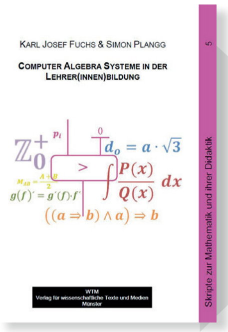
Münster 2020. Ca. 1330 Seiten, in zwei Bänden.

ISBN: 978-3-95987-123-5, 99,90 €.

T. Dexel: Diversität im Mathematikunterricht der Grundschule. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Gelingensbedingungen inklusiven Mathematiklernens.

Münster 2020. Ca. 440 S., Format 17 cm x 24 cm.

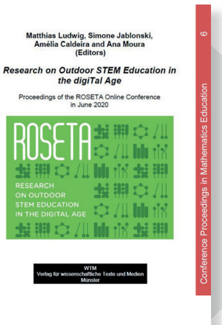
ISBN 978-3-95987-133-4, 44,90 €.



K. J. Fuchs & S. Plangg: Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung (Durchgesehene und überarbeitete Neuauflage).

Münster 2020. Ca. 115 Seiten,
17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-141-9, 15,90 €.



M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira and A. Moura (Editors): Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020.

Münster 2020, Format 17 cm x 24 cm, ca. 225 S., Farbdruck.

ISBN 978-3-95987-143-3, 41,90 €.

A. Steinecke: Begreifen der Integralrechnung: Konzeption und empirische Erprobung montessori-pädagogischer Lernmaterialien zur Förderung vielfältiger Grundvorstellungen. Ein entwicklungsorientiertes Forschungsprojekt zum Integralbegriff.

Münster 2020, ca. 370 S., davon viele farbig.

ISBN 978-3-95987-137-2, 49,90 €.

Ab sofort bieten wir Bibliothekslizenzen mit ProQuest EBook Central an!

WTM vergibt DOIs für Ihre Publikationen.

Wir ermöglichen Ihre Publikationen als Open Access.

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

kontakt@wtm-verlag.de | Fax: (+49) (0)251 - 1 62 79 41

www.wtm-verlag.de