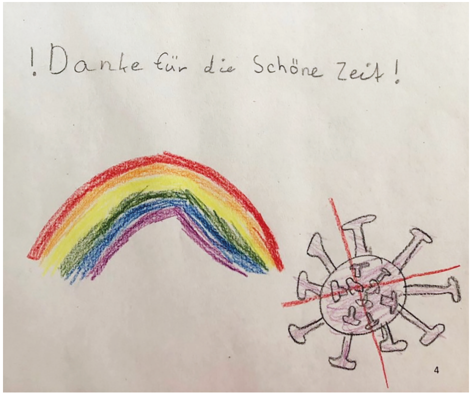
MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Mathematik-
didaktiker*innen
im Dialog
GDM2022



3.14159265358979323846
26433832795028841971 69
39937510582097494459 23
07816406286208998628 03
48253421170679821480 86
51328230664709384460 95
50582231725359408128 48
11174502841027019385 21
10555964462294895493 03
81964428810975665933 44
61284756482337867831 65
27120190914564856692 34
60348610454326648213 39
36072602491412737245 87
00660631558817488152 09
20962829254091715364 36
78925903600113305305 48
82046652138414695194 15
11609433057270365759 59
19530921861173819326 11
79310511854807446237 99
62749567351885752724 89
12279381830119491298 33
67336244065664308602 13
94946395224737190702 17
98609437027705392171 76
29317675238467481846 76
69405132000568127145 26
35608277857713427577 89

GDM

111

August 2021

Editorial: Schnaps und Zahlen

Die Zahl 111 ist bekanntlich eine Schnapszahl, denn sie ist eine mehrstellige natürliche Zahl aus gleichen Ziffern. In der Mathematik werden Schnapszahlen auch als Repdigit (repeated digits) bezeichnet. Sicherlich hat sich der oder die ein oder andere schon gefragt, woher der Name Schnapszahl eigentlich kommt. Oftmals wird der Ursprung des Ausdrucks Schnapszahl auf eine besondere Regel bei Kartenspielen, bei denen Spielpunkte aufsummiert werden, zurückgeführt. Ist diese Summe eine Repdigit, so müssen alle Kartenspieler einen Schnaps trinken oder derjenige, der diese Schnapszahl erreicht hat, muss seinen Mitspielerinnen und Mitspielern einen Schnaps ausgeben.

Eigentlich keine wirklich fesselnde Erklärung und in „normalen“ Zeiten möglicherweise auch nicht weiter erwähnenswert. Aber aufgrund der aktuellen pandemiebedingten Situation löst die Vorstellung an ein Kartenspiel in einer geselligen Runde doch sicherlich bei so manchem Wehmut aus.

Bezogen auf die GDM stellt sich die berechtigte Frage, wann wir als Gesellschaft mal wieder gesellig beisammen sein werden? Wann werden wir die nächste große Präsenztagung erleben? Wann wird es wieder einen lustigen Gesellschaftsabend mit Musik und Tanz geben?

Zumindest werden Sie in diesem Schnapszahl-Heft 111 nachlesen können, dass manche Arbeitskreise bereits im Herbst 2021 ein geselliges Treffen in Präsenz zumindest nicht ausschließen. Ebenso ist die CERME 12 in Bozen im kommenden Frühjahr als Präsenztagung geplant. Auch die GDM-Tagung 2022 in Frankfurt am Main soll in Präsenz stattfinden (mehr dazu in diesem Heft).

Ob die Chancen für Präsenztagungen in 2022 wirklich gut stehen, vermag ich an dieser Stelle nicht zu beantworten. Ich möchte noch nicht einmal spekulieren, gleichwohl aber hoffen. Denn was ist eine Gesellschaft ohne Gesellschaft? Also: Packen Sie schon mal das Kartenspiel für die GDM 2022 ein!

Zudem waren wir als Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in den letzten Wochen und Monaten nicht untätig. So liegt diesem Heft das Positionspapier „Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ bei. Es ist das Ergebnis eines zweijährigen Entwicklungsprozesses und damit auch ein Grund für eine „Schnapsrunde“. Dieses Positionspapier ist das Ergebnis des ersten Symposiums der Reihe „Symposien zu aktuellen Themen der Mathematikdidaktik“. Diese Reihe wurde vom GDM-Vorstand 2019 ins Leben gerufen. Die Aufgabe eines solchen Symposiums ist es, auf einer mathematikdidaktischen, wissenschaftlichen Grundlage, Positionen der GDM zu finden und in einem Positionspapier zu bündeln, das sich einerseits am Stand der Forschung zum mathematischen Lernen und Lehren hält und sich andererseits an die Praxis des Lehrens und Lernens von Mathematik richten soll. Das erste Symposium zum Thema „Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ hat im Februar 2019 stattgefunden. Aus diesem Treffen heraus wurde ein durch den GDM-Vorstand begleitetes Team von Expertinnen und Experten auf dem Gebiet „Umgang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ gebildet, das aus den jetzigen Autorinnen und Autoren des Positionspapiers bestand. Wir als Vorstand der GDM können nun mit einiger Berechtigung sagen, dass wir Ihnen ein Positionspapier anbieten können, das die mathematikdidaktische Expertise und das aktuelle mathematikdidaktische Wissen zum Umgang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen enthält. Es wurde bereits an diverse lehreraus- und -fortbildende Einrichtungen und Bildungsministerien verschickt. Wir rechnen zudem mit einer Verbreitung des Positionspapiers durch die GDM Mitglieder. Es kann als Open Ressource auf der GDM Homepage heruntergeladen werden: https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46

Daniela Götze

ISSN 0722-7817

Inhalt

Aktivitäten

Arbeitskreise

Tagungsbericht

Personalia

Bildnachweise der Umschlagseite
Oben: Goethe Business School der Goethe Universität Frankfurt
Mitte links: Organisations-Team der GDM 2022 der Goethe Universität Frankfurt
Mitte rechts: „Mathe-für-kleine-Asse-Projekt“, WWU Münster
Unten: Anselm Lambert, Universität des Saarlandes

Vorwort des 1. Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder (m/w/d),
in meiner neuen Rolle als Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ist dies mein erstes Vorwort zu den Mitteilungen der GDM – einer Zeitschrift, die eine erfreuliche Entwicklung in den letzten Jahren genommen hat und neben aktuellen Informationen insbesondere eine Plattform für emergente und kontroverse Themen bietet.

Es ist nicht nur ein Gebot der Höflichkeit, sondern tatsächlich ein ernstes Bedürfnis, an dieser Stelle meinem Vorgänger im Amt, Andreas Eichler, herzlich zu danken für all die Arbeit, die er in den letzten Jahren geleistet hat, und all die Anregungen, die er unserer Gesellschaft gegeben hat. Während seiner Amtszeit wurde nicht nur die Pandemie-Situation bewältigt, sondern u. a. das Spektrum der Aktivitäten der GDM um themenbezogene Symposien erweitert.

Gleichzeitig bedanke ich mich für das Vertrauen, dass sich in meiner Wahl ausdrückt. Ich werde versuchen, meinen für einen Mathematikdidaktiker etwas ungewöhnlichen Erfahrungshorizont einzubringen, um den Anliegen der Mathematikdidaktik in ihrer Breite gerecht zu werden.

Während die Arbeit der GDM auf ganz vielen Schultern ruht, und ich auf die Expertise und das Engagement von Kolleginnen und Kollegen zurückgreifen kann, habe ich das Privileg, in diesem Vorwort Themen ansprechen zu können, die ich persönlich als wichtig erachte, und zu denen ich eine Diskussion anregen möchte.

Zu den Fragen aus dem Bildungsbereich, die in der Öffentlichkeit intensiv diskutiert werden, gehört die der Bildungsgerechtigkeit. Seit vielen Jahren ist das Thema Inklusion virulent und in der letzten Zeit ist das Thema Rassismus hinzugekommen. Nicht jede gesellschaftspolitisch wichtige Frage kann mathematikdidaktische Forschung und Lehre beeinflussen, aber die Bildungsgerechtigkeit ist eine so große und wichtige Aufgabe, dass sie bedacht werden sollte. Zur Inklusion sind bereits eine Reihe von Arbeiten gemacht worden, zu Fragen des Rassismus weniger. Sinnvollerweise sieht man die letzte Frage etwas breiter als Beispiel für systematische Ungerechtigkeiten in der Partizipation an Bildungsprozessen und deren Gestaltung. In den Educational Studies in Mathematics gab es kürzlich einen interessanten vielperspektivischen Beitrag (Wagner, D., Bakker, A., Meaney, T. et al. What can we do against racism in mathematics education research? Educ Stud Math 104, 299–311 (2020)), der u. a. den Umstand problematisiert, dass die Herkunft der Autoren von publizierten Forschungsbeiträgen zur Mathematikdidaktik klare Schwerpunkte in einigen wenigen Ländern hat, während einige andere Länder kaum beitragen (können). Das kann Ausdruck von Diskriminierung sein, aber es kann auch einfach bedeuten, dass es in einigen Ländern wenig qualitativ hochwertige Forschung gibt. Innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik liegen die Dinge ähnlich: Die Beiträge im Journal für Mathematikdidaktik stammen mehrheitlich von einigen wenigen forschungsstarken Universitäten. Darin liegt nicht notwendig eine Ungerechtigkeit, sondern es ist Ausdruck einer Qualitätsauslese. Andererseits lässt sich folgendes Phänomen beobachten: Bei größeren Ausschreibungen kooperieren üblicherweise relativ fest gefügte Verbünde von forschungsstarken Universitäten. Diese naheliegende Strategie führt zu besseren Chancen auf weitere Förderung als die Einbeziehung einer forschungsschwachen Universität. Es gibt also offensichtlich gute Gründe gegen Inklusion.

Zurück zum Mathematikunterricht: Es scheint auf Basis des bisherigen Forschungsstands nicht leicht zu beurteilen, welchen Einfluss mathematikdidaktische Entscheidungen auf die Verwirklichung der Idee der Chancengleichheit haben. In der Didaktik des Schriftspracherwerbs hat die Studie der Arbeitsgruppe um Una Röhr-Sendlmeier gezeigt, dass auch vermeintlich gut fundierte moderne didaktische Konzepte zur Vergrößerung der Disparitäten beitragen können, indem sie insbesondere bildungsfernen und nicht muttersprachlichen Kindern zusätzliche Hürden auferlegen. Es wäre zu untersuchen, ob es analoge Phänomene im Mathematikunterricht gibt. Zur Rolle der Sprache im Mathematiklernen gibt es immerhin schon eine Reihe von Arbeiten – besonders hervorzugeben sind dabei die von Susanne Prediger und ihrem Umfeld. Für die Lehramtsausbildung ergeben sich daraus eine Reihe von konkreten Anregungen und Ansatzpunkten. Sprache sollte Zugänge ermöglichen, nicht Menschen ausschließen. Eine persönliche Konsequenz ist, dass ich in Staatsexamensklausuren kaum noch auf Rechtschreibfehler achte – die orthographische Leitkultur benachteiligt Migranten. Aber fehlende Exklusion ist noch keine Inklusion. Den Beitrag der

Mathematik zur Schaffung von Disparitäten ebenso wie ihr Potential zu deren Überwindung zu durchdenken ist eine mathematikdidaktische Aufgabe, die wir mit Selbstkritikfähigkeit diskursiv angehen sollten. Bevor aber die ganz großen Probleme der Menschheit gelöst werden, lesen Sie in Ruhe dieses Heft der Mitteilungen, das wieder in vielen Beiträgen den Reichtum mathematikdidaktischer Ideen vor Augen führt.

Reinhard Oldenburg
(1. Vorsitzender der GDM)

Geheimagentenpraktikum im Hause Bond

Die Verknüpfung einer motivierenden Lernsituation mit Werkzeugen des selbstständigen Lernens zur Sicherung des Lernerfolges (nicht nur) in Zeiten von Fernunterricht

Simone Bast

Die wiederkehrenden Phasen des Fernunterrichts während der durch die Covid-19 Pandemie verursachten (Teil-)Lockdowns haben zu einer „ad-hoc-Digitalisierung“ der Schulen geführt. Im Zuge dieser Entwicklung wurden vielfältige digitale Tools und Lernmanagementsysteme (weiter-)entwickelt, die die Lernenden während des Homeschoolings unterstützen und deren Lernerfolg sichern können.

Dieser Beitrag stellt drei Werkzeuge des selbstständigen Lernens vor. Diese kamen in Verbindung mit der Lernsituation *Geheimagentenpraktikum im Hause Bond*, in der die Kompetenzen der Integralrechnung in einem Mathematik Grundkurs an einem Beruflichen Gymnasium in Rheinland-Pfalz erworben werden sollten, zum Einsatz. Die Verwendung der einzelnen Werkzeuge wird exemplarisch an verschiedenen Kompetenzen demonstriert. Abschließend wird als Ausblick die mögliche Verwendung der drei Werkzeuge zum Erwerb anderer Kompetenzen im Rahmen von weiteren Lernsituationen aufgezeigt. In diesem letzten Abschnitt werden auch die Chancen deutlich, die die drei Werkzeuge im Sinne eines nachhaltigen Lernerfolges (nicht nur) in Zeiten von Fernunterricht bieten.

Motivation als Grundlage für den Erwerb von Handlungskompetenzen

Es brodelt gewaltig im Britischen Königreich. Seit geraumer Zeit gehen die Kriminalitätsstatistiken durch die Decke. Es führt kein Weg daran vorbei, dass sich 007 Verstärkung ins Boot holt. Die Verantwortlichen des MI6 sind nicht gerade begeistert, als Bond vorschlägt, einen Praktikumsplatz auszuschreiben. Aber die jüngsten Geschehnisse lassen nichts Anderes zu. Um die Sicherheit ihrer Majestät zu gewährleisten werden die potentiellen Kandidatinnen und Kandidaten auf Herz und Nieren geprüft. Für den Job ausgewählt wird, wer sich im Rahmen eines mehrstufigen Assessmentcenters gegen die Konkurrenz durchsetzen kann. Das wird nicht einfach werden. Aber: SIE WOLLEN DIESEN JOB!!! UNBEDINGT!!! …

Der britische Schriftsteller *Ian Fleming* erlangte in den 50er Jahren Berühmtheit durch seine Spionageromane rund um den von ihm erschaffenen Geheimagenten *James Bond 007*. 1954 erschien der erste Fernsehfilm mit 007 in der Hauptrolle unter dem Titel *Casino Royale*. Nachdem alle Bond-Romane Flemings verfilmt oder zumindest Teile oder der Titel übernommen worden waren, lieferten andere Autoren die Vorlagen für die Drehbücher. Bis heute ist James Bond im Dienste Ihrer Majestät aktiv. So soll im Oktober diesen Jahres der 25. Film aus der *James-Bond-Filmreihe* mit dem Titel *Keine Zeit zu sterben* in die US-amerikanischen Kinos kommen (Wikipedia-Autoren, 2021). Es war unter anderem der Bekanntheitsgrad, den der britische Geheimagent während seiner fast 70 Jahre andauernden Dienstzeit erlangte, der den Ausschlag dafür gab, ihm die Hauptrolle in dieser Lernsituation zuzuschreiben. Der Erwerb (beruflicher) Handlungskompetenzen erfordert in Zeiten von Fernunterricht von den Lernenden eine große Portion an Eigeninitiative. So ist es nicht leicht sich für anstehende Lernaufgaben aufzuraffen und zu motivieren, wenn das Lernen nicht in der gewohnten Lernumgebung stattfindet. Die Tatsache, dass die Mitschülerinnen und Mitschüler nicht physisch präsent sind, erschwert die Situation zusätzlich. Die Aussicht, neben Bond in eine zweite Hauptrolle zu schlüpfen, birgt immenses Motivationspotential für die Lernenden im Rahmen dieser Lernsituation. Auch interessierte und unterstützende Elternteile, die während der Phasen des Fernunterrichts eventuell von den Lernenden zu Rate gezogen werden, können sich in die Rolle der Bewerberin bzw. des Bewerbers für ein Praktikum bei einem Geheimagenten, der über Generationen hinweg schon aktiv ist, hinein versetzen.

Werkzeug 1: Das Kompetenzraster als Dreh- und Angelpunkt der Lernsituation

Mit Ihrer schriftlichen Bewerbung für den Praktikumsplatz an der Seite des Geheimagenten konnten Sie die Auswahlkommission überzeugen: Sie wurden tatsächlich eingeladen, an dem Assessmentcenter teilzunehmen. Sie stehen zum vereinbarten Zeitpunkt an der östlichen Grenze von Londons Stadtteil Greenwich vor einem sehr unscheinbaren Gebäude direkt an der Themse. Sie fragen sich gerade, ob es wohl Zufall ist, dass der London City Airport und die Royal Docks nur einen Katzensprung von hier entfernt sind, als sich die Tür wie von Zauberhand öffnet. Sie betreten das Gebäude mit einem

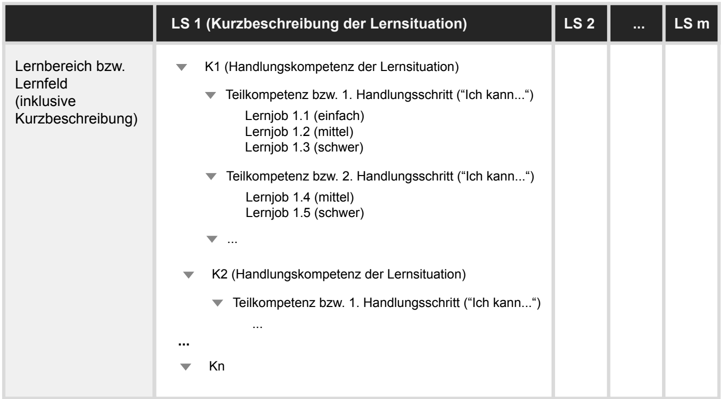


Abbildung 1. KOMET-Kompetenzraster allgemein

aufgeregten Kribbeln in der Magengegend. In der Eingangshalle werden Sie von einem vierköpfigen Team in Empfang genommen. Das müssen die Verantwortlichen des MI6 sein. Ihnen ist vollkommen klar, dass der MI6 nur die Besten der Besten in den Dienst ihrer Majestät stellt. Sie müssen sich durch eine Handlungskompetenz für diesen Job auszeichnen, die sich auf höchstem Niveau bewegt. Um überhaupt zu diesem Assessmentcenter zugelassen zu werden, mussten Sie sich im Vorfeld einer Handvoll Persönlichkeitstests unterziehen. Diese haben Sie mit Bravour bestanden und Sie haben damit bereits ein hohes Maß an Sozial- und Persönlichkeitskompetenz bewiesen. Nun müssen Sie im Rahmen des Assessmentcenters auch Ihre Fach- und Methodenkompetenz unter Beweis stellen. Die Verantwortlichen des MI6 haben die wichtigsten Kompetenzen in einer Matrix zusammengefasst. Sie müssen nur einen flüchtigen Blick auf dieses Kompetenzraster werfen um zu realisieren, dass es ein schwieriges Unterfangen sein wird, für diesen begehrten Praktikumsplatz ausgewählt zu werden. Aber Sie sind sich sicher, dass Sie die beste Person für diesen Job sind und Sie sind motiviert bis in die Haarspitzen. Sie brennen darauf endlich los zu legen. Dann geht plötzlich alles ganz schnell. Sie haben kaum Zeit sich umzusehen, als ein Alarm ertönt. Offensichtlich hat ein Erpresser irgendwo in der Stadt eine Bombe versteckt, die es zu entschärfen gilt. Sie müssen unverzüglich Bond alarmieren, der gerade mit dem Speedboot auf der Themse in Bexleys North End unterwegs ist. Die Zeit drängt, es stehen unzählige Menschenleben auf dem Spiel …

Was ist ein Kompetenzraster und wie entsteht es?

Kompetenzraster sind letztendlich Tabellen, die eine strukturierte und übersichtliche Darstellung der im Rahmen eines Lernarrangements zu erlangenden Kompetenzen in ihren verschiedenen Ausprägungsstufen ermöglichen. Klassische Kompetenzraster geben zeilenweise die Kompetenzen (*Was lerne ich?*) und spaltenweise deren Ausprägungsstufen (*Wie gut?*) an. Die Zellen dieser Matrix enthalten eine operationalisierte Aufspaltung der in der ersten Spalte gegebenen Kompetenzen, sowie entsprechende Lernmaterialien (Beispielaufgaben, Lernjobs, Literaturhinweise, etc.), mit deren Hilfe sich die Lernenden die entsprechende Kompetenz aneignen können (El Faramawy & Sernetz, 2015).

Im rheinland-pfälzischen Schulversuch KOOL-BBS (**KO**mpetenz**O**rientiertes **L**ernen an **B**erufs**B**ildenden **S**chulen) entwickeln Ausbildungsschulen und Studienseminare BBS (zurzeit Trier und Neuwied) eine konsequent kompetenzorientierte digitale Lernplattform. Hierzu wurde das Lernmanagementsystem *DAKORA* (**D**igitales **A**rbeiten mit **KO**mpetenz-**RA**stern, kool-bbs.bildung-rp.de/dakora/), welches bereits seit einigen Jahren in Baden-Württemberg im Einsatz ist, für die Berufsbildenden Schulen in Rheinland-Pfalz adaptiert, mit dem Ziel, die didaktischen Prinzipien der Lernfeldorientierung konsequent umzusetzen (Seminar BBS, o. D.). Das Kompetenzrastererfassungstool *KOMET* (**KOM**petenzraster-**E**rfassungs-**T**ool, kool-bbs.bildung-rp.de/komet/) wird im Rahmen von KOOL-BBS verwendet, um Kompetenzraster zu erstellen. Die Tools *DAKORA* und *KOMET* setzen auf die Lernplattform *moodle* auf und ergänzen diese im Sinne der Kompetenzorientierung (KOOL-BBS Team, 2020).

Im Rahmen von KOOL-BBS wurde die weiter oben erwähnte klassische Struktur eines Kompetenzrasters aufgebrochen und in eine neue Struktur überführt, die sich das Prinzip der Handlungsorientierung zum Vorbild nimmt. Lernarrangements und die dazugehörigen Kompetenzen können so aus dem Blickwinkel der beruflichen Bildung betrachtet werden (vgl. Abb. 1).

Allgemein sieht ein solches Kompetenzraster, das mit *KOMET* äußerst komfortabel umgesetzt werden kann, folgendermaßen aus: Die erste Spalte des Rasters enthält die laufende Nummer und die Kurzbeschreibung des Lernbereiches, die dem

	LS 3: Geheimagentenpraktikum im Hause Bond
Lernbereich 4: Untersuchen und Vertiefen von funktionalen Zusammenhängen mithilfe der Infinitesimalrechnung	▼ Kompetenz K4: Ich kann vom Ufer rechtzeitig abspringen um sicher auf Bonds heranrauschendem Speedboot zu landen. ▼ Ich kann die Geschwindigkeit und die zurückgelegte Strecke des Speedbootes analysieren. Lernjob 4.1: Informieren Sie sich über die Streifenmethode des Archimedes. Den Link dazu finden Sie hier (AB I) Lernjob 4.2: Zeichnen Sie die Ober- und Untersumme in das Koordinatensystem ein. Der Graph zeigt die Geschwindigkeit des Speedbootes. Genauere Informationen zur zugrundeliegenden Funktion und eine Skizze des Graphen finden Sie hier. (AB I) ▼ Ich kann den Zeitpunkt für den Absprung vom Ufer bestimmen. Lernjob 4.3: Analysieren Sie die Geschwindikeit und den zurückgelegten Weg des Speedbootes durch Experimentieren mit Ober- und Untersummen mit Hilfe eines dynamischen GeoGebra Arbeitsblattes. Bestimmen Sie so den korrekten Zeitpunkt für den Absprung vom Ufer näherungsweise. (AB II) Lernjob 4.4: Machen Sie sich mit der Vorgehensweise bei der Berechnung des Grenzwertes der Obersumme vertraut. Ein Lernvideo dazu finden Sie hier. (AB II) Lernjob 4.5: Bestimmen Sie den optimalen Zeitpunkt für den Absprung, indem Sie den exakten Wert des Integrals berechnen. (AB III) ▼ Kompetenz K9: Ich kann die Bombe entschärfen und damit unzählige Menschenleben retten. ▼ Ich kann die Frontfläche des Gefäßes berechnen, das den Flüssigsprengstoff enthält. Lernjob 9.1: Berechnen Sie die Frontfläche des Gefäßes mit der Sprengflüssigkeit. Eine Skizze des Gefäßes, der Sie die Integrationsgrenzen entnehmen können, finden Sie hier. (AB I) Lernjob 9.2: Berechnen Sie die Frontfläche des Sprenggefäßes. Die zugehörigen Funktionen und Tipps zur Vorgehensweise bei der Ermittlung der Integrationsgrenzen finden Sie hier. (AB II) ▼ Ich kann mir die notwendigen Informationen zur Entschärfung der Bombe herleiten. Lernjob 9.3: Leiten Sie sich alle notwendigen Informationen für die Berechnung des Volumens des Behälters her. Eine operationalisierte Anleitung dafür können Sie dem Tweedback-Quiz entnehmen, das Sie hier finden. (AB III)

Abbildung 2. Ausschnitt aus dem Kompetenzraster zur Lernsituation Geheimagentenpraktikum im Hause Bond

jeweiligen Lehrplan entnommen werden können. Die Spalten der Matrix sind überschrieben mit den Lernsituationen (LS 1 bis LS m), wobei es sich um didaktisch-methodisch konstruierte Lernanlässe zur Erweiterung fachlicher, methodischer und personaler Kompetenzen handelt (KOOL-BBS Team, 2020). Die einzelnen Zellen der Matrix enthalten dann die Handlungskompetenzen der Lernsituation (K1 bis Kn). Diese wird in Teilkompetenzen, die handlungssystematisch angeordnet sind, aufgespalten. Sie sind für die Lernenden als „Ich kann …“-Formulierung in die Matrix eingefügt. Zu jeder „Ich kann …“-Formulierung wird mindestens ein Lernjob mit den notwendigen Lernmaterialien angeboten. Generell besteht die Möglichkeit, den einzelnen Lernjobs Schwierigkeitsgrade zuzuweisen, was den Lernenden bei der Selbsteinschätzung helfen und die Auswahl eines zum Kenntnisstand passenden Lernjobs erleichtern kann. Zusätzlich ist damit eine Möglichkeit der Differenzierung gegeben. Neben den verschiedenen Lernjobs können auch Beispielaufgaben, Lernvideos, Literaturhinweise, etc. im System hinterlegt werden.

Das Lernarrangement *Geheimagentenpraktikum im Hause Bond* ermöglicht die Erlangung der Kompetenzen im Bereich der Integralrechnung. Das konkrete Kompetenzraster zur Lernsituation ist in drei Schritten entstanden:

In einem *ersten Schritt* wurden die Kompetenzen ausgewählt. Diese ergeben sich aus dem *Lehrplan Mathematik für das Berufliche Gymnasium in Rheinland-Pfalz* (Pädagogisches Landesinstitut Rheinland-Pfalz, 2014). Im *Lernbereich 4: Untersuchen und Vertiefen von funktionalen Zusammenhängen mithilfe der Infinitesimalrechnung* gibt der Lehrplan folgende zwei (Fach-) Kompetenzen im Kontext der Integralrechnung vor:

- *Grundlegende Begriffe und Verfahren der Integralrechnung sachgerecht, strukturiert und systematisiert begründen.*
- *Problemstellungen in unterschiedlichen Kontexten mit Hilfe der Integralrechnung untersuchen (z. B. Flächeninhalte von nichtlinear begrenzten Flächen bestimmen, Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand bestimmen).*

Im *zweiten Schritt* wurden diese „sperrigen“ Kompetenzen in mehrere Teilkompetenzen aufgeschlüsselt. Dies dient zum einen der besseren Handhabbarkeit seitens der Lernenden. Zum anderen soll diese Aufteilung dezidiert helfen, das Problem aus der Lernsituation in seinen logischen Problemlöseschritten zu bearbeiten, also nicht fachsystematisch, sondern handlungssystematisch. In einem darin geübten Beruflichen Gymnasium kann die Zahl der Lernjobs geringer sein, da die Lernenden die Komplexität der komplexen Problemlösung eher meistern können als Anfängerinnen und Anfänger im System. Das konkrete Kompetenzraster zu dem hier vorgestellten Lernarrangement umfasst insgesamt 9 Kompetenzen, die zum Zwecke der besseren Übersicht von K1 bis K9 durchnummeriert worden sind. Für diesen Beitrag wurden exemplarisch zwei der neun Kompetenzen (K4 und K9) ausgewählt und umfassend dargestellt (vgl. Abb. 2). Die Teilkompetenzen finden sich in der zweiten Spalte des Kompetenzrasters wieder.

Im *dritten Schritt* wurden die Teilkompetenzen K1 bis K9 mit konkret nachweisbaren Fertigkeiten und Fähigkeiten in Form von Lernjobs hinterlegt. Hier finden sich unter anderem Beispielaufgaben, Literaturhinweise und dynamische Übungsblätter, die die zu erlangenden Kompetenzen genauer charakterisieren und so für die Lernenden besser greifbar machen. Die Lernjobs wurden anschließend mit Niveaustufen versehen. Diese orientieren sich an den in den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* festgelegten Anforderungsbereichen (KMK, 2015): Anforderungsbereich I (AB I, leicht) „umfasst das Wiedergeben von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang, die Verständnissicherung sowie das Anwenden und Beschreiben geübter Arbeitstechniken und Verfahren". Anforderungsbereich II (AB II, mittel) „umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten, Erklären und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte". Anforderungsbereich III (AB III, schwer) „umfasst das Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Verallgemeinerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler selbstständig geeignete Arbeitstechniken und Verfahren zur Bewältigung der Aufgabe, wenden sie auf eine neue Problemstellung an und reflektieren das eigene Vorgehen".

Wie wird das Kompetenzraster gewinnbringend im (Fern-)Unterricht eingesetzt?
Es ist festzuhalten, dass Kompetenzraster in die Hände der Lernenden gehören (von Saldern, 2016). Dieses konkrete Kompetenzraster (Abb. 2) wurde den Lernenden über das Lernmanagementsystem *DAKORA* (**D**igitales **A**rbeiten mit **KO**mpetenz**RA**stern, kool-bbs.bildung-rp.de/dakora/) zur Verfügung gestellt. „*DAKORA* ist eine sichtbare Oberfläche für unser *moodle*, die den Blick auf das kompetenzorientierte Lernen fokussiert, aber auf die Funktionalität vom *moodle* System aufsetzt" (KOOL-BBS Team, 2020). Kompetenzraster können im modernen kompetenzorientierten Unterricht vielfältige Aufgaben erfüllen. Für die vorliegende Lerneinheit ist das Kompetenzraster der Dreh- und Angelpunkt des Unterrichtsgeschehens. Die Kompetenzmatrix ist zu jeder Zeit Ausgangspunkt für die Auswahl der Tätigkeiten. Ausgehend von den einzelnen Zellen des Rasters gelangen die Lernenden über Verlinkungen zu Beispielaufgaben, dynamischen Übungsblättern, Erklärvideos, Literaturhinweisen, etc. Sie haben das Kompetenzraster somit immer dann vor Augen, wenn sie sich mit der Lernsituation befassen. Dieses konkrete Kompetenzraster wird von den Lernenden sukzessive „abgearbeitet".

Mit Hilfe von Kompetenzrastern können die Lernenden eigenverantwortlich überprüfen, ob sie eine geforderte Kompetenz bereits beherrschen oder ob sie noch Übungsbedarf haben (El Faramawy & Sernetz, 2015). Es ermöglicht den Lernenden die Verantwortung für den eigenen Lernerfolg zu übernehmen. Konkret kann das Raster hier als eine Art *Wegweiser* verstanden werden, mit dessen Hilfe es den Lernenden ermöglicht wird, sich zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Lernprozesses zu orientieren und eine Richtung zu finden. Es gibt Antworten auf die vier wichtigen Fragen *„Wo komme ich her?"*, *„Wo stehe ich gerade?"*, *„Was tue ich als Nächstes?"* und *„Wo will ich hin?"*, was nicht nur im Fernunterricht wichtig ist. Es kann somit den Lernenden, den Lehrenden und allen anderen Begleitern des Lernprozesses unterrichtsbegleitend einen Überblick über den Lernstand geben (Harting & Ramm, 2011).

Werkzeug 2: Dynamische Übungsblätter zur Visualisierung funktionaler Zusammenhänge

Bond ist bereits mit dem Speedboot auf dem Weg zurück zur Zentrale in Greenwich als ihn der Notruf erreicht. Inzwischen konnten Sie in Erfahrung bringen, dass die Bombe offensichtlich in der Nähe der Towerbridge versteckt worden ist. Des Weiteren ist mittlerweile klar, dass die Bombe mit einem Zeitzünder versehen ist. Ihnen bleibt weniger als eine Stunde Zeit, um die Bombe zu entschärfen. Sie dürfen also keine Zeit verlieren. In der Stellenbeschreibung für den Praktikumsplatz stand nichts von körperlichen Voraussetzungen für den Job, aber außergewöhnliche Situationen erfordern bekanntlich außergewöhnliche Maßnahmen. Es bleibt Ihnen nichts anderes übrig, als aus dem Gebäude zu stürmen und mit Anlauf auf das fahrende Speedboot aufzuspringen. Glücklicherweise haben Sie ein gewisses Gespür für mathematische Zusammenhänge und können in etwa abschätzen, wann Sie abspringen müssen um das mit 60 mph heranrauschende Speedboot nicht zu verfehlen. Einer Tatsache können Sie sich sicher sein: Bond wird für Sie nicht bremsen, dafür stehen zu viele Menschenleben auf dem Spiel. Es liegt also in Ihrem eigenen Interesse, hier an dieser Stelle nicht baden zu gehen …

Was ist ein dynamisches Übungsblatt und wie entsteht es?
GeoGebra ist eine kostenlose dynamische Mathematiksoftware für Lernende und Lehrende aller Altersstufen. Sie verbindet Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einem einfach zu bedienenden Softwarepaket (GeoGebra, o. D.). Die Software bietet vielfältige Werkzeuge zum Erstellen von interaktiven Unterrichtsmaterialien in Form von Webseiten. Solche dynamischen Übungsblätter lassen sich mit wenigen Handgriffen sehr komfortabel erstellen. Da es sich bei diesen Aufgabenblättern um Webseiten handelt, lassen

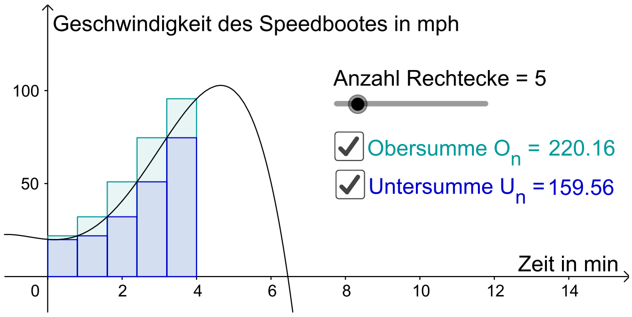


Abbildung 3. Ausschnitt aus dem dynamischen GeoGebra Übungsblatt zu Ober- und Untersummen

sich diese ohne Probleme in jedes gängige Lernmanagementsystem integrieren und den Lernenden so zur Verfügung stellen.

Wie wird das dynamische Übungsblatt gewinnbringend im (Fern-)Unterricht verwendet?
Die Geschwindigkeit des Speedbootes ist durch eine Polynomfunktion 4ten Grades gegeben. Mit Hilfe eines dynamischen GeoGebra Arbeitsblattes wird die Geschwindigkeit des heranrauschenden Speedbootes analysiert. Anhand diverser Leitfragen erarbeiten sich die Lernenden in dieser Phase des Unterrichts die Gesetzmäßigkeiten bei der Annäherung des Wertes eines Integrals mittels Ober- und Untersummen. Hierzu verändern sie mit Hilfe eines Schiebereglers (vgl. Abb. 3) die Anzahl der Rechtecke der Ober- und Untersumme. Die Lernenden können mit Hilfe dieses Übungsblattes erkennen, dass sich der Wert für die Obersumme O_n und der Wert für die Untersumme U_n einander annähern. Im Bezug zur Lernsituation ermitteln die Lernenden an dieser Stelle den korrekten Zeitpunkt für den Absprung vom Ufer, damit die Landung auf dem Speedboot und möglichst nicht in der Themse erfolgt.

Die dynamischen Übungsblätter wurden den Lernenden, genau wie das Kompetenzraster auch, über das Lernmanagementsystem *DAKORA* zur Verfügung gestellt. Sie gelangen mit einem Klick von dem Kompetenzraster (siehe z. B. Abb. 2, Kompetenz K4) zum Arbeitsblatt. Diese Form der Bereitstellung funktioniert offensichtlich im Rahmen von Präsenzveranstaltungen genau so gut wie während der Phasen des Fernunterrichts. Die Arbeit mit dem interaktiven Arbeitsblatt hat einen gewissen experimentellen Charakter und trägt so zum Erhalt der Motivation seitens der Lernenden bei. Auch die Einbindung in die Lernsituation und die Neugier auf das Ergebnis (*Wann genau muss ich abspringen, um trockenen Fußes auf dem Speedboot zu landen?*) bringen Motivationspotential mit sich.

Werkzeug 3: Ein Quiz als finales Highlight der Lernsituation

Ihr Puls liegt gefühlt bei 200 Schlägen pro Minute. Sie haben das Speedboot mit einem beherzten Sprung erreicht. Ein einfaches „Hi!" von Seiten des Geheimagenten musste fürs Erste genügen. Es bleibt keine Zeit höfliche Floskeln auszutauschen und sich einander vorzustellen. Erst die Arbeit … Außerdem sind Sie gerade ein wenig blass um die Nase, was wohl an Bonds rasantem Fahrstil liegt. Er lenkt das Speedboot gerade durch eine Rechtskurve, als die Towerbridge in Ihr Sichtfeld rückt. Sie haben die Höllenfahrt überstanden. Als das Speedboot des Geheimagenten unter der Towerbridge zum Stehen kommt, können Sie die Bombe schon sehen. Ihnen schwant Übles. Scheinbar hat der Erpresser ein Faible für Mathematik: Der Flüssigsprengstoff befindet sich in einem eigentümlichen Gefäß (vgl. Abb. 4), das von oben durch eine Polynomfunktion dritten Grades und von unten durch eine quadratische Funktion beschränkt ist. Um den Zeitzünder zu stoppen müssen Informationen zum Gefäß und das Volumen der Sprengflüssigkeit in cm^3ermittelt und über eine App an die eigentümliche Bombenkonstruktion weiter gegeben werden. Sie müssen mit äußerster Sorgfalt an die Arbeit gehen, denn jede falsche Eingabe führt unverzüglich zur Explosion der Bombe …

Was ist ein Tweedback-Quiz und wie entsteht es?
Tweedback (https://tweedback.de) ist eine Plattform für anonymes Echtzeit-Feedback. Neben anderen Formen des Feedbacks bietet die Plattform auch ein Tool zur Erstellung eines Quiz. Nutzer haben die Möglichkeit, Quizfragen zu erstellen und diese mit verschiedenen Antwortmöglichkeiten zu versehen.

Wie wird das Quiz gewinnbringend im (Fern-)Unterricht verwendet?
Das Tool wurde hier genutzt um die im Rahmen der Lernsituation *Geheimagentenpraktikum im Hause Bond* erworbenen Kompetenzen abzuprüfen. Konkret wird über 5 Teilfragen schrittweise das Volu-

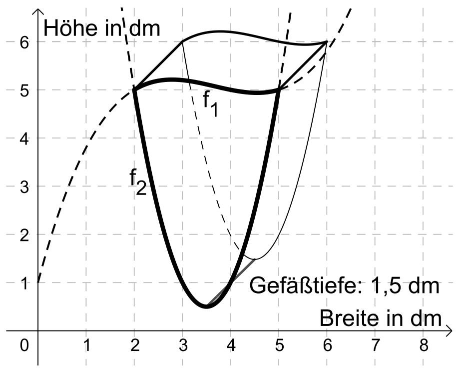


Abbildung 4. Gefäß, das den Flüssigsprengstoff enthält

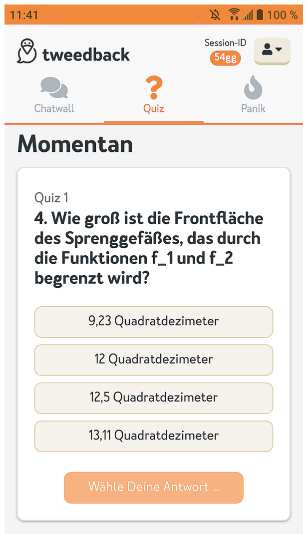


Abbildung 5. Frage 4 im Tweedback-Quiz

men des Gefäßes ermittelt, das den Flüssigsprengstoff enthält. Zu jeder der 5 Quizfragen sind mehrere Antwortmöglichkeiten gegeben (vgl. Abb. 5). Hier wird auf sämtliche Kompetenzen zurückgegriffen, die die Lernenden während des Lernprozesses erreichen konnten. Das Quiz wird den Lernenden über einen Link zur Verfügung gestellt. Dieser Link ist wie alle anderen Arbeitsmaterialien der Lernsituation in dem Lernmanagementsystem *DAKORA* hinterlegt und kann direkt über das Kompetenzraster (siehe Abb. 2, Kompetenz K9) erreicht werden.

Ausblick

Sie haben es geschafft! Die Bombe ist entschärft und es konnten unzählige Menschenleben gerettet werden. Damit dürften Sie die Auswahlkommission des MI6 davon überzeugt haben, dass Sie die richtige Person für ein Praktikum an der Seite von James Bond sind. Aber es bleibt keine Zeit weiter darüber zu philosophieren, denn gerade als Sie Ihren Puls wieder auf ein normales Niveau gebracht haben, kommt der nächste Notruf rein. Ein kurzer Blickkontakt und ein bestimmtes Nicken des Geheimagenten lassen keine Zweifel zu: Sie müssen Bond auch bei dieser Herausforderung zur Seite stehen …

Die in diesem Beitrag vorgestellte Lernsituation lässt sich, wie oben angedeutet, beliebig erweitern. Die James Bond Romane und Filme bieten diverse Vorlagen für neue Fälle, mit deren Lösung zahlreiche Kompetenzen erreicht werden können. Hierbei sind die Kompetenzen nicht rein auf die Integralrechnung beschränkt, mit ein bisschen Fantasie seitens der Lehrenden lässt sich die Lernsituation auch zur Erlangung von Kompetenzen in anderen Gebieten der Mathematik nutzen. Auch die vorgestellten Werkzeuge des selbstständigen Lernens lassen sich auf vielfältige Weise an andere Lernprozesse adaptieren.

Das *Kompetenzraster* wurde hier in erster Linie als Werkzeug zur Orientierung für die Lernenden innerhalb des Lernprozesses genutzt. Es fungierte als Dreh- und Angelpunkt für das gesamte Unterrichtsgeschehen. Dabei war der Weg durch das Kompetenzraster durch die Lehrenden vorgegeben: Die einzelnen Teilkompetenzen mussten sukzessive von oben nach unten abgearbeitet werden. Denkbar wäre unter anderem, dass die Lernenden das Raster stattdessen nutzen, um ihren Lernprozess selbstständig zu strukturieren (Harting & Ramm, 2011). In diesem Szenario würden die Lernenden zu Beginn der Lernsituation die zu erlangenden Kompetenzen eigenständig mit Hilfe eines Wochenplanes terminieren. *DAKORA* bietet eine sehr komfortable und auch intuitive Möglichkeit dazu. Die Lernenden würden damit selbst die Verantwortung für den eigenen Lernprozess übernehmen, was die Eigenverantwortlichkeit stärken könnte (Harting & Ramm, 2011).

Die *dynamischen Übungsblätter* wurden hier eingesetzt, um die Grenzwertbildung zwischen Ober- und Untersumme erlebbar zu machen. Die Software *GeoGebra* bietet etliche Tools zur Erstellung interaktiver Unterrichtsmaterialien. Diverse funktionale Zusammenhänge können mit Hilfe dieses Werkzeuges sichtbar gemacht werden. Die Tatsache, dass die Arbeitsblätter in Form von Webseiten zur Verfügung stehen, macht diese so besonders und vielfältig einsetzbar. Die Lernenden können von überall und zu jeder Zeit darauf zugreifen. Zudem kann man die dynamischen Übungsblätter sehr komfortabel in sämtliche digitalen Lernmanagementsysteme einbinden.

Das Tool *Tweedback* wurde hier genutzt, um die zentrale Frage innerhalb des Assessmentcenters zu beantworten: *Wie kann die Bombe entschärft werden?* Konkret wurde die Quiz-Funktion genutzt. Neben dieser Funktion bietet Tweedback weitere Einsatzmöglichkeiten in der Interaktion zwischen Lernenden und Lehrenden. Unter anderem können die Lernenden Echtzeitfeedback zu vielfältigen Aspekten den Unterricht betreffend geben. Die Tatsache, dass dies anonym geschieht, kann dazu beitragen, die Hemmschwelle für die Äußerung von Rückmeldungen zu reduzieren. Auch für den Einsatz der eingebauten Chat-Funktion sind zahlreiche Optionen denkbar.

Zusätzlich zu den hier vorgestellten existieren zahlreiche weitere Werkzeuge des selbstständigen Lernens, die alleine für sich genommen oder auch in Kombination miteinander den Lernerfolg während der Phasen des Fernunterrichts sichern können. Auch während der Präsenzphasen des Unterrichts können diese Werkzeuge in Kombination mit einer motivierenden Lernsituation den Lernerfolg positiv beeinflussen.

Literatur

El Faramawy, S. & Sernetz, L. (2015). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht. 44 Methoden für die Sekundarstufe*. Verlag an der Ruhr.

GeoGebra. (o.D.). *Was ist GeoGebra?* www.geogebra.org/about

Harting, A. & Ramm, G. (2011). Eigenverantwortliches Lernen. *Schulmanagement-Handbuch*, (137), 17–18.

KOOL-BBS Team (2020). *Leitfaden 02: Erstellen von Kompetenzrastern als didaktische Grundlage für das digitale Arbeiten mit Kompetenzrastern – DAKORA*. https://studienseminar.rlp.de/fileadmin/user_upload/studienseminar.rlp.de/bb-tr/KOOL-BBS/Handreichungen/Leitfaden_02_K-Raster_erstellen_11-09-2020.pdf

Kultusministerkonferenz (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Pädagogisches Landesinstitut Rheinland-Pfalz (2014). *Lehrplan für das berufliche Gymnasium. Unterrichtsfach: Mathematik, Grund- und Leistungsfach*. https://berufsbildendeschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/bbs/berufsbildendeschule.bildung-rp.de/Lehrplaene/Dokumente/Lehrplan_2014/2015-01-08_LP_BG_Mathe.pdf

Staatliches Studienseminar für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen Trier (o. D.). *KOOL-BBS: kompetenzorientiertes Lernen an berufsbildenden Schulen*. https://studienseminar.rlp.de/bbs/trier/aktuelles/modellversuch-kool-bbs.html

von Saldern, M. (2016). Chancen und Grenzen von Kompetenzrastern. *Schulmanagement-Handbuch*, *35*(159), 59–74.

Wikipedia-Autoren (2021, 25. April). *James Bond*. de.wikipedia.org/w/index.php?title=James_Bond&oldid=211297872

Simone Bast, Berufsbildende Schule Gestaltung und Technik, Trier
E-Mail: simone.bast@bbsgut-trier.de

Ein Erfahrungsbericht zur Entwicklung digitaler Förderformate im Lehr-Lern-Labor *Mathe für kleine Asse*

Friedhelm Käpnick, Julia Kaiser, Franziska Strübbe und Alena Witte

An jedem Nachmittag in der Semesterzeit ist die Lernwerkstatt an der WWU Münster bis auf den letzten Platz gefüllt. Etwa 30 Kinder, 15 Studierende und Dozierende treffen sich zu einer mathematischen Forscherstunde. Neugier, Freude und Lachen sind in den Gesichtern der Kinder, wenn sie den Raum betreten und auf mathematische Entdeckungsreise gehen. Die Eltern tauschen sich währenddessen in ‚Tür-und-Angel-Gesprächen' über ihre Fragen aus. Nach gründlichen Absprachen von Dozierenden und Studierenden zu den Themen und zur didaktischen Gestaltung werden die Kinder mit einem neuen Forscherthema vertraut gemacht. In den nächsten ca. 60 Minuten vertiefen sich die kleinen Matheasse in herausfordernde mathematische Spiel- und Lernfelder (Fuchs 2015) bzw. offene substanzielle Aufgabenfelder (z. B. Käpnick & Fuchs 2009; Benölken et al. 2018) und kommen oft zu erstaunlichen Entdeckungen.

Hinter dieser Szenerie verbirgt sich das Konzept des Lehr-Lern-Labors *Mathe für kleine Asse*. Das universitäre Enrichmentprojekt für mathematisch interessierte und begabte Kinder von der Kita bis zur neunten Klassenstufe wurde im Schuljahr 2004/2005 unter der Leitung von Prof. Dr. F. Käpnick ins Leben gerufen und seitdem sukzessiv erweitert. Die Anzahl der teilnehmenden Kinder hat sich auf etwa 200 kleine Matheasse pro Jahr erhöht. Das Lehr-Lern-Labor (Brüning 2018) vereinigt neben der Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder die praxisnahe Lehre für Lehramtsstudierende sowie Forschungen, u. a. zu altersspezifischen Besonderheiten und individuellen Ausprägungen mathematischer Begabungen. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf der ganzheitlichen Sicht auf jedes Kind, inklusive einer prozessbegleitenden langfristigen Diagnostik und Förderung des individuellen Begabungsprofils (Käpnick 2008). Um diese komplexen Förder-, Lehr- und Forschungstätigkeiten leisten zu können, sind besondere fachliche, pädagogisch-didaktische und psychologische Kompetenzen erforderlich, aber auch eine große Leidenschaft sowie ein vertrauensvolles Miteinander, was eine enge Zusammenarbeit mit den Eltern einschließt.

Die mit Beginn der Corona-Pandemie verbundenen Kontakteinschränkungen erlaubten jedoch keine Fortsetzung unserer gewohnten Aktivitäten im Lehr-Lern-Labor. Es mussten schnellstmöglich alternative tragfähige Konzepte für ein forschendes ‚Lernen auf Distanz' unter der Prämisse, möglichst alle drei Wirkungsfelder (Förderung mathematisch begabter & interessierter Kinder, Lehre & Studium, Forschung) aufrechtzuerhalten, entworfen und umgesetzt werden. Nachfolgend wird beschrieben, wie diesen Herausforderungen begegnet wurde und welche Chancen digitale Lehr-Lern-Formate bieten können. Vor allem wird thematisiert, ob und wie eine digitale Durchführung des Lehr-Lern-Labors schon mit Vor- und Grundschulkindern sinnvoll und nachhaltig wirksam umgesetzt werden kann. Die aufgezeigten Erfahrungen können Explikationen und Gestaltungsideen für andere Lehr-Lern-Labore im MINT-Bereich anregen.

Mathe für kleine Asse im Elementarbereich

Unser Lehr-Lern-Labor kooperiert mit münsteraner Kitas. Das Forder-Förder-Angebot richtet sich an mathematisch interessierte bzw. begabte Kinder im Alter von vier bis sieben Jahren. Unterstützt von pädagogischen Fachkräften, Studierenden und Mitarbeitenden der ‚Arbeitsgruppe Käpnick' erforschen die Kinder in offenen Spiel- und Lernfeldern die ‚Welt der Mathematik' (Meyer 2015; Strübbe et al. 2020).

Die drastischen Veränderungen zu Beginn des *Sommersemesters 2020* zwangen uns abrupt zu grundlegenden konzeptionellen Änderungen in der Projektdurchführung. Unsere Hauptintention bestand darin, das Konzept – wie bisher – an den Altersbesonderheiten und den Potenzialen der Kinder auszurichten. Wir entwickelten in Kooperation mit den Kitas unterschiedliche (Teil-)Konzepte für die jeweiligen Projektkurse. Die konzeptionellen Anpassungen für das *Mathe-Asse*-Projekt im Elementarbereich erfolgten in enger Kooperation mit dem Kurs für die Klassen 1&2, sodass ein übergreifendes digitales Konzept für den Übergang Kita-Grundschule mathematisch begabter Kinder entwickelt wurde:

- Ausarbeitung einer übergangsübergreifenden Organisationsform (Kita und Klasse 1&2),
- vollständige digitale Durchführung der Projektseminare und Forscherstunden,
- Vermittlung und Begleitung von Patenschaften zwischen Studierenden und Matheassen,
- verstärkte Einbindung von Eltern als Lernbegleiter/-innen für ihre Kinder,
- Bereitstellung von Materialien an Kooperationspartner/-innen,
- bei Bedarf Hausbesuche in den Projektfamilien,
- Evaluation der Forscherstunden (Kinder & Eltern) sowie des Seminars (Studierende).

Die Aufgabenmaterialien wurden im Sinne einer anschlussfähigen Übergangsgestaltung für Kinder im Elementarbereich sowie für Kinder der Grundschulklassen 1&2 konzipiert. Der Einsatz erfolgte individuell in den Patenschaften, zudem teilweise im Rahmen der Notbetreuung während des Lockdowns in den Kitas durch das pädagogische Fachpersonal vor Ort. Dabei wurden die inhaltlichen Schwerpunkte mit den Projektthemen des *Mathe-Asse*-Kurses für Erst- und Zweitklässler/-innen (vgl. Tab. 1, S. 16) abgestimmt. Diese konzeptionellen Anpassungen orientierten sich an den viel diskutierten Fragen zum ‚Homeschooling' und ‚Lernen auf Distanz'. Insofern sind die Überlegungen als explorative Entwicklungsarbeit zu verstehen, die Aspekte digitalen und analogen Lernens verbinden. Davon ausgehend haben wir Praxisimplikationen konkretisiert, die ebenso die Diagnose und Förderung von besonderen mathematischen Potenzialen, Möglichkeiten individuellen Feedbacks oder Formen kooperativer Zusammenarbeit berücksichtigen. Wir strebten eine konzeptionelle Lösung an, die eine Förderung mathematischer Begabungen ohne analoge Präsenz im schulischen Regelunterricht oder in außerschulischen Projekten, speziell im *Mathe-Asse*-Projekt, ermöglicht. Zukunftsgerichtet kann so das ‚Lernen auf Distanz' für Akteur/-innen in Kitas und Schulen eine vielversprechende Perspektive zur Begabungsförderung darstellen.

Wider Erwarten war eine weitgehend ‚normale' Durchführung zum *Wintersemester 2020/21* nicht realisierbar, sodass weitere konzeptionelle Anpassungen für eine digitale Förderung notwendig waren. Diese basierten neben den bereits oben genannten Regelungen für Kontakteinschränkungen insbesondere auf der Verordnung zum Schutz vor Neuinfizierungen mit dem Coronavirus SARS-CoV-2 im Bereich der Betreuungsinfrastruktur. Insofern erfolgte die Entscheidung für ein Pausieren des *Mathe-Asse*-Projektes im Elementarbereich auf aktuell unbestimmte Zeit als eine alternativlose Konsequenz. Da Begabungsförderung bedeutet *„Verantwortung übernehmen ... für sich und sein Lernen, Denken und Handeln sowie für seine soziale Umwelt und die Zukunft"*[1] wird diese Entscheidung als gesellschaftliche Verantwortung und als Ausdruck solidarischen Handelns verstanden. Für das *Mathe-Asse*-Projekt im Elementarbereich bedeutet dies konkret:

- Aufrechterhalten der Kontakte zu den Kooperationspartner/-innen durch regelmäßige Austausche,
- fortlaufendes Beobachten des Infektionsgeschehens und der geltenden Bestimmungen, um eine reibungslose und schnelle Wiederaufnahme der Durchführung des *Mathe-Asse*-Projektes zu realisieren,
- Bereitstellen von Materialien für die Kooperationskitas,
- enge Zusammenarbeit zwischen den Teilprojekten, insbesondere zum Projektkurs der Klassen 1&2.

Trotz der nicht durchzuführenden Förderstunden in den Kitas wird das Seminar *Spezielle Fragen der Mathematikdidaktik: Individuelles Fördern mathematischer Potenziale im Übergang von der Kita in die Grundschule* für ca. 20 Studierende auch im Wintersemester 2020/21 angeboten. Die Anzahl teilnehmender Studierender konnte somit im Vergleich zu vorherigen Semestern deutlich erhöht werden. Der Schwerpunkt der didaktisch-methodischen Ausgestaltung des Seminars liegt nun auf der Entwicklungsarbeit für digitale Aufgabenmaterialien zur Potenzialentwicklung im Übergang durch bzw. trotz ‚Lehre auf Distanz'. Strukturiert durch den Einsatz eines Padlets, werden die Studierenden dazu angeleitet, in Kleingruppen Ideen zur Entwicklung von offenen Spiel- und Lernfeldern zu sammeln und für den Einsatz in der Praxis aufzubereiten. Im wöchentlichen Wechsel werden einerseits forschungsrelevante Inhalte zu mathematischen Begabungen und Übergängen bereitgestellt und in Videoveranstaltungen vertieft besprochen sowie diskutiert. Andererseits sind die Studierenden in Kleingruppen dazu aufgefordert, anwendungsorientiert diese Inhalte umzusetzen. Inzwischen sind dadurch digitale Aufgabensammlungen entstanden, die sukzessiv erweitert werden.

Mathe für kleine Asse in den Klassenstufen 1&2

Für ein Gelingen eines digitalen Förderformats des Lehr-Lern-Labors für Matheasse der Klassen 1&2 sind eine verstärkte Einbindung und Unterstützung der Eltern (z. B. als Lernbegleiter/-innen, für die Bereitstellung der benötigten Ressourcen sowie den digitalen Austausch) sowie eine große Eigeninitiative der Studierenden unverzichtbar. Zudem müssen Lernumgebungen geschaffen werden, um altersspezifische Besonderheiten der jungen Matheasse für ein mögliches Durchführen spielerisch ästhetischer und aktiv-entdeckender Knobelstunden auf Distanz zu ermöglichen. Für die Entwicklung eines Konzepts, das sowohl den aktuellen Alltagsgegebenheiten der Kinder und der Eltern wie auch der Studierenden gerecht wird, wurde eine größtmögliche Offenheit bzgl. der Durchführung von Forscherstunden ermöglicht und das Konzept prozessbegleitend adaptiert. Die Weiterentwicklung erfolgte stets durch die gesammelten Erfahrungen und konstruktiven Rückmeldungen aller Akteur/-innen.

Das Seminar und die Forscherstunden werden seitdem ohne reale Begegnungen in der Lernwerkstatt (i. d. R. durch die Nutzung von Videoveranstaltungen) zu Hause durchgeführt. Die Studierenden treffen sich alle zwei Wochen mit der Dozierenden, um theoriebasiert die vergangene digitale Knobelstunde mit den Matheassen zu analysieren und die bevorstehende didaktisch-methodisch vorzubereiten. Zwischen den digitalen Treffen erfolgen die individuellen Knobelstunden mit den Matheassen, die von den Studierenden dokumentiert werden. Demgemäß werden die Studierenden weiterhin intensiv betreut sowie begleitet und sind zugleich selbstständig für die konkrete inhaltliche, organisatorische und didaktische Umsetzung des ‚Knobelns auf Distanz' verantwortlich. Hierfür gibt es feste Patenschaften, bestehend aus einem Matheass (bzw.

[1] Vgl. Kongressthema des 3. Schweizer Kongress zur Begabungs- und Begabtenförderung www.begabungsfoerderungkongress.ch (Stand 18. 5. 2021).

einem befreundeten Knobelteam) und einem/-r Patenstudierenden. So können enge Beziehungen zwischen den Erst- und Zweitklässler/-innen und den Patenstudierenden aufgebaut werden, da besonders Kinder in diesem Alter ein starkes Bedürfnis nach einer engen persönlichen Begleitung durch eine Bezugsperson haben. Zudem werden individuelle (z. B. terminliche oder mediale) Absprachen begünstigt, sodass eine größtmögliche Offenheit bzgl. der spezifischen Bedingungen der Familien für die Durchführung berücksichtigt wird. Dieses Vorgehen ermöglicht zudem ein individuelles Eingehen auf die jeweiligen Interessen eines Kindes. Aufgrund des sehr jungen Alters der Matheasse wurde ein ‚Knobeln auf Distanz' entwickelt, bei dem von einer digitalen Aufgabenbearbeitung abgesehen wird. Die Kinder knobeln weiterhin analog mit haptischen Materialien, ohne dass ein Drucker oder zusätzliche Knobelmaterialien vorausgesetzt werden. Bis auf einzelne Knobelstunden (z. B. ‚Rund und bunt – Knobeleien mit Smarties') wurden im Haushalt oder in der Natur vorhandene Alltagsmaterialien für die Aufgabenkonzipierung berücksichtigt. So entstand ein Konzept, bei dem die Kinder ihr eigenes Zuhause und ihre nähere Umgebung ‚durch die Mathe-Brille' erkunden können. Diese konzeptionellen Rahmenbedingungen der alternativen Durchführung des *Mathe-Asse*-Projektes der Klassen 1&2 manifestierten sich über die Semester hinweg besonders durch die evaluativen Rückmeldungen der jeweiligen Akteur/-innen. Im Folgenden werden die konzeptionellen Anpassungen erläutert, die sich prozessbegleitend verändert haben.

Das *Sommersemester 2020* startete aufgrund der Kontaktbeschränkungen mit einer asynchronen Durchführung der ‚Knobelstunden auf Distanz', die einige Umstrukturierungen erforderten und die zugleich den altersspezifischen Bedingungen und der gewohnten Struktur des Projektes entsprechen sollte. Die Bereitstellung der Aufgaben und der Austausch erfolgten über digitale Medien. Die Kinder knobelten nicht ‚digital', sondern ‚analog' zu Hause mit vorhandenen Materialien und einer themenspezifischen Aufgabenauswahl aus verschiedenen Entdeckeraufgaben, einschließlich Einstiegs- und Anschlussüberlegungen, die die jeweiligen Interessen der Kinder berücksichtigten. Die Aufgaben wurden von den Studierenden alle zwei Wochen an die Patenfamilien geschickt. Die Kinder erstellten individuelle ‚Entdeckerbücher', in denen ihre Entdeckungen bildlich oder schriftlich festgehalten wurden und die somit für Rückmeldungen an die Patenstudierenden genutzt werden konnten. Die Aufgabenmaterialien wurden im Sinne einer anschlussfähigen Übergangsgestaltung für Matheasse der Klassenstufen 1&2 sowie für Kinder im Elementarbereich konzipiert. Durch das Pausieren der Projektkurse im Elementarbereich (s. o.) wurden ab dem Wintersemester 2020/2021 einzelne, interessierte Kita-Kinder in den Projektkurs der Erst- und Zweitklässler/-innen aufgenommen.

Das *Wintersemester 2020/2021* startete mit einer gemeinsamen Kennenlern- und Informationsveranstaltung für Eltern, Kinder und Studierende. Die folgenden Knobelstunden wurden und werden (*Sommersemester 2021*) weiterhin in festen Patenschaften, jedoch als Videoveranstaltung organisiert, da sich die Kinder inzwischen an digitale Formate gewöhnt haben. Hierdurch ist nun ein gemeinsames Knobeln mit den kleinen Matheassen möglich, wodurch die Eltern weiter entlastet werden und die Beziehung zu den Studierenden intensiviert wird. Zudem sind neue Möglichkeiten für das Gestalten der Forscherstunden und für das Beobachten bzw. Erfassen der mathematischen Begabungspotenziale jedes Kindes entstanden. In den Knobelstunden auf Distanz wird nach einem kindgerechten Einstieg eine zentrale Forscheraufgabe mit Möglichkeiten für das Bestimmen und Bearbeiten von Anschlussproblemen fokussiert, da die jungen Projektkinder (bereits im Sommersemester 2020) alle Aufgaben ehrgeizig und beharrlich bearbeiten möchten und oft stundenlang mit enormer Ausdauer knobeln. Zugleich werden sukzessiv themenspezifische Videos mit z. T. neuen Aufgaben entwickelt, die einen leichten und motivierenden Aufgabeneinstieg gewährleisten und ebenso eine fortführende Beziehung mit der Dozierenden ermöglichen. Auf vertrauensvolle Beziehungen zwischen den Bezugspersonen und den Kindern beim Knobeln wird ein sehr großer Wert gelegt – auch bzw. gerade beim ‚Lernen auf Distanz'. Die in Tab. 1 dargestellten Forscherstunden wurden für die jungen Matheasse im Sinne eines spielerisch-entdeckenden ‚Knobelns auf Distanz' mit Alltagsmaterialien konzipiert.

Da nicht nur außerschulische Projekte, sondern prinzipiell alle Schulen vergleichbaren Herausforderungen begegnen, wird eine Adaption der Konzeptentwicklungen auf die Schulpraxis angestrebt. Enge Kooperationen mit einzelnen Grundschulen aus dem BMBF-Projekt ‚Leistung macht Schule' (Weigand et al. 2020) ermöglichen eine explorative Weiterentwicklung der neu konzipierten Forscherthemen für den zukünftigen schulischen Einsatz. So werden die Aufgabenformate z. T. in digitalen Knobelkursen für mathematisch begabte und interessierte Kinder oder im Wechselunterricht für einen begabungsfördernden Mathematikunterricht aller Kinder eingesetzt und erprobt. Analysegespräche mit Lehrpersonen bereichern die Diskussion und tragen relevant zur Weiterentwicklung der Aufgabenmaterialien bei.

Die Umsetzung des Konzepts ‚Knobeln auf Distanz' profitiert besonders durch die Organisation

Tabelle 1. Thematische Übersicht der Knobelstunden

Sommersemester 2020	Wintersemester 2020/2021	Sommersemester 2021
▪ Osterknobeleien ▪ Würfelmathematik ▪ Naturerkunder ▪ Rund und bunt – Knobeleien mit Smarties ▪ Stäbchenmathematik – wenn nicht alles gerade läuft	▪ Das bin ich und das kann ich schon! ▪ Leonardos Entdeckungen ▪ Haus vom Nikolaus ▪ Weihnachtswerkstatt ▪ Kalenderknobeleien ▪ Kleine und große Quadrate	▪ Ei, Ei, Ei – OsterknobelEI ▪ Aufgeräumt! ▪ Unzählbar – von Null bis unendlich ▪ Schachbrettmathematik ▪ Geheimcodes – dem Unbekannten auf der Spur ▪ Das Runde muss ins Eckige

in festen Patenschaften. Sie gibt den Studierenden einen konkreten Rahmen für ein eigenverantwortliches Tun mit Möglichkeiten für flexible situative Anpassungen sowie für ein Eingehen auf individuelle Bedarfe von Kindern. Demgemäß werden die Patenschaften von den Kindern und den Eltern sehr wertgeschätzt. Die Kinder freuen sich vor allem über die Aufmerksamkeit, die ihnen allein geschenkt wird. Die Studierenden wiederum entwickeln eine große Eigeninitiative, sie setzen sich leidenschaftlich für ihre Patenschaften ein und erfüllen sehr umsichtig individuelle Wünsche der Familien. Eine weitere wichtige Erkenntnis bezieht sich darauf, dass es sehr sinnvoll ist, in den Forscherstunden mit den noch sehr jungen Kindern Aspekte der Digitalität und Analogität geschickt miteinander zu verbinden. Die ‚digital gestützte Analogität' kann die individuelle Förderung und die Freude am mathematischen Tätigsein junger Matheasse wirkungsvoll unterstützen. Insgesamt zeigt sich, dass Begriffe wie ‚individuell', ‚persönlich' und ‚analog' nicht zwangsläufig mit Präsenzformaten gleichgesetzt werden müssen.

Mathe für kleine Asse in den Klassenstufen 3 & 4

Das Konzept zur Förderung mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler/-innen wurde im Verlauf der Pandemie stetig weiterentwickelt. Im *Sommersemester 2020* wurde zunächst ein Fokus auf die Förderung der mathematisch potenziell begabten Kinder gelegt, um ihnen in einer Zeit der Ungewissheit ein gewisses Maß an Konstanz und Freude am mathematischen Tätigsein zu bieten. Da die Kenntnisse im Umgang mit den digitalen Medien, wie z. B. Videokonferenzen, sowie die technischen Voraussetzungen in den Familien im April 2020 noch nicht ausreichend vorhanden waren, wurde zunächst eine ‚Mischform' zwischen digitaler und analoger Förderung entwickelt. Die für die Förderung in Präsenz geplanten offenen, substanziellen Aufgabenfelder wurden so adaptiert, dass sie von den Kindern selbstständig ohne weitere Instruktion bearbeitet werden konnten. Dies implizierte, dass den Aufgaben zunächst ein kleiner ‚Brief' an die Matheasse vorangestellt war, aus dem eine thematische Einordnung der Aufgaben, mögliche Alltagsmaterialien, die als Anschauungsmittel dienen können, sowie jeweils eine ‚lustige Knobelei' als motivierender Einstieg hervorging. Anschließend konnten die Kinder die Forscheraufgaben selbstständig bearbeiten und ihre Lösungen per E-Mail an ihre Patenstudierenden versenden, von denen sie dann ein Feedback erhielten. Diese Kommunikationsformen waren umsetzbar, da die Dritt- und Viertklässler/-innen i. A. in ausreichendem Maße Grundkompetenzen im Lesen und Schreiben sowie Selbstregulationskompetenzen besaßen.

Um weiterhin auch die Studierenden im Rahmen des Lehr-Lern-Labors hinsichtlich Lehre und Studium einzubeziehen und eine individuelle Betreuung der Kinder zu ermöglichen, wurden Patenschaften zwischen jeweils zwei bis drei Studierenden und etwa vier Kindern gebildet. Hilfreich für die von den Studierenden zu verfassenden Feedbacks waren Reflexionsbögen, auf denen die Kinder jeweils im Anschluss an das Bearbeiten der Knobelaufgaben einschätzten, ob sie mit ihren Lösungen zufrieden sind, was ihnen besonders schwergefallen ist oder woran sie besonders Spaß hatten. Darüber hinaus konnten sich die Studierenden beim Anfertigen der Feedbacks an kindgerechten Rückmeldemustern orientieren, die ihnen zur Verfügung gestellt wurden. In einer alle zwei Wochen stattfindenden Videoveranstaltung tauschten sich die Studierenden mit den Lehrenden über inhaltliche und organisatorische Fragen aus – auch, um zu einer Weiterentwicklung des Förderkonzepts zu gelangen. Diese wurde ferner durch Fragebögen gestützt, die die Matheasse am Ende des Sommersemesters 2020 ausfüllten. Es stellte sich u. a. heraus, dass die Kinder sehr dankbar für die Möglichkeit waren, weiterhin ihrer Leidenschaft des Knobelns nachgehen zu können, sie allerdings insbesondere den persönlichen Kontakt untereinander sowie zu den Studierenden und den Lehrenden vermissten.

Mit dem Start des *Wintersemesters 2020/2021* (sowie im *Sommersemester 2021*) wurde den Kindern und den Studierenden deshalb die Möglichkeit gegeben, die bereitgestellten offenen, substanziellen Aufgabenfelder im Rahmen der Patenschaften in Videoveranstaltungen gemeinsam zu bearbeiten. Da die Kinder in der Zwischenzeit viele Erfahrungen im Umgang mit den digitalen Medien sammeln konnten, war dieses Format für sie kein Problem mehr. Eine digitale Forscherstunde startet i. d. R. mit einem durch die Lehrenden erstellten Video, das als Einstieg in die Knobelstunde dient. Es ordnet das Aufgabenfeld thematisch ein und enthält eine erste Problemaufgabe, die die Kinder anschließend lösen. Ziel der Einstiegsvideos ist es, die Matheasse für die anstehende Knobelstunde zu motivieren und ihnen zugleich ein vertrautes ‚Einstiegsritual' für die Forscherstunde anzubieten. Darüber hinaus wird u. a. durch die direkte Ansprache der Matheasse eine (emotionale) Identifikation mit dem *Mathe-Asse*-Projekt angestrebt. An das Einstiegsproblem schließen sich das Bearbeiten von komplexen Forscheraufgaben sowie die Lösungspräsentation und -diskussion an. In diesen Phasen werden die digitalen Kommunikationsmöglichkeiten der Videoveranstaltung (z. B. Breakout-Sessions, Schreib- und Zeichenfunktionen, Teilen von Präsentationen & ‚Tipp-Karten') genutzt, um einen Austausch beim Bearbeiten der Aufgaben sowie im Rahmen der Präsentation und Reflexion anzuregen. Die Studierenden stehen den Kindern im Problemlöseprozess als Ansprechpartner/-innen zur Verfügung, halten sich allerdings größtenteils zurück, respektieren die individuell bevorzugten Vorgehensweisen und Ideen der Kinder und animieren sie lediglich, ihre eigenen Ideen zu entwickeln und weiterzuverfolgen. Jede digitale Knobelstunde endet mit einem Feedback der Studierenden an die Matheasse.

Die Möglichkeit der Videokonferenzen ist in vielerlei Hinsicht bedeutsam: Die Kinder erhalten ihre Rückmeldungen nun nicht mehr zeitversetzt und auf dem schriftlichen Weg, sondern direkt im Anschluss an das Bearbeiten der Aufgaben, sodass die Rückmeldungen spezifischer auf die individuellen Problemlöseprozesse der Kinder abgestimmt sind. Zudem können die Kinder ihre Fragen zu Problemlöseprozessen direkt an die Studierenden richten, sodass ein besseres Verständnis der Aufgaben wie auch der Lösungsideen garantiert werden kann. Für die Kinder ergibt sich zudem durch die Anwesenheit weiterer Matheasse die Chance zu einem sozialen Austausch, der für sie motivierend sein kann und das Selbstbewusstsein hinsichtlich ihrer Interessen bzw. ihrer potenziellen Begabungen zu stärken vermag. Dadurch, dass die Videoveranstaltungen den Studierenden nun das Beobachten von Problemlöseprozessen der Kinder (zumindest z. T.) erlauben, können verschiedene Beobachtungsschwerpunkte (z. B. hinsichtlich des Begabungspotenzials oder individueller Ausprägungen mathematischer Begabungen) gesetzt und differenzierter erfasst werden. Grenzen ergeben sich hinsichtlich des Beobachtungsfeldes. So kann die Kamera entweder den Kopf des Kindes – und damit z. B. Gestik und Mimik – oder die Hände des Kindes inklusive Arbeitsmaterialien filmen. Demgemäß sollte die Kameraeinstellung je nach Beobachtungsschwerpunkt angepasst werden. Eine ganzheitliche Betrachtung aller Aspekte ist im Gegensatz zu einer Präsenzsituation durch die Beschaffenheit der digitalen Endgeräte zumeist nicht möglich.

Nach den digitalen Forscherstunden in den Patenschaftsteams schließt sich eine Videokonferenz mit den Studierenden und den Lehrenden an. Schwerpunkte sind eine gemeinsame theoriebasierte Auswertung organisatorischer, inhaltlicher und didaktischer Aspekte der erlebten Forscherstunden und Analysen von Kinderlösungen, besonderen Leistungen sowie von Lern- und Problemlösestilen der Kinder. Zudem wird die inhaltliche und didaktische Planung der folgenden Knobelstunde durch die Lehrenden erläutert. Die durchgeführten Reflexionen der Forscherstunden sind im Rahmen von Studium und Lehre, aber auch im Rahmen der Forschung bedeutungsvoll, da eine theoriebasierte Reflexion zu authentischen Problembearbeitungsprozessen sowie eine tiefgehende didaktische Analyse zu real erlebten Lernumgebungen in den Forscherstunden durchgeführt wird. Um eine ganzheitliche Sicht auf jedes einzelne Kind zu gewährleisten, ist neben der prozessbegleitenden Diagnostik des individuellen Begabungsprofils das Einbeziehen weiterführender Informationen u. a. zu Persönlichkeitseigenschaften oder zum (sozialen) Umfeld wichtig. Dies wird u. a. durch individuelle Elterngespräche oder Elternabende ermöglicht, die über Telefongespräche oder Videoveranstaltungen durchgeführt werden. Insgesamt zeigt sich, dass das digitale Förderkonzept auch neue Chancen für den Erwerb von Professionskompetenzen für Studierende bietet.

Zwischenbilanz: *Mathe für kleine Asse* – analog und digital!

Die digitale Durchführung des Lehr-Lern-Labors *Mathe für kleine Asse* war und ist ein ‚Kraftakt', der oft von fundamentalen Fragen, wie „Geht das?" und wenn ja, „Wie geht das?", begleitet wurde. Anfangs schien es (nur) eine wochenweise ‚Überbrückung' der eigentlichen Projektgestaltung durch ein digitales Format zu sein. Demgemäß setzten wir auf eine Projektplanung und -umsetzung mit möglichst wenigen (z. B. thematischen) Änderungen von Präsenz- auf Distanzlernen. Nach der Verstetigung und Professionalisierung des ‚Lehrens & Lernens auf Distanz' in den letzten Monaten zeigte sich, dass digitale Elemente eine Ergänzung zu den Präsenzkonzepten darstellen könnten.

Resümierend lässt sich festhalten, dass im Laufe der Zeit Konzepte für das Projekt *Mathe für kleine Asse* entwickelt wurden, die dem ‚Lehren & Lernen auf Distanz' entsprechen und durch die im Wesentlichen die drei Wirkungsfelder des Lehr-Lern-Labors (Brüning 2018) aufrechterhalten werden konnten: Es findet weiterhin eine Förderung mathematisch begabter und interessierter Kinder statt und die Studierenden können im Rahmen ihres Studiums wertvolle Erfahrungen hinsichtlich der Diagnose und Förderung mathematisch potenziell begabter Kinder sammeln. Auch Forschungen u. a. zur Kennzeichnung und Entwicklung sowie zu individuellen Ausprägungen mathematischer Begabungen sind über den digitalen Kommunikationsweg weiterhin möglich. Zudem bieten sich Forschungen zur digitalen Förderung mathematisch potenziell begabter Kinder an, die u. a. durch das Schreiben von Abschlussarbeiten realisiert werden. Als entscheidend für den Prozess der Realisierung einer digitalen Projektdurchführung betrachten wir die überdurchschnittlich hohe Motivation der Studierenden und die Bereitschaft der Familien, sich auf dieses ‚Experiment' einzulassen. Gerade mit dem zeitintensiven Engagement aller Beteiligten ist es uns inzwischen möglich, die vielfältigen Herausforderungen gemeinsam zu meistern. Diese Einschätzungen zur digitalen Projektdurchführung lassen sich auch mit vielen Rückmeldungen der Kinder (Bild), Eltern (erstes Zitat), Studierenden (zweites Zitat) und pädagogischen Fachkräfte beispielhaft belegen:

Die digitale Alternative war sehr gut vorbereitet! Super Erklärvideos, Einsatz von Alltagsmaterialien. An der Umsetzung der digitalen Alternative finden wir nichts Negatives und dennoch wäre es schöner, wenn die Kinder vor Ort knobeln könnten, weil der Kontakt zwischen den Studierenden und den Kindern dann noch persönlicher ist und die Beobachtungen für die Studierenden bestimmt auch einfacher sind.

Ich finde es schön, dass Studierende die Möglichkeit bekommen haben, das Projekt trotz der Corona Krise wahrzunehmen. Denn Mathe für kleine Asse bietet vielfältige Möglichkeiten für mathematisch begabte Kinder. Ihre Kreativität, Fantasie, mathematische Sensibilität und die Freude am Problemlösen werden angeregt. Diese Kinder erfahren eine abwechslungsreiche und ausreichende Förderung und entwickeln ein vielfältiges Bild des mathematischen Tuns. [. . .] es sollte verhindert werden, dass der Spaß und die Freude am Mathematikunterricht verloren geht.

Lehr-Lern-Labore sind wichtige universitäre Begegnungsorte und bedürfen u. E. auch zukünftig an Präsenz. Für das Lehr-Lern-Labor *Mathe für kleine Asse* sind digitale Elemente aber inzwischen zu einer sinnstiftenden Ergänzung geworden, die es unter den Herausforderungen forschenden und begabungsfördernden ‚Lernens auf Distanz' im laufenden Prozess immer weiter zu modifizieren gilt, um individuelle mathematische Potenziale nachhaltig zu fördern. Demgemäß verstehen wir das ‚Lehren & Lernen auf Distanz' als eine Verknüpfung von ‚digitalen Tools' mit der ‚analogen Lebenswirklichkeit' der Kinder, sodass dieses zu authentischen Lernergebnissen führt. Damit verbunden sind vielfältige didaktisch-methodische sowie organisatorische Herausforderungen, die es abschließend aufzulisten gilt und von denen wir uns erhoffen, dass sie wertvolle Impulse für vergleichbare Lehr-Lern-Labore im MINT-Bereich bieten:

- Erhalt der Spezifika hinsichtlich der Vorgabe von offenen, mathematisch substanziellen ‚Forscheraufgaben',
- Kommunikationswege in Form von individuellen, persönlichen An- und Absprachen, Themeneinführungen,
- Möglichkeiten des Erfassens und Analysierens von Lösungsideen und Vorgehensweisen beim Problemlösen,
- Möglichkeiten der Organisation einer individuellen Lernbegleitung,
- Möglichkeiten der Organisation kooperativer Lernformen.

Die durch die ‚coronabedingten' Einschränkungen bestehenden Herausforderungen bieten demgemäß vielfältige Chancen: Neue Organisationsformate mittels digitaler Kommunikation, adaptive sowie neu konzipierte Aufgaben(präsentationen) sowie neue Tätigkeitsfelder und eine enge Zusammenarbeit mit Studierenden und Eltern. Notwendige Voraussetzungen für das Nutzen der Chancen sind die Bereitschaft zum Entwickeln kreativer neuer Ideen, eine überdurchschnittliche Motivation bzw. Leidenschaft einzelner sowie eine vertrauensvolle Zusammenarbeit mit allen beteiligten Personenkreisen. Unsere Erfahrungen verdeutlichen, dass es nicht das eine ‚perfekte' Konzept gibt, welches vor adaptiven Weiterentwicklungen immun und auf alle Altersgruppen anwendbar ist.

Mit Blick auf die Zukunft könnten die Konzeptideen zum ‚Lehren & Lernen auf Distanz' eine Chance darstellen, kleine Matheasse weiterhin auch dann angemessen digital zu diagnostizieren und zu fördern, wenn z. B. eine Anwesenheit in Präsenz durch lange Fahrtzeiten oder andere Gründe nicht möglich ist. Dennoch ist der Mehraufwand durch eine stets digitale Kommunikation aufgrund des Wegfalls der ‚Tür-und-Angel-Gespräche' sowie der Entwicklung altersgerechter und digital bereitstellbarer, schöner Aufgabenformate für ein gelingendes Knobeln auf Distanz nicht zu unterschätzen.

Die Umstellung unserer Lehr-Lern-Labor-Aktivitäten in den Jahrgangsgruppen 5 bis 9 vollzog sich übrigens relativ problemlos. Diesbezüglich konnten wir auf bereits vorhandene sehr beachtliche Computerkenntnisse und -interessen der Schüler/-innen und der Studierenden, ebenso auf eine in den Vorjahren entwickelte vertrauensvolle Zusammenarbeit mit den Eltern aufbauen. Zudem erwies sich das adaptive Anpassen der Aufgabenmaterialien an digitale Formate als relativ leicht realisierbar. Außerdem etablierten wir in den Gruppen der Sekundarstufe neue Organisationsformate, wie ‚Escape-Rooms', die wir inzwischen auch adaptiv auf unsere Dritt- und Viertklässler/-innen-Gruppen übertragen. Insofern sind wir weiterhin in einem permanenten Entwicklungsprozess – entsprechend dem ‚Wesen' von Lehr-Lern-Laboren.

Literatur

Benölken, R., Berlinger, N., & Veber, M. (2018). *Alle zusammen! Offene, substanzielle Problemfelder als Gestaltungsbaustein für inklusiven Mathematikunterricht.* Münster: WTM.

Brüning, A.-K. (2018). *Das Lehr-Lern-Labor „Mathe für kleine Asse". Untersuchungen zu Effekten der Teilnahme auf die professionellen Kompetenzen der Studierenden.* Münster: WTM.

Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse" – Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematische begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 138–151). Münster: LIT.

Käpnick, F., & Fuchs, M. (2009). *Mathe für kleine Asse 3./4. Klasse* (Band 2). Berlin: Cornelsen.

Fuchs, M. (2015). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Meyer, K. (2015). *Mathematisch begabte Kinder im Vorschulalter. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung zur Entwicklung mathematischer Begabungen bei vier- bis sechsjährigen Kinder.* Münster: WTM.

Strübbe, F., Kaiser, J., Dexel, T. & Käpnick, F. (2020). Mathematische Begabungsförderung in Kitas und im Anfangsunterricht. Einblicke in das Projekt „Mathe für kleine Asse". In F. Fischer, C. Fischer-Ontrup, F. Käpnick, N. Neuber, C. Solzbacher & P. Zwitserlood (Hrsg.), *Begabungsförderung, Leistungsentwicklung, Begabungsgerechtigkeit – für alle! Beiträge aus der Begabungsforschung* (S. 171–179). Münster: Waxmann.

Weigand, G., Fischer, Ch., Käpnick, F., Perleth, Ch., Preckel, F., Vock, M., & Wollersheim, H.-W. (2020). *Leistung macht Schule. Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler.* Weinheim, Basel: Beltz.

Friedhelm Käpnick, WWU Münster
E-Mail: kaepni@uni-muenster.de

Julia Kaiser, WWU Münster
E-Mail: j.kaiser@uni-muenster.de

Franziska Strübbe, WWU Münster
E-Mail: struebbe@uni-muenster.de

Alena Witte, WWU Münster
E-Mail: alena.witte@uni-muenster.de

Virtuelles Lernteamcoaching im Modul Statistik im Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen an der htw saar

Fördern von Selbstorganisation und Gruppenarbeit im virtuellen Raum im Rahmen eines mathematischen Moduls

Susan Pulham, Sebastian Frei und Frank Kneip

Einführung in das Konzept des Lernteamcoachings

Das Lernteamcoaching (im Folgenden mit LTC abgekürzt) basiert auf der Erkenntnis, dass Lernende nur das wirklich gut verstehen und anwenden können, was sie selbst ko-konstruktiv erarbeitet haben (Pfäffli, 2015). LTC ist eine Methode, die dieses Selbstlernen durch Teamlernen und Dozierenden-Coaching unterstützt. Dazu werden die drei im Folgenden beschriebenen und in Abbildung 1 dargestellten Phasen konsekutiv durchlaufen (Fleischmann, Geupel & Lorbeer, 2014).

Voraussetzung für den Einsatz von LTC ist, dass der zu erarbeitende Stoff in einzelne Lektionen aufgeteilt werden kann und diese so aufbereitet wurden (z. B. in Skriptform und mit Videos), dass ein Selbstlernen möglich ist. Mit der jeweils aktuellen Lektion gehen die Studierenden in die Phase 1 „individuelles Selbstlernen" (Einzelarbeit). Darin arbeiten die Studierenden im Selbststudium die Lektion durch und notieren alle Punkte, die ihnen unklar bleiben. In der Phase 2 „selbstorganisiertes Lernen im Team" treffen sich die Studierenden in Lernteams, um die individuell offenen Fragen aus Phase 1 zu besprechen. Die Lernteams bereiten einen „Problemspeicher" für die Phase 3 vor und bringen diesen in jedes Coaching mit der Dozentin bzw. dem Dozenten mit. Der Problemspeicher ist wie folgt gegliedert:

- Diese Punkte haben wir gut verstanden
- Diese Punkte sind uns unklar
- Diese Punkte sind uns für das Gespräch am wichtigsten
- So sind wir beim Lernen und im Lernteam vorgegangen
- Dies waren unsere Probleme beim Lernen und im Lernteam

Die Phase 3 „begleitetes Lernen im Team" umfasst die regelmäßigen Coachingtermine mit der Dozentin bzw. dem Dozenten. Im dargestellten Fall findet jede Woche für jedes Lernteam ein Treffen à 45 Minuten statt. Darin präsentiert das Lernteam seine Ergebnisse und den Problemspeicher. Anschließend werden die offenen Fragen gemeinsam geklärt, Lernprobleme besprochen und der Teamprozess reflektiert. Die Coachingtermine sind ebenfalls in drei Phasen gegliedert:

(1) Kontraktphase (ca. 5–7 Minuten): Diese Phase umfasst die Vorstellung der Rollen während der Sitzung, des Problemspeichers und die Priorisierung der offenen Fragen im Lernteam durch den Moderator. Dadurch wird die Agenda des Coachings aufgestellt.
(2) Kernphase (ca. 30 Minuten): Die Kernphase dient der Klärung der inhaltlichen Verständnisprobleme. Dabei erforschen Dozierende und Studierende gemeinsam den Lerngegenstand.

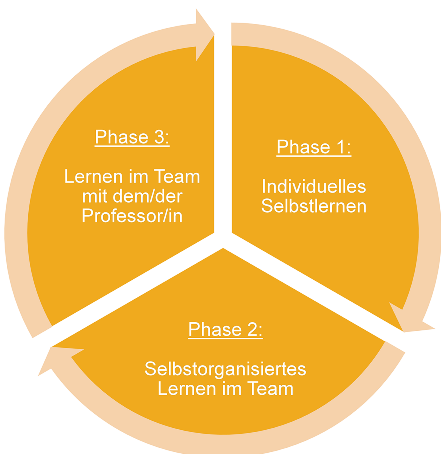


Abbildung 1. Phasen des Lernteamcoachings (angelehnt an Buß, 2015)

Die Aufgabe der Dozierenden ist hierbei die Studierenden zu coachen, indem insbesondere die individuellen Wissenslücken und Verständnisbarrieren der Lernteams identifiziert werden und nicht, wie gewohnt, der Stoff einfach nur vorgetragen wird. Dadurch wird insbesondere das individuelle Verständnis, auch in Abhängigkeit des vorherigen Wissenstandes, gesteigert.

(3) Abschlussphase (ca. 5–7 Minuten): Der Protokollant fasst am Ende der Sitzung die inhaltlichen Ergebnisse zusammen. Anschließend werden das Coaching und das gemeinsame Lernen reflektiert sowie geklärt, was offengeblieben ist und wie damit weiter verfahren wird. Abschließend wird die Rollenaufteilung (Moderation, Zeitnahme, Protokoll) für das nächste Coaching festgelegt. Dabei wird darauf geachtet, dass jeder Studierende jede Rolle mindestens einmal innehatte. Am Ende des jeweiligen Coachings wird die nächste Lektion ausgegeben und die Prozessphasen des LTCs werden aufs Neue durchlaufen.

Konkretisierung des LTC im Modul Statistik im Bachelor-Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen an der htw saar

Mathematische Module stellen Studierende, die sich für einen Studiengang entschieden haben, in dem Mathematik als Hilfswissenschaft eingebunden ist, häufig vor große Herausforderungen. Insbesondere die im Vergleich zur Schule veränderte Didaktik führt zu Schwierigkeiten auf Seiten der Studierenden (Hunneshagen, 2020), die im Extremfall auch zum Studienabbruch führen können (Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer & Besuch, 2010). Um diesen Herausforderungen zu begegnen und den Kompetenzerwerb der Studierenden zu fördern, wird seit 2017 das Konzept des LTC im Modul Statistik angewendet. Ursprünglich wurde das LTC in Präsenzform durchgeführt, eLearning-Elemente wurden aber von Beginn an eingebunden. Seit 2020 (pandemiebedingt) wird das LTC rein virtuell durchgeführt.

Aufbereitung des Lernstoffs

Die Lernumgebung des Moduls wurde unter den Aspekten „Was sollte synchron erarbeitet werden und was kann asynchron präsentiert werden?“ sowie „Was sollte individuell erarbeitet werden und was kann im Team erarbeitet werden?“ konzipiert (Biggs & Tang, 2011).

Der Lernstoff des Moduls liegt als Studienbrief (Druckversion und pdf-Datei) mit theoretischen Erläuterungen und 33 einführende Übungsaufgaben mit vollständig ausgeführten Lösungswegen vor. Zusätzlich wurden alle Inhalte des Studienbriefs von der Dozentin in Videoaufzeichnungen vorgetragen und vom eLearning-Team der htw saar in inhaltlich strukturierte kurze Videos geschnitten und ansprechend aufbereitet (einheitliches Intro mit Musik, Vorspann mit Inhaltsverzeichnis). Zusätzliche 80 kompliziertere Aufgaben mit Endergebnissen stehen den Studierenden zum Üben zur Verfügung. Alle relevanten Inhalte des Moduls werden den Studierenden im Kurs des Moduls auf der hochschuleigenen Lernplattform (moodle) bereitgestellt. Ein Ausschnitt ist in Abbildung 2 dargestellt.

Zu jedem der vier Kapitel des Moduls (univariate deskriptive Statistik, bivariate deskriptive Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, induktive Statistik) wurden Testataufgabenblätter mit drei bis fünf

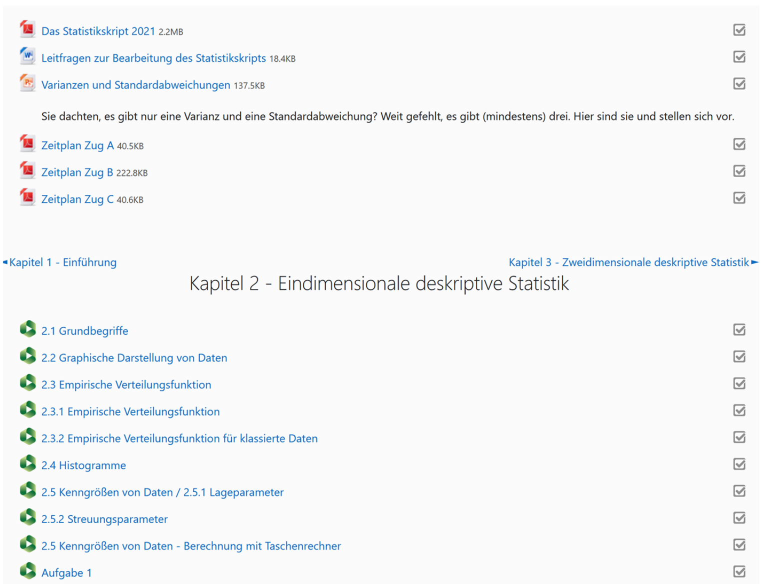


Abbildung 2. Ausschnitt aus dem moodle-Kurs Statistik im Bachelor-Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen der htw saar

Termin	Datum Coaching	Datum Präsentation	KW	Thema Sitzung	zu bearbeitende Übungsaufgaben bis zum Coachingtermin
1	13.04.2021		15	Einführung, Mathe-MAX, didaktisches Konzept, LTC, Gruppeneinteilung, Kapitel 1	
2	20.04.2021		16	Kapitel 2	Skript: A1, A2, A3; A9 LaNadeMa (Aufgaben zu Kapitel 2)
3		27.04.2021	17	Testat 1	
4	04.05.2021		18	Kapitel 3; Taschenrechnernutzung	Skript: A4, A5, A6
5		11.05.2021	19	Testat 2	
6	18.05.2021		20	Kapitel 4.1 und 4.2	Skript: A7, A8, A9, A10, A11; A5 und A8 LaNadeMa (Aufgaben zu Kapitel 4)
7		25.05.2021	21	Testat 3	
8	01.06.2021		22	Kapitel 4.3, 4.4 und 4.5.1	Skript: A12, A13, A14, A15, A16
9		08.06.2021	23	Testat 4	
10	15.06.2021		24	Kapitel 4.5.2, 4.6, 4.7 und 4.8	Skript: A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23
11		22.06.2002	25	Testat 5	
12	29.06.2021		26	Kapitel 5.1	Skript: A24, A25, A26, A27, A28
13		06.07.2021	27	Testat 6	
14	13.07.2021		28	Kapitel 5.2	Skript: A29, A30, A31, A32, A33, A34
15		20.07.2021	29	Testat 7	
16	zu terminieren in der vorlesungsfreien Zeit		33	Wiederholungstermin und Fragestunde	
17			34	Klausur	

Abbildung 3. Zeitplan für das Modul Statistik im Sommersemester 2021

anspruchsvollen Aufgaben erstellt, zu denen keine Musterlösungen existieren. Diese Testataufgaben werden über einen Zeitraum von 14 Tagen von den Lernteams bearbeitet.

Organisatorische Umsetzung des LTC

Zu Beginn eines Semesters werden die etwa 120 Studierenden im zweiten Semester des Bachelor-Studiengangs Wirtschaftsingenieurwesen in 12 Lernteams zu je etwa zehn Personen eingeteilt. Diese Lernteams arbeiten für ein Semester zusammen an den Lerninhalten des Moduls. Für die 15 Wochen des Semesters wird liegt den Studierenden ein Zeitplan vor, aus dem ersichtlich ist, welche Abschnitte des Studienbriefs, welche Videos und Übungsaufgaben in der entsprechenden Woche bearbeitet werden sollen. Exemplarisch ist der Zeitplan des aktuellen Sommersemesters in Abbildung 2 dargestellt.

Jede Woche hat jedes Lernteam mit der Dozentin ein Treffen für 45 Minuten. Dabei finden im wöchentlichen Wechsel Coching- und Testattermine statt.

Im Coachingtermin stellt das Lernteam Fragen, die innerhalb des Lernteams nicht geklärt werden konnten. Bis zum Abend vor dem Testattermin lädt das jeweilige Lernteam seine Bearbeitung als pdf-Datei auf die eLearning-Plattform hoch. Im Testattermin präsentiert das Lernteam die Bearbeitung und beantwortet Fragen der Dozentin zu den Testaaufgaben und zu theoretischen Inhalten des betreffenden Kapitels des Studienbriefs. Eine Vorlesung im traditionellen Sinn findet nicht statt.

Anreize zur Motivation der Studierenden

Insgesamt werden im Laufe des Semesters sieben Testatblätter zur Verfügung gestellt, die von den Lernteams bearbeitet werden. Bei erfolgreicher Bearbeitung von mindestens sechs der sieben Testatblätter erhalten alle Mitglieder des betreffenden Lernteams einen Bonus von 5 %-Punkten auf die Leistung in der Modulabschlussprüfung. Dieses gilt aber nur für die reguläre Klausur, der Bonus verfällt, wenn die/der Studierende nicht an der Prüfung teilnimmt oder trotz Bonus die Prüfung nicht besteht. Hiermit wird bezweckt, dass die Studierenden das Modul im vorgesehenen (zweiten) Semester ihres Studiums abschließen.

Virtualisierung des LTC im Modul Statistik im Sommersemester 2020 und 2021

Im März 2020 zeichnete es sich ab, dass die Lehrveranstaltungen an der htw saar komplett auf Fernlehrformate umgestellt werden mussten. Die Umstellung im Modul Statistik erfolgte sehr unkompliziert, da lediglich die physischen Präsenztermine auf virtuelle Präsenztermine umgestellt werden mussten. Um die Studierenden über die Veränderungen zu informieren, wurde in der Woche vor Vorlesungsbeginn eine virtuelle Informationsveranstaltung durchgeführt, die auch aufgezeichnet und in moodle bereitgestellt wurde. Die Zuordnung der Studierenden zu ihren Lernteams wurde bereits vorab per Zufallsauswahl durch die Dozentin vorgenommen. Alle Studierenden, die in den Bachelor-Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen eingeschrieben waren und die das Modul Statistik noch nicht erfolgreich absolviert hatten, wurden dem moodle-Kurs zugeordnet. Zusätzlich wurde ein MS-Teams Team zum Modul Statistik erstellt, dem diese Studierenden ebenfalls zugeordnet wurden. Für jedes Lernteam wurde ein privater Kanal erstellt, zu dem nur die jeweiligen Teammitglieder Zugang haben. In diesem Kanal können die Mitglieder unabhängig von der Dozentin chatten, Videokonferenzen abhalten, Dateien austauschen. Ein Ausschnitt aus dem Team ist in Abbildung 4 dargestellt.

Der erste virtuelle Präsenztermin wird in jedem Semester zum Kennenlernen der Teammitglieder und der Dozentin genutzt. Zudem werden organisatorische Fragen geklärt. Eine Woche später startet das erste Coachingtreffen, wiederum eine Woche später finden die erste Testatabgabe und der erste Testattermin statt.

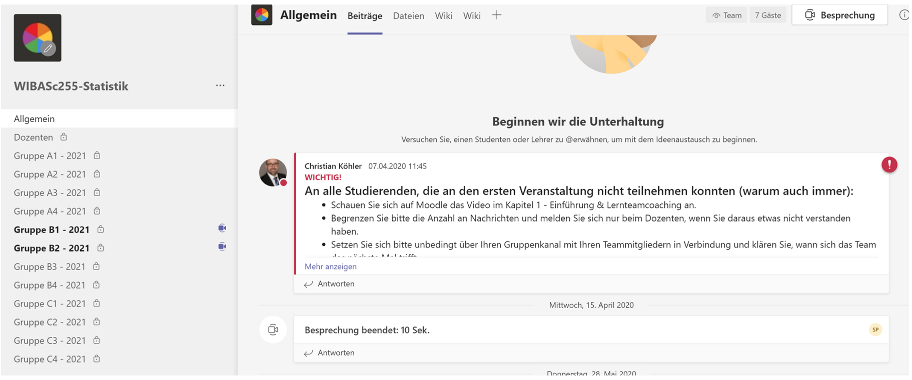


Abbildung 4. Das MS-Teams Team zum Modul Statistik

Erfahrungen mit dem LTC im Modul Statistik

Erfahrungen mit der Variante in physischer Präsenz
Die Studierenden arbeiten seit der didaktischen Umstellung selbstständiger mit den Inhalten des Moduls. Da es keine Vorlesung im klassischen Sinn des Wortes mehr gibt, müssen sich alle Studierenden selbst organisieren, wie sie die Lerninhalte rezipieren. Etwa drei Viertel der Studierenden nehmen am Lernteamcoaching teil und arbeiten in den Lernteams. Die Studierenden setzen sich früher mit den Veranstaltungsinhalten auseinander, als es vor Einführung des LTC der Fall gewesen ist. Das zeigt sich unter anderem darin, dass die Qualität der Fragen, die in den Coaching- und Testatsitzungen gestellt werden, weitaus höher ist als die der Fragen, die in früheren Semestern während der Vorlesungstermine gestellt wurden. Nicht alle Studierenden nehmen bis zum Ende der Vorlesungszeit aktiv am Lernteamcoaching teil. Die Abbruchquote liegt bei etwa 30 %. Eine Ursachenanalyse hat ergeben, dass häufige Gründe für einen Abbruch in der vergleichsweisen hohen Arbeitsbelastung durch das Lernteamcoaching liegen, die mit Wiederholungsprüfungen (die an der htw saar während des Folgesemesters angeboten werden) und Nebentätigkeiten kollidieren.

Erfahrungen mit dem virtuellen Lernteamcoaching
Es zeigte sich, dass die Umstellung des LTC auf die virtuelle Form im Sommersemester 2020 kurzfristig wenn auch unter Einsatz einiger Ressourcen möglich war. Der Übergang in den virtuellen Raum wurde von den Studierenden gut angenommen. Durch die Teamarbeit und die starke Strukturierung des Veranstaltungsstoffes berichteten viele Studierende, dass es ihnen leichter fiel, ihren Lernalltag zu strukturieren. Es wurden einige technische Schwierigkeiten berichtet, die sich auf mangelnde Hardware, schlechten Internetzugang und fehlende Kenntnisse im Umgang mit den eingesetzten Tools bezogen. Durch massive Unterstützung durch das IT-Team (Leihgeräte, Telefonsupport etc.) der Fakultät konnten die meisten der berichteten Schwierigkeiten beseitigt werden.

Im Sommersemester 2021 ist die Situation dahingehend verändert, dass der größte Teil der Teilnehmer:innen noch keine Erfahrungen mit Hochschullehre in Präsenz machen konnte. Technische Schwierigkeiten werden kaum mehr berichtet, auch der Umgang mit virtueller Lehre ist für die Studierenden mittlerweile selbstverständlich. Stattdessen berichten die Studierenden vermehrt von sozialer Isolation, Antriebslosigkeit und Traurigkeit. Das Lernteamcoaching wurde im Wintersemester 2020/2021 mit dem gleichen Konzept auch in der Veranstaltung Mathematik 1 für die Erstsemester im Bachelor-Studiengang durchgeführt, so dass auch das Prinzip des LTC bei den Teilnehmer:innen bekannt ist. Es wurde schon im ersten Semester sehr positiv von den Studierenden aufgenommen, da hierdurch der soziale Austausch unter den Studierenden ermöglicht bzw. gefördert wurde. Eine erste Auswertung der Kommunikation in den Kanälen des MS-Teams Teams zeigt, dass die Kommunikationsmöglichkeiten von den Studierenden intensiv genutzt werden. Foren im moodle-Kurs werden hingegen nach wie vor nicht genutzt. Die Kommunikation der Studierenden mit der Dozentin hat sich im letzten Jahr ebenfalls verändert. Während vor der Virtualisierung trotz Aufforderung nur sehr selten Fragen außerhalb der Veranstaltung (und dann in erster Linie per eMail) gestellt wurden, ist es nun eher üblich, eine kurze Teams-Nachricht mit fachlichen und organisatorischen Fragen zu stellen.

Evaluation des virtuellen Lernteamscoachings
Am Ende des Sommersemesters 2020 wurde mit den Teilnehmer:innen des Moduls Statistik ein digitales Teaching Analysis Poll (TAP) durchgeführt (Snooks, Neeley & Williamson, 2004). Im Rahmen des TAPs führte eine Mitarbeiterin der Hochschuldidaktik in Abwesenheit der Dozentin standardisierte Feedbackgespräche mit den Studierenden. Ergebnis

des TAPs war eine sehr hohe Zufriedenheit der Studierenden mit dem Modul Statistik. Es wurde ein freiwilliger zentraler Präsenztermin mit der Dozentin angeregt. Dieser wird im Sommersemester 2021 angeboten und von den Studierenden gut angenommen.

Parallel wurde eine systematische Evaluation mit mehreren Messzeitpunkten durch die Dozentin durchgeführt, um Wirkungen des LTC auf den Studienerfolg im Modul Statistik zu eruieren. Noch stehen nicht alle Ergebnisse zur Verfügung, aber erste Auswertungen zeigen, dass das Interesse der Studierenden über die Messzeitpunkte hinweg zunahm, dass Studierende, die nicht am LTC teilgenommen haben, im Sommersemester 2020 auch meistens nicht an der Abschlussprüfung teilgenommen haben, und dass die Klausurergebnisse der Teilnehmer:innen am LTC über denen der wenigen Nichtteilnehmer:innen lagen.

Aktuell erfolgt eine qualitative Untersuchung, bei der die Studierenden des zweiten Semesters zu den Erfahrungen mit der Online-Lehre im Studiengang Wirtschaftsingenieurwesen befragt werden. Die Ergebnisse liegen noch nicht vor.

Literaturverzeichnis

Biggs, J. B. & Tang, C. S.-k. (2011). *Teaching for quality learning at university. What the student does* (SRHE and Open University Press imprint, 4. ed.). Maidenhead: McGraw-Hill Society for Research into Higher Education & Open University Press.

Buß, I. (Stabstelle Studium und Lehre Hochschuldidaktik Ludwigshafen-Worms, Hrsg.). (2015). *Lernteam-Coaching*, Hochschule Worms; Hochschule Ludwigshafen am Rhein. Verfügbar unter: www.hwg-lu.de/fileadmin/user_upload/service/studium-und-lehre/hochschuldidaktik/Lernteam-Coaching_2015.pdf

Fleischmann, P., Geupel, H. & Lorbeer, B. (Fortbildungszentrum Hochschullehre, Hrsg.). (2014). *Lernteamcoaching. Eine Methode zur Föderung des eigenverantwortlichen und kooperativen Lernens*, Fachhochschule Heilbronn. Schriften zur Hochschuldidaktik. Verfügbar unter: www.blog.fbzhl.de/publikationen/kurzinfos/lernteamcoaching/

Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D. & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08* (Forum Hochschule, Bd. 2). Hannover: HIS.

Hunneshagen, C. (2020). *Mathematische Schwierigkeiten zum Studienbeginn. Eine Studie zur Übergangsproblematik von der schulischen zur universitären Ausbildung* (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Pfäffli, B. K. (2015). *Lehren an Hochschulen. Eine Hochschuldidaktik für den Aufbau von Wissen und Kompetenzen* (UTB Schlüsselkompetenzen, Hochschuldidaktik, Bd. 4325, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage). Bern: Haupt Verlag.

Snooks, M. K., Neeley, S. E. & Williamson, K. M. (2004). 7: From SGID and GIFT to BBQ: Streamlining Midterm Student Evaluations to Improve Teaching and Learning. *To Improve the Academy*, *22*(1), 110–124. DOI:10.1002/j.2334-4822.2004.tb00405.x

Susan Pulham, Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes
E-Mail: susan.pulham@htwsaar.de

Sebastian Frei, Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes
E-Mail: sebastian.frei@htwsaar.de

Frank Kneip, Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes
E-Mail: frank.kneip@htwsaar.de

Basiswissen Geometrie digital
Ein digitales Lernmodul für Lehramtsstudierende

Theresa Scholl und Katja Lengnink

An der Justus-Liebig-Universität in Gießen zeigt sich in Hausaufgabenbearbeitungen und Klausuren, dass viele Lehramtsstudierende an Haupt- und Realschulen, Gymnasien und Förderschulen Wiederholungsbedarf im Schulwissen im Bereich der Geometrie haben. Die Inhalte und Techniken der Geometrie liegen meist lange zurück, da diese im Schulcurriculum fast ausschließlich in der Sekundarstufe I behandelt und in der Oberstufe meist nicht wiederholt werden. Zudem wird in den universitären Veranstaltungen zur Geometrie ein vertiefendes Wissen erarbeitet, das die schulischen Inhalte voraussetzt, aber nicht wiederholt. Es fällt den Studierenden in der Didaktik der Geometrie oft schwer, in einen fachdidaktischen Austausch zu kommen, weil ihnen das schulische Fachwissen fehlt. Ein Zusammenhang zwischen fachbezogenem und fachdidaktischem Wissen wurde bereits im COACTIV-Projekt mit 229 Lehrkräften verschiedener Schulformen untersucht. Es zeigte sich, dass fachdidaktisches und fachbezogenes Wissen zwei unterschiedlichen Wissensbereichen zuzuordnen sind, die jedoch miteinander korrelieren. Eine gute Erklärung im Mathematikunterricht erfordert sowohl fachbezogenes als auch fachdidaktisches Wissen (vgl. Krauss et al., 2011).

Um das fachbezogene Wissen der Studierenden für den Bereich der Schulgeometrie aufzufrischen, entstand das *Lernmodul Basiswissen Geometrie digital*. Die Entwicklung dieses Lernmoduls wurde im Rahmen des Projektes *digital geschütztes Lehren und Lernen in Hessen* (digLL) gefördert.

Lernmodule stellen in sich abgeschlossene digitale Lernangebote dar, „die vielfältige Optionen der Medien nutzen, um das Lernangebot zu erweitern" (Kerres 2018, S. 21). Diese sind meist in kleinere Einheiten unterteilt, die von den Lernenden flexibel abgerufen werden können, sodass die Lernenden in Abhängigkeit von ihrem eigenen Kenntnisstand auswählen können, welche Inhalte sie zu welchem Zeitpunkt bearbeiten möchten (vgl. Kerres, 2018). Ziel des Lernmoduls *Basiswissen Geometrie digital* ist es, dass Lehramtsstudierende an Haupt- und Realschulen, Gymnasien und Förderstufen schulisches Wissen im Bereich der Geometrie eigenständig wiederholen können, um eine Basis für einen fachdidaktischen Austausch bilden zu können. Das Lernmodul ist an der Justus-Liebig-Universität im Lernmanagementsystem ILIAS umgesetzt und im öffentlichen Bereich der Justus-Liebig-Universität Gießen veröffentlicht worden. Es ist somit für Studierende aller Universitäten und auch für interessierte Lehrkräfte und Schülerinnen und Schüler ohne Anmeldung in ILIAS unter folgendem Link zugänglich: https://ilias.uni-giessen.de/ilias/goto.php?target=lm_225046&client_id=JLUG (zuletzt abgerufen am 11. 5. 2021).

Im Lernmodul *Basiswissen Geometrie digital* werden schulische Inhalte zu den Themen Kongruenz, Haus der Vierecke, besondere Linien im Dreieck und Strahlensätze und Ähnlichkeit wiederholt. Die einzelnen Kapitel des Lernmoduls sind nach mathematischen Prozessen strukturiert. Leuders und Prediger (2012) beschreiben Kernprozesse, die unterschiedliche Prozesse im Mathematikunterricht in den Fokus setzen. An diesen orientiert wurde eine Grundstruktur im Lernmodul *Basiswissen Geometrie digital* umgesetzt, die sich in den Kapiteln des Lernmoduls wiederfindet: Jedes Kapitel beginnt mit einem Einstiegstest, dann folgen Seiten zum Erkunden, zum Basiswissen und zum Vertiefen (Abb. 1).

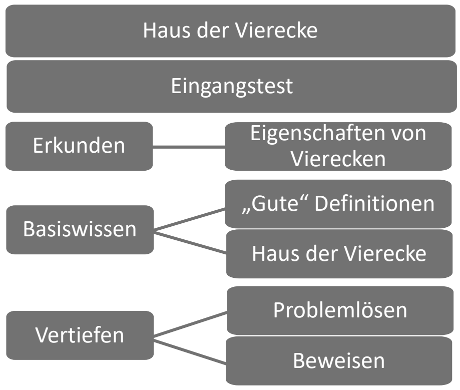


Abbildung 1. Übersicht Haus der Vierecke

Zu Beginn eines Kapitels ist ein Kompetenzraster und ein Eingangstest abgebildet. Mit dem Eingangstest können die Studierenden ihre Vorkenntnisse mithilfe von Single-Choice-Fragen, Multiple-Choice-Fragen, Lückentexten und Zuordnungsfragen überprüfen. Die Feedback-Funktion bei den Quizfragen wird genutzt, um den Studierenden Themen zur Wiederholung zu empfehlen. Mit dem Kompetenzraster werden die Ziele des Lernmodulkapitels transparent gemacht und so den Studierenden ermöglicht, selbst zu entscheiden, welche Seiten sie wiederholen möchten (vgl. Mayer et al. 2009). Auf den Seiten zum Erkunden wird dazu angeregt, mit GeoGebra Applets und analogen Materialien Phänomene zu explorieren und Zusammenhänge zu erfassen. Auf den Seiten zum Basiswissen werden Begriffe und Sätze systematisiert und gesichert, dabei steht der Kernprozess des Ordnens im Vordergrund. Das Systematisieren und Sichern der Begriffe und Sätze erfolgt mithilfe von Videos oder einer Kombination aus Grafiken und einer Erläuterung mittels eines Textes. Durch offene Aufgabenformate und Quizfragen werden Reflexionsprozesse im Sinne der mathematischen Begriffsbildung angeregt. Auf den Seiten zum Vertiefen werden Begriffe und Sätze aufgegriffen, um Probleme zu lösen, weiterführende Beweise zu führen oder diese in Anwendungskontexte zu übertragen.

Das Lernmodul *Basiswissen Geometrie digital* wurde im Sommersemester 2020 zum ersten Mal in einer Veranstaltung zur Didaktik der Geometrie eingesetzt (vgl. Lengnink, Scholl & Siebel 2021). Das Lernmodul wurde von den Studierenden positiv wahrgenommen und zur Wiederholung des fachlichen Wissens innerhalb der Geometrie genutzt. Aus den ILIAS-Protokollen geht hervor, dass zu Beginn des Semesters rund 120 Studierende und gegen Ende des Semesters rund 70 Studierende regelmäßig Aufträge im Lernmodul bearbeitet haben. Beim Einsatz des Lernmoduls zeigten sich weiterhin gravierende Schwierigkeiten der Studierenden in Bezug auf das mathematische Fachwissen innerhalb der Geometrie. Es zeigte sich in den ILIAS-Protokollen, dass die Studierenden Probleme haben, eine geeignete Definition der Vierecke im Haus der Vierecke anzugeben. Die Studierenden sollten entscheiden, ob die angegebenen Beschreibungen „gute“ Definitionen für ein Parallelogramm sind. Dabei haben rund 18 % der Studierenden die Aufgabe beim ersten Versuch richtig gelöst und ca. 46 % der Studiereden haben mehr als drei Versuche benötigt, um die Aufgabe richtig zu lösen. Ähnliche Ergebnisse finden sich zu den anderen Definitionen der Vierecke. Probleme hatten die Studierenden auch bei der Übertragung der Idee der Ähnlichkeit von Dreiecken auf ebene Figuren. In einer Aufgabe im Lernmodul haben die Studierenden verschiedene ebene Figuren erhalten und sollten beurteilen, ob diese zueinander ähnlich sind oder nicht. Ca. 3 % der Studierenden konnte diese Frage beim ersten Versuch richtig beantworten und ca. 84 % der Studierenden benötigten drei oder mehr Versuche, um die Aufgabe richtig zu lösen.

Eine überarbeitete Version des Lernmoduls wird derzeit in einer Veranstaltung zur Geometrie eingesetzt. Zudem wird eine Prä-Post-Testung über das fachliche Wissen im Bereich der im Lernmodul angebotenen geometrischen Inhalte durchgeführt, die nach Beendigung des Semesters ausgewertet wird. Im Rahmen einer Dissertation werden weitere Seiten im Lernmodul zum Philosophieren entwickelt und erprobt.

Literatur

Kerres, M. (2018). *Mediendidaktik. Konzeption und Entwicklung digitaler Lernangebote* (5. erweiterte Auflage). Berlin: De Gruyter Oldenbourg.

Krauss, S., Blum, W., Brunner, M., Neubrand, M., Baumert, J. Kunter, M., Besser, M. & Elsner, J. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunert, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften* (S. 55–68). Münster: Waxmann Verlag GmbH.

Lengnink, K., Scholl, T. & Siebel, F. (2021). Schulwissen reaktivieren und didaktisches Wissen aufbauen – ein Blended Learning-Ansatz zur Geometrie. In D. Graf, N. Graulich, K. Lengnink, H. Martinez & C. Schreiber (Hrsg.), *Digitale Bildung für Lehramtsstudierende: TE@M – Teacher Education and Media* (S. 47–54). Wiesbaden: Springer VS.

Leuders, T. & Prediger, S. (2012). „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In A. Ittel & R. Lazarides (Hrsg.): *Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis* (S. 35–66). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Mayer, H. O., Hertnagel, J. & Weber, H. (2009). *Lernzielüberprüfung im eLearning.* München: Oldenbourg Verlag.

Theresa Scholl, Justus-Liebig-Universität Gießen
E-Mail: Theresa.Scholl@math.uni-giessen.de

Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen
E-Mail: Katja.Lengnink@math.uni-giessen.de

Gymnasiales Lehramt Mathematik studieren – eine Übersicht zur Studienorganisation in Deutschland

Lara Gildehaus, Robin Göller und Michael Liebendörfer

Das gymnasiale Lehramtsstudium für Mathematik ist geprägt von der von vielen Studierenden empfundenen doppelten Diskontinuität (Ableitinger et al., 2013). Vor allem die Studieneingangsphase des (gymnasialen) Mathematikstudiums ist von hohen Abbruchzahlen betroffen (Neugebauer et al., 2019). Dies ist unter anderem deshalb problematisch, weil in einigen Bundesländern Mathematiklehrkräfte dringend gesucht werden (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder, 2019).

Neben Leistungsproblemen berichten Lehramtsstudierende dabei häufig eine hohe Unzufriedenheit mit der Organisation des Studiums und empfinden die fachlichen Inhalte als für sich und ihre spätere Berufsperspektive nicht relevant (Mischau & Blunk, 2006; Blömeke, 2009; Liebendörfer, 2018; Göller, 2020; Geisler, 2020).

Vor allem im Kontext der ersten Diskontinuität ist die Studienorganisation in den ersten Semestern des gymnasialen Lehramtsstudiums Mathematik in den Fokus hochschuldidaktischer Forschung gerückt (Ableitinger et al., 2013; Kuklinski et al., 2019). Während für Studierende des Grundschullehramtes und auch des Lehramtes für die Sekundarstufe I (z. B. an Haupt- und Realschulen oder Sekundar- oder Oberschulen) meistens studiengangsspezifische Fachveranstaltungen angeboten und besucht werden, ist das gymnasiale Lehramtsstudium mit den stärksten fachwissenschaftlichen Anteilen in der Regel mit Veranstaltungen für Fachstudierende der Mathematik gemeinsam organisiert.

Qualitative Forschungsarbeiten verdeutlichen, dass sich Lehramtsstudierende in solchen gemeinsamen Veranstaltungen von den Inhalten teils stark distanzieren (Liebendörfer, 2018; Göller, 2020). Zudem beklagen viele, sich als Studierende zweiter Klasse zu fühlen, weil die Veranstaltungen vor allem für die Fachstudierenden ausgerichtet seien (Gildehaus & Liebendörfer, akzeptiert; Gildehaus, in Druck). Umgekehrt beklagen Lehrende, dass es insbesondere Lehramtsstudierenden nicht gelingt, die hochschulmathematische Perspektive einzunehmen (z. B. Grieser, 2016, S. 665).

Um dem entgegenzuwirken wurden in den letzten Jahren zusätzliche Lehrveranstaltungen entwickelt und implementiert, die insbesondere gymnasialen Lehramtsstudierenden den Einstieg in die universitäre Mathematik erleichtern sollten (Ableitinger et al., 2013; Kuklinski et al., 2019). Dabei spielte auch eine Rolle, dass neben den klassischen Grundvorlesungen zur Linearen Algebra und Analysis zu wenig Zeit für das gleichberechtigte Studium eines zweiten Fachs sowie gegebenenfalls allgemeiner bildungswissenschaftlicher oder didaktischer Inhalte bleibt. Die Hälfte der veranschlagten Studienzeit im ersten Semester (15 von 30 Credits) reicht für die beiden Grundvorlesungen mit etwa je 9 Credits nicht aus. Durch die Bologna-Reform wurde diese hohe Belastung in der Studieneingangsphase deutlicher sichtbar, sodass vielerorts Studienordnungen angepasst werden mussten.

Die neu eingerichteten Brückenvorlesungen fokussieren beispielsweise darauf, den fachlichen Einstieg zu erleichtern, indem sie in mathematische Arbeits- und Denkweisen einführen (Biehler et al., 2018). Diese werden entweder lehramtsspezifisch (z. B. Hilgert et al., 2015; Grieser, 2017) oder gemeinsam für Fachbachelor- und Lehramtsstudierende ausgerichtet (siehe z. B. Göller & Liebendörfer, 2016). Letzteres kann insofern sinnvoll sein, als auch die Fachstudierenden von hohen Abbruchzahlen betroffen sind und häufig einen ähnlichen „Eingangsschock" in der Studieneingangsphase empfinden (Dieter, 2012; Liebendörfer, 2018; Göller, 2020). Darüber hinaus gibt es lehramtsspezifische Ansätze, bei denen didaktische Veranstaltungen vom ersten Semester an in das Studium integriert werden, um der ersten Diskontinuität entgegen zu wirken (Ableitinger et al., 2013; Beutelspacher et al., 2008, 2010).

Die Evaluation solcher Brückenvorlesungen oder didaktischen Veranstaltungen fällt aus Studierendenperspektive in der Regel sehr positiv aus (Biehler et al., 2018; Beutelspacher et al., 2008). Die konkrete Studienorganisation scheint also mit der Studienzufriedenheit, der empfundenen Relevanz und dem Studienabbruch im Rahmen der ersten Diskontinuität zusammenzuhängen. Spezifische Ergebnisse zu einzelnen Brückenkursen (z. B. Hilgert et al., 2015; Grieser, 2017; Beutelspacher et al., 2010) und Veranstaltungen lassen sich aufgrund der sehr unterschiedlichen Konzepte jedoch nur schwer vergleichen.

Auch die Gesamtlage der gymnasialen Lehramtsausbildung wird durch die unterschiedlichen Studienmodelle unübersichtlich. Genaue Übersichten, wo in Deutschland welche Studienverläufe und

Veranstaltungen vorgesehen sind, liegen nicht vor. Sie wären aber hilfreich, z. B. bei der Diskussion von Befunden und Lösungen zur ersten Diskontinuität. Anliegen dieses Beitrags ist es daher, einen Überblick zum gymnasialen Mathematiklehramtsstudium in Deutschland zu geben, mit einem Fokus darauf, welche Veranstaltungen in den ersten Semestern gehört werden.

Dazu werden die folgenden Fragen beantwortet:

1. An welchen Universitäten in Deutschland kann Mathematik für das gymnasiale Lehramt studiert werden?
2. Wie ist das erste Studienjahr des gymnasialen Mathematiklehramtsstudiums an diesen Universitäten im Vergleich zum Mathematik-Fachstudium organisiert?

    a. Wie groß sind die Anteile der Standorte, an denen die mathematischen Lehrveranstaltungen für das gymnasiale Lehramt im ersten Studienjahr identisch, teilweise verschieden bzw. vollständig verschieden zu denen für Mathematik-Bachelor-Studierende sind?
    b. Welche mathematischen Lehrveranstaltungen sind für das erste Studienjahr des gymnasialen Lehramtsstudiums neben den bzw. zusätzlich zu den klassischen Vorlesungen Lineare Algebra I und/oder Analysis I vorgesehen und werden diese nur von Lehramtsstudierenden oder auch von Fachstudierenden besucht?

Methode

Zur Beantwortung der ersten Frage wurden zunächst über die Internetseite „Hochschulkompass.de“ alle Universitäten mit der Option für ein gymnasiales Lehramtsstudium in Mathematik identifiziert. Zur Kontrolle wurden diese Universitäten mit den Daten des CHE Hochschulrankings für ein Lehramtsstudium Mathematik abgeglichen.

Um die identifizierten Universitäten zu kategorisieren, wurden deren jeweilige Prüfungs-, Studienordnungen und/oder Studienverlaufspläne sowohl für das gymnasiale Lehramtsstudium als auch für den Fachbachelor Mathematik für die ersten beiden Semester verglichen. Bei Unklarheiten wurde auf die Modulhandbücher zurückgegriffen.

Bei Fächerübergreifenden oder polyvalenten Studiengängen (siehe auch Diskussion), die ein Erstfach-/Zweitfachkonzept vorsehen, bei dem im ersten Fach zunächst mehr fachliche Credits erworben werden als im zweiten Fach, wurde die Kategorisierung auf Mathematik als Erstfach bezogen. Dabei unterscheidet sich der Start in der Regel nur durch eine zeitliche Verlagerung. Beispielsweise wird bei Zweitfach Mathematik oft empfohlen, anstelle von Linearer Algebra und Analysis zunächst nur eine der Veranstaltungen zu besuchen.

In Bezug auf die zweite Frage wurden im ersten Schritt deduktiv Kategorien zur möglichen Studienorganisation gebildet. Entlang der beschriebenen Grundlagen im vorherigen Teil waren dies die folgenden:

Kategorie K: Gemeinsamer Start – klassisch
Diese Kategorie wurde codiert, wenn für das gymnasiale Lehramtsstudium vorgesehen ist, im ersten Semester die Veranstaltungen Lineare Algebra I und/oder Analysis I zu hören, während die Fachstudierenden Lineare Algebra I und Analysis I hören. Mindestens eine der Veranstaltungen wird also gemeinsam gehört und es gibt keine zusätzliche, lehramtsspezifische Veranstaltung.

Kategorie B: Gemeinsamer Start – Brückenvorlesung
Diese Kategorie wurde codiert, wenn für das gymnasiale Lehramtsstudium vorgesehen ist, im ersten Semester eine Brückenvorlesung und gegebenenfalls eine der Veranstaltungen Lineare Algebra I oder Analysis I zu hören, und die Fachstudierenden ebenfalls die Brückenvorlesung und eine der klassischen Vorlesungen hören. Mindestens die Brückenvorlesung wird hier also gemeinsam gehört.

Kategorie K+L: Teilweise gemeinsamer Start – Einführung für das Lehramt
Diese Kategorie wurde codiert, wenn für das gymnasiale Lehramtsstudium vorgesehen ist, im ersten Semester eine der Veranstaltungen Lineare Algebra I oder Analysis I und eine lehramtsspezifische Einführungsveranstaltung zu hören, während die Fachstudierenden im ersten Semester die Veranstaltungen Lineare Algebra I und Analysis I hören. Eine der klassischen Veranstaltungen im ersten Semester wird hier also gemeinsam gehört, während die spezifische Veranstaltung nur für die Lehramtsstudierenden verpflichtend ist und in der Regel nicht von Fachstudierenden besucht wird (an wenigen Standorten können Fachstudierenden diese Veranstaltung im Rahmen des Wahlpflichtbereichs besuchen).

Kategorie L: Getrenntes Studium für das Lehramt
Diese Kategorie wurde codiert, wenn mindestens in den ersten beiden Semestern nur getrennte Veranstaltungen für Fach- und Lehramtsstudierende vorgesehen sind.

Kategorie LS: Kein Fachstudiengang – reiner Lehramtsstandort
Diese Kategorie wurde codiert, wenn an der Universität zwar gymnasiales Lehramt studiert werden kann, es jedoch keinen Fachstudiengang Mathematik gibt. Die Studierenden hier hören also

zwangsweise keine gemeinsamen Veranstaltungen mit Fachstudierenden.

Kategorie W: Weiteres
Hier wurden weitere Modelle, die nicht vorab bedacht waren, codiert.

Ergebnisse

Frage 1
Insgesamt konnten 57 Universitäten und Hochschulen identifiziert werden, an denen in Deutschland Mathematik für das Lehramt an Gymnasien studiert werden kann. Tabelle 1 zeigt wie sich diese Hochschulstandorte auf die deutschen Bundesländer verteilen.

Frage 2
Abbildung 1 zeigt die Verteilung der codierten Kategorien über die verschiedenen Standorte. Mit insgesamt 32 Standorten (56,1 %) dominiert das klassische Model mit Linearer Algebra und/oder Analysis (oder ähnlichen Veranstaltungen) im ersten Semester, die von gymnasialen Lehramtsstudierenden zusammen mit Fachstudierenden besucht werden (Kategorie K: Gemeinsamer Start – klassisch).

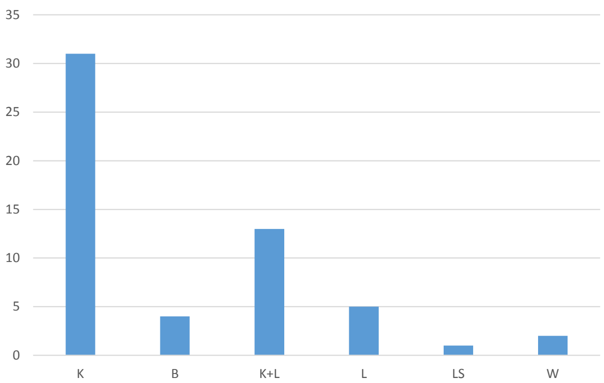


Abbildung 1. Verteilung der codierten Kategorien über die verschiedenen Hochschulstandorte

Einführungsveranstaltungen, die von gymnasialen Lehramtsstudierenden und Fachstudierenden gemeinsam besucht werden (Kategorie E: Gemeinsamer Start – einführend) finden sich bei insgesamt vier Standorten (7 %). Diese sind entweder mit „Grundlagen der Mathematik" (2×) oder „Grundlagen der Analysis und Linearen Algebra" benannt oder beziehen sich auf ein wissenschaftliches Propädeutikum.

Ein teilweise gemeinsamer Studienstart mit Einführungsveranstaltungen für die Lehramtsstudierenden und parallel einer Vorlesung Lineare Algebra I oder Analysis I (Kategorie EL: Teilweise gemeinsamer Start – Einführung für das Lehramt), findet sich an 13 Standorten (22,8 %). Insgesamt neun dieser Einführungsveranstaltungen für das Lehramt sind Fachveranstaltungen, beispielsweise „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten", „Mathematisches Problemlösen und Beweisen", „Lineare Algebra für Lehrämter" und „Analytische Geometrie". An zwei Standorten ist im ersten Semester für das Lehramt eine „Einführung in die Mathematikdidaktik", sowie eine „Didaktik der Algebra" vorgesehen. An zwei weiteren Standorten werden „Fachwissenschaftliche und Fachdidaktische Voraussetzungen" und ein „Wissenschaftspropädeutikum" für das Lehramt angeboten.

In der Kategorie des reinen Lehramtsstudiums (Kategorie L: Getrenntes Studium für das Lehramt) finden sich fünf Standorte (8,8 %). Hier werden mindestens in den ersten beiden Semestern im Bereich Mathematik ausschließlich Veranstaltungen für Lehramtsstudierende gehört.

An einem Standort (1,8 %) wird kein Fachbachelor Mathematik oder vergleichbarer Studiengang angeboten (Kategorie LS: Kein Fachstudiengang – nur Lehramt). Hier wird Mathematik ausschließlich als Neben- oder Ergänzungsfach, bzw. für das gymnasiale Lehramt angeboten, so dass die Veranstaltungen nur von Bachelorstudierenden mit Lehramtsoption gehört werden.

Unter Weiteres fanden sich zwei Standorte (3,5 %). Am ersten Standort wird mit einer lehramtsspezifischen didaktischen Einführungsveranstaltung begonnen, bevor im zweiten Semester gemeinsam mit Fachstudierenden des ersten Semesters Fachveranstaltungen gehört werden. Am zweiten Standort ist die Organisation fast gleich, nur mit einer fachlichen Einführungsveranstaltung im ersten Semester für die Lehramtsstudierenden.

Während der Recherche wurden neben der unterschiedlichen Organisation der ersten beiden Semester weitere Unterschiede und Schwerpunktsetzungen im Feld von Lehramt- und Fachstudium sichtbar. Beispielsweise gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Abschlüsse und Studiengangsbezeichnungen: im Rahmen fächerübergreifender oder polyvalenter Bachelorstudiengänge werden in der Regel ein Bachelor of Arts oder Bachelor of Science vergeben, abhängig vom gewählten Erst- oder Vertiefungsfach. Lehramtsstudiengänge, die mit dem Bachelor of Education abschließen, beziehen sich auf zwei gleichberechtigt studierte Fächer. An weiteren Standorten ist außerdem das Staatsexamen der Weg zum Lehramtsabschluss. Einige Standorte bewerben dabei explizit die Durchlässigkeit des polyvalenten Bachelors in den Fachbachelor Mathematik oder bieten explizit die Möglichkeit an, mit dem Fachbachelor und Staatsexamen einen doppelten Abschluss zu erlangen. Andere setzen ihren Schwerpunkt auf lehramtsbezogene Veranstaltungen.

Tabelle 1. Überblick zu den identifizierten Hochschulstandorten mit der Option, gymnasiales Lehramt Mathematik zu studieren

Bundesland	Anzahl	Standorte
Baden-Württemberg	8	Freiburg, Heidelberg, Karlsruhe, Konstanz, Mannheim, Stuttgart, Tübingen, Ulm
Bayern	9	Augsburg, Bayreuth, Ingolstadt, LMU München, TU München, Nürnberg, Regensburg, Passau, Würzburg
Berlin	2	FU Berlin, HU Berlin
Bremen	1	Bremen
Brandenburg	1	Potsdam
Hamburg	1	Hamburg
Hessen	5	Darmstadt, Frankfurt, Gießen, Kassel, Marburg
Mecklenburg-Vorpommern	2	Greifswald, Rostock
Niedersachsen	5	Braunschweig, Göttingen, Hannover, Oldenburg, Osnabrück
Nordrhein-Westfalen	11	Aachen, Bielefeld, Bochum, Bonn, Dortmund, Duisburg-Essen, Köln, Münster, Paderborn, Siegen, Wuppertal
Rheinland-Pfalz	4	Kaiserslautern, Koblenz-Landau, Mainz, Trier
Saarland	1	Saarland
Sachsen	2	Dresden, Leipzig
Sachsen-Anhalt	2	Halle, Magdeburg
Schleswig-Holstein	2	Flensburg, Kiel
Thüringen	1	Jena
Gesamt	57	

Weiterhin unterscheiden sich die Module der Analysis und Linearen Algebra standortübergreifend in Umfang und Credits. Dabei unterscheiden sich teilweise auch die Credits, die Lehramts- und Fachstudierende für den Besuch derselben Vorlesung bekommen. Praktisch kann dieses zum Beispiel dadurch legitimiert werden, dass auf den wöchentlichen Übungsblättern eine Aufgabe weniger zu bearbeiten ist, die Klausur eine Aufgabe weniger enthält oder die Lehramtsstudierenden die Veranstaltungen in den letzten Wochen der Vorlesungszeit nicht besuchen müssen.

Diskussion

Zusammenfassung der Ergebnisse
Ausgehend von der von vielen Lehramtsstudierenden empfundenen doppelten Diskontinuität, der ihnen fehlenden Relevanz fachwissenschaftlicher Inhalte und der Herausforderung, der Mathematik neben dem zweiten Studienfach genug Raum für die beiden Grundveranstaltungen im ersten Semester einzuräumen, wurde hier ein Überblick zu verschiedenen Modellen gegeben, wie das erste Studienjahr aktuell gestaltet wird.

Mehr als die Hälfte aller 57 identifizierten Standorte mit einem gymnasialen Lehramtsstudium für Mathematik starten im ersten Semester gemeinsam mit Fachbachelorstudierenden (und ggf. weiteren Studierenden aus der Physik oder verwandten Studiengängen) mit den Vorlesungen der Linearen Algebra und/oder Analysis. Gemeinsame Einführungsveranstaltungen für beide Studiengänge sind an vier Standorten vertreten. Dazu finden sich insgesamt 13 Standorte mit lehramtsspezifischen Einführungsveranstaltungen, neun davon als fachliche Brückenkurse. An insgesamt sechs Standorten verläuft das Studium mindestens in den ersten beiden Semestern getrennt, an einem davon, weil kein Fachstudiengang angeboten wird.

Limitationen
Teils besuchen Studierende dieselben Vorlesungen, auch wenn sie formal unterschiedliche Veranstaltungen besuchen. Wir haben die Zuordnungen sorgfältig geprüft. Dennoch könnte es Fälle geben, in denen wir den gemeinsamen Besuch nicht identifizieren konnten. Zudem zeigte sich bei der Recherche, dass an einigen Standorten Reformen bezüglich der Organisation des gymnasialen Lehramtsstudiums Mathematik anstehen. Die hier dargestellte Übersicht ist damit womöglich eine zeitlich sehr begrenzt gültige Abbildung.

Die häufigste Kategorie, der klassische Start (K), beinhaltet zudem unterschiedliche Modelle: Lehramtsstudierende können gemäß Regelstudienplan im ersten Semester sowohl Lineare Algebra als auch Analysis hören, es kann ihnen freigestellt sein, diese Veranstaltungen parallel oder nacheinander zu besuchen, es kann (unverbindliche) Empfehlungen für ein gewisses Modell geben und diese Vorschläge können zwischen Studierenden mit Erstfach oder Zweitfach Mathematik unterscheiden. Daneben stellt sich die Frage nach der gelebten

Praxis, die durch formale Dokument nur gerahmt, aber nicht festgelegt wird. Eine Unterscheidung zwischen dem Start mit beiden klassischen Fachveranstaltungen oder nur einer klassischen Fachveranstaltung war daher nicht sinnvoll umzusetzen. Im Rahmen des teilweise gemeinsamen Starts (K+L) ist außerdem nicht auszuschließen, dass in wenigen Fällen beispielsweise auch Physikstudierende, oder Fachbachelorstudierende im Rahmen des Wahlpflichtbereichs die lehramtsspezifischen Veranstaltungen besuchen. Eine genauere Differenzierung schien für den Zweck eines ersten Überblicks nicht sachgemäß.

Ausblick und Implikationen

Lehramts- und Fachstudierende werden je nach Hochschule unterschiedlich differenziert, wie sich an den Abschlussbezeichnungen, spezifischen oder nicht spezifischen Veranstaltungen und deren Benennung und auch den unterschiedlichen Credits für gleiche Vorlesungen gezeigt hat. Jedes Modell scheint dabei seine Vorteile zu haben. In parallelen Veranstaltungen zur Analysis und Linearer Algebra könnten sich besondere Synergieeffekte ergeben (z. B. bezüglich der Fachsprache, Logik und Beweistechniken). Brückenvorlesungen könnten noch spezifischer helfen, solche grundlegenden Fähigkeiten zu erwerben. In Bezug auf die doppelte Diskontinuität bieten die lehramtsspezifischen Veranstaltungen besondere Möglichkeiten, mithilfe von Schnittstellenaufgaben in den Brückenvorlesungen oder didaktischen Inhalten in den Einführungsveranstaltungen bereits früh im Studium Schulbezüge zu schaffen. In lehramtsspezifischen Veranstaltungen entsteht zudem nicht der gelegentlich beschriebene Eindruck, dass Lehramtsstudierende nicht die eigentliche Zielgruppe der Veranstaltung seien.

Die gegebene Übersicht soll hochschuldidaktisch Forschende ermutigen, die Auswirkungen solcher Modelle zu vergleichen. Etwa könnten Zusammenhänge mit der individuellen Wahrnehmung (z. B. als Studierende zweiter Klasse) und ihre Auseinandersetzung mit der wissenschaftlichen Mathematik im Kontext von Identität(sbildung) untersucht werden. So stellt sich unter anderem die Frage, ob das Erleben einer lehramtsspezifischen Fachveranstaltung die Abgrenzung von der Fachkultur verstärkt oder mindert. Zudem stellt sich die Frage, ob Fachveranstaltungen, die sich nicht zugleich an Fachstudierende richten, eine andere Fachkultur vermitteln. Auch die Fragen, ob ein entzerrter Start den Studienabbruch verhindert oder nur verzögert, in welchem Modell Studierende sinnvoll partizipieren können (z. B. ihre Übungsaufgaben ohne abzuschreiben lösen; Göller & Liebendörfer, 2016) und vor allem, inwieweit sich die Studierenden unterschiedlicher Modelle am Ende hinsichtlich ihrer fachlichen Fähigkeiten unterscheiden, scheinen mit Blick auf praktische Entscheidungen bei der Studiengangsgestaltung sehr relevant.

Die Fragen scheinen gleichermaßen relevant für das Lehramt für berufliche Gymnasien. Ein Großteil der recherchierten Standorte bietet neben dem Lehramt an allgemeinbildenden Gymnasien auch die Möglichkeit das Berufsschullehramt zu studieren, wobei die besuchten Veranstaltungen in den ersten beiden Semestern im Bereich Mathematik in der Regel dieselben sind (sofern das Berufsschullehramt auch für die Sekundarstufe II angestrebt wird). Jedoch gibt es auch hier Standorte, an denen eigene Veranstaltungen für das Berufsschullehramt gelesen werden, welche dann ausschließlich für diese Lehramtsstudierenden vorgesehen sind. Ebenso sind einige wenige Standorte vorhanden, an denen kein gymnasiales Lehramt, aber Berufsschullehramt studiert werden kann. Hier gibt es ebenfalls die Variante, das entweder kein Fachstudiengang angeboten wird oder die ersten Veranstaltungen gemeinsam mit den Fachstudierenden gehört werden.

Im Zuge der Recherchen und Nachfragen zeigte sich, dass die Lehramtsstudiengänge an einigen Orten reformiert werden sollen. Das unterstreicht die Bedeutung von Forschung und Erfahrungsberichten zu den verschiedenen Szenarien.

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Springer Spektrum.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., & Nickel, G. (2010). *Mathematik Neu Denken: Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt.* Bonn/Siegen/Gießen. Deutsche Telekom Stiftung.

Beutelspacher, A., & Danckwerts, R. (2008). Abschlussbericht: Mathematik neu Denken: Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Siegen/Gießen.

Biehler, R., Lankeit, E., Neuhaus, S., Hochmuth, R., Kuklinski, C., Leis, E., Liebendörfer, M., Schaper, N., & Schürmann, M. (2018). Different goals for pre-university mathematical bridging courses - Comparative evaluations, instruments and selected results. In Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Goodchild, S., & Hogstad, N. M. (Chair), *PROCEEDINGS of INDRUM 2018 Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* Symposium conducted at the meeting of University of Agder and INDRUM: 467–476.

Blömeke, S. (2009). Ausbildungs- und Berufserfolg im Lehramtsstudium im Vergleich zum Diplom-

Studium – Zur prognostischen Validität kognitiver und psycho-motivationaler Auswahlkriterien. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, *12*(1), 82–110. https://doi.org/10.1007/s11618-008-0044-0

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren*. Dissertation.

Geisler, S. (2020). Bleiben oder Gehen? Ruhr-Universität Bochum: Dissertation.

Gildehaus, L. (in Druck). Identität als Perspektive zur Genese individueller Wertehierarchien im Mathematikstudium, In: Susanne Prediger & Kerstin Heil (Hrsg). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021

Gildehaus, L. & Liebendörfer, M. (akzeptiert). "I don't need this" – understanding preservice teachers disaffection with university mathematics, In: Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Eduation, Research Report.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI:10.1007/978-3-658-28681-1

Göller, R., & Liebendörfer, M. (2016). Eine alternative Einstiegsvorlesung in die Fachmathematik – Konzept und Auswirkungen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2016 (S. 321–324). WTM-Verlag Münster.

Grieser, D. (2016). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Ein neues Konzept in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase (S. 661–675). Springer Fachmedien Wiesbaden. http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-10261-6_41

Grieser, D. (2017). Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI:10.1007/978-3-658-14765-5

Hilgert, J., Hoffmann, M., & Panse, A. (2015). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: Tutoriell und transparent*. *Lehrbuch*. Springer Spektrum.

Neugebauer, M., Heublein, U., & Daniel, A. (2019). Studienabbruch in Deutschland: Ausmaß, Ursachen, Folgen, Präventionsmöglichkeiten. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, *22*(5), 1025-1046. DOI:10.1007/s11618-019-00904-1

Kuklinski, C., Liebendörfer, M., Hochmuth, R., Biehler, R., Schaper, N., Lankeit, E., Leis, E., & Schürmann, M. (2019). Features of innovative lectures that distinguish them from traditional lectures and their evaluation by attending students. In Proceedings of CERME 11.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI:10.1007/978-3-658-22507-0

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder (2019). Lehrereinstellungsbedarf und -angebot in der Bundesrepublik Deutschland 2019–2030 – Zusammengefasste Modellrechnungen der Länder. www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Statistik/Dokumentationen/Dok_226_Bericht_LEB_LEA_2020.pdf (20. 5. 2021)

Lara Gildehaus, Universität Paderborn
E-Mail: lara.gildehaus@math.uni-paderborn.de

Robin Göller, Universität Lüneburg
E-Mail: robin.goeller@leuphana.de

Michael Liebendörfer, Universität Paderborn
E-Mail: michael.liebendoerfer@math.uni-paderborn.de

Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht der Grundschule – Das math.media.lab der Humboldt-Universität zu Berlin

Frederik Grave-Gierlinger, Steven Beyer und Katja Eilerts

1 Einleitung

Mit der Veröffentlichung des Strategiepapiers „Bildung in der digitalen Welt" durch die Kultusministerkonferenz (KMK 2016) sind Schulen in die Verpflichtung geraten, die Entwicklung digitaler Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern auf geeignete Weise zu fördern. Aufgrund des Fehlens eines Faches für Informatik sehen sich die Grundschulen dabei der besonderen Herausforderung gegenüber, die geforderte Entwicklung digitaler Kompetenzen fächerintegrativ bzw. fächerübergreifend zu gestalten. Lehrkräfte der Grundschule sind mit anderen Worten dazu angehalten, digitale Medien auf solche Weise in ihrem Fachunterricht einzusetzen, dass Schülerinnen und Schüler Gelegenheit erhalten digitale Kompetenzen zu entwickeln. Studien belegen die besondere Bedeutung, die der Lehrkraft für den Erwerb digitaler Kompetenzen durch Schülerinnen und Schüler zukommt (Schibeci et al. 2008) und weisen darauf hin, dass Umfang und Art des Einsatzes digitaler Medien im Unterricht wesentlich von Überzeugungen der Lehrkraft bestimmt wird (Tondeur et al. 2008). Insbesondere konnte in der Vergangenheit gezeigt werden, dass die Selbstwirksamkeitserwartung bezogen auf die Nutzung digitaler Medien in direktem Bezug zu Umfang und Art des Einsatzes digitaler Medien im Klassenzimmer steht (Kreijns et al. 2013; Sang et al. 2010; Mumtaz 2000): Lehrkräfte mit einer höheren Selbstwirksamkeitserwartung bezogen auf die Nutzung digitaler Medien setzen digitale Medien häufiger und zielgerichteter im Unterricht ein als Kolleginnen und Kollegen mit niedriger Selbstwirksamkeitserwartung. Aus diversen Erhebungen der letzten Jahre wissen wir zudem, dass die Zahl der Lehrkräfte, die in Deutschland im Rahmen ihrer Aus- und Fortbildung Erfahrungen mit dem Einsatz digitaler Medien im Unterricht sammeln konnten, sowohl relativ als auch absolut gesehen, gering ist und eine große Zahl an Lehrkräften über eine im internationalen Vergleich niedrige Selbstwirksamkeitserwartung bezogen auf die Nutzung digitaler Medien besitzt (vgl. Fraillon et al. 2019; Schmid, Goertz & Behrens 2017; Thom et al. 2017). Der Erwerb digitaler Kompetenzen durch Lehrkräfte gilt daher als eine zentrale Herausforderung der erfolgreichen Digitalisierung deutscher Schulen (Reinhold & Reiss 2020).

Die Gestaltung von Aus- und Fortbildungsangeboten für (angehende) Grundschullehrkräfte zum angemessenen Einsatz von digitalen Medien ist entsprechend ein wichtiges Handlungsfeld, um zeitgemäßen Unterricht an den Schulen zu ermöglichen und langfristig eine Kultur digitalen Lehrens und Lernens zu etablieren. An vielen lehrkraftbildenden Hochschulen wurden dazu Lern- bzw. Forschungswerkstätten (vgl. u. a. Tänzer et al. 2019) und Lehr-Lern-Labore (vgl. u. a. Priemer & Roth 2019) mit unterschiedlichen thematischen Schwerpunkten eingerichtet. Die geschaffenen Angebote zeichnen sich dadurch aus, dass sie nicht von einer traditionell instruktiven Belehrungskultur geprägt sind, sondern eine Nähe zur konstruktivistischen Didaktik bzw. ein konstruktivistisches Lernverständnis als Basis für die (Lehr-)Lernprozesse haben (Müller-Naendrup 2020). Ziel ist i. A. die Initiierung einer bewussten, kritischen und reflexiven Auseinandersetzung mit Themen der Schulbzw. Unterrichtsentwicklung mit besonderem Blick auf einen fachdidaktisch fundierten und an den Grenzen analoger Lernarrangements orientierten Einsatz digitaler Medien.

Der vorliegende Beitrag stellt im Folgenden das Konzept des 2018 an der Humboldt-Universität zu Berlin eröffneten math.media.labs vor, welches als Brückenprojekt zwischen Analogem und Digitalem einen gleichermaßen offenen wie geschützten Ort des Ausprobierens und Experimentierens mit digitalen Technologien bietet und als regionales Leuchtturmprojekt digitalen Lehrens und Lernens initiiert wurde (vgl. Beyer et al. 2020).

2 Konzeption, Angebotsgestaltung und Begleitforschung

Das math.media.lab bietet Studierenden und Lehrkräften der ersten bis sechsten Klassen einen Ort an dem digital unterstützte Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule erkundet, erprobt, entwickelt, adaptiert und evaluiert werden können. Ausgangspunkt allen Handelns sind dabei die Herausforderungen und Grenzen analogen Lernens, die durch den Einsatz von digitalen (Unterstützungs-)Elementen überwunden werden können und sollen. Dazu werden medienpädagogische, informatische, grundschulpädagogische und mathematikdidaktische Expertise gebündelt, um interdisziplinär bei Auswahl, Gestaltung und Einsatz digital unterstützter Lernangebote moderieren und begleiten zu können. Es wird dabei der oben beschriebene konstruktiv-kritische Ansatz verfolgt, der vielfältig u. a. an die Ziele der Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt" (KMK 2016) und der Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Primarstufe (KMK 2004) anknüpft.

2.1 Angebote und ihre Ausgestaltung

Die Angebote im math.media.lab sind, aufgrund der längeren und komplexeren Lern- sowie spezifischen Berufserfahrung von Erwachsenen, nicht nach denselben Mustern wie das schulische Lernen von Schülerinnen und Schülern organisiert (Gerstenmeier & Mandl 2011; Törner 2015). Sie stellen zudem nicht nur auf die Vermittlung von Professionswissen, sondern auch auf die Förderung des Erlebens von Selbstwirksamkeit und Freude sowie den Abbau von Vorbehalten und ggf. Ängsten beim Einsatz digitaler Medien ab. Verschiedene Maßnahmen haben sich als vorteilhaft zur Erreichung dieses Ziels erwiesen: Zu nennen sind etwa das selbstständige Experimentieren mit digitalen Medien (Somekh 2008), das Erleben von eigener Kompetenz im Umgang mit digitalen Medien (Ottenbreit-Leftwich 2007) sowie die Zusammenarbeit mit erfahreneren Peers (Ertmer et al. 2006). Unter der Maßgabe, dass neues Wissen im besten Fall durch Handlungsbezug und im Austausch mit anderen konstruiert wird, stellt das math.media.lab eine Reihe unterschiedlicher Angebote bereit.

Offene Angebote

Ein niederschwelliges Angebot für Lehramtsstudierende und berufstätige Lehrkräfte sind die offenen Sprechzeiten, in denen das Lehr-Lern-Labor ohne

Voranmeldung besucht werden kann. Die Sprechzeiten finden mehrmals die Woche statt, werden durch Mitarbeitende des math.media.lab begleitet und sollen vor allem dem freien Experimentieren mit digitalen Medien in Kooperation mit anderen dienen. Die Mitarbeitenden stellen sicher, dass die vorhandene Hard- und Software zugänglich ist, ohne Probleme genutzt werden kann und helfen bei Fragen oder der Entwicklung von Ideen weiter. Es besteht außerdem die Möglichkeit der Ausleihe von einzelnen Geräten oder einem Komponentenverbund, um selbstentwickelte Ideen oder empirisch validierte Best-Practice-Materialien in der Unterrichtspraxis zu erproben.

Zudem kann das Lehr-Lern-Labor von (angehenden) Lehrkräften als Klassenraum für die Durchführung digital unterstützten Unterrichts gebucht werden, um dadurch Herausforderungen des schulischen Alltags wie fehlender, veralteter oder nicht funktionsfähiger Technik, zu begegnen. Dies trägt dazu bei Vorbehalte und Ängste abzubauen, weil sich (angehende) Lehrkräfte vorrangig um die Unterrichtsplanung bzw. -durchführung kümmern können, sich nicht zusätzlich um die Funktionstüchtigkeit der Ausstattung sorgen müssen und in Absprache mit den Mitarbeitenden vor Ort während der Unterrichtsdurchführung unterstützt werden.

Aus- und Fortbildung

Eine zweite Angebotskategorie stellen die berufsbegleitenden Lehrkräftefortbildungen und die universitären Lehrveranstaltungen (inkl. Praxissemester) dar, die ebenfalls durch die Ideen der Selbsttätigkeit, Offenheit und der Verantwortung für den eigenen Lernprozess geprägt sind. Ausgangspunkt der Veranstaltungen ist stets die vergleichende Erkundung und Analyse von analogen und digital unterstützten Lernumgebungen:

> Aufgabe und Ziel zugleich ist es vor diesem Hintergrund, Anforderungen, Handlungsmöglichkeiten und Potentiale in den Lernumgebungen auszuloten und eine eigenständige medieninklusive Haltung zu entwickeln – Bewährtes zu bewahren, die bisherige Praxis – wenn fachdidaktisch sinnvoll und möglich – zu optimieren und neue Praxis zu innovieren. Das vergleichende Analysieren soll daher zur Entwicklung von Mündigkeit in der Auseinandersetzung mit analogem und digital unterstützendem Mathematiklernen beitragen. (Huhmann et al. 2019, S. 281).

Als Grundarchitektur dienen inhaltsübergreifende Konzeptbausteine die wissenschaftsbasiert und mit Blick auf eine enge Verzahnung von Theorie und Praxis entwickelt wurden (Huhmann et al. 2019). Diese erlauben adaptiv Veranstaltungsformate für alle Lehrkräftebildungsphasen zu gestalten und orientieren sich an den Merkmalen wirksamer Professionalisierungsmaßnahmen für Lehrkräfte (vgl. Lipowsky 2019). Durch begleitende Untersuchungen werden die Veranstaltungen im Sinne des *Design-Based-Research* (Gravemeijer & Cobb 2006) iterativ weiterentwickelt. Zentrales Ziel aller Maßnahmen dieser Angebotskategorie ist, dass die Teilnehmenden ein vertieftes mathematikdidaktisches sowie technologiebasiertes Wissen zum Lernen und Lehren anhand prototypischer Lehr-Lern-Umgebungen aufbauen und Lehr-Lern-Umgebungen mit analogen und digitalen Medien auf mögliche Potenziale analysieren lernen, um mit diesem Wissen Materialien für den eigenen Unterricht (weiter) zu entwickeln und an die jeweilige konkrete Klassensituation auf geeignete Weise anzupassen. Eine erfolgreiche Teilnahme an den Aus- und Fortbildungsmaßnahmen versetzt Lehrkräfte in die Lage effektive, digital unterstützte Lehr-Lern-Prozesse zu gestalten und legt den Grundstein dafür Schülerinnen und Schülern durch regelmäßige und kontinuierliche Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Bildungstechnologien den Erwerb digitaler Kompetenzen zu ermöglichen.

2.2 *Begleitforschung*

Die Angebote des math.media.lab als multimedialem Makerspace werden von einer Reihe von Forschungsprojekten gerahmt, die sich multiperspektivischen Fragestellungen auf Ebene der Lernenden, Lehrenden sowie der Unterrichtsmaterialien widmen. Durch diese begleitenden Untersuchungen werden die Angebote des math.media.lab unter Beteiligung möglichst vieler Stakeholder weiterentwickelt. Im Folgenden soll ein Überblick über Ziele, Methoden und bereits vorliegende Ergebnisse einiger Teilprojekte gegeben werden.

Digitalbezogene Ausstattung & ihre Nutzung

Ein wichtiger Forschungsschwerpunkt des math.media.lab liegt auf der Untersuchung der Voraussetzungen der Mediatisierung bzw. Digitalisierung deutscher Grundschulen. Aufbauend auf dem im Länderindikator (Lorenz et al. 2017) vorgestellten Modell der Qualitätsdimensionen schulischer Medienbildung, welches technische und räumliche Infrastruktur sowie die Kompetenz schulischer Akteure als zentrale Inputfaktoren benennt, wurde 2019 in Zusammenarbeit mit der Pädagogischen Hochschule Weingarten und der Universität Münster eine deutschlandweite Erhebung zur medialen Ausstattung und Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht der Grundschule entwickelt (Huhmann et al. 2019) und durchgeführt (Vogel et al. 2020). Dabei zeigte sich, dass mehr als die Hälfte (54 %) der an Grundschulen tätigen Mathematiklehrkräfte in ihrem Unterricht aufgrund mangelnder Ausstattung auf private Geräte zurückgreifen und dass es sich bei den regelmäßig im Unterricht genutzten Geräten in der Regel um Dokumentenkameras, Notebooks und Beamer handelt. Diese Befunde weisen auf einen doppelten Mangel an digitaler Ausstattung hin: Zum einen ist an deutschen Grundschulen ein Mangel an einsatzbereiten Geräten, die Lehrkräften für ihren eigenen Mathematikunterricht nutzen könnten, zu beanstanden; zum anderen zeigt sich ein Mangel an Diversität der im Mathematikunterricht eingesetzten digitalen Medien. Das math.media.lab leistet an diesem Punkt als multimedialer Makerspace, der wie bereits angedeutet auch von Schulklassen als Unterrichtsraum genutzt werden kann und in dem vielfältige digitale Unterstützungselemente für den Mathematikunterricht der Grundschule ausgeliehen werden können, einen wertvollen Beitrag zur Schaffung der Voraussetzungen für eine zunehmende Mediatisierung von Grundschulen im Raum Berlin/Brandenburg.

Kompetenzerwerb & -entwicklung
Die im math.media.lab angebotene und auf Grundlage der Gestaltungsprinzipien des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (Barzel & Selter 2015) entwickelte Fortbildungsreihe „Mündigkeit in der digitalen Welt" setzt daran anknüpfend am dritten im Länderindikator benannten Inputfaktor, der Kompetenz schulischer Akteure, an und wird von einem Forschungsprojekt begleitet, welches der Frage nachgeht, welche professionellen Kompetenzen (angehende) Grundschullehrkräfte aufweisen müssen, um digitale Medien didaktisch sinnvoll in den Mathematikunterricht integrieren zu können. Ziel des Projektes ist die Entwicklung eines Testinstrumentes, welches auf Grundlage des TPACK-Modells (Mishra & Koehler 2006) die digitale Kompetenz von Lehrkräften bezogen auf den Einsatz digitaler Medien zur Erreichung mathematikdidaktischer Lernziele domänenspezifisch operationalisiert. Eine erfolgreiche Umsetzung des Projektes soll erlauben, die Kompetenzentwicklung von (angehenden) Lehrkräften in Aus- und Fortbildungsmaßnahmen zu messen, um auf diesem Weg Stellschrauben für die effektive (Weiter-)Entwicklung und kontinuierliche Verbesserung der Bildungsangebote des math.media.lab zu identifizieren. Eine bereits durchgeführte Pilotstudie mit 249 angehenden Grundschullehrkräften untersuchte Einflussfaktoren auf die Selbstwirksamkeitserwartung von Lehramtsstudierenden digitale Medien auf fachdidaktisch fundierte Weise im Mathematikunterricht einzusetzen (vgl. Jenßen et al. 2021). Die auf Grundlage der Kontroll-Wert-Theorie leistungsbezogener Emotionen (Pekrun 2006; Pekrun & Perry 2014) entwickelte Studie kam zum Ergebnis, dass (1) subjektiv wahrgenommene Kontrolle über den Einsatz digitaler Medien zur Erreichung mathematikdidaktischer Lernziele einen dreimal so starken Effekt auf das Erleben von Freude beim Einsatz digitaler Medien aufweist wie der subjektiv wahrgenommene Wert digitaler Medien und dass (2) Freude eine zentrale Rolle in der Vermittlung zwischen der subjektiv wahrgenommenen Kontrolle und der Selbstwirksamkeitserwartung bezogen auf den Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht einnimmt. Beide Befunde heben die besondere Bedeutung von digitalen Werkstätten und Lehr-Lern-Laboren wie dem math.media.lab als Orte hervor, an denen in einem geschützten und spielerischen Rahmen vielfältige Gelegenheiten geschaffen werden können, Kontrollerfahrungen im Einsatz digitaler Medien zu machen und dadurch die schrittweise Etablierung digitaler Lehr- und Lernkultur an Schulen zu begünstigen.

Unterstützung in hybriden Lernräumen
Die bereits beschriebenen Aktivitäten in den unterschiedlichen Angeboten des math.media.lab im Kontext der Lehrkräfteprofessionalisierung und der erfolgreiche Transfer in unterrichtliches Handeln verlangen von den Beteiligten ein nicht zu unterschätzendes Maß an Selbstorganisations- und Mediennutzungskompetenzen (Beyer & Eilerts 2020). Gründe dafür sind die örtliche und zeitliche Vielfalt der Lerngelegenheiten (Törner 2015), die Vergleichzeitigung von Tätigkeiten (Schmidt-Lauff 2011) und zum Teil das Fehlen unmittelbarer Instruktionen im Lernprozess durch bspw. Dozierende (Lipowsky 2011). Um den Transfer von Aus- und Fortbildungsinhalten in konkretes unterrichtliches Handeln zu unterstützen, dessen Qualität zu verbessern und somit für eine größere Nachhaltigkeit der Aktivitäten zu sorgen, untersucht das Projekt MATCHED (Mobile Agents in TeaCHer EDucation) anhand der Angebote des math.media.lab auf welchem Wege man sogenannte conversational agents (Hobert & Meyer v. Wolff 2019) für das Lehrkräftelernen einsetzen kann. Auf Grundlage von Konzepten des mobile-learning und des micro-learning (vgl. de Witt & Gloerfeld 2018) werden konversationsbasierte Unterstützungselemente entwickelt, auf die die (angehenden) Lehrkräfte mittels eines Chatbots unmittelbar und zeitlich sowie örtlich entgrenzt zugreifen können (Beyer & Eilerts submitted). Zur bedarfsorientierten Ausgestaltung dieses Unterstützungsangebotes wurden in einer qualitativ-explorativen Untersuchung die Lernwege von Studierenden und Lehrkräften bei der o. g. Auseinandersetzung mit digital unterstützten Lernumgebungen ausgewertet. Anhand dieser Ergebnisse wurden folgende Handlungsfelder für die Unterstützung identifiziert: (1) Planung und Zeitmanagement, (2) Adaptionspro-

zesse, (3) Kooperationsanregung und (4) Reflexionsprozesse. Ziel des Forschungsprojektes ist es darauf aufbauend einen mobilen Lernbegleiter zu entwickeln, der im Sinne eines hybriden Lernraums den handlungsbezogenen Wissenserwerb und schließlich den erfolgreichen Transfer von der individuellen Lern-Aktivität hin zu erweitertem unterrichtlichem Handeln unterstützt (Beyer & Eilerts 2020; submitted).

Inklusion und Heterogenitätssensibilität
Ein weiteres, bereits Anfang des Jahres in den *GDM Mitteilungen* vorgestelltes Teilprojekt, welches an das math.media.lab angebunden ist, stellt die inklusionsorientierte Qualifizierung angehender Lehrkräfte in Form des Projektes FDQI-MINT dar. Bei diesem, durch das Bundesministeriums für Bildung und Forschung geförderten Projekt, entwickeln die Fachdidaktiken der MINT-Fächer in Kooperation mit den Rehabilitationswissenschaften sowie der Medien- und Sprachbildung gemeinsam und theoriegeleitet inklusionsorientierte Seminarkonzepte, in denen Möglichkeiten des Einsatzes digitaler Unterstützungselemente mit dem Ziel heterogenitätssensibleren MINT-Unterrichts, vorgestellt, erprobt und evaluiert werden (Bechinie et al. 2020).

3 Zusammenfassung und Ausblick

Digitale Werkstätten und Lehr-Lern-Labore an Hochschulen können dazu beitragen, zwei zentrale Herausforderungen bei der digitalen Transformation anzugehen. Dazu gehören neben den Fragen nach angemessener und fachdidaktisch relevanter Ausstattung ebenso die Fragen zum Erwerb digitalbezogener Wissensfacetten bei (angehenden) Lehrkräften. Sie sind in ihren Regionen reale Orte, die zum Erkunden, Experimentieren und Reflektieren einladen und sie ermöglichen den konstruktiven Austausch und die Zusammenarbeit unterschiedlicher Stakeholder. Projekte wie das math.media.lab leisten damit einen wertvollen Beitrag zur Integration digitaler Lernformen in den schulischen Unterricht und begünstigen in diesem Sinn die Etablierung einer digitalen Lehr-Lern-Kultur in ihren jeweiligen Regionen. Durch die Pflege eines Netzwerkes mit Vertreterinnen und Vertretern aus Schulpraxis, Wissenschaft, Bildungsverwaltung, Wirtschaft und Politik werden in den unterschiedlichen Teilprojekten des math.media.lab fortlaufend Lernsettings entworfen, erprobt, evaluiert, iterativ weiterentwickelt und die Ergebnisse dem Netzwerk wieder zurückgegeben. So können Innovationen für den Mathematikunterricht objektiv beurteilt, Anforderungen sowie Bedarfe definiert, durch Multiplikatoren in die Fläche getragen und wissenschaftlich begleitet werden.

Literatur

Barzel, B. & Selter, Ch. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal der Mathematikdidaktik*, (36), 259–284.

Bechinie, D., Eilerts, K., Frohn, J., Marsch, S., Upmeier zu Belzen, A., Mayer, S. & Priemer, B. (2020). Inklusionsorientierte Qualifizierung angehender Lehrkräfte – Das Projekt FDQI-HU-MINT der HU Berlin, *Mitteilungen der GDM*, (109), 6–9.

Beyer, S. & Eilerts, K. (2020). Mit mobile learning Professionalisierungsprozesse von (angehenden) Mathematik-Lehrkräften in Fort- und Ausbildung unterstützen. In K. Kaspar, M. Becker-Mrotzek, S. Hofhues, J. König, D. Schmeinck (Hrsg.), *Bildung, Schule, Digitalisierung* (S. 395–400). Münster, New York: Waxmann.

Beyer, S. & Eilerts, K. (submitted). *DE 10 2020 115 289.2*. München: Deutsches Patent- und Markenamt.

Beyer, S., Grave-Gierlinger, F. & Eilerts, K. (2020). math.media.lab – Ein mathematikdidaktischer Makerspace für die Aus- und Fortbildung von Grundschullehrkräften. *Medienimpulse*, 58(4).

de Witt, C. & Gloerfeld, Ch. (Hrsg.) (2018). *Handbuch Mobile Learning*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Ertmer, P. A., Ottenbreit-Leftwich, A. & York, C. S. (2006). Exemplary technology-using teachers: Perceptions of factors influencing success. *Journal of Computing in Teacher Education*, 23 (2), 55–61.

Fraillon, J., Ainley, J., Schulz, W., Duckworth, D. & Friedman, T. (2019). *IEA international computer and information literacy study 2018 international report*. Cham: Springer Nature.

Gerstenmaier, J. & Mandl, H. (2011). Konstruktivistische Ansätze in der Erwachsenenbildung und Weiterbildung. In R. Tippelt & A. von Hippel (Hrsg.), *Handbuch Erwachsenenbildung/Weiterbildung* (S. 169–178). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (S. 17–51). London: Routledge.

Hobert, S. & Meyer von Wolff, R. (2019). Say Hello to Your New Automated Tutor – A Structured Literature Review on Pedagogical Conversational Agents. *Proceedings of the 14th International Conference on Wirtschaftsinformatik*, verfügbar unter www.researchgate.net/publication/331333034_Say_Hello_to_Your_New_Automated_Tutor_-_A_Structured_Literature_Review_on_Pedagogical_Conversational_Agents (letzter Zugriff 25.11.2020).

Huhmann, T., Eilerts, K. & Höveler, K. (2019). Digital unterstütztes Mathematiklehren und -lernen in der Grundschule – Konzeptionelle Grundlage und übergeordnete Konzeptbausteine für die Mathematiklehreraus- und -fortbildung. In. D. Walter & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik – Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe. 5. Band der Reihe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe* (S. 277–308). Münster: WTM-Verlag.

Jenßen, L., Grave-Gierlinger, F. & Eilerts, K. (2021). Pre-Service Teachers' Enjoyment and ICT Teaching Self-Efficacy in Mathematics – An Application of Control-Value Theory. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland – KMK (2004). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Primarstufe*. München, Neuwied: Luchterhand.

Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland – KMK (2016). *Bildung in der digitalen Welt – Strategie der Kultusministerkonferenz*, verfügbar unter: www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2016/2016_12_08-Bildung-in-der-digitalen-Welt.pdf (letzter Zugriff 25.11.2020).

Kreijns, K., Vermeulen, M., Kirschner, P. A., van Buuren, H., & Van Acker, F. (2013). Adopting the integrative model of behavior prediction to explain teachers' willingness to integrate ICT in their pedagogical practices: A perspective for research on teachers' ICT usage in pedagogical practices. *Technology Pedagogy and Education*, (22), 55–71.

Lipowsky, F. (2019). Wie kommen Befunde der Wissenschaft in die Klassenzimmer? – Impulse der Fortbildungsforschung. In Ch. Donie, F. Förster, M. Obermeyer, A. Deckwerth, G. Kammermeyer, G. Lenske, M. Leuchter & A. Wildemann (Hrsg.), *Grundschulpädagogik zwischen Wissenschaft und Transfer, Jahrbuch Grundschulforschung 23* (S. 170–174). Wiesbaden: Springer Fachmedien,

Lorenz, R., Bos, W., Endberg, M., Eickelmann, B., Grafe, S. & Vahrenhold, J. (2017). *Schule digital – der Länderindikator 2017*. Münster, New York: Waxmann.

Mishra, P. & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge – A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108 (6), 1017–1054.

Müller-Naendrup, B. (2020). Lernwerkstätten in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. In C. Cramer, J. König, M. Rothland & S. Blömeke (Hrsg.), *Handbuch Lehrerinnen- und Lehrerbildung* (S. 721–726). Bad Heilbrunn: Klinkhart.

Mumtaz, S. (2000). Factors affecting teachers' use of information and communications technology: A review of the literature. *Journal of Information Technology for Teacher Education*, (9), 319–341.

Ottenbreit-Leftwich, A. T. (2007). *Expert technology-using teachers: Visions, strategies, and development*. West Lafayette: Purdue University.

Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review*, 18 (4), 315–341.

Pekrun, R. & Perry, R. P. (2014). Control-value theory of achievement emotions. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Hrsg.), *International Handbook of Emotions in Education* (S. 120–141). New York: Routledge.

Priemer, B. & Roth, J. (Hrsg.) (2019). *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Reinhold, F. & Reiss, K. (2020): Relevanz, Selbstwirksamkeit und Ängstlichkeit bezogen auf das Unterrichten von Mathematik mit digitalen Medien. Eine Interventionsstudie mit Lehrkräften aus Deutschland und Kolumbien. In K. Kaspar, M. Becker-Mrotzek, S. Hofhues, J. König & D. Schmeinck (Hrsg.), *Bildung, Schule, Digitalisierung* (S. 96–107). Münster: Waxmann.

Sang, G., Valcke, M., van Braak, J., & Tondeur, J. (2010). Student teachers' thinking processes and ICT integration: Predictors of prospective teaching behaviors with educational technology. *Computers Education*, (54), 103–112.

Schibeci, R., Lake, D., Phillips, R., Lowe, K., Cummings, R., & Miller, E. (2008). Evaluating the use of learning objects in Australian and New Zealand schools. *Computers Education*, (50), 271–283.

Schmid, U., Goertz, L. & Behrens, J. (2017). *Monitor Digitale Bildung. Die Schulen im digitalen Zeitalter*. Gütersloh: Bertelsmann Stiftung

Schmidt-Lauff, S. (2011). Zeitfragen und Temporalität in der Erwachsenenbildung. In: R. Tippelt & A. von Hippel (Hrsg.), *Handbuch Erwachsenenbildung/Weiterbildung* (S. 213–230). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Somekh, B. (2008). Factors affecting teachers' pedagogical adoption of ICT. In J. Voogt & G. Knezek (Hrsg.), *International handbook of information technology in primary and secondary education* (S. 449–460). New York: Springer.

Tänzer, S., Godau, M., Berger, M. & Mannhaupt, G. (Hrsg.) (2019). *Perspektiven auf Hochschullernwerkstätten. Wechselspiele zwischen Individuum, Gemeinschaft, Ding und Raum*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Thom, S., Behrens, J., Schmid, U. & Goertz, L. (2017). *Monitor Digitale Bildung. Digitales Lernen an Grundschulen*. Gütersloh: Bertelsmann Stiftung.

Tondeur, J., van Keer, H., van Braak, J., & Valcke, M. (2008). ICT integration in the classroom: Challenging the potential of a school policy. *Computers Education*, (51), 212–223.

Törner, G. (2015). Verborgene Bedingungs- und Gelingensfaktoren bei Fortbildungsmaßnahmen in der Lehrerbildung Mathematik – subjektive Erfahrungen aus einer deutschen Perspektive. *Journal der Mathematikdidaktik*, (36), 195–232.

Vogel, S., Eilerts, K., Huhmann, T. & Höveler, K. (2020). Mediale Ausstattungen deutscher Primarstufen für den Mathematikunterricht – eine erste Standortbestimmung. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 973–976). Münster: WTM-Verlag.

Steven Beyer, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: steven.beyer@hu-berlin.de

Frederik Grave-Gierlinger,
Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: frederik.gierlinger@hu-berlin.de

Katja Eilerts, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: katja.eilerts@hu-berlin.de

Begleit- und Trainingskurse für Lehramtsstudierende in der Masterphase

Einblicke in zwei interdisziplinäre Projekte im Rahmen von QUALITEACH II an der Universität Erfurt

Heike Hahn, Stefanie Baum und Theresa Fabig

Das Vorhaben **QUALI**TEACH II, das im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung an der Universität Erfurt gefördert wird, verfolgt das Ziel, Studierende noch umfassender auf die Schule der Vielfalt vorzubereiten. Dazu sind verschiedene Teilprojekte angelegt, die sich sowohl mit weiteren grundlegenden Heterogenitätsdimensionen, wie der Interessens- und Begabungsförderung, als auch mit dem Ausbau von Kompetenzen im Führen von Gesprächen mit indirekter Instruktion zur Gestaltung eines diskursiven Unterrichts in unterschiedlichen Fächern befassen.

Aufgabe der Fortsetzungsphase des Projektes **QUALI**TEACH II an der Universität Erfurt ist es, die Entwicklungen und Ergebnisse der Teilprojekte in die aktuell laufenden Reakkreditierungsprozesse der Lehramtsstudiengänge einzubringen, sie in passenden Studienmodulen zu verankern und in der wissenschaftlichen Diskussion der Fachcommunity zu präsentieren, um so die Qualität der Erfurter Lehrerbildung weiter zu stärken. In den lehramtsbezogenen Studiengängen werden ergänzend zur traditionellen fachbezogenen und bildungswissenschaftlichen Ausbildung Kompetenzbausteine zu theoretischen und praktischen Ansätzen der Inklusion sowie einem Methodentraining für indirekt instruierende Gespräche eingebracht.

Die beiden Teilprojekte, die in Kooperation mit dem Fachbereich Mathematikdidaktik an der Universität Erfurt umgesetzt werden, stehen im Mittelpunkt dieses Beitrages. Jedes Teilprojekt wird hinsichtlich seiner Ziele vorgestellt. Zudem wird beschrieben, welche Lehrveranstaltungen, Studienmodule oder Informations- und Trainingsbausteine evidenzbasiert (weiter-)entwickelt, erprobt und evaluiert werden.

Teilprojekt: Methodentraining für effektives Unterrichten

Das Teilprojekt *Methodentraining für effektives Unterrichten* stellt ein interdisziplinäres Forschungsprojekt dar, welches gleichermaßen die Mathematikdidaktik als auch die Bildungswissenschaften vereint. Ging es in der ersten Förderphase innerhalb des Teilprojektes darum, Trainingsprogramme für einen indirekt instruierenden Deutsch- und Musikunterricht zu konzipieren und einer empirischen Prüfung mit Versuchs- und Kontrollgruppendesign zu unterziehen, fokussiert das Projekt in der zweiten Förderphase ein Gesprächstraining für den Mathematikunterricht. Im Folgenden werden die theoretischen Ansätze sowie die praktische Umsetzung näher skizziert.

Problemstellung und Forschungsinteresse
Das Ziel des Trainingsprogramms besteht darin, Fähigkeiten zur indirekten Instruktion bei der Gestaltung eines diskursiven, kognitiv aktivierenden Mathematikunterrichts bei Lehramtsstudierenden aufzubauen. Daher stehen Fähigkeiten zur Gesprächsführung durch die Lehrperson im Mittelpunkt des Projekts. Dubs (Dubs in Haag, 2019) zeigt auf, dass anspruchsvolle, kognitiv aktivierende Fragen nur einen geringen Teil von Unterrichtsgesprächen ausmachen und diese zum Teil ungenügend formuliert werden. Es treten demnach bei Lehrpersonen oft Schwierigkeiten auf, kognitiv aktivierende Fragen zu formulieren und an die Schülerinnen und Schüler zu richten.

Ausgangspunkt für kognitiv aktivierende Gespräche sind anspruchsvolle und herausfordernde Aufgaben, in denen Schülerinnen und Schüler Muster, Strukturen und Zusammenhänge entdecken können. Solche Aufgaben bilden das fachliche Grundkonzept der Mathematik ab (vgl. Steinweg, 2013). „Muster machen auf Eigenschaften aufmerksam, die zu weiteren Tätigkeiten […] führen, um strukturelle Zusammenhänge zu nutzen, zu beschreiben und argumentativ zu verallgemeinern" (Steinweg, 2020, S. 43). Hier entstehen Berührungspunkte zur allgemeinen mathematischen Kompetenz des Argumentierens, wobei die Schülerinnen und Schüler zum Erklären und Begründen mathematischer Zusammenhänge und Fragestellungen angeregt werden, um ein gesichertes Verständnis mathematischer Inhalte weiterzuentwickeln (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005). Tiefgründigere Auseinandersetzungen mit ebendiesen Erkenntnissen finden im Mathematikunterricht leider viel zu selten statt, da eine der Ursachen für besagte Schwierigkeiten in der Gesprächsführung durch die Lehrkräfte liegt (vgl. Steinweg, 2020). Daher benötigen zukünftige Lehrerinnen und Lehrer spezifische methodische Fähigkeiten und professionelles Wissen, um diskursive Gespräche im Mathematikunterricht kompetent führen zu können. An dieser Stelle knüpft das Forschungsprojekt an der Universität Erfurt mit der Entwicklung eines Trainingsprogramms für Lehramtsstudierende an. Ziel ist es, ein Trainingsprogramm zu entwickeln, zu erproben und zu evaluieren, in welchem die Studierenden Teilfertigkeiten der Gesprächsführung für einen indirekt instruierenden, kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht im komplexen Unterrichtgeschehen erlernen können.

Forschungsstand

Im Ergebnis der Unterrichtsqualitätsforschung hat sich zur Systematisierung der Tiefenstrukturen der Prozessqualität des Unterrichts die Unterscheidung der drei Basisdimensionen kognitive Aktivierung, effizientes Klassenmanagement und konstruktive Unterstützung verbreitet (vgl. Riecke-Baulecke, 2017). Diese Basisdimensionen sind unabhängig von direkt beobachtbaren Oberflächenmerkmalen des Unterrichts (vgl. Klieme et al., 2006). Bezogen auf die kognitive Aktivierung geht es darum, Lernende zu einer vertieften und selbstständigen Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand herauszufordern und dabei ihre Wissensstrukturen zu erweitern, zu vernetzen oder neu zu generieren. Wie dies durch die Gestaltung von Unterrichtsprozessen angeregt werden kann, wird aktuell weiter untersucht.

Im Forschungsprojekt wurden zunächst weitestgehend fachunabhängige Konzepte und Methoden der Gesprächsführung mit ihren Ansätzen, Empfehlungen und Anreizen für eine kognitiv aktivierende, diskursive Gesprächsführung recherchiert. Die folgenden Konzepte und Methoden legen dafür unterschiedlich präzise Beschreibungen dar und zeigen Möglichkeiten auf, Phasen der Diskussionen für einen indirekt instruierenden Unterricht (vgl. Borich, 2014) zu gestalten:

- Cognitive Apprenticeship (vgl. Collins et al., 1989)
- Accountable Talk (vgl. Michaels et al., 2016)
- Argumentation Rating Tool (vgl. Reznitskaya & Wilkinson, 2017)
- Diskussionsmethode (vgl. Gage & Berliner, 1996)
- Lehrtätigkeiten zur Gesprächsführung (vgl. Thiele, 1981).

Da sich diese Konzepte und Methoden in der Detailtreue ihrer Erläuterungen unterscheiden, sind keine unmittelbaren Vergleiche zwischen ihnen möglich. Tendenziell lässt sich jedoch feststellen, dass das System der Lehrtätigkeiten von Thiele (1981) hohe Übereinstimmungen mit den Kernmerkmalen der anderen Konzepte und Methoden aufweist und genaue Beschreibungen zu einzelnen Lehrtätigkeiten mit operationalisierbaren Verhaltensindikatoren liefert. Aufgrund dessen sowie den ausgearbeiteten Präzisierungen mit genauen Vorgaben für das sprachliche Verhalten ist das Konzept von Thiele als Grundlage für das angedachte Trainingsprogramm mit indirekter Instruktion besonders geeignet. Die Projektidee besteht darin, ausgewählte Lehrtätigkeiten, die einen kognitiv aktivierenden Unterricht befördern, in Bezug auf den Mathematikunterricht zu trainieren, um so die Grundlage für geeignet formulierte Fragen bzw. Impulse an Schülerinnen und Schüler zu schaffen.

Im Projekt geht es um die Beantwortung der Frage, wie ein solches Vorhaben mit Lehramtsstudierenden umgesetzt und Fähigkeiten in der Gesprächsführung trainiert werden können. Für die Trainingskonzeption werden zwei unterschiedliche Ansatzpunkte gewählt, die sich in vielen traditionellen als auch aktuellen Trainingsprogrammen bewährt haben (u. a. Quittenbaum, 2016).

Das *kognitive Training* bildet einen Ansatz, der im Projekt zur Anwendung kommt. Er eignet sich als gute Grundlage, um mit dem zweiten Ansatz, dem Microteaching, weiterarbeiten zu können und passt zum System der Lehrtätigkeiten. Grundgedanke des kognitiven Trainings ist, die schnelle Sprache des Unterrichts zu entschleunigen, indem Begrifflichkeiten (hier die Lehrtätigkeiten) mithilfe von Transkriptausschnitten eingeübt werden (vgl. Thiele, 1978). Zwei Arten des kognitiven Trainings werden unterschieden: (1) das *Diskriminationstraining*, in welchem sprachliche Äußerungen entsprechenden Kategorien (Lehrtätigkeiten) zugeordnet werden und (2) das *Entscheidungstraining*, bei dem zu bestimmten aufgezeichneten oder transkribierten Unterrichtssituationen passende Impulse bzw. Fragen formuliert werden (vgl. Thiele, 1983).

Ein anderer Ansatz bildet die Trainingstheorie des *Microteachings*, welches an der Stanford Universität entwickelt wurde. In diesem steht eine Reduzierung der Unterrichtskomplexität im Fokus, um einen geeigneten Übungsrahmen für die Gesprächsführung im Unterricht zu schaffen. Dies kann beispielsweise dadurch gelingen, dass nur bestimmte Unterrichtsphasen betrachtet werden oder mit einer geringen Anzahl von Schülerinnen und Schülern gearbeitet wird. Zentrales Element des Microteachings ist es, dass die Trainingsteilnehmenden zu den jeweiligen Unterrichtsversuchen ein Feedback bekommen und sich unter Beachtung dieses Feedbacks mehrmals ausprobieren können. Dadurch können positive Effekte bei den Trainingsteilnehmenden erzielt werden (vgl. Allen et al., 1972).

Forschungsvorhaben

Die dargelegten Grundlagen bilden den Ausgangspunkt für das geplante Design der Erprobung. Ziel ist es, verschiedene Trainingseinheiten zu entwickeln, in welchen die Lehramtsstudierenden der Universität Erfurt Lehrtätigkeiten zur Gesprächsführung für Phasen eines diskursiven, kognitiv aktivierenden Mathematikunterrichts einüben können. Die Evaluation des Programmes erfolgt in einem Versuchs-Kontrollgruppen-Design. Weiterhin sind verschiedene Erhebungen an zwei Messzeitpunkten eines Trainingskurses vorgesehen: Mit einer Erhebung werden mögliche Verhaltensänderungen erfasst; mit einer weiteren wird das Training und dessen Einbettung in Lehrveranstaltungen evaluiert, um den subjektiven Eindruck zum Trainingsverlauf und -erfolg der Teilnehmenden zu dokumentieren. Durch die Arbeit mit Transkripten sowie Videoaufzeichnungen werden Gesprächsverläufe der Teilnehmenden erfasst, die unter bestimmten Kriterien ausgewertet werden.

Das derzeitige Trainingskonzept sieht vier große Trainingsbausteine vor, deren Anforderungen im Trainingsverlauf gesteigert werden. Trainingsbaustein (1) stellt einen theoretischen Input dar, in dem sowohl die methodischen Grundlagen zur indirekten Instruktion als auch zu den einzelnen Lehrtätigkeiten vermittelt werden. Weiterhin lernen die Studierenden mathematische Inhalte für Grundschülerinnen und -schüler kennen, die für die Unterrichtsmethode geeignet sind. Die Trainingsbausteine (2) und (3) stellen das beschriebene kognitive Training dar (vgl. Thiele, 1978), bei dem Modellsequenzen von Unterrichtsgesprächen in Form von Transkripten bzw. Videoaufzeichnungen zum Einsatz kommen. Trainingsbaustein (4) bildet ein Handlungstraining, welches auf den Ideen des Microteachings beruht (vgl. Allen et al., 1972). Der Gedanke ist, das sogenannte *Peer-Teaching* einzusetzen, bei welchem andere Trainingsteilnehmende die Schülerrollen übernehmen (vgl. Quittenbaum, 2016). Dazu ist ein Feedback und mindestens ein Zweitversuch des Handlungstrainings vorgesehen, sodass die Gesprächsführung stetig verbessert werden kann. Den Abschluss des Trainingskurses bildet eine Erprobung in der Schule, welche im Rahmen eines mit einem Begleitseminar gekoppelten Praktikums stattfinden wird.

Pilotstudie

Von Mitte Mai bis Mitte Juli 2021 erfolgt im Rahmen eines Online-Seminars mit insgesamt sechs Lehrveranstaltungen eine erste Erprobung des Trainings. Die Größe der Stichprobe beträgt $N = 22$. Ziel der Pilotstudie ist es, die konzipierten Trainingsinhalte zu den vier Trainingsbausteinen zu erproben, begleitend zu evaluieren und anschließend zu überarbeiten. Innerhalb der Trainingseinheiten kommen selbst konzipierte Diskriminations- und Entscheidungstrainings zu vier ausgewählten Lehrtätigkeiten *Nachhaken*, *Akzentuieren*, *Problematisieren* und *Erklären/Begründen lassen* (vgl. Thiele, 1981) zum Einsatz. Die Übungen wurden auf Grundlage von Transkripten aus realen Unterrichtsgesprächen erstellt und beziehen sich auf eine Mathematikaufgabe der Grundschule, die sich mit Mustern und Strukturen auf der Hundertertafel befasst.

In den ersten beiden Seminaren stehen die einzelnen Lehrtätigkeiten mit einem theoretischen Input im Mittelpunkt, die jeweils durch ein Diskriminations- und Entscheidungstraining konkretisiert und vertieft werden (vgl. Thiele, 1978). In diesen Übungsphasen werden die Lehrtätigkeiten zunächst getrennt voneinander betrachtet. Im dritten Seminar ist eine Komplexübung mit allen vier Lehrtätigkeiten vorgesehen, um so die Schwierigkeit zu steigern und die Lehrtätigkeiten im Zusammenspiel zu betrachten. Im vierten und sechsten Seminar sind Handlungstrainings in Kleingruppen geplant, welche auf den Ideen des Microteachings beruhen (vgl. Allen et al., 1972). Dabei bekommen alle Trainingsteilnehmenden die Möglichkeit, ein kurzes Unterrichtsgespräch zu führen und auf z. T. vorgegebene Schülerantworten mithilfe der erlernten Lehrtätigkeiten zu reagieren. Die Gesprächsverläufe des Handlungstrainings werden jeweils transkribiert, sodass im fünften Seminar eine individuelle Rückmeldung an die Teilnehmenden gegeben wird, bevor die Studierenden mit dem Zweitversuch des Handlungstrainings beginnen. Seminarbegleitend werden die Phase des kognitiven Trainings sowie des Handlungstrainings evaluiert. Es bleibt abzuwarten, ob bereits erste Effekte mit den entwickelten Trainingsbausteinen erzielt werden können. Auch für das Wintersemester 2021 ist ein Trainingskurs geplant, in dem die in Folge der ausgewerteten Pilotstudie überarbeiteten Trainingsbausteine erneut eingesetzt werden.

Teilprojekt: Förderung besonderer mathematischer Interessen und Begabungen

Das Teilprojekt *Kompetenz- und Entwicklungszentrum Inklusion in der Lehrerbildung* von **QUALI**TEACH arbeitet in drei Unterprojekten an den Heterogenitätsdimensionen sonderpädagogischer Förderbedarf, sprachliche Bildung in mehrsprachigen Kontexten und besondere Interessen und Begabungen.

Das letztgenannte Teilprojekt hat es sich zur Aufgabe gemacht, zum einen fallbezogene Materialien zum Thema Begabungs-, Interessen- und Leistungsförderung zu entwickeln und diese in das etablierte Modul im Rahmen des Masterstudienganges zur Vermittlung inklusiver Kompetenzen zu integrieren und zum anderen die Fähigkeiten angehender Grundschullehrkräfte zur Förderung mathematisch interessierter bzw. begabter Kinder im Regelunterricht weiterzuentwickeln. Im Fokus des letztgenannten Teilprojektes stehen zwei Schwerpunkte: Einerseits geht es um einen Kompetenzaufbau bei Studierenden, vorhandene Aufgabenmaterialien und in der Förderung bewährte Aufgabenformate auswählen sowie passend adaptieren zu können. Andererseits steht der weitere Erwerb unterrichtspraktischer Fähigkeiten zur integrativen Förderung im Regelunterricht im Rahmen eines Begleitkurses zum Komplexen Schulpraktikum für Studierende im Master-Studiengang im Mittelpunkt. Für beide Schwerpunkte werden die theoretisch-konzeptionellen Grundlagen in Verbindung mit einer Darstellung der Erprobung und Evaluation im Weiteren näher erläutert.

Problemstellung

Die Befähigung angehender Lehrkräfte zur integrierten Förderung interessierter und potenziell mathematisch begabter Grundschulkinder gewinnt nicht zuletzt durch die schlechten Ergebnisse deutscher Schülerinnen und Schüler in internationalen Vergleichsstudien (TIMSS, PISA) an Bedeutung (vgl. Käpnick, 2014, S. 214). Besonders mathematisch interessierte und leistungsstarke Kinder lernen meist in regulären Schulen mit heterogenen Klassen. Somit müssen Lehrkräfte Lernbedingungen schaffen, die eine individuelle Förderung innerhalb dieses Unterrichts ermöglichen. Daher besteht die Herausforderung darin, die Gestaltung des Unterrichts und die Auswahl passender Aufgabenformate so vorzunehmen, dass mathematisch begabte bzw. interessierte Kinder eine angemessene Förderung erfahren.

Forschungsstand

Die Komplexität mathematischer Begabungen spiegelt sich in deren unterschiedlicher Definition, den theoretischen Grundlagen für ihre Entstehung und diversen Förderansätzen wider (u. a. Fuchs, 2006; Fritzlar, 2008; Grassmann, 2009; Käpnick, 1998; Kiesswetter, 1985; auch in Kossakowski, 1977, Nolte, 2012). Gemeinsam ist allen genannten Quellen, dass mathematisch interessierte bzw. begabte Kinder in der Schule eine gezielte Förderung erfahren müssen, um ihr Begabungspotenzial (weiter) zu entfalten. Im Schulalltag findet eine Förderung beispielsweise durch *Enrichment- bzw. Akzelerationsmaßnahmen* oder eine *integrierte Förderung* statt. Die zuletzt genannte Maßnahme wird in der Regel durch das Sternchenaufgabenmodell umgesetzt, das zwar den Anspruch der inneren Differenzierung bei den Aufgabenstellungen einlöst, jedoch häufig nicht das gerade behandelte Thema oder den Inhalt vertieft. Dieses Aufgabenmodell wird in der Praxis nicht nur in vielen Schulbüchern, sondern auch als Zusatzaufgabe angewendet, sobald Schülerinnen und Schüler ihre Pflichtaufgaben erfüllt haben. Aufgrund unreflektierter Unterrichtserfahrungen schätzen viele Kinder Sternchenaufgaben von vornherein als zu schwierig ein. Somit bleiben diese Aufgaben eventuell nur den leistungsstarken Kindern vorbehalten (vgl. Käpnick & Benölken, 2020). Im Rahmen der integrativen Förderung geht es darum, geeignete Aufgabenmaterialien und -formate in das aktuelle Unterrichtsarrangement einzubetten (vgl. Kultusministerkonferenz, 2015). Mathematisch anspruchsvolle Aufgabenmaterialien sollten gegenüber Standard-Aufgabenmaterialien, die täglich im Mathematikunterricht vorkommen und behandelt werden, im Vordergrund stehen. Diese Aufgabenformate, die individuell auf die mathematisch interessierten und potenziell begabten Kinder angepasst sind und im Regelunterricht themen- bzw. inhaltsgetreu eingebunden werden, verhindern ein Ausgrenzen leistungsstarker Schülerinnen und Schüler (vgl. Bardy, 2007). Nicht zuletzt spielt das professionelle Wissen angehender Grundschullehrkräfte zur Gestaltung eines Unterrichts mit den zuvor beschriebenen Herausforderungen eine zentrale Rolle (vgl. Kunter et al. 2011, S. 305). Nach Roy, Guay und Valois (2013) geht es darum, dass in einem differenzierenden Unterricht (*differentiated instruction*) die individuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler beachtet werden und eine adaptive Förderung erfolgt. Differenzierender Unterricht setzt sich aus zwei Faktoren zusammen: Zum einen aus den Unterrichtsanpassungen (*instructional adaptions*) und zum anderen aus der Beobachtung der Leistungsentwicklung (*academic process monitoring*). Für die Durchführung einer gezielten Förderung mathematisch interessierter bzw. potenziell begabter Grundschulkinder im Regelunterricht sind neben der Auswahl bzw. Adaption geeigneter Aufgabenformate auch die Einstellungen/Verhaltensabsichten von angehenden Lehrkräften von Bedeutung. Diese Einstellungen/Verhaltensabsichten zeigen auf, inwiefern Studierende bereit sind, eine integrative Förderung in der Schulpraxis durchzuführen. Das Projekt zielt daher auf der Grundlage der Theorie des geplanten Verhaltens („Theory of planned behavior" Ajzen (TPB), 1985) darauf, durch einen Begleitkurs zum Komplexen Schulpraktikum die Intention von Lehramtsstudierenden für ein bestimmtes Verhalten – in diesem Falle die integrative Förderung mathematisch interessierter bzw. potenziell mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler im Regelunterricht – positiv zu beeinflussen. Abhängig von den Determinanten *Einstellungen, subjektive Normen* und *wahrgenommene Verhaltenskontrolle* (vgl. Ajzen & Fishbein, 1980), die als unmittelbare Prädikatoren für künftiges Verhalten gelten, geht es darum, diese bei Studierenden gezielt zu fördern.

Forschungsvorhaben
Entsprechend der zuvor kurz dargestellten theoretischen Grundlagen fokussiert das Forschungsvorhaben zwei Schwerpunkte: Es geht (1) um die Verhaltensabsichten von Lehramtsstudierenden zur Förderung mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler und (2) um ihre Fähigkeiten, geeignete Aufgabenmaterialien und -formate auswählen, verändern und in das Unterrichtsarrangement eines inklusiven Mathematikunterrichts einbinden zu können (Ajzen, 1985; Koop, 2009). Daher widmet sich das Forschungsprojekt an der Universität Erfurt der Entwicklung, Erprobung und Evaluation eines Lehrdesigns für angehende Grundschullehrkräfte in der Masterphase. Im Kern geht es darum, dass Studierende ihr professionelles Wissen über mathematisch interessierte bzw. potenziell begabte Kinder erweitern, Strategien erwerben, um vorhandene Aufgabenmaterialien und -formate adaptieren und optimieren und diese schließlich in eine integrative Förderung im Regelunterricht Mathematik einbringen zu können (Käpnick, 1998). Das Vorhaben ist evaluativ gerahmt. In einem Pre-Post-Design mithilfe eines Online-Fragebogens sowie einem standardisierten Leitfadeninterview nach Francis et al. (2004) werden die Veränderungen erfasst. In Auswertung der Erfahrungen mit der Erprobung soll auch ein Leitfaden mit Praxisempfehlungen für angehende Grundschullehrkräfte entstehen.

Erste Erprobung
Die erste Erprobung des konzipierten Begleitkurses zum Komplexen Schulpraktikum findet im aktuellen Sommersemester mit Grundschullehramtsstudierenden ($N = 20$) statt. Dafür wird das an der Universität Erfurt für Lehramtsstudierende der Grund- bzw. Regelschule verpflichtend im dritten bzw. vierten Mastersemester stattfindende Komplexe Schulpraktikum (KSP) genutzt. Im Rahmen dessen werden an einem Tag in der Woche Begleitkurse für Studierende angeboten, von denen drei während des Semesters verpflichtend zu belegen sind. Ein Begleitkurs, zu dem sich die Studierenden interessengeleitet anmelden, dauert jeweils ein halbes Semester. Im Begleitkurs zu diesem Forschungsvorhaben werden innerhalb von acht Online-Sitzungen das professionelle Wissen der angehenden Grundschullehrkräfte über mathematisch interessierte bzw. potenziell begabte Kinder erweitert.

Ziel des Seminars ist es, durch ausgewählte Seminarinhalte die Intention der Studierenden für die integrative Förderung mathematisch interessierter bzw. potenziell mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler im Regelunterricht positiv zu beeinflussen. Das Verhalten einer Person ist abhängig von der Stärke ihrer Intention, d. h. je stärker die Intention bei den Studierenden ausgeprägt ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass sie das angestrebte Verhalten auch tatsächlich ausführen (Ajzen, 1985; Frey u. a., 1993). Somit können wiederum die Einstellungen und Verhaltensabsichten der Studierenden verändert bzw. an ihnen gearbeitet werden. Weiterhin bietet das Seminar einen Erprobungsraum für die Adaption von Aufgabenmaterialien und -formaten, die in der jeweiligen Praktikumsschule eingesetzt werden können. In den einzelnen Seminaren erhalten Studierende nicht nur einen Einblick in verschiedene Begabungsmodelle, Fördermöglichkeiten, Aufgabenmaterialien und Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Kinder, sondern es geht auch um die Weiterentwicklung der inklusiven Überzeugung der Studierenden (Koop, 2009). Jedes Seminar ist durch die methodischen Bausteine theoretischer Input, Einzelarbeit und Austausch in Kleingruppen bzw. in der gesamten Seminargruppe geprägt.

Die erste Erhebung hat die Funktion einer Pilotstudie. Anhand der ausgewerteten Daten wird ein Kategoriensystem erstellt, welches im weiteren Verlauf die Basis für die Weiterentwicklung der Fragebogenitems bildet. Eine umfangreiche zweite Erhebung findet im Wintersemester 2021/22 statt.

Ausblick

Aufgabe der Fortsetzungsphase **QUALI**TEACH II ist es, mit den Entwicklungen in den Teilprojekten die Erfurter Lehrerbildung qualitativ weiter voranzutreiben. Die beiden zuvor skizzierten Teilprojekte, die einem interdisziplinären Ansatz folgen, haben es sich zum Ziel gemacht, Studienmodule in Form von Beratungs- und Trainingsbausteinen evidenzbasiert (weiter-) zu entwickeln, zu erproben, zu evaluieren und in den wissenschaftlichen Diskurs einzubringen.

Auch wenn die aktuelle Lage in Folge der Corona-Pandemie die Umsetzung einzelner Projektschritte teilweise erschwert, haben die Darstellungen der beiden mit dem Fachbereich Mathematikdidaktik eng verbundenen Projekte die Chancen digitaler Lösungen aufgegriffen. Bis jetzt können wir einschätzen, dass auch die digitalen Formate von Studierenden wie Lehrenden gut angenommen werden.

Die im Teilprojekt *Methodentraining für effektives Unterrichten* entwickelten Trainingsprogramme werden als Trainingshandbücher inklusive aller Materialien publiziert. Für eine nachhaltige Implementation ist geplant, das Gesprächstraining als festes

Ausbildungsmodul in der Masterphase des Lehramtsstudienganges zu verankern.

Geplant ist ebenso, das im Teilprojekt *Förderung besonderer mathematischer Interessen und Begabungen* entwickelte Lehrdesign als begleitendes Element des Komplexen Schulpraktikums an der Universität Erfurt zu implementieren. Weiterhin werden entwickelte Praxisempfehlungen für angehende Grundschullehrkräfte publiziert.

Ziel beider Teilprojekte ist es, einen Beitrag für die Lehrerbildung zu leisten und somit Lehramtsstudierende auf die aktuellen Herausforderungen im Beruf vorzubereiten.

Literatur

Allen, D. W., Ryan, K., & Lux, W. (1972). *Microteaching*. Herausgegeben von Walther Zifreund. Weinheim: Beltz.

Ajzen, I. (1985). From intentions to actions. A theory of planned behavior. In J. Kuhl & J. Beckmann (Hrsg.), *Action-control: From cognition to behavior.* Heidelberg: Springer.

Ajzen, I., & Fishbein, M. (1980): *Understanding attitudes and predicting social behavior.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.

Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung.* München: Spektrum Akademischer Verlag.

Borich, G. D. (2014). *Effective teaching methods. Research-based practice* (8. Aufl.). Boston: Pearson (Always learning).

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, learning, and instruction. Essays in honor of Robert Glaser* (S. 453–494.) Unter Mitarbeit von Robert Glaser. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Francis, J. J., Eccles, M. P., Johnston, M., Walker, A., Grimshaw, J., Foy, R., Kaner, E. F. S., Smith, K., & Bonetti, D. (2004). *Constructing questionnaires based on the theory of planned behaviour*: A manual for health service researchers. UK: University of Newcastle upon Tyne.

Fritzlar, T. (2008). Förderung mathematisch begabter Kinder im mittleren Schulalter. In C. Fischer, F. J. Mönks & U. Westphal (Hg.), *Individuelle Förderung: Begabungen entfalten – Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (S. 61–77). Berlin: LIT Verlag.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potenziell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile.* Münster: LIT Verlag.

Gage, N. L., & Berliner, D. C. (1996). *Pädagogische Psychologie* (5. vollständig überarbeitete Aufl.). Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags-Union.

Grassmann, M. (2009). *Praxis Pädagogik: Erkennen und fördern mathematisch begabter Kinder: Anregungen und Erfahrungen aus einem Münsteraner Projekt.* Braunschweig: Westermann.

Haag, L. (2019). Entwickelnde Formen. In E. Kiel, B. Herzig, U. Maier & U. Sandfuchs (Hrsg.), *Handbuch Unterrichten an allgemeinbildenden Schulen* (S. 184–192). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt Verlag.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter.* Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin: Springer.

Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule.* Berlin: Springer Verlag.

Kiesswetter, K. (1985). *Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem.* In: MNU, 9(5), 300–306.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projektes „Pythagoras". In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 127–146). Münster, München, Berlin: Waxmann.

Koop, B. (2009). Überzeugung und Selbstwirksamkeit im Umgang mit Heterogenität. Wie denken Studierende des Lehramts für Grundschule? *Empirische Pädagogik, 1*, 5–25.

Kossakowskii, W. (1977). *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozeß*. Berlin: Volk und Wissen.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. Beschluss vom 15.10.2004. Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (2015). Förderstrategien für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler. www.kmk.org/fileadmin/pdf/350-KMK-TOP-011-Fu-Leistungsstarke_-_neu.pdf

Kunter, M., & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften – Zusammenfassung und Diskussion. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 345–366). Münster: Waxmann.

Michaels, S., O'Conner, C., Hall, M. W., & Resnick, L. B. (2016). *Accountable talk sourcebook: for classroom conversation that works*. University of Pittsburgh. https://ifl.pitt.edu/documents/AT-SOURCEBOOK2016.pdf

Nolte, M. (2012). Zur Förderung mathematisch besonders begabter Kinder im Grundschulalter. In C. Fischer, C. Fischer-Ontrup. F. Käpnick, F.-J. Mönks, H. Scheerer & C. Solzbacher (Hrsg.), *Individuelle Förderung multipler Begabungen: Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (S. 173–184). Berlin: LIT.

Quittenbaum, N. (2016). *Training für direkte Instruktion: die Entwicklung und Erprobung eines Kommunikationstrainings für den Unterricht mit direkter Instruktion*. Dissertation. Universität Erfurt. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Reznitskaya, A., & Wilkinson, I. A. G. (2017). *The Most Reasonable Answer. Helping Students Build Better Arguments Together*. Cambridge, Massachusetts: Harvard Education Press.

Riecke-Baulecke, T. (2017). Unterrichtsqualität. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 149–166). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020. 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 39–46). Münster: WTM-Verlag.

Thiele, H. (1978). *Steuerung der verbalen Interaktion durch didaktische Interventionen. Eine empirische Untersuchung zum Effekt von drei Methoden zum Lehrerverhaltenstraining*. Dissertation. Northeim/Hann.

Thiele, H. (1981). *Lehren und Lernen im Gespräch. Gesprächsführung im Unterricht*. Bad Heilbrunn/Obb.: Verlag Julius Klinkhardt (Erziehen und Unterrichten in der Schule).

Thiele, H. (1983). *Trainingsprogramm Gesprächsführung im Unterricht. Kognitives Lehrertraining zum Selbststudium*. Bad Heilbrunn/Obb.: Verlag Julius Klinkhardt.

Heike Hahn, Universität Erfurt
E-Mail: heike.hahn@uni-erfurt.de

Stefanie Baum, Universität Erfurt
E-Mail: stefanie.baum@uni-erfurt.de

Theresa Fabig, Universität Erfurt
E-Mail: theresa.fabig@uni-erfurt.de

Mathe braucht man überall?

Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für Studiengänge außerhalb des MINT-Bereichs?

Irene Neumann, Dunja Rohenroth und Aiso Heinze

Aus Sicht der Mathematikdidaktik steht außer Frage, dass „Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin [. . .] von schier universeller Reichweite“ (Winter, 1995, S. 38) eine wesentliche Bedeutung als Teil der Allgemeinbildung zukommt. Auch aus allgemeinpädagogischer Sicht wird mathematischer Modellierungskompetenz ein elementarer Stellenwert im Reigen der „[b]asale[n] Kulturwerkzeuge“ (Baumert, 2002, S. 108) zugeschrieben. Jedoch bemängelte bereits Winter (1995), dass diese unbestritten zentrale Bedeutung der Mathematik sich nicht im gemeinhin vorherrschenden Bild von der Mathematik in der Öffentlichkeit widerspiegelt.

In der Tat wird gerade am Übergang von der Schule in die Hochschule der Mathematik vor allem für die MINT-Fächer eine wichtige Rolle beigemessen. Für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs wird die Rolle der Mathematik dagegen oft unterschätzt (z. B. Oepke & Eberle, 2016) oder diese werden von Studieninteressierten regelrecht ausgewählt, um gerade keine Berührung mehr mit Mathematik haben zu müssen (Schnell, 2002). Dass Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs keine mathematischen Lerninhalte umfassen, ist aber häufig ein Trugschluss wie die Modulbeschreibungen vieler Studiengänge zeigen. Teilweise sind dort die mathematischen Anforderungen für die Studieninteressierten nicht explizit ersichtlich, aber sie sind dennoch vorhanden. So gibt es beispielsweise im Studiengang Ökotrophologie an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel die durchaus mathematikhaltige Lehrveranstaltung „Einführung in die Physik für Studierende der Agrarwissenschaften und Ökotrophologie“ oder im Studiengang Kommunikations- und Medienwissenschaft an der Universität Leipzig die Veranstaltung „Methoden der empirischen Kommunikationsforschung“, die ebenfalls mathematische Anforderungen umfasst.[1] Teilweise wird in den Modulbeschreibungen die Mathematik aber sogar explizit benannt, wie bei den Lehrveranstaltungen „Mathematik in der Medizin und Physiotherapie“ (z. B. im Studiengang

[1] Alle Angaben zu konkreten Studiengängen und Lehrveranstaltungen beziehen sich auf das Jahr 2019, in dem die Modulkataloge gesichtet wurden.

Physiotherapie an der Fachhochschule Aachen), „Mathematik I" (z. B. im Studiengang Wirtschaftswissenschaften an der Universität Bielefeld) oder „Einführung in die Statistik" (z. B. im Studiengang Bewegung und Gesundheit an der Justus-Liebig-Universität Gießen). Insgesamt ist davon auszugehen, dass von über 80 % der Studierenden innerhalb und außerhalb des MINT-Bereichs (Stand 2019) mathematische Lernvoraussetzungen zu Studienbeginn erwartet werden, die über ein Basisniveau hinausgehen. Die vorgenannten Lehrveranstaltungen und Modulbeschreibungen illustrieren zwar eindrücklich die Bandbreite der Studienfächer, in denen Mathematik eine relevante Rolle spielt; sie zeigen aber auch, dass die mathematischen Anforderungen deutlich diverser sind als im MINT-Bereich, in dem die mathematische Grundausbildung in der Regel mit Lehrinhalten zur Analysis und zur Linearen Algebra deutlich homogener ist.

Damit drängt sich die Frage auf, welche konkreten Erwartungen die Hochschullehrenden an Studienanfängerinnen und Studienanfänger in Studienfächern außerhalb des MINT-Bereichs stellen bzw. in welchen Studienfächern mathematische Anforderungen eine Rolle spielen. An diesem Punkt setzte das Projekt MaLeMINT-E an, das eine Erweiterung des Projekts MaLeMINT (Mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge) ist. Es zielt u. a. darauf zu klären, welche mathematischen Lernvoraussetzungen jenseits von basalem Wissen und Basiskompetenzen aus Hochschulsicht für einen erfolgreichen Einstieg in Studiengänge außerhalb des MINT-Bereichs benötigt werden. Dabei war insbesondere zu klären, inwieweit zu dieser Frage ein Konsens unter Hochschullehrenden vorhanden ist.

Das Projekt MaLeMINT-E

Wie das Vorgängerprojekt (vgl. MGDM Nr. 105; Neumann et al., 2017; Deeken et al., 2020) war auch MaLeMINT-E als Expertenbefragung nach der Delphi-Methode (z. B. Häder, 2014) angelegt: Die erfahrungsbasierte Einschätzung einer großen Gruppe von Hochschullehrenden wurde über mehrere Runden hinweg wiederholt erfragt, strukturiert und zur erneuten Bewertung zurückgespiegelt, um so die sukzessive Bildung eines potenziellen Konsenses zu ermöglichen. Die Expertinnen und Experten wurden dabei einzeln und anonym über eine Webplattform befragt. Dadurch sollte die soziale Beeinflussung durch eine Gruppendynamik vermieden werden, wie sie beispielsweise durch eine Meinungsführerschaft von Einzelpersonen in Gruppendiskussionen auftreten können (Häder, 2014). Die Äußerungen aller Personen wurden gleich gewichtet, um so auch die Erfahrungen und Expertenmeinungen von Personen einzubeziehen, die sich an öffentlichen Debatten eher selten beteiligen (sog. schweigende Mehrheit).

Für die Auswahl der Expertinnen und Experten wurden zunächst für alle Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs Studienfächer identifiziert, die schulmathematische Vorkenntnisse voraussetzen, die über eine basale mathematische Grundbildung hinausgehen. Anschließend wurden auf Basis elektronisch zugänglicher Informationen (Vorlesungsverzeichnisse, Modulhandbücher, Stundenpläne) die Hochschullehrenden recherchiert, die im Zeitraum 2015–2019 in diesen Studiengängen Lehrveranstaltungen mit mathematischen Inhalten gehalten haben. So wurden insgesamt 1953 Hochschullehrende von 164 Universitäten und (Fach-) Hochschulen ermittelt, von denen am Ende 1870 Hochschullehrende per E-Mail erreicht wurden. In der ersten, zweiten bzw. dritten Befragungsrunde nahmen 19, 547 bzw. 337 teil (in der ersten explorativen Runde wurde nur eine kleine Substichprobe angeschrieben).

Grundlage für die in den Befragungsrunden eingesetzten Fragebögen bildeten die Lernvoraussetzungen, die bereits im Projekt MaLeMINT erarbeitet wurden und sich über vier Kategorien erstreckten: *Mathematische Inhalte* (Grundlagen, Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Stochastik sowie Bereichsübergreifende Inhalte), *Mathematische Arbeitstätigkeiten* (z. B. Problemlösen oder mathematisches Argumentieren und Beweisen), *Vorstellungen zum Wesen der Mathematik* (z. B. „Das Beweisen ist eine zentrale Tätigkeit der Mathematik") sowie *Persönliche Merkmale* (z. B. Interesse an Mathematik, Fleiß und Bereitschaft zur häufigen Beschäftigung mit Mathematik). Da zu erwarten war, dass Stochastik in Studienfächern außerhalb des MINT-Bereichs (z. B. in Psychologie oder Sozialwissenschaften) eine größere Rolle spielt als im MaLeMINT-Katalog abgedeckt, wurde dieser Inhaltsbereich auf Basis der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (vgl. KMK 2012) weiter ausdifferenziert.

Um zu untersuchen, inwieweit die Lernvoraussetzungen des Katalogs auch für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs als relevant angesehen werden, wurde diese in der ersten, explorativen Runde einer kleinen kriteriengeleitet ausgewählten Stichprobe vorgelegt. Als Ergebnis konnte festgehalten werden, dass der erweiterte MaLeMINT-Katalog durchaus als Grundlage für die Befragung der Hochschullehrenden außerhalb des MINT-Bereichs verwendet werden kann. Es zeigte sich auch bereits in dieser kleineren Stichprobe, dass eine Gruppierung von Studienfächern sinnvoll ist, um einen Konsens innerhalb von Studienfächern mit ähnlichen Erwartungen angemessen abbilden zu können. Die Gesamtstichprobe, die dann in den folgenden Runden 2 und 3 befragt wurde, wurde daher in Gruppen entsprechend der unterrichteten Studienfächer aufgeteilt. Neben der Bitte, die Relevanz der mathematischen Lernvoraussetzungen für einen erfolgreichen Einstieg in das unterrichtete Studienfach zu beurteilen, umfassten die Fragebögen auch die Möglichkeit, die vorgeschlagenen Aspekte zu bewerten, zu präzisieren oder zu ergänzen. Im Verlauf der drei Befragungsrunden ergaben sich so fünf Studienfachgruppen, in denen sich jeweils ein Konsens unter den Hochschullehrenden hinsichtlich der erwarteten mathematischen Lernvoraussetzungen abzeichnete.

Auswertungskriterien

Die Auswertung der Antworten der Hochschullehrenden erforderte die Festlegung von Kriterien, wann ein Konsens als solcher angesehen werden kann. Wie im MaLeMINT-Projekt wurden diese Kriterien konservativ gewählt:

- Eine Lernvoraussetzung wurde als notwendig angesehen, wenn mindestens 2/3 aller Befragten eines Studienfachs die Lernvoraussetzung als notwendig ansahen.
- Eine Lernvoraussetzung wurde als nicht notwendig angesehen, wenn mindestens 3/4 aller Befragten eines Studienfachs die Lernvoraussetzung als nicht notwendig ansahen.

Diese Kriterien wurden jeweils auf die Antworten der Hochschullehrenden eines Studienfachs und nach Bildung der fünf Gruppen auf die einzelnen Studienfachgruppen angewandt. Alle Ergebnisse sind also vor dem Hintergrund dieser Konsenskriterien zu sehen.

Ergebnisse

Als zentrales Ergebnis lässt sich festhalten, dass – anders als im MINT-Bereich – die erwarteten mathematischen Lernvoraussetzungen für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs sehr heterogen sind. Über alle Studienfächer hinweg stimmten die Hochschullehrenden in nur 48 von 188 Lernvoraussetzungen (21 %) in ihren Erwartungen überein. Davon wurden 41 übereinstimmend als notwendig und 7 als nicht notwendig eingeschätzt. Allerdings konnten fünf Gruppen von Studienfächern identifiziert werden, innerhalb derer sich ein deutlich breiterer Konsens unter den Hochschullehrenden abzeichnet (Tab. 1; an dieser Stelle sei angemerkt, dass es zu jedem Studienfach mehrere Studiengänge geben kann). Nach Bildung der Studienfachgruppen konnten ähnlich hohe (81 % bzw. 78 % in den Studienfachgruppen 2 und 3) bzw. sogar höhere (86 % in Studienfachgruppe 5) Konsensraten erreicht werden wie in der MaLeMINT-Studie. Lediglich in den Studienfachgruppen 1 und 4 lag die Konsensrate niedriger (bei 70 %), was dennoch ein durchaus zufriedenstellendes Ergebnis darstellt.

Die von den Hochschullehrenden als notwendig angesehenen mathematischen Lernvoraussetzungen erstrecken sich dabei, in unterschiedlicher Ausbreitung, über alle vier Kategorien (*Mathematische Inhalte*, *Mathematische Arbeitstätigkeiten*, *Vorstellungen zum Wesen der Mathematik* und *Persönliche Merkmale*). Eine Ausnahme bildet dabei Studienfachgruppe 5, in der die *Vorstellungen zum Wesen der Mathematik* entweder als nicht notwendig eingestuft wurden oder zu einem uneinheitlichen Meinungsbild führten.

Lernvoraussetzungen zu *Mathematischen Inhalten*, die von den Studienfachgruppen mehrheitlich als notwendig erachtet wurden, umfassten verschiedene Aspekte mathematischer Konzepte, Verfahren oder Bereiche, die von Grundlagen (z. B. Bruchrechnung, lineare und quadratische Funktionen) über Analysis (z. B. anschauliches Stetigkeitskonzept, Differentiations- und Integrationsregeln), Lineare Algebra (z. B. Vektoren als Pfeilklassen, Komponentendarstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$) und Stochastik (z. B. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik) bis hin zu bereichsübergreifenden Inhalten (z. B. Aussagenlogik, übergeordnete Begriffe wie Definition, Satz und Beweis) reichten. In dieser Kategorie zeigten sich große Unterschiede zwischen den Studienfachgruppen. Beispielsweise zeigten sich Aspekte der elementaren Geometrie spezifisch relevant für die Studienfachgruppe 1, während Aspekte der Analysis vor allem in den Studienfachgruppen 2 und 3, und Aspekte der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra spezifisch in Studienfachgruppe 2 erwartet werden. Aspekte der Stochastik wurden in einer deutlich größeren Bandbreite von Studienfächern als relevant angesehen; nur in Studienfachgruppe 1 wurden Aspekte der Stochastik eher als nicht notwendig eingeschätzt oder es gab keinen Konsens.

Aspekte *Mathematischer Arbeitstätigkeiten* umfassten grundlegende Tätigkeiten (z. B. sicherer Umgang mit Taschenrechnern und Computern zur Lösung von Aufgaben), aber auch mathematisches Argumentieren und Beweisen (z. B. Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen in gegebenen mathematischen Situationen), mathematisches Kommunizieren (z. B. Mathematische Sachverhalte mündlich erklären), mathematisches Definieren (z. B. mathematische Definitionen nachvollziehen, u. a. durch die Angabe von Beispielen und Gegenbeispielen), Problemlösen (z. B. Gegebene Lösungen zu mathematischen Problemen verstehen), mathematische Modellieren (z. B. Beschreibung und Lö-

Tabelle 1. Studienfachgruppen mit ähnlichen erwarteten mathematischen Lernvoraussetzungen

Gruppe 1	▪ Architektur ▪ Landespflege, Umweltgestaltung ▪ Raumplanung ▪ Wirtschaftsingenieurwesen mit wirtschaftswissenschaftlichem Schwerpunkt
Gruppe 2	▪ Psychologie ▪ Wirtschaftswissenschaften
Gruppe 3	▪ Ernährungs- und Haushaltswissenschaften ▪ Humanmedizin ▪ Pharmazie ▪ Restaurierungskunde ▪ Veterinärmedizin ▪ Zahnmedizin
Gruppe 4	▪ Bibliothekswissenschaft, Dokumentation ▪ Erziehungswissenschaften ▪ Gesundheitswissenschaften (allgemein) ▪ Medienwissenschaft ▪ Politikwissenschaft/Politologie ▪ Sozialwissenschaften ▪ Sport, Sportwissenschaft
Gruppe 5	▪ Kommunikationswissenschaft/Publizistik ▪ Sozialwesen ▪ Verwaltungswissenschaften

sung außermathematischer Situationen mit mathematischen Werkzeugen) bis hin zu Recherchieren (d. h. mathematische Informationen recherchieren und Quellen kritisch einschätzen). Hier sticht insbesondere Studienfachgruppe 2 heraus, in der die Hochschullehrenden nahezu alle Lernvoraussetzungen dieser Kategorie als notwendig beurteilen. In den Studienfachgruppen 1, 3 und 4 werden ebenfalls aus all diesen Bereichen mathematische Arbeitstätigkeiten als Lernvoraussetzungen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern erwartet, aber in deutlich geringerem Umfang, in Studienfachgruppe 5 vornehmlich grundlegende Arbeitstätigkeiten.

Vorstellungen zum Wesen der Mathematik adressierten ein wissenschaftspropädeutisches Verständnis von Mathematik wie beispielsweise ein Verständnis davon, dass Mathematik über das schablonenartige Anwenden von mathematischen Methoden auf Standardprobleme hinausgeht. Mit Ausnahme der Hochschullehrenden in Studienfachgruppe 5 bewerteten die Hochschullehrenden der anderen Studienfachgruppen zumindest ein Teil dieser Lernvoraussetzungen als notwendig. In den Studienfachgruppen 1 und 2 wurden diese Aspekte sogar weitgehend als notwendig eingeschätzt.

Lernvoraussetzungen im Bereich *Persönlicher Merkmale* bezogen sich auf Charakteristika, die beim Lernen von Mathematik an Fachhochschulen und Universitäten eine Rolle spielen. Die Hochschullehrenden bewerteten diese Lernvoraussetzungen über die verschiedenen Gruppen hinweg recht einheitlich und in weiten Teilen als notwendig. Die als notwendig eingeschätzten Aspekte erstreckten sich von Einstellungen und Arbeitsweisen (z. B. Interesse und Freude an und Neugier gegenüber der Anwendung von Mathematik in außermathematischen Bereichen, Organisations- und Zeitmanagement, Durchhaltevermögen), über kognitive Fähigkeiten und Kenntnisse (z. B. schnelles Auffassungsvermögen, Konzentrationsfähigkeit, Kreativität) bis hin zu sozialen Fähigkeiten (z. B. Teamfähigkeit, Bereitschaft und Mut bei Unklarheiten und Fehlern nachzufragen und bei Schwierigkeiten Hilfe zu suchen).

Einen quantitativen Überblick über die Einschätzung der Hochschullehrenden aus den fünf Studienfachgruppen zeigt Tabelle 2. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Neumann et al. (2021).

Implikationen

Mit den hier erarbeiteten Ergebnissen liegt nun eine wichtige Erweiterung des MaLeMINT-Katalogs mathematischer Lernvoraussetzungen vor. Dieser fokussierte bislang lediglich MINT-Studienfächer, für die ohne Zweifel Mathematik eine zentrale Rolle spielt. Gerade mit Blick auf die Bescheinigung einer *allgemeinen* Studierfähigkeit durch die allgemeine Hochschulreife sind jedoch Erkenntnisse zu mathematischen Lernvoraussetzungen für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs unerlässlich.

Tabelle 2. Anzahl mathematischer Lernvoraussetzungen, die in den fünf Studienfachgruppen als notwendig, nicht notwendig oder uneinheitlich bewertet wurden.

Kategorie	Gesamt	Studienfachgruppe 1			Studienfachgruppe 2			Studienfachgruppe 3			Studienfachgruppe 4			Studienfachgruppe 5		
		Notwendig	Nicht notwendig	Kein Konsens	Notwendig	Nicht notwendig	Kein Konsens	Notwendig	Nicht notwendig	Kein Konsens	Notwendig	Nicht notwendig	Kein Konsens	Notwendig	Nicht notwendig	Kein Konsens
A) Mathematische Inhalte	**115**	**43**	**26**	**46**	**76**	**15**	**24**	**52**	**41**	**22**	**39**	**41**	**35**	**24**	**76**	**15**
A1) Grundlagen	50	37	2	11	38	5	7	29	13	8	25	13	12	13	26	11
A2) Analysis	30	2	10	18	19	1	10	11	15	4	2	17	11	0	26	4
A3) Lineare Algebra und Analytische Geometrie	16	3	6	7	7	6	3	2	10	4	0	8	8	0	16	0
A4) Stochastik	13	1	6	6	10	1	2	9	1	3	10	1	2	9	4	0
A5) Bereichsübergreifende Inhalte	6	0	2	4	2	2	2	1	2	3	2	2	2	2	4	0
B) Mathematische Arbeitstätigkeiten	**42**	**27**	**7**	**8**	**36**	**1**	**5**	**24**	**6**	**12**	**23**	**6**	**13**	**14**	**21**	**7**
B1) Grundlagen (Rechnen, Hilfsmitteleinsatz, Darstellungen)	9	9	0	0	9	0	0	9	0	0	9	0	0	7	0	2
B2) Mathematisches Argumentieren und Beweisen	9	4	4	1	6	1	2	5	3	1	5	2	2	3	4	2
B3) Mathematisches Kommunizieren	5	4	0	1	5	0	0	3	0	2	3	0	2	2	2	1
B4) Mathematisches Definieren	4	3	1	0	3	0	1	0	1	3	1	1	2	0	3	1
B5) Problemlösen	8	3	0	5	7	0	1	3	1	4	2	2	4	1	6	1
B6) Mathematisches Modellieren	6	3	2	1	5	0	1	3	1	2	2	1	3	0	6	0
B7) Recherche	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
C) Wesen der Mathematik	**9**	**9**	**0**	**0**	**7**	**0**	**2**	**3**	**4**	**2**	**2**	**2**	**5**	**0**	**6**	**3**
D) Weitere personenbezogene Eigenschaften	**22**	**19**	**0**	**3**	**17**	**0**	**5**	**16**	**1**	**5**	**16**	**2**	**4**	**15**	**5**	**2**
D1) Einstellungen und Arbeitsweisen	11	9	0	2	9	0	2	7	1	3	7	2	2	6	4	1
D2) Kognitive Fähigkeiten und Kenntnisse	7	6	0	1	5	0	2	6	0	1	5	0	2	5	1	1
D3) Soziale Fähigkeiten	4	4	0	0	3	0	1	3	0	1	4	0	0	4	0	0
Gesamt	**188**	**98**	**33**	**57**	**136**	**16**	**36**	**95**	**52**	**41**	**80**	**51**	**57**	**53**	**108**	**27**

Wie auch für die MINT-Fächer stellen sich im Anschluss an diese Studie drängende Fragen, beispielsweise inwieweit die Studienanfängerinnen und Studienanfänger die in den jeweiligen Studienfächern erwarteten mathematischen Lernvoraussetzungen tatsächlich „mitbringen" oder inwieweit sich diese von den Hochschullehrenden erwarteten Lernvoraussetzungen als prädiktiv für den Studienerfolg in den ersten Semestern zeigen. Mit Blick auf die Heterogenität der identifizierten mathematischen Lernvoraussetzungen, die sich in dieser Studie zeigte, ist eine Untersuchung dieser Anschlussfragen in sorgfältig geplanten Studien durchaus geboten, um differenzierte Aussagen treffen zu können. Festzuhalten ist zudem, dass die Erkenntnisse aus MaLeMINT und MaLeMINT-E nicht einfach mit den Zielen des schulischen Mathematikunterrichts gleichzusetzen sind. Zwar nimmt ein substanzieller Anteil der Schulabsolventinnen und Schulabsolventen nach der Schulzeit ein Studium mit Mathematikanteilen auf, aber viele eben auch nicht. Die Trias der Ziele der Oberstufe sollte entsprechend in ihrer Breite berücksichtigt und nicht allein auf die Studierfähigkeit reduziert werden.

Weiterführende Hinweise

Das Projekt MaLeMINT-E wurde am IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik Kiel durchgeführt. Dieser Beitrag ist nur eine Kurzdarstellung der Studie. Ein ausführlicherer Bericht mit Details zur Studie sowie einer vollständigen Darstellung der ermittelten Lernvoraussetzungen findet sich in Neumann et al. (2021) und ist als Download erhältlich: www.leibniz-ipn.de/malemint-e

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal allen Hochschullehrenden danken, die sich an unserer zeitaufwändigen Befragung beteiligt haben. Ohne sie wäre diese Studie nicht möglich gewesen.

Literatur

Baumert, J. (2002). Deutschland im internationalen Bildungsvergleich. In N. Killius (Hrsg.), *Die Zukunft der Bildung* (S. 100–150). Frankfurt/Main: Suhrkamp.

Deeken, C., Neumann, I., & Heinze, A. (2020). Mathematical Prerequisites for STEM Programs: What do University Instructors Expect from New STEM Undergraduates? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(1), 23–41. DOI:10.1007/s40753-019-00098-1

Häder, M. (2014). *Delphi-Befragungen: Ein Arbeitsbuch* (3. Aufl.). Wiesbaden: Springer.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18. 10. 2012. www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Neumann, I., Pigge, C. & Heinze, A. (2017). Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für ein MINT-Studium? Kiel: IPN.

Neumann, I., Rohenroth, D. & Heinze, A. (2021). Studieren ohne Mathe? Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs? Kiel: IPN.

Oepke, M., & Eberle, F. (2016). Deutsch- und Mathematikkompetenzen - wichtig für die (allgemeine) Studierfähigkeit? In J. Kramer, M. Neumann, & U. Trautwein (Hrsg.), *Abitur und Matura im Wandel: Historische Entwicklungslinien, aktuelle Reformen und ihre Effekte* (S. 215–252). Wiesbaden: Springer VS.

Schnell, R. (2002). Ausmaß und Ursachen des Mangels an quantitativ qualifizierten Absolventen sozialwissenschaftlicher Studiengänge. In U. Engel (Hrsg.), *Sozialwissenschaftlicher Tagungsbericht: Vol. 5. Praxisrelevanz der Methodenausbildung* (S. 35–44). Bonn: Informationszentrum Sozialwissenschaften.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. Mitteilungen der GDM, (61), 37–46.

Irene Neumann, IPN Kiel
E-Mail: ineumann@leibniz-ipn.de

Dunja Rohenroth, IPN Kiel
E-Mail: rohenroth@leibniz-ipn.de

Aiso Heinze, IPN Kiel
E-Mail: heinze@leibniz-ipn.de

Beweisakzeptanz von Lehramtsstudierenden der Mathematik
Generierung von neuen Hypothesen anhand einer Fallstudie

Kinga Szűcs

Problemstellung: Die Kluft zwischen dem Stellenwert von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik und im Mathematikunterricht

Beweise gelten in der Fachwissenschaft Mathematik als wesentlicher, unerlässlicher Bestandteil, sie sind das Herzstück der Mathematik (Rav, 1999), der ultimative Weg, um einerseits mathematisches Wissen formal-axiomatisch zu sichern und andererseits neues Wissen zu generieren. Wenn man auf die Historie schaut, stellt man fest, dass die Mathematik erst durch die axiomatische Grundlegung und durch die Beweise, also durch die Ableitung neuen Wissens aus bereits vorhandenen Inhalten – Letztere gesichert durch Axiome, Definitionen und bereits bewiesene Sätze –, nach vereinbarten Regeln der Logik, zu einer *Wissenschaft* im antiken Griechenland wird. Dieser axiomatische Aufbau ist bis heute die vorherrschende Methode der Wissenssicherung, somit haben Beweise nach wie vor einen sehr hohen Stellenwert in der Fachwissenschaft Mathematik. Dieser hohe Stellenwert spiegelt sich zwar auch in diversen aktuellen unterrichtsregulierenden Dokumenten wie Bildungsstandards, Curricula und Lehrpläne wider, die heutige Unterrichtspraxis ist allerdings dadurch charakterisiert, dass dort bis auf die Satzgruppe des Pythagoras kaum Beweise thematisiert werden (Brunner, 2014, S. 2). Während Beweise lange, etwa bis in die 1990er Jahre hinein, einen zwar schwierigen, aber wesentlichen Bestandteil der Unterrichtspraxis darstellten, schrumpfte ihr Stellenwert in den letzten zwei Jahrzehnten deutlich. Brunner (2014, S. 2) formuliert überdies: „Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass beim Thema »Beweisen« eine größere Diskrepanz besteht zwischen dem Anspruch, wie er sich beispielsweise in Bildungsstandards manifestiert, und der Wirklichkeit, realisiert als alltägliche Praxis des Mathematikunterrichts [. . .].“ Sie verdeutlicht hierdurch die aktuelle Kluft zwischen dem Stellenwert von Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik beziehungsweise den daraus für die Unterrichtspraxis abgeleiteten Ansprüchen und dem tatsächlichen Mathematikunterricht. Um diesem Problem effektiv und langfristig entgegenwirken zu können braucht es unter anderem zukünftige Lehrpersonen, die den hohen Stellenwert von Beweisen in der Mathematik nicht nur akzeptieren und wertschätzen, sondern diesen in der Unterrichtspraxis auch aktiv an ihre Lernenden vermitteln. Dies kann erst erfolgen, wenn die zukünftigen Lehrpersonen selbst über ausgeprägtes fachliches sowie fachdidaktisches Wissen und Können bezüglich der Beweise verfügen. Mit der vorliegenden Arbeit wird somit das Ziel verfolgt, bei Lehramtsstudierenden am Ende ihrer Ausbildung zu untersuchen, welches einschlägige, schulrelevante Wissen zum Beweisen bei ihnen vorhanden ist.

Theoretischer Hintergrund: Wann gilt ein Beweis als Beweis?

In diesem Abschnitt wird kurz angerissen, was in der Fachwissenschaft Mathematik unter einem Beweis verstanden wird sowie welche Abweichungen hiervon im Mathematikunterricht erlaubt und sogar erwünscht sind. Überdies wird in Anlehnung an Heinze und Reiss (2003) auf Wissenskomponenten eingegangen, die unerlässlich für die selbstständige Beweisführung sind. Diese Wissenskomponenten können auch als Kriterien aufgefasst werden, an denen festgehalten werden kann, ob ein bestimmtes Beweisprodukt – beispielsweise eine Argumentationskette, die ein/e Lernende/r erstellt hat – in der Tat einen Beweis darstellt. Zum Schluss werden bisherige Ergebnisse zur Beweisakzeptanz – also zur Anerkennung von vorgelegten Beweisprodukten als gültige Beweise – kurz zusammengefasst.

Beweis in der Fachwissenschaft Mathematik – Beweis im Mathematikunterricht

In der Mathematik als Wissenschaft wird unter einem Beweis die deduktive und formale Herleitung einer Aussage aus Axiomen, Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen unter Beachtung der Regeln der Logik verstanden. Durch den Beweis wird aus der Aussage ein Satz, da gezeigt wurde, dass die Aussage wahr ist. Auch wenn diese Beschreibung ein Idealbild eines Beweises darstellt, und vollständige mathematische Strenge nicht realisiert werden kann (Jahnke & Ufer, 2015, S. 332), herrschen eine hohe Kohärenz und breiter Konsens in der mathematischen Gemeinschaft vor, wann eine Kette von Argumenten als Beweis akzeptiert wird (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 31). Mathematikerinnen und Mathematiker ergänzen nämlich fortschreitend die vorliegende Argumentationskette anhand ihrer sogenannten allgemein geteilten Wissensbasis und beurteilen derart ihre Gültigkeit. Ist ein formaler Beweis durch dieses Lückenschließen zumindest theoretisch erreichbar, so wird die Argumentationskette als ein gültiger Beweis akzeptiert. Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) gehen zudem darauf ein, dass diese allgemein geteilte Wissensbasis in der Schule von der in der Wissenschaft abweicht. Hieraus folgt, dass im Mathematikunterricht bestimmte Reduktionen, was insbesondere die formale Strenge betrifft, erlaubt und sogar erwünscht sind. So sollte zwar der „inhaltliche Kern" eines Beweises nicht aufgegeben werden, Abweichungen kann es jedoch bei der Notation geben. So „sollte ein Beweis aus einer Kette deduktiver Schlüsse bestehen, die von den Voraussetzungen zur Behauptung führt und dabei nur bekannte bzw. zuvor gezeigte Aussagen als Argumente in den deduktiven Schlüssen verwendet." (Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 32). Eine weitere Abweichung betrifft die axiomatische Basis: Da diese in der Schule nicht vorhanden ist und hierdurch darauf nicht zurückgegriffen werden kann, kann im Mathematikunterricht ein sogenanntes lokales Ordnen angestrebt werden. Hierbei werden bestimmte Aussagen nicht axiomatisch, sondern aus der Anschauung heraus als gültig angenommen sowie Begriffe nicht definiert, sondern ebenfalls aus der Anschauung heraus begründet (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 32). Diese Aussagen und Begriffe bilden dann die Grundlage, anhand derer weitere Aussagen deduktiv und unter Beachtung der logischen Schlussregeln abgeleitet, also bewiesen werden können.

Beweisschema, Beweisstruktur und Beweiskette

Wie anfangs bereits erwähnt, haben Heinze und Reiss (2003) Wissenskomponenten identifiziert, die notwendig für die Kompetenz sind, Beweise selbst zu führen sowie jene auf ihre Gültigkeit hin zu beurteilen. Diese Wissenskomponenten stellen gleichzeitig Entscheidungskriterien für das Vorliegen eines Beweises dar. Da dieses Modell an Wissenskomponenten in der einschlägigen fachdidaktischen Literatur oft zur Überprüfung der Beweisakzeptanz herangezogen wird – wie der nächste Abschnitt zeigt –, wird das Modell an dieser Stelle kurz vorgestellt. Die Autoren gehen davon aus, dass begriffliches Wissen sowie Kenntnisse über Regeln nicht ausreichen, um Beweise selbst führen zu können. Lernende brauchen zudem auch Verständnis für und Wissen über korrekte Beweisprozesse (Heinze & Reiss, 2003, S. 2). Dieses Wissen wird Methodenwissen genannt, da es um ein Wissen geht, dass die Methodik der Beweisführung betrifft. Die Bezeichnung wird allerdings von der Autorin der vorliegenden Arbeit für einen nicht gelungenen Ausdruck gehalten, da im fachdidaktischen Kontext Methodenwissen auch methodisches Wissen über die Vermittlung von Beweisen bezeichnen kann. Es soll nochmals betont werden, dass Letzteres hier nicht gemeint ist. Das Modell besteht aus folgenden drei, voneinander unabhängigen Komponenten:

- *Beweisschema*: Diese Komponente beschreibt das Wissen darüber, dass ein Beweis eine Kette deduktiver Schlüsse ist. Andere Arten des Begründens[1] wie Berufung auf eine Autorität oder empirisch-induktives Schließen sind nicht erlaubt. Überdies ist von Bedeutung, dass die formale Darstellung der Argumentation nicht verlangt wird, der Fokus liegt auf der Korrektheit der Schlüsse, nicht auf der verwendeten Darstellungsebene.
- *Beweisstruktur*: Hierbei geht es um das Wissen, dass ein Beweis von einer Voraussetzung oder mehreren Voraussetzungen lückenlos zur Behauptung führt. Hervorgehoben werden soll, dass die Behauptung nicht als Argument verwendet werden darf, Zirkelschlüsse also nicht zulässig sind.
- *Beweiskette*: Diese Komponente umfasst das Wissen darüber, dass jede Aussage aus der vorherigen Aussage folgt, wodurch eine logische Kette aus Beweisschritten entsteht. Eventuell ist hierzu die zusätzliche Berufung auf bereits gesichertes Wissen notwendig. (vgl. Heinze & Reiss, 2003, S. 2 und Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 36).

Ein Beweis ist also eine Argumentation, bei der nur bestimmte Schlüsse zulässig sind (Beweisschema), welche auf eine bestimmte Art und Weise zusammengefügt werden dürfen (Beweiskette) und deren Anfang und Ende gegeben sind (Beweisstruktur).

Bisherige Erhebungen und deren Ergebnisse zur Beweisakzeptanz

Im Weiteren wird kurz thematisiert, welche Argumentationen Lernende sowie Studierende als Beweise akzeptieren beziehungsweise über welche Wissenskomponenten sie dabei verfügen. Zusammenfassungen der wenigen einschlägigen, empirischen Studien findet man bei Jahnke und Ufer (2015), Heinze und Reiss (2003) sowie bei Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009).

[1] Eine Zusammenfassung der Arten des Begründens findet man in Fischer & Malle (1989, S. 178–179).

Bezogen auf die Sekundarstufe I kann anhand der Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) festgehalten werden, dass Lernende korrekte Beweise als solche zwar erkennen, dennoch formalsprachlich dargestellte Beweise eher akzeptieren als narrative. Überdies erkannten die meisten Lernenden zwar eine Argumentation mit empirischen Argumenten nicht als Beweis an (Beweisschema), sie waren aber überwiegend nicht fähig, dies auch zu begründen. Zudem konnten in dieser Studie etwa nur ein Drittel der Probanden einen Zirkelschluss (Beweisstruktur) erkennen, noch weniger konnten dies auch adäquat begründen. Lernende stuften darüber hinaus einen formal dargestellten, korrekten Beweis als einen solchen ein, den eine Lehrperson mit der besten Note bewerten, der einem selbst konstruierten Beweis nahekommen, der auch sowohl einen Schulkameraden als auch sie selbst am ehesten überzeugen würde. Es ist also insgesamt eine Tendenz bei den Lernenden zu verzeichnen, Formalismus als Kriterium anzuwenden sowie über ein intuitives, aber kein reflektiertes Wissen bezogen auf das Beweisschema und die Beweisstruktur zu verfügen.

Etwas mehr weiß man über die Beweisakzeptanz von Studierenden: Kempen (2016) hat gefunden, dass bereits Studienanfänger formal aufgeschriebene Beweise gegenüber beispielgebundenen, aber korrekten Argumentationen bevorzugen. Im Umkehrschluss bedeutet dieser Befund, dass die Erfülltheit des Kriteriums Beweiskette weniger eingesehen wird, wenn die Darstellung der Argumentation nicht formal ist. Formalismus gilt auch in der Studie von Füllgrabe und Eichler (2017) als wichtigstes Kriterium bei der Beweisakzeptanz für Studierende des Grundschullehramts. Die Autoren stellen zudem fest, dass zwar ein Wissen über die Beweisstruktur vorhanden ist, die Erfülltheit des Kriteriums die Studierenden allerdings nur auf einer oberflächlichen Ebene einfordern. In einer weiteren Studie formulieren sie die Hypothese (Füllgrabe & Eichler, 2018), dass Lehramtsstudierende mit ausgeprägter Beweiskompetenz – diese Studierenden sind fähig, Beweise, die die Kriterien Beweisschema, -struktur und -kette erfüllen, in einem vertrauten Kontext selbst zu führen – Argumentationen nach diesen Kriterien, also nach der logischen Struktur bewerten und als Beweise einstufen, wenn diese Kriterien erfüllt sind, während Studierende mit weniger ausgeprägter Beweiskompetenz dies eher entlang oberflächlichen, formalen Kriterien wie Nennung von „q.e.d." etc. tun.

Forschungsfragen

Wie anfangs bereits formuliert, wird in der vorliegenden Arbeit das Ziel verfolgt, das einschlägige Wissen von Studierenden des Lehramts zu untersuchen, weil dies eine Voraussetzung für die erfolgreiche Vermittlung des hohen Stellenwertes von Beweisen in der Mathematik und somit eines authentischen Bildes von der Mathematik darstellt. Die bisherigen Befunde stammen aus Studien, in denen (Lehramts-)studierende im universitären Kontext – z. B. im Rahmen einer fachwissenschaftlichen Veranstaltung – befragt wurden. Man kann unterstellen, dass in diesem Kontext die Studierenden die an sie gestellten Fragen und Aufgaben zu Beweisen vor dem Hintergrund der an Universitäten vorherrschenden Beweiskultur beantworten. Es stellt sich aber die Frage, inwieweit die gleichen Kriterien für Studierende des Lehramts in einem schulischen Kontext eine Rolle spielen, sprich, das, was sie als Beweis an der Universität akzeptieren, muss nicht zwangsläufig damit übereinstimmen, was sie in einem schulischen Kontext als Beweis akzeptieren, Letzteres würde eine zukünftige Unterrichtspraxis eher voraussagen. Somit waren anhand der oben dargestellten Theorie folgende Forschungsfragen leitend für die vorliegende Fallstudie:

- *Forschungsfrage 1:* Inwieweit akzeptieren Studierende des Lehramts die genannten möglichen und erwünschten Abweichungen von einem wissenschaftlichen Beweis in der Schule (formale Darstellung sowie axiomatische Basis), wenn der schulische Kontext explizit hervorgehoben wird?
- *Forschungsfrage 2:* Beurteilen Studierende des Lehramts vorgelegte Argumentationen entlang der genannten Komponenten des Methodenwissens oder entlang oberflächlicher Kriterien, wenn der schulische Kontext explizit hervorgehoben wird?
- *Forschungsfrage 3:* Welche weiteren Hypothesen können anhand der Beurteilung von vorgelegten, schulischen Argumentationen für Studierende des Lehramts abgeleitet werden?

Um diese Fragen zu beantworten wurde eine Fallstudie an der Universität Erfurt durchgeführt, über die nachfolgend detailliert berichtet wird.

Fallstudie an der Universität Erfurt

An der Universität Erfurt werden Lehrpersonen für die Grundschule, Regelschule, Förderschule und für berufsbildende Schulen im Bachelor/Master ausgebildet. Da hierdurch ein breites Spektrum an Schulformen abgedeckt wird, eignet sich der Standort insbesondere, Einblicke in das einschlägige Wissen über Beweise von zukünftigen Lehrpersonen zu gewinnen.

Forschungsdesign

Die Studie wurde in starker Anlehnung an die Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) konzipiert. Zur Erfassung des Methodenwissens wurden die dort veröffentlichten vier fiktiven Schülerlösungen von Achtklässlern Studierenden des Lehramts digital vorgelegt. Es geht um den Beweis des Satzes, dass die Seitenmittelpunkte einer Raute ein Rechteck bilden (Spezialfall des Satzes von Varignon). Die ersten beiden Schülerlösungen sind fehlerhafte Argumentationsbeispiele, da in der ersten Lösung empirische Argumente (Messen) verwendet werden und die zweite Lösung einen Zirkelschluss enthält. Während Erstere eine Lösung im narrativen Stil darstellt, ist Letztere ein eher formal verfasstes Argumentationsbeispiel. Die dritte und die vierte Lösung sind korrekte Beweise, von denen die dritte eher formalsprachlich, die vierte eher narrativ verfasst ist (vgl. auch Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009, S. 39). Die Probanden hatten die Aufgabe, einerseits zu entscheiden, ob es jeweils um einen korrekten Beweis geht, andererseits bei einer Ablehnung als Beweis diese Entscheidung auch zu begründen. Überdies wurden die Probanden aufgefordert – ebenfalls in Anlehnung an die Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) –, die Schülerlösungen nach verschiedenen Kriterien zu bewerten. Sie mussten auswählen, welche Argumentation ihrer Meinung nach eine Lehrperson mit der besten Note bewerten, eine/n Lernende/n in der Klassenstufe 8 am ehesten überzeugen, sie selbst am ehesten überzeugen sowie ihrer eigenen Lösung am ehesten nahekommen würde. Die Antworten wurden allerdings im Gegensatz zur Studie von Ufer, Heinze, Kuntze und Rudolph-Albert (2009) nicht quantitativ, sondern qualitativ ausgewertet, lediglich Anzahlen wurden bestimmt. Bei der Bewertung der Schülerlösungen nach verschiedenen Kriterien wurde nicht nach präferierter Lösung je nach Kriterium, sondern nach Konsistenz in den Antworten Ausschau gehalten. Wie dies konkret erfolgte, wird im Abschnitt Kodierung näher erleuchtet. Die Beweiskompetenz der Probanden an sich wurde nicht ermittelt.

Durchführung

Die Fallstudie wurde Ende des Sommersemesters 2020 und Anfang des Wintersemesters 2020/21 mit Lehramtsstudierenden der oben genannten Schulformen im Rahmen zweier Master-Lehrveranstaltungen durchgeführt. Studierende in diesen Kursen haben bereits einen Großteil ihrer fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Ausbildung hinter sich. Wegen der aktuellen Bedingungen fanden die Lehrveranstaltungen online statt, sodass auch die Befragung mit Hilfe eines digitalen Fragebogens erfolgte. Dies hatte allerdings zur Folge, dass die freiwillige Teilnahme sehr gering ausfiel, nur elf Studierende haben die letzte Seite der Befragung erreicht. Ein Grund hierfür sieht die Autorin im digitalen Format: Während Studierende am Ende einer Präsenzveranstaltung eher dazu neigen, einer Bitte der persönlich anwesenden Lehrperson zur Teilnahme an der Befragung nachzukommen, reduziert sich der Wille zum Tun durch die Distanz enorm. Überdies soll angemerkt werden, dass die verwendete Plattform (Moodle) zwar auch persönliche Daten erfasste, die Antworten wurden aber nach dem Abschluss der Befragung anonymisiert. Zudem gilt, dass einige Studierenden auch bei Schülerlösungen, die als Beweis eingestuft wurden, eine Begründung ihrer Entscheidung verfasst haben. Diese Begründungen – da sie wertvolle Argumente enthalten –, wurden in die Analyse ebenfalls aufgenommen, somit lagen insgesamt 20 Begründungen in Textform vor.

Kodierung

Um die Forschungsfrage 1 zu beantworten wurde die Akzeptanz von narrativen (Schülerlösung 1 und 4) und formalen (Schülerlösung 2 und 3) Argumentationsbeispielen festgehalten und durch einfaches Auszählen miteinander verglichen. Zudem wurden die von den Probanden formulierten Begründungen auf Textstellen hin überprüft, die sich auf Formalismus bzw. auf die axiomatische Basis beziehen. Zwei Beispiele sollen dies verdeutlichen: Gegen das Vorliegen eines Beweises wird an der folgenden Textstelle argumentiert, da formale Kriterien nicht erfüllt werden: „…und er hat auch keine (ebenso wenig *halb-)formale* Argumentation niedergeschrieben“ (Proband 4); während an der Textstelle „Die Gültigkeit begründet er somit *aus der Anschauung heraus*“ (Proband 8) für das Vorliegen eines Beweises ein Argument herangezogen wird, bei dem die Verwendung einer axiomatischen Basis in den Hintergrund gerät.

Bezogen auf die Forschungsfrage 2 wurde eine Zuordnung der gelieferten Begründungen zu den Kategorien „Beweisschema“, „Beweisstruktur“, „Beweiskette“ sowie „oberflächliche Kriterien“ vorgenommen. Auch dieser Prozess soll an Beispielen verdeutlicht werden. Die richtige Entscheidung, dass es bei der Schülerlösung 2 um keinen Beweis geht, wurde mit Hilfe von Argumenten bezogen auf die Beweisstruktur an der folgenden Textstelle begründet: '' Christian hat *nicht zwischen Voraussetzung und Behauptung unterschieden*. Er hat Winkel im Rechteck als *Begründung, somit als vorgegebenen Fakt* gewählt, *anstatt genau dies zu beweisen*“ (Proband 5). Diese Begründung wurde als „Beweisstruktur“ kodiert. Ein richtiges Argumentationsbeispiel (Schülerlösung 3) wurde fälschlicherweise als kein Beweis in der folgenden Begründung eingestuft: „*Schlussfolgerung* alle 4 Innenwinkel von EFGH sind kongruent ist *nicht nachvollziehbar*.“ (Proband 5). Da hier offensichtlich ein Fehler in der Beweiskette vermutet wurde – Aussage folgt nicht oder nicht ersichtlich aus den vorherigen Aussagen –, wurde diese Begründung der Kategorie „Beweiskette“ zugeordnet.

Weitere Hypothesen (Forschungsfrage 3) wurden aus einer quantitativen Analyse der Konsistenz der Antworten bei der Beurteilung der Schülerlösungen nach vorgegebenen Kriterien abgeleitet. Hierzu wurden die Antworten jedes einzelnen Probanden untereinander verglichen und Übereinstimmungen sowie Abweichungen notiert. Aus den vier genannten Bewertungskriterien (Argumentationsbeispiel bewertet mit der besten Note durch die Lehrperson; Argumentationsbeispiel, das eine/n /r Lernende/n in der Klassenstufe 8 überzeugt; Argumentationsbeispiel, das sich selbst überzeugt; Argumentationsbeispiel, das der eigenen Lösung nahekommt) können insgesamt sechs Paare gebildet werden, die jeweiligen Antworten der Probanden können bezogen auf diese Paare übereinstimmen oder eben nicht (vgl. Tabelle 3). Beispielsweise wurden die Antworten des Probanden 2: *Schülerlösung 3 – Schülerlösung 3 – Schülerlösung 4 – Schülerlösung 4* als Übereinstimmung bezogen auf die Paare „Lehrperson – SuS in der 8. Klasse“ und „sich selbst – eigener Beweis“, aber als Nicht-Übereinstimmung bezogen auf alle weiteren vier Paare kodiert. Anschließend wurde die Anzahl der Übereinstimmungen pro Paar bestimmt und daraus – auch wenn dies wegen der geringen Anzahl an Gesamtantworten nur beschränkt möglich ist –, wurden Tendenzen abgelesen.

Ergebnisse

Bezogen auf die Forschungsfrage 1 liegen folgende Befunde vor: Tabelle 1 enthält, wie viele Argumentationsbeispiele von den Probanden in der Tat als Beweis akzeptiert wurden. Beispielsweise bedeutet die Zahl 2 in der linken oberen Ecke, dass zwei Probanden das unzureichende Argumentationsbeispiel in narrativem Stil (Schülerlösung 1) als Beweis einstuften.

Wegen der kleinen Stichprobenzahl ist zwar keine aussagekräftige Interpretation der Daten möglich, man kann den Daten dennoch entnehmen und festhalten, dass bei korrekten Argumentationsbeispielen formale Kriterien keine Rolle spielten: Die Probanden haben sowohl narrative als auch formal verfasste Schülerlösungen als Beweis akzeptiert. Dahingegen ist bei inkorrekten Argumentationsbeispielen eine leichte Tendenz zu beobachten, formal aufgeschriebene Lösungen als Beweis anzuerkennen. Die qualitative Auswertung der Begründungen ergab, dass lediglich ein Proband – allerdings an drei verschiedenen Stellen – den Formalismus als ein Kriterium für einen Beweis explizit ansprach. Umgekehrt kann dieser Fakt auch so interpretiert werden, dass die Mehrheit der Probanden formale Kriterien für das Vorliegen eines Beweises für nicht notwendig hielt. Hinzu kommt, dass an insgesamt vier Stellen das lokale Ordnen von Inhalten, also eine Abkehr von der axiomatischen Basis für richtig gehalten wurde. Insgesamt zeigt sich somit ein positives Bild mit Bezug zur Forschungsfrage 1: Die Probanden, also Lehramtsstudierende am Ende ihrer Ausbildung setzen zulässige und sogar erwünschte Abweichungen von einem wissenschaftlichen Beweis als geeignete Kriterien im schulischen Kontext adäquat ein.

Bezogen auf die Forschungsfrage 2 sind die Befunde in der Tabelle 2 zu finden. Dieser kann man insbesondere entnehmen, dass Lehramtsstudierende in der vorliegenden Fallstudie keine oberflächlichen Kriterien bei der Beweisakzeptanz genannt haben. Das fehlerhafte Argumentationsbeispiel wurde mit Hilfe von Argumenten bezogen auf das Be-

Tabelle 1. Von Lehramtsstudierenden als Beweis akzeptierte Argumentationsbeispiele im schulischen Kontext

Stil	fehlerhaftes Argumentationsbeispiel	korrektes Argumentationsbeispiel
narrativ	2	9
formal	4	9

Tabelle 2. Bezug der Argumente in den Begründungen der Lehramtsstudierenden

Argument in der Begründung	fehlerhaftes Argumentationsbeispiel		Korrektes Argumentationsbeispiel	
	narrativ	formal	narrativ	formal
Beweisschema	7	0	0	0
Beweisstruktur	0	2	0	1
Beweiskette	0	5	2	3
Oberflächliche Kriterien	0	0	0	0

Tabelle 3. Konsistenz der Bewertungen in der Fallstudie mit Lehramtsstudierenden

Paar von Bewertungskriterien	Übereinstimmung	Abweichung
Beste Note von der Lehrperson – Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse	6	3
Beste Note von der Lehrperson – Überzeugung von sich selbst	3	6
Beste Note von der Lehrperson – eigener Beweis	2	7
Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse – Überzeugung von sich selbst	3	6
Überzeugung eines Schülers in der 8. Klassse – eigener Beweis	3	6
Überzeugung von sich selbst – eigener Beweis	3	6

weisschema bewertet: Sechsmal bemängelten die Probanden, dass durch das Überprüfen einzelner Beispiele keine Allgemeingültigkeit erreicht wurde. Leider gingen diese Probanden auf die Unzulässigkeit von empirischen Argumenten (Zeichnen, Messen) nicht ein, ein weiterer Proband sprach dies sogar als Pro-Argument für einen Beweis an. Dies kann man so deuten, dass für die Probanden die Deduktion an sich kein Kriterium darstellt, sie hätten auch ein induktives Vorgehen akzeptiert, vermissen aber den Schritt vom Konkreten zum Allgemeinen. Da die Deduktion nicht als notwendiges Kriterium für die Probanden gilt, lassen diese auch empirische Argumente wie Zeichnen und Nachmessen zu. Die weiteren drei Argumentationsbeispiele wurden mit Hilfe von Argumenten bezogen auf die Beweisstruktur – interessanterweise nur bei den beiden formalen Beispielen – beziehungsweise auf die Beweiskette bewertet. Interpretiert werden können diese Ergebnisse derart, dass die Probanden die Kategorien „Beweisschema", „Beweisstruktur" und „Beweiskette" hierarchisch einsetzen: Zuallererst wird die Allgemeingültigkeit einer Argumentation überprüft, wobei sowohl induktive als auch deduktive Schlüsse erlaubt sind. Ist eine Allgemeingültigkeit gewährleistet, so wird die Argumentation – falls diese formal vorliegt – auf ihre Struktur hin, unabhängig aber von ihrem formalen oder narrativen Stil auf ihre Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit hin überprüft. Diese Interpretation stellt zunächst eine Hypothese (Hypothese 1) dar, sollten allerdings weitere empirische Befunde diese verstärken, so geht es hier um eine Ausdifferenzierung des Modells von Heinze und Reiss (2003), zumal sie von der Gleichstellung der drei Wissensbereiche (Beweisschema, -struktur – und kette) ausgingen.

Neun Probanden äußerten sich zu den weiterführenden Kriterien und ordneten diesen Schülerlösungen zu. Die Übereinstimmungen bei dieser Zuordnung sind in Tabelle 3 zu finden.

Auch wenn wegen der kleinen Teilnehmerzahl in der Fallstudie lediglich mögliche Tendenzen erkannt werden können, lohnt es sich dennoch, diese Tendenzen aus der Tabelle abzulesen und als Hypothesen für die zukünftige empirische Forschung zu formulieren. Die erste Zeile der Tabelle legt nahe, dass Lehramtsstudierende denken, dass derselbe Beweis eine/n Lernende/n in der 8. Klasse überzeugen und die Lehrperson mit der besten Note bewerten würde. Der bestbewertete Beweis, der meines Erachtens das Idealbild eines Beweises im schulischen Kontext darstellt, ist also auch einleuchtend für eine/n Lernende/n (Hypothese 2). Etwas Gegensätzliches liest man allerdings aus der zweiten Zeile heraus: Der Beweis, den die Lehrperson mit der besten Note bewerten würde, ist nicht zwangsläufig mit dem Beweis identisch, der einen selbst überzeugt (Hypothese 3). Interessant ist auch die Tendenz, die die dritte Zeile nahelegt, nämlich, dass die Lehramtsstudierenden – obwohl sie angehende Lehrpersonen sind –, sich nicht imstande fühlen einen Beweis selbst zu führen, der den Erwartungen einer Lehrperson, sprich dem Idealbild eines schulischen Beweises entspricht (Hypothese 4). Zudem können die Hypothesen formuliert werden (Zeile 4 und 5), dass die Lernenden in der 8. Klasse einerseits ein anderer Beweis überzeugen würde als die Lehramtsstudierenden (Hypothese 5), Ersterer aber andererseits von dem Beweis abweicht, den Lehramtsstudierende selbst liefern würden (Hypothese 6). Beide Hypothesen können möglicherweise mit der unterschiedlichen geteilten Wissensbasis in der Schule beziehungsweise in der Hochschule begründet werden. Hinzu kommt der äußerst überraschende Befund (Zeile 6), dass Lehramtsstudierende nicht unbedingt den Beweis, den sie selbst führen würden, als sich überzeugend empfinden (Hypothese 7). Hinter dieser Hypothese können Zweifel an den eigenen Fähigkeiten oder mangelnde Motivation liegen.

Fazit und Ausblick

In der hier präsentierten Fallstudie wurden teilweise abweichende Befunde gegenüber bisherigen einschlägigen empirischen Studien mit Lehramtsstudierenden ermittelt, Grund hierfür kann der explizit hervorgehobene schulische Kontext sein. So wurde gefunden, dass formale Kriterien bei der Beurteilung von Schülerlösungen durch Lehramtsstudierende kaum eine Rolle spielen und dass Letztere im schulischen Kontext adäquate Abweichungen vom wissenschaftlichen Beweis befürworten. Die Schülerlösungen wurden zudem – wiederum abweichend von den bisherigen empirischen Befunden – nicht entlang oberflächlicher Kriterien, sondern entlang der Wissenskomponenten nach Heinze und Reiss (2003) bewertet, die durchgeführte Analyse lässt eine hierarchische Struktur der Wissenskomponenten vermuten, die es noch zu belegen gilt. Überdies konnten mit Hilfe einer Konsistenzanalyse weitere sechs Hypothesen abgeleitet werden, die verschiedene Sichtweisen auf Beweise – so die Lehrersicht, - die Schülersicht und das Selbstbild von angehenden Lehramtsstudierenden –, miteinander verbinden. Die Ergebnisse wurden im Rahmen einer Fallstudie mit geringer Teilnehmerzahl ermittelt, sodass die Schlussfolgerungen vor diesem Hintergrund einzuordnen sind. Eine Überprüfung der ermittelten Ergebnisse sowie der abgeleiteten Hypothesen im Rahmen einer groß angelegten Untersuchung wird daher angestrebt.

Literatur

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Grundlagen, Befunde und Konzepte. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. DOI:10.1007/978-3-642-41864-8

Fischer, R., & Malle, G. (1989). *Mensch und Mathematik*. Zürich: Bibliographisches Institut.

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2017). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.

Füllgrabe, F., & Eichler, A. (2018). Beweisakzeptanz bei Studierenden des Lehramts. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 4–6. www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf (7. 12. 2020)

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum Verlag.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica 7*(1), 5–41.

Kempen, L. (2016). Beweisakzeptanz bei Studienanfängern: Eine empirische Untersuchung. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. Münster: WTM-Verlag.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematikdidaktik, 30*(1), 30–54.

Kinga Szűcs, Universität Erfurt
E-Mail: kinga.szuecs@uni-erfurt.de

Anmerkungen zum Diskussionsbeitrag von Andreas Vohns in MGDM 110

Günter Graumann

Vor wenigen Tagen las ich in den MGDM 110 den Beitrag von Andreas Vohns über Bildung und Digitales mit Interesse und weitgehender Zustimmung. Am Ende habe ich dann erfahren, dass Herr Vohns im Januar verstorben ist, was mich sehr betroffen gemacht hat.

Ich habe Andreas Vohns vor mehr als 10 Jahren im Arbeitskreis Mathematik und Bildung, den ich zusammen mit Karl Röttel von 1993 bis 2011 geleitet habe, kennen gelernt. Die weitere Gestaltung und Leitung konnte ich dann an jüngere Kollegen weitergeben, wobei vor genau 10 Jahren, am 24. 2. 2011 u. a. Andreas Vohns die Leitung übernahm.

Andreas Vohns lernte ich als kompetenten, tiefer schürfenden und kritischen Kollegen kennen. Seine differenzierte und kritische Haltung zeigt sich auch in dem oben genannten Diskussionsbeitrag in MGDM 110. Leider konnte ich an der Online-Herbsttagung 2020 des Arbeitskreises Mathematik und Bildung aus terminlichen Gründen nicht teilnehmen, obgleich ich gerne noch mit Andreas Vohns über seinen Vortrag dort diskutiert hätte. Da das nun leider nicht mehr möglich ist, möchte ich hier einen Punkt ansprechen, was sicherlich im Sinne von Andreas Vohns gewesen wäre.

Im Zusammenhang mit der Erörterung von „critical litaracy“ für Digitales und Digitalisierung hat Andreas Vohns das Presse- und Informationsamt der Bundesregierung 2020, S. 10, zitiert und schreibt dazu: „Als *advocatus amicii* will ich hier zunächst festhalten, dass diese Willensbekundung in der Tat Minimalforderungen an ein Bildungskonzept genügt, wenn gefordert wird, dass alle Menschen *den digitalen Wandel selbstbestimmt mitgestalten* und *verantwortungsvoll mit den Risiken* umgehen können sollen.“ (MGDM 110, S. 50) Und kurz davor schreibt er: „[. . .], dass zur Digitalisierung eben auch alle durch solche Umstellung hervorgerufenen gesellschaftlichen Transformationsprozesse gehören. [. . .] Im Sinne von Roland Fischer (2012) wäre eine *bewusst gestaltete Digitalisierung* automatisch schon ein gesellschaftlicher Bildungsprozess. Was natürlich noch in keiner Weise klärt, was in der Schule oder im Mathematikunterricht zu passieren hat. Und da gehen die Meinungen auch etwas auseinander, ob und wie nämlich Schule auf Digitalisierung außerhalb von Schule und Unterricht durch *bewusst gestaltete Digitalisierung von Schule und Unterricht* reagieren soll.“ (ebd., S. 49)

Auf den hier angesprochenen Aspekt geht Andreas Vohns dann leider später nicht mehr ein. Ich würde deshalb gern ergänzen, dass Mathematikdidaktiker/innen und Mathematiklehrer/innen nicht nur die Rolle von „Digitalisierung und Mathematikunterricht“ diskutieren und im Mathematikunterricht mit Schüler/innen thematisieren sollten. *Auch Umfang und Formen der Digitalisierung im Alltag generell sowie mögliche Grenzen sinnvoller Digitalisierung* gehören dazu, denn Schüler/innen sollten gegenwärtig und vor allem später fundierte Kenntnisse über Digitalisierung in den gesellschaftlichen Prozess der Digitalisierung miteinbringen können.

Günter Graumann, Universität Bielefeld
E-Mail: graumann@mathematik.uni-bielefeld.de

Zur Äquivalenz von Gleichungen und von Ungleichungen

Horst Hischer

1 Vorbemerkung

Im Anschluss an das Erscheinen meines Essays ‚*Was ist eine Gleichung?*‘ (2021) wies mich Reinhard Oldenburg darauf hin, dass ich nicht auf die von ihm betrachtete *Äquivalenz von Gleichungen* (2016) eingegangen sei. Dieser zutreffende Fakt stand jedoch nicht im Fokus meiner zugrunde liegenden ‚*Studien zum Gleichungsbegriff*‘ (2020). Auch war (wohl nicht nur) für mich bis dato eine *solche Äquivalenz* ebenso wenig problembehaftet wie zuvor schon der Umgang mit dem Gleichungsbegriff: Diese Äquivalenz zeigte sich in der *Übereinstimmung der „Lösungsmengen“* zweier Gleichungen (allgemeiner: zweier „numerischer“ Aussageformen) bezüglich einer gemeinsamen „Grundmenge“ G, und zwar mit der Konsequenz, dass deren *Lösungsmengen von der jeweiligen Grundmenge abhängen*, was beispielsweise formalisierbar ist durch

$$A_1(x,y,\ldots) \underset{G}{\Leftrightarrow} A_2(x,y,\ldots),$$

wobei „$\Leftrightarrow$“ hier *„logische Äquivalenz“* bedeutet.

Der o. g. Hinweis von Oldenburg war für mich Anlass zu einer vertiefenden Betrachtung: Zunächst war aus dieser didaktischen Motivation heraus zu prüfen, ob es bereits in der Mathematik bezüglich der „Äquivalenz von Gleichungen“ ein stabiles definites Verständnis gibt. Daher bezog ich auch Ulrich Felgner (Univ. Tübingen) in grundlagentheoretische Betrachtungen zur Mathematischen Logik mit ein. Beiden Kollegen habe ich für die somit angeregten weiteren, vertiefenden Reflexionen zu danken, ebenso Wilfried Herget (Univ. Halle-Wittenberg) für kritisch-konstruktive Rückmeldungen während der Entstehung dieser Darstellung.

Nachfolgend wird das Ergebnis skizziert, auch Ungleichungen berücksichtigend. Verallgemeinernd betrifft dies dann die Frage nach möglichen Bedeutungen einer „Äquivalenz numerischer Aussageformen“. Es wird der in (Hischer 2020; 2021) definierte Gleichungsbegriff zugrunde gelegt.

2 Ein kurzer Blick in die Literatur

Zunächst sei exemplarisch ein Blick in das *‚Lexikon der Mathematik‘* (2000) geworfen: Die Wortbestandteile „äquivalent-“ bzw. „äquivalenz-“ tauchen in der Stichwortliste 8-mal bzw. 18-mal in unterschiedlichen Zusammenhängen auf, was deren Bedeutung für die Mathematik betont, zugleich aber auch die vielfältigen Kontexte von „äquival…“ im Sinne von „gleichwertig“. Diese „Gleichwertigkeit“ scheint also in der Mathematik stets einer *kontext-bezogenen* Interpretation zu bedürfen. Andererseits begegnet uns die „Äquivalenz“ im Terminus „Äquivalenzrelation“ ganz offensichtlich auch abstrakt in *kontext-unabhängiger* Bedeutung.

Ulrich Felgner analysierte kürzlich die „Äquivalenz“ gemeinsam mit der „Gleichheit“ und der „Identität“ im Sinne eines grundlegenden Begriffs (Felgner 2020), und zwar schreibt er u. a. zunächst mit Bezug auf die lateinischen Wurzeln (ebd., S. 112):

> Die Relation der *„Äquivalenz“* ist demnach im ursprünglichen Wortsinne eine Relation der *Gleichwertigkeit*, also eine Relation der Gleichheit, die aber nur die Wertigkeit (oder die Größe) betrifft.

Er weist darauf hin, dass Giuseppe Peano den Begriff der *Äquivalenzrelation* 1894 mit den wohlbekannten Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* in die Mathematik eingeführt habe, wobei die Gleichheitsrelation dieselben Eigenschaften habe, beide also *synonym* seien (was „dasselbe benennend“ bedeutet), womit sie zwar dieselbe *Extension* hätten, jedoch nicht dieselbe *Intension* (ebd., S. 117), und er merkt an:

> Niemand würde in einem mathematischen Kontext den Ausdruck *„ist gleich“* durch *„ist äquivalent“* ersetzen – auch nicht umgekehrt. Anders als im Begriff der Gleichheit muß im Begriff der Äquivalenz nicht explizit auf die Übereinstimmung der jeweils relevanten Merkmale Bezug genommen werden.

Zurück zum *‚Lexikon der Mathematik‘*: Unter den dort angegebenen 26 Stichworten zu „äquival…“ kommt *keines* vor, das auf „äquivalente Gleichungen“ oder „Äquivalenz von Gleichungen“ verweist. Jedoch tritt das Stichwort „Äquivalenzumformung“ auf, mit dem Verweis auf die Einträge „Rechnen mit Gleichungen“ und „Rechnen mit Ungleichungen“ .

Der erste dieser beiden letztgenannten lexikographischen Einträge beginnt wie folgt:

> **Rechnen mit Gleichungen**, das Umformen von ↗Gleichungen in andere Gleichungen, meist mit dem Ziel des Vereinfachens und ↗Lösens von Gleichungen.

Das *Anliegen* dieses Eintrags – auf den vom Stichwort „Äquivalenzumformung“ aus verwiesen wird! – ist die *Ermittlung aller Lösungen* einer Gleichung bezüglich einer gegebenen Menge, z. T. „Definitionsbereich“ oder auch „Grundmenge“ genannt (s. o.).

In dem Eintrag steht u. a. „meist mit dem Ziel des Vereinfachens“, was nicht zufriedenstellen mag, denn ein „Vereinfachen“ ist kaum objektivierbar (und eher nicht definierbar), obwohl Kenner dafür situativ ein gutes Gefühl haben mögen. Das dann folgende *„Lösen* von Gleichungen“ wird zwar im didaktischen Kontext ein vorrangiges Ziel sein, es sei denn, dass es situativ darum geht, im Sinne von „Fingerübungen“ einen konkreten Term in einen konkreten anderen zu überführen. (Vielleicht erklärt sich damit das vorausgehende „meist“, das grammatisch hierauf zu beziehen ist.) Es folgt eine umfangreiche Darstellung, die wie folgt beginnt:

> Man unterscheidet dabei zwischen äquivalenten Umformungen, bei denen sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert, und nichtäquivalenten Umformungen, die die Lösungsmenge möglicherweise ändern. […]

Es ist anzumerken, dass von „äquivalenten Umformungen“ gesprochen wird, obwohl das vorausgehende Stichwort „Äquivalenzumformung“ ist, das per se nicht dasselbe bedeutet, wobei wir aber für das Weitere wohl unterstellen müssen, dass bei beiden dasselbe gemeint ist.

„Äquivalenzumformungen" von Gleichungen sind demgemäß durch den *Erhalt ihrer Lösungsmengen* gekennzeichnet, wobei die Existenz einer solchen Lösungsmenge dann das Vorliegen einer konkreten *Grundmenge* einzusetzender Individuen voraussetzen wird! Statt nun zu definieren, was „Äquivalenzumformungen" sind, wird für zwei Gleichungen G_1 und G_2 folgende (als Definition anzusehende) Kennzeichnung bezüglich einer dort „Definitionsbereich" genannten Grundmenge D formuliert:

$$G_1 \sim_D G_2 \Leftrightarrow \mathbb{L}_D(G_1) = \mathbb{L}_D(G_2) \qquad (*)$$

Wir können die linke Seite als „G_1 ist bezüglich D äquivalent zu G_2" lesen, und das wird hier als *gleichbedeutend mit der Übereinstimmung der beiden dort so genannten „Lösungsmengen"* bezüglich D beschrieben.

Als Relationszeichen wird in (*) die bei (allgemeinen) Äquivalenzrelationen übliche Tilde $\sim$ in der zunächst modifizierten Form $\sim_D$ verwendet, ergänzt um den Hinweis, dass „*man $\sim$ anstelle von $\sim_D$ schreiben*" kann, falls der „*Definitionsbereich aus dem Zusammenhang ersichtlich*" ist.

Es ist noch anzumerken, dass $\sim_D$ in der Tat eine Äquivalenzrelation ist, weil diese Relation hier definitorisch auf die Gleichheitsrelation zurückgeführt wird (s. o.), die bekanntlich eine Äquivalenzrelation ist.

Obiges Zitat dient der Beschreibung „äquivalenter Umformungen", und die ebenfalls erwähnten „nicht-äquivalenten" tauchen wohl nur auf, um fehlerhafte Umformungen benennen zu können. Der Terminus „Lösungsmenge" wird *hier undefiniert* verwendet, aber an anderer Stelle tritt (*dort synonym* zu verstehen) der Eintrag „Erfüllungsmenge" auf.

Mit Bezug auf den Termbegriff der Mathematischen Logik folgt ein Katalog „zulässiger" Umformungsregeln, die von einer (aus Termen gebildeten) Gleichung zu einer dazu äquivalenten gemäß (*) führen. Ein *Term* ist dabei eine „*aus Konstanten, Variablen, Operations- und Funktionssymbolen nach den üblichen Regeln des ‚Formelbaus' zusammengesetzte Zeichenreihe*" (ebd.), die rekursiv erzeugt werden kann. Wir beachten, dass dazu eine konkrete *Struktur* vorliegen muss, über der solche Terme gebildet werden (z. B. ein Körper), dass ferner für die betrachteten Terme ggf. gemeinsame „Definitionsbereiche" vorauszusetzen sind. Es folgen wichtige Umformungsregeln für die *Äquivalenz je zweier Gleichungen*:

$$(T_1 = T_2) \sim (T_2 = T_1) \qquad \text{(G1)}$$

Diese Regel mag trivial erscheinen, sie ist aber wichtig, denn sie gilt z. B. nicht für Ungleichungen vom Typ „$<$" bzw. „$>$". Weitere Regeln betreffen die eigentliche *Termumformung*. Dazu sei T ein weiterer Term, „*dessen Definitionsbereich den der Gleichung $T_1 = T_2$ enthält*" (ebd.):

$$(T_1 = T_2) \sim (T_1 + T = T_2 + T) \qquad \text{(G2)}$$

$$(T_1 = T_2) \sim (T_1 - T = T_2 - T) \qquad \text{(G3)}$$

Im Sinne von „auf beiden Seiten dasselbe machen" – z. B. ist bei (G2) die „Addition von T" die zu betrachtende „Termumformung" – folgen *Regeln für die Multiplikation*, die *eingeschränkte Division* und die *Funktionswertbildung*, und schließlich enthält ein analoger weiterer Eintrag Regeln für die *Äquivalenzumformung von Ungleichungen*.

3 Äquivalenz von Gleichungen vs. Äquivalenzumformung

Oldenburg weist in seiner Untersuchung darauf hin, dass man in der didaktischen Literatur (und auch in Schulbüchern) unterschiedliche, inkonsistente Auffassungen von „Äquivalenz" in Bezug auf Gleichungen findet, und er stellt eingangs in diesem Kontext die nahe liegende Frage, ob denn z. B. die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ äquivalent seien. Dazu bezieht er sich auf *zwei* von Arnold Kirsch 1997 aufgeführte Auffassungen einer solchen Äquivalenz: nämlich auf eine *Lösungsmengenäquivalenz* und auf eine *variablenbezogene Lösungsmengenäquivalenz*.

Falls man nun unterstellen würde, dass in beiden Gleichungen jeweils nur die Einsetzung 0 eine wahre Aussage liefert und diese also die Gleichungen „löst", könnte man meinen, dass beide dieselbe Lösungsmenge haben und also *in diesem Sinn äquivalent* seien. Da andererseits aber beide Gleichungen verschiedene Variablen enthalten, wären sie *im Sinne der zweiten Auffassung nicht äquivalent*, obwohl sie dieselbe Lösungsmenge zu haben scheinen. Beide Beispiele sind jedoch unvollständig, weil die Existenz einer *Lösungsmenge* sich auf eine vorgegebene *Grundmenge* bezieht, eine solche aber hier gar nicht genannt wurde. Das könnte man zwar in beiden Fällen scheinbar retten, indem man eine Menge G mit $0 \in G$ als Grundmenge voraussetzt, jedoch löst das dieses Problem keineswegs: *Das alles ist subtil und wird noch genauer zu betrachten sein!*

Oldenburg merkt ferner an, dass die „*Äquivalenz von Gleichungen* […] *ein zentraler Begriff in der Mathematik der Sekundarstufe I*" sei und dass Auffassungen im Sinne der „Lösungsmengenäquivalenz" in den Schulbüchern dominieren würden, und er ergänzt, dass eine kleine Umfrage unter Kollegen ergeben habe, dass keine einheitlichen Auffassungen vorlägen, die „Lösungsmengenäquivalenz" jedoch dominieren würde.

Hier ist nun zu fragen, ob und warum im Mathematikunterricht die „Äquivalenz von Gleichungen" (und von Ungleichungen) von Bedeutung sein kann, wo es doch neben diesem interessanten, eher philosophischen Aspekt vor allem darum geht, Gleichungen und Ungleichungen *korrekt zu lösen*, ferner zu erkennen und zu erlernen, mit welchen „Äquivalenzumformungen" dieses Ziel *technisch* erreicht werden kann, die Frage nach der „Lösbarkeit" je nach Gleichungstyp eingeschlossen.

Das so angedeutete Problem der „Äquivalenz von Gleichungen" habe ich Ulrich Felgner vorgelegt, der mir dazu wie folgt geantwortet hat (wobei in Abschnitt 5 die letzten Teile von (1) und (4) und der letzte Satz *„Hier sollte man …"* vertiefend erläutert werden):

> (1) Die Frage, wann zwei Gleichungen „äquivalent" sind (oder sein sollen), fällt nach meinem Verständnis unter die allgemeinere Frage, wann zwei Formeln (einer formalen Sprache $\mathcal{L}$) im Sinne der Logik äquivalent sind: Wenn $A(x, y, \ldots)$ und $B(u, v, \ldots)$ zwei $\mathcal{L}$-Formeln sind und M eine Struktur zu derselben Sprache $\mathcal{L}$ ist, dann sind
>
> $A(x, y, \ldots)$ und $B(u, v, \ldots)$ *„in M logisch äquivalent"*, wenn die Aussage
>
> $$(\forall x)(\forall y)(\forall u) \ldots A(x, y, \ldots) \Leftrightarrow B(u, \ldots)$$
>
> in M gilt.
>
> Die Formeln $A(x, \ldots)$ und $B(u, \ldots)$ sind *logisch äquivalent*, wenn sie in allen $\mathcal{L}$-Strukturen äquivalent sind. Das heißt beispielsweise, daß die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ nicht logisch äquivalent sind, denn wenn in einer Struktur M die Variable x mit 0 belegt wird, muß y nicht auch mit 0 belegt werden.
>
> (2) Man wird daher von *Äquivalenz zweier Gleichungen* (mit freien Variablen) nur dann sprechen, wenn sie genau dieselben freien Variablen haben.
>
> (3) Natürlich besagen $x = 0$ und $y = 0$ irgendwie dasselbe, aber dabei erlaubt man, die Funktion, die die Variablen mit Elementen der Struktur M belegt, zu verändern.
> Also: „dasselbe zu besagen" ist nicht logische Äquivalenz. Streng genommen besagt $x = 0$ gar nichts, denn $x = 0$ besagt erst dann etwas, wenn man eine Belegung der Variablen x mit einem Element einer Struktur angibt.
>
> (4) Gleichungen können in verschiedenen $\mathcal{L}$-Strukturen (oder Rechenbereichen) unterschiedliche Lösungsmengen (d. h. Belegungen, die die Gleichungen wahr machen) haben. Es ist daher nicht ausreichend, zwei Gleichungen äquivalent zu nennen, wenn sie dieselben Lösungsmengen haben (wo? in welchem Rechenbereich?). Der Äquivalenzbegriff kann so nur relativ zu einer zugrunde gelegten Struktur eingeführt werden. Ich würde den Begriff der *Äquivalenz von Gleichungen nicht in die Schulmathematik einführen*, denn sie bringt keine Erhellung und ist, wenn man ihn genau definiert, *viel zu kompliziert* und langweilt die Schüler und Schülerinnen nur. *Worauf es ankommt, sind die Umformungen von Gleichungen, wobei aber Gleichheit erhalten bleiben soll*. Dazu hatte schon Alchwoarismi die Regeln, die die Addition betreffen: „al-djabr" (einrenken), „al-mukabala" (ausgleichen), und die beiden analogen Regeln, die Multiplikation betreffend: „al-ikmal" und „al-radd" angegeben. Hier sollte man aber nicht den viel zu allgemeinen, theoretischen Äquivalenzbegriff einführen.

4 Vorläufige Bilanz

Oldenburg hat auf eine mathematisch und logisch nicht haltbare terminologische Inkonsistenz in Schulbüchern aufmerksam gemacht, die wohl auch im Unterricht ihren Niederschlag gefunden hat und findet.

Vorstehende Betrachtungen und die Kommentierung von Felgner sollen in den Blick rücken, dass eine „Äquivalenz" von Gleichungen bzw. von Ungleichungen im Mathematikunterricht kaum im Mittelpunkt des Interesses stehen kann. Vielmehr wird es vorrangig und auch primär darum gehen, bei vorliegenden Gleichungen bzw. Ungleichungen nach *allen Lösungen* zu suchen, also deren *Lösungsmenge* zu ermitteln, und das in Bezug auf eine gegebene bzw. gewählte *Grundmenge*. Das leisten bekanntlich genau solche *Umformungen*, bei denen sich die Lösungsmenge jeweils nicht ändert. Das ideale Ziel ist dabei die *unmittelbare Ablesbarkeit der Lösungsmenge* (was jedoch nicht immer möglich ist).

Eine solche oft „Äquivalenzumformung" genannte Umformung einer gegebenen Gleichung oder Ungleichung ist somit durch die *Invarianz der Lösungsmenge bei dieser Umformung in Bezug auf eine vorliegende Grundmenge* gekennzeichnet. So gilt es, zu erarbeiten und zu erkennen, welche Umformungen bezüglich des Erhalts der Lösungsmenge zulässig sind, wobei diese auf der *zugrunde liegenden algebraischen Struktur* basieren: Im Mathematikunterricht wird das eine der *numerischen Strukturen* $\langle \mathbb{N}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, \leq \rangle$, oder $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq \rangle$ sein.

In diesem Sinn pflegt man *dann* (!) im Unterricht zu sagen, dass zwei durch eine Äquivalenz-Umformung in Beziehung stehende Gleichungen bzw. Ungleichungen *bezüglich einer gegebenen Grundmenge äquivalent* seien. Verallgemeinert gelten solche Betrachtungen sinngemäß auch für *Systeme* aus Gleichungen oder aus Ungleichungen oder aus beiden.

Wir sind also mit dem Fakt konfrontiert, dass der Terminus „Äquivalenz“ im Kontext der Betrachtung numerischer Aussageformen – speziell also bei Gleichungen und Ungleichungen – in zwei grundlegend verschiedenen Bedeutungen auftritt: einerseits in dem Betrachten ihrer möglicher „Äquivalenz“ (s. o.), andererseits in einer so genannten „Äquivalenzumformung“. Die bisherige Analyse lässt nun bereits erkennen, dass diese beiden „Äquivalenzen“ jedoch *nicht dasselbe bedeuten*!

Eine solche Situation ist zwar auf einer höheren Warte der Wissenschaft normal und auch nicht zwingend zu vermeiden, wenn sie jeweils präzise benannt wird – für den Mathematikunterricht ist sie jedoch nicht zumutbar und damit untragbar. „Äquivalenz“ sollte und darf hier nicht missverständlich und nicht doppeldeutig verwendet werden.

Wie kann eine mögliche Lösung aus diesem Dilemma aussehen?

Im Prinzip geht es darum, neben den in Abschnitt 2 angedeuteten „Äquivalenzumformungen“ (von Gleichungen bzw. Ungleichungen bzw. Systemen aus diesen) auch zu erfassen, wie man z. B. mit nebeneinander auftretenden Gleichungen wie $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ umgeht.

Hier ist man möglicherweise geneigt, beide Gleichungen als „gleichwertig“ oder „äquivalent“ anzusehen (was man wohl auch im Unterricht so macht), jedoch kann man sie *nicht* mittels der erwähnten „Äquivalenzumformungen“ ineinander überführen! Ein hierfür erforderlicher systematischer Variablenaustausch – quasi als eine *Äquivalenzumformung anderer Art* – ist diffizil zu handhaben und durchaus fehleranfällig.

Eine profunde Betrachtung dieser Situation erfordert schul-inadäquate Mittel der Mathematischen Logik, wie es Felgner in seinen in Abschnitt 3 zitierten Anmerkungen andeutet, und das führte bereits zu der o. a. Einschätzung, im Unterricht nur dann von der *Äquivalenz zweier Aussageformen* zu sprechen, wenn sie (ohne Variablenaustausch!) durch zugelassene „Äquivalenzumformungen“ (nämlich bei Erhalt der Lösungsmenge bezüglich einer gegebenen Grundmenge) ineinander überführbar sind.

Gleichwohl sind aber solche, auf systematischem Variablenaustausch basierenden, bereits angedeuteten *Äquivalenzumformungen anderer Art* auch im elementaren Rahmen des Mathematikunterrichts (zumindest gelegentlich) angebracht. In welchem Sinne sind aber nun z. B. die beiden oben aufgeführten quadratischen Gleichungen als „gleichwertig“ oder gar „gleich“ anzusehen, etwa im Sinne von „austauschbar“? So könnten *beide* ein bestimmtes Problem mittels einer aus Variablen, Konstanten (bzw. Parametern) bestehenden Gleichung *gleichermaßen* oder *gleichberechtigt* beschreiben! Und eine solche „Offenheit“ gegenüber der konkreten Verwendung von Variablen und Parametern beim Modellieren von Sachverhalten wird im Mathematikunterricht gewiss zu vermitteln sein!

5 Zum Begriff der „Lösungsmenge“

Die im dritten Abschnitt eingangs genannten Beispiele $x = 0$ und $y = 0$ (ebenso die Beispiele $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ aus dem letzten Abschnitt) sind allerdings im Kontext der „Äquivalenz von Gleichungen“ weniger trivial, als möglicherweise zunächst zu vermuten ist, auch wenn man etwa $\mathbb{Z}$ als mögliche „Grundmenge“ voraussetzt. Das bedarf einer Erläuterung, beginnend mit einer vielleicht überraschenden Feststellung:

Die Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ könnten in der erweiterten Gestalt $x + 0 \cdot y = 0$ und $0 \cdot x + y = 0$ ad hoc als gleichbedeutend angesehen werden. Wir wählen nun konkrete Einsetzungen für x und y, unterscheiden dann folgende Fälle und notieren die Einsetzungsergebnisse daneben:

$$0 \text{ für } x,\ 0 \text{ für } y\colon \quad 0 = 0, \quad 0 = 0. \tag{1}$$

$$0 \text{ für } x,\ 1 \text{ für } y\colon \quad 0 = 0, \quad 1 = 0. \tag{2}$$

$$1 \text{ für } x,\ 0 \text{ für } y\colon \quad 1 = 0, \quad 0 = 0. \tag{3}$$

Bereits damit ist erkennbar, dass diese beiden Gleichungen *nicht dieselbe Lösungsmenge* haben und somit *nicht als äquivalent* im beschriebenen Sinn aufgefasst werden können. Dabei haben wir uns jedoch zunächst noch um die Festlegung einer Grundmenge herumgedrückt, was fatal ist.

So ist zu beachten, dass hier *zwei Variablen* vorliegen, x und y. Wir benötigen also als Grundmenge keine Zahlenmenge, sondern eine Paarmenge $M \times N$, z. B. $M \times N \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sobald nur eine dieser beiden Mengen M oder N, die jene Paarmenge als „Grundmenge“ konstituieren, außer 0 noch eine andere Zahl enthält, können die beiden gegebenen Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ also *nicht als äquivalent* angesehen werden (s. o.)! Entsprechend sind damit auch $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$ *als nicht äquivalent* anzusehen, was genauer zu untersuchen ist.

Dazu dienen weitere detaillierende Aspekte aus Sicht der Mathematischen Logik, die das Zitat von Felgner aus Abschnitt 3 vertiefen und ergänzen: In $\mathcal{L}$ als einer formalen „Sprache 1. Stufe“ (es wird nur über Elemente von M quantifiziert) bezeichne $\mathfrak{M}$ eine „Struktur“ $\langle M, \ldots \rangle$, also $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$. (Entsprechend wird die mit den reellen Zahlen gebildete Struktur mit $\langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, \leq \rangle$ bezeichnet.) Bezeichnet man mit *Var* die Menge aller in $\mathcal{L}$ vorkommenden bzw. benutzten Variablen, so ist M^{Var} „die Menge aller Abbildungen von *Var* in M“.

Wenn nun $\phi \in M^{Var}$ beliebig gewählt wird, dann wird jedem x mit $x \in Var$ (also jeder in $\mathcal{L}$

vorkommenden Variablen) eindeutig ein Funktionswert $\phi(x)$ aus M zugeordnet (also z. B. eine Zahl, falls M dann als ein so genannter „Rechenbereich" eine Menge von Zahlen ist), und das gilt also für *jede* Abbildung ϕ aus M^{Var}. Was bedeutet das?

Hier wird jede in der Sprache $\mathcal{L}$ aktuell betrachtete o. g. Variable in Abhängigkeit von einer gewählten oder gegebenen Abbildung ϕ aus M^{Var} durch ein Element aus M (ggf. eine Zahl, s. o.) *ersetzt*, also das, was man eine *Belegung* nennt. (Diese ist jedoch nicht notwendig injektiv, d. h. verschiedenen Variablen aus *Var* kann via ϕ durchaus dasselbe Element aus M zugeordnet werden.)

Dass jede solche Abbildung ϕ nun eine Belegung ist, bedeutet speziell bei endlich vielen verwendeten Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dass jedem geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus Var^n genau ein geordnetes n-Tupel $(\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_n))$ aus M^n zugeordnet wird, nämlich die erwähnte Belegung der Variablen, was man auch so zu beschreiben pflegt, dass bei jeder Variablen jeweils genau ein bestimmtes Element aus M *eingesetzt* wird. Das führt zur sog. *Erfüllungsmenge* einer in der Mathematischen Logik betrachteten *Formel* $\Phi(x, y, \ldots)$, wobei wir hier speziell nur Gleichungen oder Ungleichungen oder ein *System* aus beiden betrachten, das mit $S(x, y, \ldots)$ abgekürzt sei. Die so erklärte Erfüllungsmenge des Systems in der Struktur $\mathfrak{M}$ sei dann mit $\mathrm{E}_{\mathfrak{M}}(S(x, y, \ldots))$ bezeichnet: Sie besteht aus allen Belegungen ϕ aus $\mathbb{R}^{Var}$, deren Funktionswerte $\phi(x), \phi(y), \ldots$ aus $\mathbb{R}$ bei Einsetzungen in $S(x, y, \ldots)$ eine wahre Aussage liefern. Bei den hier betrachteten Systemen wie z. B. über der Struktur $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ (bzw. über Unterstrukturen) nennt man sie dann *Lösungsmenge* des Systems.

Das Wort „Lösung" basiert auf „lösen" für „los lassen", und es tritt beim *Problemlösen* auf. Damit ist eine „Lösung" all das, von dem man meint, ein Problem zu lösen: So sind z. B. sowohl die Entknotung des Gordischen Knotens als auch dessen Trennung mit dem Schwert durch Alexander (verschiedene) *Lösungen* des zuvor gestellten „Problems". Eine *Grundmenge kann sich also durch das Lösen nachträglich ändern!*

Hierin zeigt sich eine recht allgemeine Deutung von „Lösung". Man beachte darüber hinaus, dass „Lösung" linguistisch sowohl einen Prozess als auch das Ergebnis eines solchen meint – ebenso wie bei „Gleichung".

6 Fazit

Die erwähnten *Äquivalenzumformungen anderer Art* könnte man nun gemäß einem während der Entstehung dieses Essays gemachten Vorschlag von Reinhard Oldenburg durch eine „Strukturäquivalenz" genannte *Eigenschaft* von Aussageformen kennzeichnen, die eine *Äquivalenz der Struktur der Terme* (bzw. deren Gleichwertigkeit) meint, aus denen eine Gleichung bzw. Ungleichung besteht, also kurz: deren *Termstruktur.* Das wäre dann einer *Umformungsäquivalenz* gegenüberzustellen, also einer durch Äquivalenzumformung gekennzeichneten *Handlung*.

Im wissenschaftlichen Umfeld wäre das eine sinnvolle und treffende Kennzeichnung, sie birgt aber für den Mathematikunterricht die Gefahr einer vermeidbaren recht fehlerträchtigen Überforderung der Schülerinnen und Schüler, weil der Terminus „Äquivalenz" dann in zwei grundverschiedenen Kontexten auftritt: einerseits in „Äquivalenzumformung" als einer Umformungstechnik, andererseits in „Termstruktur" als einer Eigenschaft, die per se nichts mit einer Umformung zu tun hat. Deshalb spricht aus didaktischer Perspektive viel dafür, den Terminus „Äquivalenz" *in nur einem Kontext* zu verwenden, vorzugsweise für „Äquivalenzumformung" (wozu man auch „gleichwertige Umformung" sagen könnte).

Nun ist noch eine sinnvolle alternative Benennung der oben angesprochenen „Strukturäquivalenz" zu finden. Dazu betrachten wir exemplarisch wieder die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $y^2 + cy + d = 0$, die in einer konkreten Situation jeweils *dasselbe Problem oder Phänomen gleichbedeutend* modellieren *können*. Und genau das bietet sich im didaktischen Kontext als sinnfällige Bezeichnungsalternative anstelle von „Strukturäquivalenz" an: es liegen *gleichbedeutende Aussageformen* vor.

Hans Schupp gewidmet, 1935–2021.

Literatur

Felgner, Ulrich: Die Begriffe der Äquivalenz, der Gleichheit und der Identität. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, (2020)122: 109–129. DOI:10.1365/s13291-020-00214-0

Hischer, Horst: *Studien zum Gleichungsbegriff*. Hildesheim: Franzbecker, 2020.

Hischer, Horst: Was ist eine Gleichung? In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (2021)110: 65–72.

Oldenburg, Reinhard: Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. (2016)101: 10–12.

Lexikon der Mathematik. Mannheim/Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

Konstruktivismus abgearbeitet

Eine Antwort auf: David Kollosche: „Abarbeiten am Konstruktivismus“ in den Mitteilungen der GDM 110

Reinhard Oldenburg

Es freut mich, dass mein provokanter Aufsatz (Oldenburg 2020) zum Konstruktivismus Kollegen zum Mit- und Gegendenken animiert hat. David Kollosche (2021) bestätigt aus seiner breiten philosophischen Bildung zunächst, dass der radikale Konstruktivismus in der Philosophie nur randständig ist. Ich freue mich über diese Bestätigung meiner Sichtweise und möchte eine weitere Stütze anfügen: In dem Standardlehrbuch „Einführung in die Wissenschaftstheorie“ (Schurz 2014, S. 56) wird der Leser schon in der Marginalienspalte über die Haupterkenntnis des Abschnitts informiert: „Fehlschluss des radikalen Konstruktivismus“. Der Leser*in dieses Lehrbuchs wird also klar gemacht, dass es keinen fachlichen Zweifel mehr an der Unhaltbarkeit des radikalen Konstruktivismus gibt. Das dort gegebene Argument mag für schwammig formulierte Konstruktivismen nicht greifen – man kann eben nur klar formulierte Positionen klar widerlegen.

Neben einigen Bestätigungen enthält der Beitrag von Kollosche aber auch ernsthafte Kritik an einigen meiner Ausführungen. Auf die aus meiner Sicht wichtigsten Einwände will ich hier kurz eingehen. Auf S. 58 kritisiert er meine Verwendung der evolutionären Erkenntnistheorie für das individuelle Lernen, indem er richtig feststellt, dass die evolutionäre Erkenntnistheorie die Evolution des Erkenntnisapparats in der Menschheitsgeschichte zum Gegenstand hat – gemäß dem Dictum von Konrad Lorenz, die Kantschen a-priori als a-posteriori der Stammesgeschichte zu deuten. Allerdings hat die Biologie weitreichende Parallelitäten zwischen Ontogenese und Phylogenese entdeckt, und es besteht kein offensichtlicher Grund, warum diese nicht auch auf der Ebene individueller Erkenntnisprozesse anzuwenden sei (siehe etwa Irrgang 2001, Kapitel 2.5). Das liefert eine schöne (weitere) Erklärung, dass mentale Konstrukte modellhaft sind. Mit der auch in meinem Aufsatz durchgängig propagierten Position, dass Theorien über die Welt immer Modelle sind, ist aus meiner Sicht unverständlich, wieso Herr Kollosche suggeriert (S. 58), ich rede einem totalitären Wahrheitsbegriff das Wort, wie demjenigen, vor dem Adorno und Horkheimers in ihrem großartigen Buch warnen.

Weiter kritisiert Herr Kollosche, ich habe Zitate aus dem Zusammenhang gerissen. Er konkretisiert das am Ende seines Aufsatzes anhand des Beispiels, dass Bruno Latour bestritten hat, Ramses II könne an Tuberkulose gestorben sein (diese Diagnose hatten französische Wissenschaftler gestellt, nachdem die Mumie 1956 nach Paris geflogen worden war), weil dieses Bazillus von Robert Koch erst im 19.Jahrhundert entdeckt wurde. Herr Kollosche meint, dass ich damit einen Gedanken dem Kontext entrissen habe und ihn in entfremdeter Darstellung zur Belustigung verwende. Zunächst ist zu bemerken, dass ich gar nicht direkt Latour zitiert habe, sondern auf die Analyse von Boghossian Bezug genommen habe und dieser wiederum Latours Aufsatz von 1998 zitiert (und mir scheint, dass er ihn richtig zitiert). Kollosche stützt seine Behauptung, Latour sehe die Dinge differenzierter, denn auch auf einen späteren Aufsatz von Latour, nämlich einen aus dem Jahr 2000 (Latour 2000). Auch in diesem Aufsatz (S. 248) stellt Latour fest, dass hier ein erklärungsbedürftiges Mysterium vorliegt:

> Let us accept the diagnosis of ‘our brave scientists’ at face value and take it as proved fact that Ramses died of tuberculosis. How could he have died of a bacillus discovered in 1882? [...]. Is it not anachronistic? The attribution of tuberculosis and Koch’s bacillus to Ramses should strike us as anachronism of the same caliber as if we had diagnosed his death as having been caused by a Marxist upheaval, or a machine gun, or a Wall Street crash.

In der Tat bietet Latour dann eine Konstruktion an, die es erlaubt doch zu sagen, Ramses sei an Tuberkulose gestorben und relativiert damit die von Boghossian kritisierte Aussage. Insofern ist Herrn Kollosche Recht zu geben, dass Latours Position von mir nicht vollständig dargestellt wurde. Allerdings nötigt die konstruktivistische Logik Latour zu einer ausgesprochen komplexen Legitimation dieses eigentlich einfachen Sachverhalts. Er stellt zunächst fest, dass technologische Objekte wie Maschinengewehre nie Zeitreisen machen („cannot travel back in the past“, S. 250), weil sie „never escape the conditions of their production“ (S. 250). Das Kochbazillus aber kann das – aber nicht so einfach, wie Latour explizit feststellt. Es bedarf dazu nämlich eines großen Aufwands technischer Apparate wie Flugzeugen, Cobalt-60 Desinfektionsanlagen und Röntgenröhren. Indem sie dieses Equipment benutzten, haben die „brave scientists“ das Bazillus in der Zeit rückwärts transportiert und so kann Latour am Ende das Rätsel lösen:

> Yes, the bacillus has been there all along, but only after the sanitary flight to Paris that allowed our "scientists" to retrofit all of Egyptian history with a Pharaoh that, from now on, coughs and spits Koch's bacilli, even when disputing with Moses about how long the Ten Plagues will last. (S. 266, kursiv im Original).

Durch die Arbeit der „Wissenschaftler*innen“ (ich folge hier Latours Konvention, dieses Wort immer in Anführungszeichen zu schreiben) wurde also nicht die Vergangenheit aufgeklärt, sondern eine neue Vergangenheit geschaffen. Es geht mir nicht darum, Latour lächerlich zu machen. Ich habe durchaus Respekt vor der denkerischen Leistung, mit der er seine konstruktivistische Grundposition ernst nimmt. Aber eben mit diesem Ernst demonstriert er ihre geringe Tauglichkeit und bestätigt so meine Vermutung, dass konstruktivistische Positionen entweder nicht durchdacht oder widersprüchlich oder abstrus kompliziert sind.

Literatur

Irrgang, B. (2001). *Lehrbuch der Evolutionären Erkenntnistheorie*, UTB.

Kollosche, D. (2021). Abarbeiten am Konstruktivismus – Bemerkungen zum Beitrag von Reinhard Oldenburg in den Mitteilungen der GDM 109. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, (110), 77–84.

Latour, B. (2000). On the partial existence of existing and nonexisting objects. In L. Daston (Hrsg.), *Biographies of scientific objects* (S. 247–269). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Oldenburg, R. (2020). Realistischer Konstruktivismus: Ein unwissenschaftlicher Beitrag. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, (109), 77–84.

Schurz, G. (2014). *Einführung in die Wissenschaftstheorie*. 4. Auflage, WBG.

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
E-Mail: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Aus der Spur – Zur heutigen Situation im Mathematikunterricht und in der Mathematiklehrerbildung

Erich Ch. Wittmann

Corruptio optimi pessima.
(Das Beste zu verfälschen, ist das Schlechteste, was man machen kann).

Ein vor einigen Jahren hochbetagt verstorbener Kollege unterstützte nach seiner Emeritierung 25 Jahre lang Sprösslinge befreundeter Familien bei der Vorbereitung zum Mathematikabitur.

Im Laufe der Zeit konnte er sich immer weniger mit der von Ausgabe zu Ausgabe sinkenden fachlichen Qualität eines bestimmten Lehrbuchs abfinden. Im Jahre 2014 platzte ihm der Kragen und er schrieb einen 15seitigen Brief an den Verlag, in dem dieses Buch erschien. Der Brief wurde an einen der Herausgeber, Fachleiter an einem Studienseminar für das Gymnasium, weitergeleitet. Dessen Antwort bestand nicht einfach in der Zurückweisung der Argumente, sondern in einer bewundernswert ruhigen und sachlichen Schilderung der Verhältnisse, unter denen heute Mathematikunterricht stattfindet und Schulbücher geschrieben werden.

Folgende Feststellungen darin sind besonders bemerkenswert:

- Alles soll in einen Anwendungsbezug gezwängt werden, und sei er noch so gekünstelt.
- Die Unterrichtsmethoden spielen bei der Ausbildung und Bewertung von Lehrerinnen und Lehrern die größere Rolle vor der Fachwissenschaft und Fachdidaktik.
- Auch bei der Evaluation von Schulen wird die fachliche und didaktische Qualität des Unterrichts nicht beurteilt, sondern lediglich die methodische Gestaltung von Stunden.

Nach einem kritischen Artikel zur Bildungspolitik im gleichen Jahr habe ich Rückmeldungen aus verschiedenen westlichen Bundesländern erhalten, in denen *mehrfach* darauf hingewiesen wurde, dass das Fach in der zweiten Ausbildungsphase für das Gymnasium nur eine untergeordnete Rolle spiele. In meiner Referendarzeit wäre das undenkbar gewesen. Man mag das für Einzelstimmen halten, aber der Verdacht ist nicht von der Hand zu weisen, dass sich die Verhältnisse in der zweiten Phase in diese Richtung entwickelt haben, vermutlich auch in den unteren Stufen.

In K. P. Liessmanns Buch *Geisterstunde* ist ein Kapitel mit „Fächerdämmerung. Die neue Disziplinlosigkeit" überschrieben (Liessmann, 2014). Das Verschwinden des Fachlichen aus dem Unterricht wird darin quer über die Fächer konstatiert und beklagt. Wir haben es hier offenbar mit einer Art geistigen Klimawandels zu tun. Da sich dieser Wandel schleichend vollzieht, werden die negativen Auswirkungen auf das Bildungs- und Sozialsystem kaum wahrgenommen.

Wie konnte es zur Abwendung besonders vom Fach Mathematik kommen?

Dafür gibt es mehrere Gründe.

1. Der fachliche Teil der Mathematikausbildung für das Gymnasium, der auch die Ausbildung für die anderen Stufen stark beeinflusst, ist vielfach dysfunktional, und der Ertrag ist mager.

Wolfgang Kroll, ein erfahrener Fachleiter und produktiver Elementarmathematiker, hat darauf schon vor Jahrzehnten hingewiesen (Kroll, 1997):

> Die Schulmathematik ist weder in der Universitätsmathematik enthalten noch kann sie ohne weiteres aus ihr abgeleitet werden. Selbst dort, wo die Namensgleichheit Gemeinsamkeiten suggeriert, handelt es sich um etwas ganz Verschiedenes. Wer „Analysis", „Lineare Algebra", „Stochastik" im Studium lernt, lernt nur ihren deduktiven Aufbau kennen (einen!) und erfährt nichts über die Analysis, Lineare Algebra und Stochastik der Schule, über ihre Beweg- und Hintergründe, Sinnkonstruktionen, Anwendungen. Er erhält allenfalls eine falsche Vorstellung von seiner unterrichtlichen Aufgabe.

Jeder Mathematikdidaktiker, der den Nutzen seines Mathematikstudiums für die Entwicklung von Lernmaterialien und Curricula sowie für den Unterricht kritisch prüft, weiß das aus eigener Erfahrung. Analysen bestätigen es (Hoth et al., 2020).

Die dysfunktionale Fachausbildung wird aus einer Art Betriebsblindheit gespeist, die Roland Fischer (1980) treffend als „Ideologie der Selbstbeschränkung" bezeichnet hat. Sie hinterlässt im Hinblick auf die zweite Ausbildungsphase und den Unterricht notwendig ein fachliches Vakuum. Früher fiel das nicht so stark ins Gewicht wie heute, weil damals die Elementarmathematik innerhalb der Mathematikdidaktik eine gewichtige Rolle spielte und die Schulbücher mathematisch substanziell waren. Diese Zeiten sind aber leider vorbei.

Um Missverständnisse zu vermeiden, möchte ich ausdrücklich festhalten, dass die Kritik an der fachwissenschaftlichen Lehrerausbildung keinerlei Kritik an der Fachwissenschaft Mathematik selbst ist. Wie diese Wissenschaft zu betreiben ist und welche Kommunikationsformen Mathematikerinnen und Mathematiker dabei intern nutzen, ist allein ihre Sache. Ihr großer Erfolg gibt ihnen recht. In der Schule ist der Kontext aber ein anderer als in der Forschung. Für guten Mathematikunterricht werden andere Ausdrucksmittel und elementarere Kenntnisse benötigt, die man eigens lernen muss. Mit der „Ideologie der Selbstbeschränkung" schadet die mathematische Community übrigens nicht nur dem Unterricht und der Gesellschaft, sondern vermittelt auch ein falsches Bild von der Mathematik, was nicht in ihrem Interesse liegen kann.

2. Die Mathematikdidaktik hat sich in den letzten Jahrzehnten immer weiter vom Fach entfernt.

Dieses Phänomen ist besonders in der westlichen Welt zu beobachten, kaum in Asien. Die jüngste weltweite Umfrage des Editorial Boards der Zeitschrift Educational Studies in Mathematics liefert dafür einen schlagenden Beweis. In dieser Umfrage sollten Themen für zukünftige Forschungen genannt werden. Was herauskam, ist ein Sammelsurium von Vorschlägen, die kaum etwas mit Mathematik zu tun haben (Bakker et al., 2021). Eine australische Kollegin hat in diesem Artikel die Situation zutreffend auf den Punkt gebracht:

> The mathematics education research literature has been moving away from the original goals of mathematics education. We seem to have been investigating everything but the actual learning of important mathematics topics.

Man braucht nur die Artikel in den Zeitschriften seit 1975, insbesondere auch im JMD, zu verfolgen um zu sehen, dass die obige Aussage die Verhältnisse korrekt beschreibt.

Die Fehlentwicklung der Mathematikdidaktik ist durch die Dysfunktionalität der Fachausbildung zweifellos befeuert worden. Wenn nämlich die Fachausbildung als irrelevant für den Unterricht wahrgenommen wird, können sich Bildungsforschung, Pädagogik, Psychologie, etc. als die für den Unterricht zuständigen Disziplinen proklamieren. In dieser Rolle werden sie inzwischen von der Politik blind akzeptiert, ja hofiert, und großzügigst mit Forschungsmitteln ausgestattet. Weite Teile der Mathematikdidaktik haben diese Umorientierung mitvollzogen. Dass eine Mathematikdidaktik ohne Mathematik ein Widerspruch in sich ist, wird einfach ignoriert.

3. Die bildungspolitischen Reformen in den letzten 50 Jahren haben zu einer Zerstörung der fachlichen Struktur der Lehrpläne geführt.

Das hat mit der „Mengenlehre" in den 1960er und 1970er Jahren begonnen und findet seit 2004 seine Fortsetzung in der inhaltsleeren „Kompetenzorientierung" und der damit verbundenen „Anwendungsorientierung". Die KMK-Richtlinien von 1968 und die zugehörigen Schriften des IQB bilden den Anfangs- und vorläufige Endpunkt einer Kette von Fehleinschätzungen und Fehlentscheidungen, die von der Politik leider nie selbstkritisch aufgearbeitet wurden.

Wie sehr die einseitige „Anwendungsorientierung" dem Wesen der Mathematik widerspricht, zeigt der Vergleich mit dem Masterstudiengang Mathematik. In dieser Ausbildung kommen Anwendungen nicht, genauer gesagt nicht direkt, vor. Die Vorlesungen über Analysis, Lineare Algebra, Numerik, Stochastik, etc. befassen sich aber samt und sonders mit *anwendbarer Mathematik*. Mit diesem Rüstzeug ausgestattet können sich die Absolventinnen und Absolventen in spezielle Anwendungen in ihrem späteren Berufsfeld einarbeiten. Alfred N. Whitehead hat dazu vor fast 100 Jahren Folgendes festgestellt:

> It is no paradox to say that in our most theoretical moods we may be nearest to our most practical applications.

Es wäre allerdings falsch, Anwendungen in der Schule ebenso radikal auszuklammern, weil Anwendungen ein wesentlicher Teil der Mathematik sind und den Begriffsbildungen in diesem Fach Bedeutung verleihen. Aber selbst substanzielle Anwendungen machen trotzdem nur Sinn in im Rahmen von *Fachstrukturen*. Es muss also auch in der Schule um *anwendbare Mathematik* gehen, die sich am fachlichen Aufbau elementarer Theorien orientiert. Ohne einen solchen Aufbau sind Aktivitäten, die für die Mathematik typisch sind, nur eingeschränkt möglich. Insbesondere haben Beweise, die für das Verständnis von Mathematik unentbehrlich sind und die man sehr gut stufengemäß führen kann (operative Beweise), keine Grundlage. Damit ist der Unterricht „herzlos" (s. unten). Ein solcher Mathematikunterricht verdient seinen Namen nicht.

4. Die Schulbücher haben sich mehr und mehr von echter Mathematik entfernt.

Um zu diesem Urteil zu gelangen, braucht man die Bücher nur von einem umfassenden Bild von Mathematik, der *wohlverstandenen* Mathematik, aus zu analysieren. In Anlehnung an die Überlegungen von Heinrich Winter (1993) zum Bildungswert der Mathematik kann man die Mathematik folgendermaßen beschreiben:

- Mathematik ist ein *Werkzeugkasten*, der zur Beschreibung und Lösung praktischer Probleme in vielen Lebensbereichen unentbehrlich ist.
- Mathematik besteht *aus systematisch aufgebauten Theorien*, die eine eigene Welt bilden. Theorien werden von Beweisen getragen, die das *„Herz der Mathematik"* sind (Ziegler, 2008).
- Mathematik ist ein *Forschungs- und Problemlösefeld* und ein *Spielraum* für den menschlichen Geist, und zwar auf allen Stufen.
- Mathematik nutzt eine typische *Zeichen- und Formelsprache*, auf den höheren Stufen vermehrt formal, verfügt aber auch über ein weites Repertoire an *anderen Kommunikationsmitteln.*

Die beiden ersten Aspekte sind eng verbunden, denn Theorien liefern die Bausteine für Modellierungen. Beide Aspekte beziehen sich auf die fertige Mathematik, die gleichwohl in einem historischen Prozess entstanden ist und sich ständig erweitert.

Die beiden letzten Aspekte beschreiben die Mathematik im Werden und aktiven Betreiben. Sie haben daher zentrale Bedeutung für das Lernen auf allen Stufen und für die Forschung.

Man kann aus dieser Beschreibung die folgenden Merkmale *echter Mathematik* ableiten, die *stufenunabhängig* sind:

Mathematische Aktivitäten spielen sich jeweils in einem Rahmen ab, in dem es *mathematische* Objekte gibt, die *mathematische* Eigenschaften haben, in *mathematischen* Beziehungen stehen und mit denen nach *mathematischen Regeln* operiert wird, sei es handelnd an Darstellungen der Objekte oder formal.

Ziel der mathematischen Tätigkeit sind

- die Erforschung und Beschreibung von Mustern und deren Begründung durch Beweise,
- die Nutzung der Muster zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme,
- der Aufbau zusammenhängender Theorien,
- die Herausarbeitung und Einübung wiederkehrender Techniken und Basiskompetenzen.

Lehrpläne, Frühfördermaterialien und Schulbücher, die diese Punkte nicht oder nur teilweise berücksichtigen, *verfälschen* die Mathematik und untergraben damit *echte Lernerfolge*.

Wodurch wurden diese Fehlentwicklungen begünstigt?

Die meisten Mathematiker und Mathematikerinnen sind auf ihr Spezialgebiet fixiert und unterschätzen die Bedeutung des Mathematikunterrichts für die Mathematik an der Universität. Wenn es anders wäre, hätte die Fachausbildung für die Lehrämter ein anderes Gesicht. Von der Politik wird dieser Zustand einfach hingenommen, weil hier gar kein Problem gesehen wird.

Viele Didaktikerinnen und Didaktiker fühlen sich in dem Paradies, das ihnen der Schulterschluss mit der Bildungsforschung, Pädagogik, Psychologie, etc. beschert hat, ausgesprochen wohl. Man kann Mathematikdidaktik heute auch mit nur oberflächlichem Bezug zur Mathematik oder fern von ihr betreiben und findet sich darin im internationalen Austausch voll bestätigt (s. oben). Die Forschungsmittel, insbesondere von der DFG und der Telekomstiftung, fließen reichlich, die Publikations- und Konferenzmaschinerie läuft auf Hochtouren. Wo ist da ein Problem?

Die Bildungspolitik sieht ebenfalls keinen Anlass zu Veränderungen, obwohl es ihre Aufgabe wäre, „Schaden vom deutschen Volk zu wenden und seinen Nutzen zu mehren“. Vom BMBF und den Landesregierungen wird viel Geld (schuldenfinanziert!) in ein Flickwerk von Projekten gesteckt, mit denen Defizite kompensiert werden sollen, die ihre Ursache in der Fehlsteuerung des Systems haben (Inklusion, Equity, Vorkurse zum Studium, MINT-Programme, ...). Die Grundprobleme bleiben davon völlig unberührt. Die „Fächerdämmerung“ wird zum großen Teil noch verstärkt.

Die Abkehr der Schulbücher von der Mathematik ist nicht nur eine Folge mathematisch defizitärer Lehrpläne, sondern widerspiegelt auch Erwartungen an den Unterricht, die von der Pädagogik artikuliert werden. Das Institut, das den Deutschen Schulbuchpreis verleiht, ist ein *Pädagogik*institut. Daher spielt bei der Beurteilung von Schulbüchern die *fachliche Qualität* genauso wenig eine Rolle wie bei der Evaluation von Stunden oder Schulen. Anders ist nicht zu erklären, dass Bücher, die erhebliche mathematische Defizite aufweisen, trotzdem diese Auszeichnung erhalten. Es passt ins Bild, dass die fachlichen Leistungen einer Schule auch beim Deutschen Schulpreis nicht zählen oder sogar negativ bewertet werden, wenn sie mit Unterrichtsmethoden erbracht werden, die in der Pädagogik strikt abgelehnt werden, obwohl sie fachlich gesehen sinnvoll und an bestimmten Stellen auch geboten sind. Das ist eine völlig widersinnige Situation, die im Bildungssystem inzwischen aber Standard ist.

Die Ausbildung in der zweiten Phase ist durch die dysfunktionale Ausbildung in der ersten Phase, die Lehrpläne, amtliche Vorschriften, die Schulbücher und die mathematikferne Didaktik mehr oder weniger vorprogrammiert. Die Lehrerinnen und Lehrer muss man in Schutz nehmen. Sie sind das schwächste Glied in der Kette. Die ungünstigen Rahmenbedingungen bieten ihnen nicht die Voraussetzungen, die für einen fachlich aufbauenden, zielgerichteten Unterricht nötig sind.

Einer ehrlichen Bestandsaufnahme sind DMV, GDM und MNU bisher aus dem Weg gegangen.

Das letzte gemeinsame Positionspapier der drei Verbände von 2019 ist frei von jeder Selbstkritik, sanktioniert den status quo und stellt in großer Einmütigkeit nur Forderungen an die Bildungspolitik, insbesondere nach weiteren Finanzmitteln, worin man inzwischen Übung hat.

Wie könnte man diese Fehlentwicklungen korrigieren?

Um wieder in die Spur zu kommen, müsste an mehreren Stellen angesetzt werden. Gemeinsamer Maßstab für notwendige Änderungen kann für alle Stufen nur die *wohlverstandene Mathematik in ihrer psychologischen Genese sein*. Folgende Punkte müssen Priorität haben:

1. Auflösung des scheinbaren Gegensatzes „Kind“/„Fach“

Der amerikanische Wirtschaftswissenschaftler Peter Drucker hat in seinem Buch „Die postkapitalistische Gesellschaft“ festgestellt (Drucker, 1993, S. 291):

> Dass sozialen und pädagogischen Zielen der Vorrang vor fachlichen Lernzielen eingeräumt wurde, war ein Hauptgrund für den Niedergang der amerikanischen Grundbildung und damit für die Krise der Allgemeinbildung in den Vereinigten Staaten. Kinder der Ober- und Mittelklasse erwerben diese Allgemeinbildung noch. Diejenigen, die sie am nötigsten hätten, erwerben sie nicht: Kinder aus armen Familien und Ausländerkinder.

Aus dieser Einsicht ist der Schluss zu ziehen, dass der *fachlichen Bildung* wieder die *gesellschaftliche* Bedeutung beigemessen werden muss, die sie früher hatte, und zwar *im besten Interesse* der Kinder und Jugendlichen. Dabei fällt dem Kindergarten und der Grundschule bei der *Einführung in die Kulturtechniken* eine *fundamental wichtige Aufgabe* zu. Leider ist der Glaube weit verbreitet, die Fach- und Handlungsstrukturen von Sprache und Mathematik seien auf diesen Stufen irrelevant oder gar schädlich. Daher wird auf Alltagsbezüge, Edutainment und pädagogisch-didaktische Konzepte gesetzt, die eine eigene Welt fern von Fachstrukturen bilden. Für die Entwicklung der Kinder ist dies in höchstem

Maße schädlich. Es gibt viele Indizien dafür, dass eine klare *fachliche Struktur* gerade denen hilft, die sich mit Mathematik schwerer tun. *Die beste Schülerorientierung ist die Orientierung am wohlverstandenen Fach.*

Bei einer falschen Weichenstellung auf den unteren Stufen sind Schwierigkeiten mit der Mathematik in der Sekundarstufe und darüber hinaus vorprogrammiert, wie die Psychologin Margaret Donaldson in ihrem weltberühmten Buch *Children's Minds* vor 40 Jahren in aller Klarheit aufgezeigt hat. Man hilft Kindern also nicht, sondern behindert ihre Entwicklung, wenn man sie im jungen Alter auf Alltagsbezüge fixiert (Donaldson, 1982, S. 14–15, S. 137):

> Um seine geistigen Fähigkeiten entwickeln zu können, muss das Kind bis zu einem gewissen Grad Kontrolle über sein Denken erlangen; dies ist ihm jedoch nicht möglich, solange es sich seines Denkens nicht bewusst ist. Diese Kontrolle zu erlangen bedeutet, das Denken aus der ursprünglichen, unbewussten Einbettung in die Notwendigkeiten des Lebens und aus der Interaktion mit anderen herauszureißen; es setzt voraus, dass das Kind lernt, sich über die Grenzen von Alltagszusammenhängen hinaus zu bewegen. Von diesem Schritt hängt die Entwicklung aller höheren geistigen Funktionen ab.

Gerade für das Lernen von Mathematik ist diese Einsicht von zentraler Bedeutung. Margret Donaldson kritisiert im gleichen Zusammenhang auch die einseitige Fixierung auf „das Kind" und seine angeblich „spontane" Entwicklung. Dass „Kind" und „Fach" keine Gegensätze sind, hat John Dewey schon vor mehr als 100 Jahren überzeugend dargelegt.

2. Entwicklung fachlich aufbauender stufenübergreifender Lehrpläne

Vor 100 Jahren hat Felix Klein als überzeugter Anhänger des genetischen Prinzips seine Intention bei der Lehrplan- und Unterrichtsentwicklung folgendermaßen beschrieben (Klein, 1923, S. 24):

> Schließlich war das gesamte Gebiet des mathematischen Lernens von seinen Anfängen in der Volksschule bis zur höchsten wissenschaftlichen Spezialforschung als ein organisches Ganzes zu erfassen und auszugestalten …

Daran gilt es heute anzuknüpfen. Ein „organisches Ganzes" kann aber nur entstehen, wenn das Mathematiklernen *von unten her* entwickelt wird. Alles andere führt in die Irre.

Das A und O aller Reformen sind daher fachlich aufbauende, dem Wesen der Mathematik entsprechende Lehrpläne. Sie müssen bereits im Kindergarten ansetzen und nahtlos bis zur beruflichen Erstausbildung und zum Studium führen.

Die Entwickelbarkeit der Mathematik ermöglicht es, dabei die Erfordernisse der jeweiligen Entwicklungsstufe voll zu berücksichtigen. Anders als das falsch verstandene Fach steht das *wohlverstandene* Fach der kognitiven, feinmotorischen, emotionalen und persönlichen Entwicklung der Kinder nicht entgegen, sondern fördert sie. Der Frühförderpädagoge W. Fthenakis hat für den Übergang Kindergarten/Grundschule festgestellt, dass konsistente Bildungspläne „enorm zur Steigerung der Bildungseffizienz und zur Reduktion der kindlichen Belastungen" führen würden. Ein konsistenter stufenübergreifender fachlicher Aufbau ermöglicht ganz genauso bei den anderen Übergängen Lernbiographien *ohne Brüche*.

Arithmetik einschließlich Zahlentheorie und Elementargeometrie, die beiden Grundpfeiler der Mathematik, sind dabei unverzichtbar. Diese Gebiete sind *gut strukturiert*, *vielseitig anwendbar* und *reich an mathematischen Problemen*. Was besonders wichtig ist: Sie ermöglichen *authentische mathematische Aktivitäten* auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus. Nicht von ungefähr dominieren diese Gebiete auch bei mathematischen Wettbewerben, deren wichtiger Beitrag zur Förderung mathematischer Talente allseits anerkannt ist. Auf Arithmetik einschließlich Zahlentheorie und Elementargeometrie bauen die elementare Algebra, Analysis und Stochastik auf, die substanzielle Anwendungen im Bereich INT einschließen und eine solide mathematische Grundlage für die berufliche Erstausbildung und das Studium bilden.

3. Spezielle fachwissenschaftliche Angebote in den Lehramtsstudiengängen

Aus mathematisch fundierten Lehrplänen erwachsen klare Verpflichtungen für die Lehrerbildung in beiden Ausbildungsphasen. Es führt kein Weg daran vorbei, die *Elementarmathematik* ins Zentrum der fachlichen und fachdidaktischen Ausbildung aller Stufen zu stellen, natürlich jeweils stufenspezifisch. Das gilt auch schon für die Ausbildung von Erzieherinnen und Erziehern.

Das fachliche Niveau der Ausbildung auf den unteren Stufen würde durch eine Fokussierung auf die Elementarmathematik deutlich angehoben. Das fachliche Niveau der Ausbildung für das Lehramt am Gymnasium würde durch eine stärkere Berücksichtigung der Elementarmathematik keineswegs gesenkt, wie mantraartig behauptet wird, sondern ebenfalls gesteigert und im Hinblick auf das Berufsfeld mit Sinn gefüllt. Das Grundstudium kann in diesem Lehramt zum Teil sehr wohl mit dem für den Masterstudiengang Mathematik identisch sein, wobei eine elementarere Ausrichtung vermutlich auch den Masterstudierenden nicht schaden würde.

Für Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften stellen die Fachbereiche für Mathematik besondere Angebote bereit. Die natur- und ingenieurwissenschaftlichen Fachbereiche fordern dies auch ein. Da die Lehramtsstudierenden an der Universität keine Lobby haben, müssten die mathematischen Fachbereiche von der Politik verpflichtet werden, Angebote einzurichten, die *inhaltlich* auf das Berufsfeld Schule bezogen sind. Dies wäre nicht mehr als recht und billig, denn schließlich werden die Universitäten mit öffentlichen Geldern finanziert.

Damit wird keineswegs für die Ausweitung der fach*didaktischen* Studienanteile auf Kosten der fach*wissenschaftlichen* Anteile plädiert, was zur Abmilderung der offensichtlichen Probleme oft gefordert wird. Das Ziel muss vielmehr eine modifizierte *Fach*ausbildung sein, an der sich sehr wohl auch entsprechend qualifizierte Didaktikerinnen und Didaktiker beteiligen können.

Aufgabe der didaktischen Ausbildung ist es zu zeigen, wie man den Unterricht *aus dem Fach* entwickeln und den Fachleiterinnen und Fachleitern helfen kann, *fachliche Konzepte* im Unterricht zum Tragen zu bringen. Wie Martin Wagenschein ironisch formuliert hat, ist Didaktik nicht die Kunst zu zeigen, wie man unter Umgehung des Faches unterrichten kann.

Man müsste bei einer solchen Entwicklungsarbeit keineswegs am Nullpunkt beginnen. Ein Vorbild für beide Sekundarstufen ist das Gießen-Siegener Projekt „Mathematik neu denken“ (Beutelspacher et al., 2011). Verwiesen sei auch auf Rinkens & Krüger (2020), der schriftlichen Fassung einer Vorlesung über die „schönste Gleichung“ $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Für die Grundschule sei das im Projekt Mathe 2000 entwickelte, *fachlich anspruchsvolle und praxisorientierte* Ausbildungskonzept genannt. Bei der Evaluation des Fachbereichs Mathematik der Universität Dortmund im Jahr 1999 haben die Gutachter, drei renommierte Mathematiker, dieses Konzept als vorbildlich bezeichnet, vorbildlich auch für andere Studiengänge. Die hohe Akzeptanz bei den Studierenden ist empirisch belegt (Seipp & Wittmann, 1997).

Die Reform muss aber zuallererst bei den Lehrplänen ansetzen, die in die Zuständigkeit der Bildungspolitik fallen. Die Politik sollte sich dabei von Fachleuten beraten lassen, die wissen, was Mathematik *wirklich* ist und einen stufenübergreifenden Überblick haben. In der Bildungsforschung und der mathematikfernen Mathematikdidaktik findet man diese Fachleute nicht. Diejenigen Kolleginnen und Kollegen in der GDM, die auf mathematischer Grundlage arbeiten, müssten gehört werden und sich auch mehr zu Wort melden. Auch die DMV als Institution müsste sich der Problematik selbstkritisch und produktiv annehmen. Es geht schließlich um den *Mathematik*unterricht, also um *Mathematik*. Dieses gleichermaßen nützliche wie schöne Fach, das die „Entwicklung der Kultur auf allen ihren Stufen begleitet hat“ (Felix Klein) und für viele Lebensbereiche, insbesondere die technologische und wirtschaftliche Entwicklung, fundamental wichtig ist, benötigt und verdient einen *unverfälschten Unterricht*. Darauf müsste die Bildungspolitik endlich ihre Aufmerksamkeit lenken und nicht sonst wohin.

Postskript

Der Journalist Lars Weisbrod beschließt in seiner Rubrik „Woher der Hass?“ einen Artikel zu „Mathe“ mit folgender Einschätzung (Süddeutsche Zeitung, 6. 10. 2014, S. 14):

> Der Hass auf Mathe ist auch der Hass auf ein gebrochenes Versprechen – das Versprechen, das in Lehrer-Sätzen wie „Mathe steckt in allem“ und „Ohne Mathematik würde deine Playstation nicht funktionieren“ enthalten ist. Natürlich stimmt beides und niemand wird ernsthaft bestreiten, wie nützlich Mathematik ist – aber eben nicht für jeden auf eine so direkte Weise, wie einem ständig eingeredet wird. Ein aktuelles Mathe-Buch für die 10. Klasse hat eine Achterbahn auf dem Cover. Klar, zu Achterbahnen kann man sicher irgendwas Langweiliges berechnen – aber was hat das mit dem Spaß am Achterbahnfahren zu tun?
> Vielleicht muss man ja radikal umdenken. Vielleicht macht genau das Mathe erst recht langweilig, für Pubertierende und Erwachsene: dass es nur noch eine Sache mehr ist, die man braucht, um in den Alltagsmühlen zu bestehen und auf harten Holzstühlen auszuharren, noch etwas, das helfen soll um zu funktionieren – na toll, danke auch. Vielleicht sollte man die Mathematik dann besser in ihrer abstrakten Nutzlosigkeit feiern. [. . .] Das klingt nach einer Herangehensweise für montagmorgens, acht Uhr in der Schule.

Hier wird der Finger in die Wunde gelegt. Der Pendelschlag in das andere Extrem ist aber keine Lösung. Vielmehr gilt es den „reinen“ und „angewandten“ Aspekt der Mathematik produktiv zu verbinden. Das geht sehr gut, wenn man die für eine solche inhaltliche Entwicklungsforschung nötige Expertise hat. In der Bildungsforschung und der mathematikfernen „Mathematik“didaktik wird man sie vergeblich suchen.

Literatur

Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 1–24. DOI:10.1007/s10649-021-10049-w

Beutelspacher, A., Dankwerts, R., Nickel, G., & Spies, S. (2011). *Mathematik neu denken. Impulse für die Lehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Donaldson, M. (1982). *Wie Kinder denken*. Bern/Stuttgart/Wien: Huber.

Drucker, P. F (1993). *Die post-kapitalistische Gesellschaft*. Düsseldorf: Econ.

Fischer, R. (1980). Zur Ideologie der Selbstbeschränkung im Mathematikstudium. *Zeitschrift für Hochschuldidaktik*, 64–72.

Hoth, J, Jeschke, C., Dreher, A., Lindmeier, A., & Heinze, A. (2020). Is Academic Content Knowledge Sufficient for the Acquisition of Subject-Specific Professional Knowledge During University Teacher Education? An Investigation of the Trickle Down Hypothesis. *JMD, 41*(1), 329–356.

Klein, F. (1923). Göttinger Professoren (Lebensbilder von eigener Hand): Felix Klein. *Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen 5*, 11–36.

Kroll, W. (1997). Thesen zur gymnasialen Mathematiklehrerausbildung. In R. Biehler & H.N. Jahnke (Hg.), *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse* (S. 84–88). Universität Bielefeld, Institut für Didaktik der Mathematik. IDM Occasional paper 163.

Liessmann, K.P. (2014). *Geisterstunde. Die Praxis der Unbildung*. Wien: Zsolnay.

Rinkens, H.-D., & Krüger, K. (2020). *Die schönste Gleichung aller Zeiten.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Seipp, B., & Wittmann, E. Ch. (1997). Grundschullehrer (innen)-Ausbildung zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Praxis. In D. Höltershinken (Hg.), *Lehrerbildung im Umbruch. Vorschläge zur Neugestaltung. Dortmunder Beiträge zur Pädagogik* (S. 15–23). Dortmund: projekt verlag.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM* 6, 37–46.

Ziegler, G. (2008). Über das Buch der Beweise. Was ist Mathematik? Versuch einer Antwort in vier Thesen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 61*(7). 407–413.

Erich Ch. Wittmann, Projekt Mathe 2000
E-Mail: erich.wittmann@tu-dortmund.de

Online-DFG-Antragsworkshop 2021

Organisiert von der WWU Münster, 21.–22. 1. 2021

Luisa-Marie Hartmann, Stanislaw Schukajlow, Valentin Böswald und Jonas Kanefke

Der gemeinsame DFG-Antragsworkshop der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik (GDCP) fand am 21. und 22. Januar 2021 in Form einer Videokonferenz statt und wurde von der WWU Münster unter der Leitung von Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow in enger Absprache mit Prof. Dr. Stefan Rumann (GDCP) organisiert.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) ist die größte Drittmittelgeberin des Bundes. Im Rahmen der Sachbeihilfe werden Forschungsvorhaben gefördert, die insbesondere einen theoretischen Erkenntnisgewinn in der Grundlagenforschung versprechen. Anträge auf eine Sachbeihilfe können jederzeit von promovierten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern eingereicht werden. Die Begutachtung eines Antrags wird von unabhängigen Gutachterinnen und Gutachtern durchgeführt, die einen ersten Entscheidungsvorschlag zur Bewilligung des Antrags verfassen. Die Gutachten und der Entscheidungsvorschlag werden anschließend an das jeweilige Fachkollegium weitergeleitet, in dem der Antrag und die verfassten Gutachten ebenfalls geprüft und ein Entscheidungsvorschlag an den Hauptausschuss weitergeben wird, in dem die endgültige Entscheidung getroffen wird. Aus dem Bereich der Didaktik der Mathematik wohnt Frau Prof. Dr. Susanne Prediger dem Fachkollegium des Fachs 109-02 (Allgemeines und fachbezogenes Lehren und Lernen) bei. Die Bewilligungsquote im Bereich Mathematik und Naturwissenschaften lag im Jahr 2019 bei etwa 37 % (DFG, 2020). Das erfolgreiche Einwerben eines DFG-Projekts ist mit einer besonderen Anerkennung im Kreis der Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler verbunden und trägt maßgeblich zum Ansehen einer Wissenschaftsdisziplin bei. Jedoch stellt die Einreichung eines Antrags viele Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler vor große Herausforderungen.

Zur Unterstützung von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern bei der Anfertigung eines Antrags wurde der DFG-Antragsworkshop hervorgebracht, der in diesem Jahr bereits zum vierten Mal stattfand. Zur Teilnahme wurden alle promovierten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus den Didaktiken der Chemie, Mathematik und Physik (inkl. naturwissenschaftlich-technischem Sachunterricht) aufgerufen, die eine Antragsskizze einbringen können. Alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer mussten bis zum 15. Dezember 2020 den Organisatorinnen und Organisatoren eine 8- bis 10-seitige Antragsskizze zusenden. Der Aufruf zur Teilnahme wurde über die GDM- und GDCP-Mitteilungen verschickt.

Insgesamt wurden sieben Antragsskizzen aus den Bereichen Didaktik der Mathematik (5), Didaktik des Sachunterrichts (1) und interdisziplinär aus den Bereichen Didaktik der Mathematik und Didaktik der Physik (1) eingereicht. Die 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmer wurden während des Workshops von den neun Expertinnen und Experten aus den Bereichen Didaktik der Mathematik (Prof. Dr. Aiso Heinze, Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Prof. Dr. Stefan Krauss, Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow), Didaktik der Physik (Prof. Dr. Knut Neumann, Prof. Dr. Claudia von Aufschnaiter, Prof. Dr. Heike Theyßen), Didaktik des Sachunterrichts (Prof. Dr. Kornelia Möller) sowie aus der Psychologie (Prof. Dr. Detlev Leutner) bezüglich ihrer Antragsskizzen beraten. Als Expertin für die allgemeinen Aspekte der DFG-Antragstellung stand Frau Prof. Dr. Elke Sumfleth als Fachkollegiatin des Fachs 109-02 (Allgemeines und fachbezogenes Lehren und Lernen) den Teilnehmerinnen und Teilnehmern während des Workshops zur Verfügung.

Zur Beratung der Teilnehmerinnen und Teilnehmern wurden jeder Antragsskizze zwei möglichst zu dem Forschungsvorhaben passende Expertinnen und Experten zugeordnet, die sich bereits vor dem Workshop intensiv mit der Antragsskizze auseinandergesetzt haben. Für die Beratung der einzelnen Antragsskizzen wurden jeweils 45 Minuten vorgesehen. Zunächst sollten die Antragsskizzen in einem 10-minütigen Kurzvortrag von den jeweiligen Teilnehmerinnen und Teilnehmern präsentiert werden. An jede Präsentation sollte sich dann eine kurze Rückmeldung (jeweils 10 Minuten) der beiden Expertinnen und Experten sowie eine Plenumsdiskussion mit den weiteren Expertinnen und Experten und den Teilnehmerinnen und Teilnehmern (15 Minuten) anschließen. Die Besonderheit dieses Formats ist die Zuordnung von zwei Expertinnen und Experten und die offene Diskussion mit den weiteren Expertinnen und Experten und Teilnehmerinnen und Teilnehmern, die zur Objektivität der Anmerkungen maßgeblich beitragen kann.

Nach einer kurzen Vorstellungsrunde begann der Workshop mit einführenden Worten zu allgemeinen Aspekten der DFG-Antragstellung von Frau Prof. Dr. Elke Sumfleth. Anschließend fanden die Beratungen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer bezüglich Ihrer Antragsskizzen im oben beschriebenen Format statt. Am ersten Workshop-Tag wurden insgesamt fünf Antragsskizzen, unterbrochen durch kurze Pausen, besprochen. Am Abend des ersten Tages bot sich dann am Abend die Gelegenheit zu einem informellen Austausch über allgemeine Aspekte der DFG-Antragstellung und andere forschungsrelevante Themen. Am Vormittag des zweiten Workshop-Tages folgten die Präsentationen und Diskussionen von zwei weiteren Antragsskizzen. Im Rahmen einer Abschlussrunde wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer dazu eingeladen, allgemeine offen gebliebene Fragen bezüglich der DFG-Antragstellung an die Expertinnen und Experten und insbesondere an Frau Prof. Dr. Sumfleth zu stellen. Der Workshop endete mit abschließenden Ratschlägen der Expertinnen und Experten, die sie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern mit auf den Weg der Antragstellung geben möchten.

Im Anschluss an den Workshop wurden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer eingeladen, den Workshop anonym zu evaluieren. Die Evaluation wurde von 11 der 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmer eingereicht und die Ergebnisse zeigen, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer insgesamt sehr zufrieden mit der Organisation und dem Format des Workshops waren. Bezüglich des Formats verdeutlichen die Ergebnisse, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer primär die Rückmeldungen der jeweils zugeordneten Expertinnen und Experten als hilfreich für die Antragsskizze wahrgenommen haben, aber auch die Diskussion anderer Antragsskizzen als positiv empfunden haben. Dies unterstreicht auch die folgende anonyme Rückmeldung: „Es war auf jeden Fall sehr hilfreich die Einschätzungen und allgemeinen Kommentare zu hören. Nicht nur für das eigene Antragschreiben sondern auch für das wissenschaftliche Arbeiten im Allgemeinen.“ Außerdem sind sich alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Evaluation einig, dass der DFG-Antragsworkshop auch in Zukunft weiterhin stattfinden sollte. Dies spiegelt sich auch in dem Zitat aus einem Gespräch mit der Teilnehmerin Frau Dr. Jessica Hoth wider: „Ich fand den Workshop sehr hilfreich und finde es sehr gut, dass so etwas angeboten wird, um die Antragsskizzen zu besprechen.“ Im Rahmen der GDM-Tagungen werden regelmäßig Informationsveranstaltungen zur DFG-Förderung angeboten. Diese eignen sich insbesondere als erste Anlaufstelle, um sich über die DFG-Förderung zu informieren. Zur Teilnahme an diesen Informationsveranstaltungen ist keine Antragsskizze notwendig. Informationen zur Förderung durch die DFG und die Antragstellung finden Sie auch unter folgendem Link: www.dfg.de/foerderung/index.html.

An dieser Stelle möchten wir uns bei allen Expertinnen und Experten bedanken, durch deren Unterstützung die Durchführung des Workshops in diesem Format erst möglich wurde.

Literatur

Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) (2020, 16. Oktober). Bearbeitungsdauer und Erfolgsquoten. www.dfg.de/dfg_profil/zahlen_fakten/statistik/bearbeitungsdauer/

Luisa-Marie Hartmann
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: l.hartmann@uni-muenster.de

Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: schukajlow@uni-munester.de

Valentin Böswald
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: vboeswald@uni-muenster.de

Jonas Kanefke
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: jkanefke@uni-muenster.de

Jahrestagung der GDM 2022 „Mathematikdidaktiker*innen im Dialog“

Frankfurt am Main, 28. 3.–1. 4. 2022

Die 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) findet vom 28. 3.–1. 4. 2022 an der Goethe-Universität Frankfurt statt.

Bereits am 27.03. und 28.03 wird der Nachwuchstag von der GDM Nachwuchsvertretung organisiert. Er ist an den Bedürfnissen von Forschenden im ersten Jahr ihrer Promotion ausgerichtet und lädt bereits vor Tagungsbeginn zum gemeinsamen Kennenlernen, Vernetzen und Weiterqualifizieren ein. Während der Tagung bietet die Nachwuchsvertretung spannende Workshops und weitere Austauschmöglichkeiten auch für fortgeschrittene Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler an.

Neben den Hauptvorträgen wird ein Fokusvortrag zur frühen Bildung das Tagungsprogramm bereichern. Der Elementarbereich hat innerhalb der Wissenschaftlerinnen des lokalen Frankfurter Tagungsorganisationsteams der Arbeitsgruppe Primarstufe des IDMI eine langjährige Forschungstradition und vervollständigt darüber hinaus den Blick auf ein lebenslanges Lehren und Lernen.

Wir freuen uns auf die Fokus- und Hauptvorträge von *Esther Brunner* (Pädagogische Hochschule Thurgau), *Christine Streit* (Pädagogische Hochschule FH Nordwestschweiz), *Christof Schreiber* (Justus-Liebig-Universität Gießen), *Birte Friedrich* (Universität zu Köln), *Arthur Bakker* (Universiteit Utrecht) und *Holger Horz* (Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt).

Dieser umfassende Blick auf Lernen wird nicht nur in Workshops für Lehrerinnen und Lehrer, sondern auch für Erzieherinnen und Erzieher konkret. Wir hoffen mit diesem breit aufgestellten ErLe-Tag, der für den 29. 3. 2022 geplant ist, einen verbindenden Dialog von Wissenschaft und Praxis zu initialisieren.

Neben Fokus- und Hauptvorträgen, dem ErLe-Tag und vielfältigen Nachwuchs-Angeboten möchten wir wie in jedem Jahr die Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler sowie die Praktikerinnen und Praktiker aus der Mathematikdidaktik einladen, auch selbst die Jahrestagung der GDM mitzugestalten. Noch bis zum 1. 9. 2021 können Minisymposien eingereicht und AKs angemeldet werden. Ab dem 1. 10. 2021 öffnet die Tagungsanmeldung und die Einreichung von Beiträgen für die Minisymposien (bis 1. 12. 2021), von Kurz- und Einzelvorträgen sowie von Postern und Diskussionsforen (jeweils bis 10. 1. 2022).

An dieser Stelle möchten wir ganz besonders die Diskussionsforen hervorheben. Sie bieten die Möglichkeit, aktuelle Themen der Mathematikdidaktik zu diskutieren, die nicht Gegenstand einzelner wissenschaftlicher Beiträge sind.

Weitere Informationen zur Organisation und zum Ablauf der Tagung sowie zur Beitragseinreichung finden Sie auf der Tagungshomepage www.gdm-tagung.de.

Wir freuen uns, Sie hoffentlich in unserer Wirkungsstätte, im Herzen Deutschlands begrüßen zu dürfen!

Das lokale Organisations-Team der GDM 2022
Goethe-Universität Frankfurt
E-Mail: gdm2022@uni-frankfurt.de

Campus Westend der Universität Frankfurt, Tagungsort der GDM 2022 (Foto: Goethe Business School)

Forschungsstand Mathematisches Argumentieren und Beweisen vom Elementar- bis zum Hochschulbereich

Eine Synthese aus drei Expert*innenpodiumsdiskussionen

Daniel Sommerhoff und Esther Brunner

Dass mathematisches Argumentieren und Beweisen zentrale Aktivitäten innerhalb der Mathematik sind (vgl. Heintz, 2000) und ein Aufbau entsprechender Kompetenzen ein wichtiges Ziel der mathematischen Ausbildung ist, dürfte für die Leser*innen der MGDM keine Überraschung darstellen. Dass das Forschungsfeld in den letzten 10-15 Jahren deutlich an Breite und damit auch an Relevanz zugenommen hat, mag hingegen für einige neu sein. Die mathematikdidaktische Forschung zum Argumentieren und Beweisen im deutschsprachigen Raum hat sich bis zu den 2000er Jahren zum einen wesentlich auf interpretative und rekonstruktive Studien in der Primarstufe (z. B. Krummheuer, 2001; Meyer & Voigt, 2009) und zum anderen im Bereich quantitativer Arbeiten auf die Sekundarstufe fokussiert (z. B. Heinze et al., 2008; Reiss & Renkl, 2002) und dort entweder die Konstruktion von Beweisen selbst oder einen engeren Argumentationsbegriff – im Sinne eines Vorläufers von Beweisen – untersucht. Dem gegenüber steht ein breiter Argumentationsbegriff und integrierende Sichtweisen, die in der internationalen Forschung seit längerem diskutiert werden (Balacheff, 1999; Boero et al., 1996; Inglis & Mejía-Ramos, 2008; Pedemonte, 2007; Reid & Knipping, 2010). Eine solche Fokussierung hat sich nicht zuletzt aufgrund der folgenden Entwicklungen in den letzten Jahren deutlich ausgeweitet:

- Im Rahmen der Bildungsstandards Mathematik wurde ein vergleichsweise allgemeiner Argumentationsbegriff in den Fokus der didaktischen Bemühungen gestellt (Kultusministerkonferenz, 2003) – und das nicht nur in der Sekundarstufe, sondern auch im Elementar- und Primarbereich (Kultusministerkonferenz, 2004).
- Unter anderem angeregt durch die Qualitätsoffensive Lehrerbildung und die großen Schwierigkeiten von Studienanfänger*innen im Bereich Mathematik (Studienabbruchsquoten von etwa 40 %; Heublein & Schmelzer, 2018), haben der Übergang Schule–Hochschule sowie damit einhergehend auch (quasi-)longitudinale Untersuchungen von Beweiskompetenzen und Argumentationskulturen ein hohes Forschungsinteresse erfahren (Hoppenbrock et al., 2016; Kempen, 2019; Roth et al., 2015).
- Neben der Konstruktion von Beweisen sind auch andere Aktivitäten, wie das Verstehen, Validieren oder Präsentieren von Beweisen (Giaquinto, 2005; Mejía-Ramos & Inglis, 2009), aber auch das Entwickeln von Hypothesen („Conjecturing“) (Lin et al., 2011) oder das Erstellen von Definitionen („Defining“) (Alcock & Simpson, 2016; Dawkins, 2014; Zandieh & Rasmussen, 2010) und deren Rechtfertigen (Jahnke & Krömer, 2020) in den Fokus der Forschung gelangt.
- Parallel zu Entwicklungen in der sogenannten *(experimental) Philosophy of Mathematical Practice* (Hamami & Morris, 2020), welche nicht auf einen idealen Beweisbegriff fokussiert, sondern (unter anderem) mathematisches Beweisen in der Praxis untersucht (vgl. auch Brunner, 2014; Heintz, 2000), entwickelte sich ein zunehmendes Interesse an Argumentationskulturen (für einen frühen Beitrag siehe Chazan, 1993), soziomathematischen Normen (Yackel & Cobb, 1996), der Akzeptanz von Beweisen innerhalb verschiedener Communities (Sommerhoff & Ufer, 2019) sowie damit einhergehend ein stärkeres Interesse an didaktischen Beweiskonzeptionen (Kempen, 2018).

Um diese Entwicklungen und deren Einfluss auf die Forschung in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Community zu diskutieren, wurden im Rahmen des GDM Monats 2021 drei Podiumsdiskussionen mit insgesamt zwölf Expert*innen zum mathematischen Argumentieren und Beweisen aus dem deutschsprachigen Raum durchgeführt: Für die Elementar-/Primarstufe waren dies Esther Brunner, Hedwig Gasteiger, Kathleen Philipp und Silke Ruwisch, für die Sekundarstufe Aiso Heinze, Christine Knipping, Sebastian Kuntze und Michael Meyer und für den Hochschulbereich Rolf Biehler, Jürg Kramer, Stefanie Rach und Stefan Ufer. Die Expert*innenpodiumsdiskussionen waren entsprechend der drei Bildungsbereiche Elementar-/ Primarbereich, Sekundarbereich sowie Hochschule (& Übergang) getrennt aufgebaut, jedoch entlang derselben drei Fragen strukturiert:

(1) Was ist der aus Ihrer Sicht zentrale Forschungsbefund im Kontext mathematischen Argumentierens der letzten fünf Jahre?

(2) Wie schätzen Sie den Stellenwert des Experimentellen bzw. Exemplarischen beim mathematischen Argumentieren in Praxis, Theorie oder Forschung ein?
(3) Was ist Ihrer Meinung nach der Stellenwert von (inhaltlichem) mathematischem Wissen im Vergleich zu allgemeinen logischen Argumentationskompetenzen (im Sinne des Schlussfolgerns) beim mathematischen Argumentieren?

An dieser Stelle wollen wir zentrale Punkte, die im Rahmen der Expert*innenpodiumsdiskussionen angesprochen und diskutiert wurden, aufgreifen, wesentliche Aspekte skizzieren und zentrale Desiderate für die Forschung entwickeln. Damit wollen wir die Ergebnisse der Expert*innenpodiumsdiskussionen (i) für alle sicht- und greifbar machen, (ii) dem Bereich innerhalb der deutschsprachigen Forschung zusätzlich Struktur geben sowie (iii) für interessierte Forschende zentrale Ideen aufzeigen, mit denen diese wichtige Beiträge zum Forschungsstand liefern können. Die Darstellung orientiert sich dabei zunächst an den drei übergreifenden Fragen und integriert diese zum Abschluss.

Zentrale Forschungsbefunde der zurückliegenden fünf Jahre

Gerade im Elementar-/Primarbereich zeigte sich eine deutliche Weiterentwicklung der Forschung sowie ein substanzieller Fortschritt. Gleichzeitig wurde aber auch deutlich, dass in diesem Bereich zwar zahlreiche, insbesondere qualitative Arbeiten vorliegen (z.B. Fetzer, 2011; Krummheuer, 2008; Meyer, 2007; Schwarzkopf, 2000), die Forschung aber bisher noch wenig breit erfolgt. So wurde zwar hervorgehoben, dass sich mathematisches Argumentieren auch im Elementar- und Primarbereich valide erfassen lässt (bspw. Lindmeier et al., 2018; Nunes et al., 2015), das Forschungsfeld an sich jedoch noch nicht ausreichend klar umrissen ist. Ebenso wie im Sekundarbereich die Begriffe Argumentieren, Begründen und Beweisen einer klaren Abgrenzung bedürfen (vgl. bspw. Brunner, 2014; Jahnke & Ufer, 2015; Reid & Knipping, 2010; Sommerhoff & Ufer, 2019), ist eine klarere Beschreibung des mathematischen Begründens und Argumentierens auch in dieser Altersstufe notwendig. Obwohl dies entlang von einzelnen Kompetenzmodellen und Assessment Frameworks (Bezold, 2009; Lindmeier et al., 2018; Neumann et al., 2014) bereits geschehen ist, wird deutlicher Nachholbedarf in der spezifischen, den unterschiedlichen Altersstufen angemessenen Beschreibung gesehen.

Neben diesen fundamentalen Gesichtspunkten wurde auch über Stellenwert und Perspektive des Argumentierens diskutiert. Potenziell kann Argumentieren gerade im Primarbereich auch als Methode eingesetzt werden – quasi als „Fenster“ zum mathematischen Denken der Schülerinnen und Schüler – um mathematische Denk- und Verstehensprozesse genauer zu untersuchen. Der Aspekt spiegelt die Unterscheidung von „arguing to learn“ vs. „learning to argue“ wider (Andriessen et al., 2003; Andriessen, 2005).

Jenseits dieser eher konzeptuellen Fragen, wurde als zentrales Problem über die Ausbildung von Lehrkräften und Pädagog*innen gesprochen, welche diese aktuell nicht ausreichend befähigt, Anlässe für mathematische Argumentationen und Begründungen überhaupt zu identifizieren. In diesem Kontext zeigte auch eine kürzlich erschienene, langfristig angelegte Studie (Melhuish et al., 2020), dass selbst eine spezifische Förderung nur wenig effektiv war. Die Forschungslage ist hier bis dato als eher heterogen anzusehen, zumal einzelne Studien auch zeigen, dass Lehrpersonen durchaus auch in der frühen Bildungsstufe einen reichhaltigen Unterricht zum mathematischen Argumentieren gestalten können (z. B. Brunner, 2019). Für die weitere Forschung sind also sowohl vielversprechende Förderansätze sowie entsprechende Evidenz nötig.

Im Gegensatz zu den Entwicklungen im Elementar-/Primarbereich, attestierten die Expert*innen dem Sekundarbereich nur wenig Fortschritt in den letzten Jahren. Ein großer Teil der dargestellten zentralen Befunde war bereits älter als fünf Jahre (z. B. Healy & Hoyles, 2000; Heintz, 2000; Heinze & Reiss, 2004). Als neuere Facette, welche allerdings aktuell noch nicht ausreichend bedient ist, wurden Argumentationskulturen und sozio-mathematische Normen hervorgehoben. Gerade auch in Verbindung zum Primarbereich bzw. beim Übergang zur Hochschule wurde entsprechende Forschung, bspw. basierend auf den Arbeiten von von Chazan (1993), Krummheuer (1995) oder Yackel und Cobb (1996), als zentrales Puzzlestück zum Verständnis von Argumentieren und Beweisen in der Sekundarstufe dargestellt. Parallel zu den Diskussionen im Primarbereich wurden auch im Sekundarbereich die Rolle der Lehrkräfte sowie die Rolle individueller Charakteristika diskutiert (z.B. Meyer & Schnell, 2020). Dabei wurden neuere Befunde zur Metakognition im Kontext von selbstreguliertem Lernen hervorgehoben (bspw. Desoete & De Craene, 2019; Dignath & Büttner, 2018; Shilo & Kramarski, 2019), gleichzeitig aber auch in den Kontext früherer Forschung gesetzt (vgl. Schneider & Artelt, 2010) und der tatsächliche Mehrwert entsprechender Interventionen dialektisch diskutiert. Auch aufbauend auf dem GDM Hauptvortrag (Ufer, 2021) wurde hier attestiert, dass es zwar vermehrt Befunde dazu gäbe, welche Charakteristika erfolgreiche Beweisende ausmachen, auf der Ebene der Lehrkraft jedoch nur unzureichend Informationen vorlägen (Sommerhoff et al., 2019, in Vorbereitung). Im Kontext von Argumentations- und Beweiskompetenzen sowie verschiedenen Anforderungssituationen (Mejía-Ramos & Inglis, 2009) wurde schließlich auch die Rolle digitaler Werkzeuge (auch jenseits von digitalen Geometriesystemen wie *Geogebra*) in Argumentationskulturen und als Mittel für die Auseinandersetzung mit Beweisen erwähnt (z. B. Baccaglini-Frank & Antonini, 2016; Sümmermann et al., 2021).

Der Stellenwert der Argumentationskulturen im Sekundarbereich sowie die (anscheinend) hohe Varianz ebendieser wurde auch im Hochschulbereich diskutiert, wo insbesondere die geringen und inkohärenten Vorerfahrungen von Studienanfänger*innen diskutiert wurden (vgl. Kempen, 2019). Ergebnisse zum Einsatz verschiedener didaktischer Beweiskonzepte zeigten beispielsweise, dass auch inhaltlich-anschauliche Beweise bzw. generische Beispiele für Studierende nicht trivial waren, trotz der im Vergleich zu einem formal-deduktiven Beweis verringerten Ansprüche hinsichtlich formeller Aspekte (Biehler & Kempen, 2016; Kempen, 2018, 2019). Die Ergebnisse unterstreichen, dass Schwierigkeiten nicht nur durch diese Aspekte erzeugt werden, sondern Argumentieren und Argumentationskulturen noch deutlich ganzheitlicher betrachtet werden müssen. In diesem Kontext wurde auch die Konzeptualisierung von Beweis als „Cluster Concept/Category“ (Czocher & Weber, 2020) sowie das notwendige Mitdenken anderer Aktivitäten als Anforderungssituationen diskutiert. Offen sind hier Fragen zum Stellenwert der anderen Aktivitäten als genuine mathematische Aktivitäten einerseits und als mögliche „einfachere Vorläufer“ für das Konstruieren von Beweisen andererseits. Empirische Evidenzen zu entsprechenden Verbindungen sind jedoch rar.

Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen

Dass dem Experimentellen und Exemplarischen im Elementar-/Primarbereich ein großer Wert zu kommt, wurde bereits in einer Vielzahl mathematikdidaktischer Publikationen festgehalten (bspw. Schwarzkopf, 2000). Entsprechend wenig verwunderlich war die von den Expert*innen festgestellte hohe Relevanz. Die darauf aufbauenden Diskussionen zeigten jedoch einerseits, wie vielfältig experimentelles und exemplarisches Arbeiten sein kann, andererseits aber auch, dass beide Begrifflichkeiten noch nicht abschließend konzeptualisiert sind. So wurde beispielsweise zwischen Experimentieren als Tätigkeit im Unterricht und Experimentieren im Sinne eines (Gedanken)Experiments als grundlegendes mathematisches Denkprinzip unterschieden (z.B. Philipp, 2012). Während der Charakter des (Gedanken)Experiments im Verlauf der mathematischen Ausbildung als weitgehend konstant gesehen wurde, wurden dem Charakter des Experimentierens bereits im Elementar- und Primarbereich verschiedene Stufen und Entwicklungen attestiert. Genannt wurde dabei zum Beispiel das materialbasierte Argumentieren (Welsing, 2017), welches zwar zunächst auf die Darstellung einzelner Beispiele fokussiert, schnell aber auch zur Ablösung von den Materialien und der Entwicklung generischer Repräsentationen von Objekten führt. Dort schließen sich im Kontext des Argumentierens generische Beispiele und inhaltlich-anschauliche Beweise an, welche klar über rein experimentelle Beweise hinaus gehen (Wittmann & Müller, 1988). Der Übergang von Beispielen und realen Handlungen zu Denkobjekten, im Sinne einer Systematisierung und Abstraktion, wurde dabei als zentrales Lernziel hervorgehoben, welches wiederum einer typisch mathematischen Tätigkeit entspricht. Exemplarität wurde aber auch thematisch ausgelegt und beispielsweise auf begriffliches Argumentieren im Bereich Form und Raum (Unterhauser & Gasteiger, 2017) oder datenbasiertes Argumentieren (Krummenauer & Kuntze, 2018) hingewiesen.

Obwohl der Wert des Exemplarischen und Experimentellen auch von den Expert*innen im Sekundarbereich gesehen wurde, zeigten sich hier deutlich andere Diskussionspunkte. Im Sinne einer systematischen Betrachtung verschiedener (didaktischer) Argumentations- bzw. Beweisformen (Biehler & Kempen, 2016) wurde dabei insbesondere aufgezeigt, dass den Schüler*innen der epistemologische Status einzelner Argumentations- bzw. Beweisformen bekannt sein muss, um diese später als mehr oder weniger tragfähig für die Annahme oder Ablehnung von Aussagen bewerten zu können (Healy & Hoyles, 2000). Der Erforschung von sozio-mathematischen Normen und Meta-Wissen über Argumentieren und Beweisen sowie der Entwicklung tragfähiger Konzepte für deren Aufbau wurde entsprechend viel Wert für die Mathematikdidaktik zugesprochen. Neben dem Erwerb dieses Meta-Wissens wurde aber auch betont, dass experimentelles Vorgehen und beispielsweise der Umgang mit generischen Beispielen, ikonischen Repräsentationen für Beweise oder die Verwendung von Diagrammen beim Experimentieren im Sinne eines materialbasierten Argumentierens selbst für Studienanfänger*innen nicht einfach ist (Healy & Hoyles, 2000; Kempen, 2018, 2019) und ebenso erworben werden muss, wie abstraktere oder formellere Argumentationskompetenzen.

Schließlich diskutierten auch die Expert*innen im Sekundarbereich über die konkrete Bedeutung des Begriffs „Exemplarisch“, welcher sich auf die exemplarische Bedeutung von Zahlen für Argumentationsmuster, aber auch die Durchführung eines spezifischen Beweises als exemplarische Darstellung einer Beweismethode beziehen kann. So sind zwar der Satz von Thales und dessen Umkehrung bereits in sich wichtige Aussagen, werden darüber hinaus jedoch oft auch als zentrales Beispiel für die Begriffe Satz, Umkehrung und Äquivalenz gesehen (im Sinne des „learning to argue“), welche dann bspw. im Kontext des Satzes von Pythagoras erneut exemplarisch vertieft werden. Die Verwendung von Beispielen und die anschließende Abstraktion auf eine allgemeinere Aussage bzw. ein allgemeineres Vorgehen wurde hier erneut als typisch mathematische Tätigkeit gesehen, wenn auch teils auf einer anderen Ebene als im Rahmen der Elementar-/Primarbereich-Expert*innenpodiumsdiskussion. Inwieweit der Erwerb dieser Tätigkeit in beiden Bereichen aneinander angebunden ist und im Sekundarbereich auf gemachte Erfahrungen und Begriffe aufbaut wird, ist bisher nicht untersucht.

Hervorgehoben wurde der Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen auch im Bereich der Hochschule, wobei dafür insbesondere die Unterscheidung von Beweisprozess und Beweisprodukt zentral war. Zwar wurde festgehalten, dass Beweisprodukte in der Hochschule, welche sich an einem idealen Beweiskonzept orientieren (Hamami & Morris, 2020; Hilbert, 1931), wenig Raum für Experimentelles oder Exemplarisches beinhalten – höchstens im Sinne eines vorangehenden Beispiels oder einer Motivation des Beweises in eher didaktisch orientierten Darstellungen von Beweisen. Beweisprozesse wurden jedoch als teils „chaotisches Arbeiten“ charakterisiert. Sie beruhen oft auf Beispielen oder anschaulichen Ideen, sind hochgradig nichtlinear und beinhalten regelmäßig Fehler und „Sackgassen“. Empirisch wurde der Stellenwert des Experimentellen und Exemplarischen für Forschungs- und Verstehensprozesse bspw. von Wilkerson-Jerde und Wilensky (2011) festgestellt und auch Knuth et al. (2017) oder Lockwood et al. (2016) berichten über den Stellenwert von Beispielen im Kontext der Konstruktion von Beweisen. Exemplarität als Lernprinzip im Hochschulkontext könnte beispielsweise bedeuten, sich die Frage zu stellen, welche Typen von Argumentationen, welche Aussagetypen und letztlich auch welche Inhalte als Beispiele geeignet sind, um ein ausreichendes Verständnis für mathematisches Arbeiten mit Beweisen zu vermitteln bzw. zu erwerben.

Stellenwert mathematischen Wissens und allgemeiner (logischer) Argumentationskompetenzen

Dass mathematisches Argumentieren und Beweisen wissensbasierte Prozesse sind, für die Einblicke in die jeweiligen Themengebiete, insbesondere bzgl. Definitionen, Sätzen, und bekannten Beispielen, sowie Meta-Wissen, bspw. über die lokalen Akzeptanzkriterien von Beweisen oder gängige Beweismethoden, benötigt werden, wurde auch vor dem Hintergrund des Hauptvortrags von Stefan Ufer (2021) und entsprechenden Forschungsbefunden (vgl. Chinnappan et al., 2012; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008) in allen drei Podiumsdiskussionen klar hervorgehoben. Die mögliche Relevanz allgemeiner (logischer) Argumentationskompetenzen wurde hingegen sehr viel differenzierter diskutiert.

Im Kontext des Elementar- und Primarbereichs wurde dabei zunächst erneut aufgegriffen, welchen Zweck Argumentieren in diesem Bereich erfüllt und ob eher von *arguing to learn*, als ein Argumentieren um des mathematischen Inhalts willen, oder *learning to argue*, also ein Lernen des Argumentierens, im Sinne von Andriessen et al. (2003) im Vordergrund steht. Auch wurde diskutiert, was genau unter allgemeinen Argumentationskompetenzen in dem Altersbereich bzw. der Bildungsstufe überhaupt zu verstehen wäre (vgl. Markovits, 2000; Markovits & Thompson, 2008; Sodian & Mayer, 2013). Wissen über die Bedeutung und Aussagekraft von Beispielen zur Stützung einer These sowie Gegenbeispielen zur Ablehnung einer These wurden als ein Baustein logischer Argumentationskompetenzen zwar als wichtig angesehen, inwieweit diese inhaltsunabhängig erworben und gleichzeitig in fachspezifischen Kontexten erfolgreich angewendet werden können (Transfer), ist aktuell jedoch weitgehend unklar. Die Expert*innen sprachen sich im Gegenteil eher für fachlich authentische Argumentationsanlässe aus, aus denen allgemeinere logische Aspekte abgeleitet werden könnten. Fachliche Argumentationsanlässe und deren Beantwortung könnten dann bspw. auch in fächerübergreifendem Unterricht thematisiert werden, um so unterschiedliche Normen in Bezug auf Evidenz und Evidenzgewinnung in verschiedenen Fachbereichen zu thematisieren. Im Kontext der eigentlichen Fragestellung wurde schließlich auch die Rolle von allgemeinen sprachlichen Kompetenzen (Götze, 2019; Ufer et al., 2020), deren Beziehung zu Argumentationskompetenzen sowie deren Einfluss auf die sprachliche Realisierung von Begründungen diskutiert, welcher sich im Elementar- und Primarbereich als bedeutsam erwiesen hat (Neumann et al., 2014).

Ähnlich der Diskussion im Elementar- und Primarbereich zum Einfluss von sprachlichen Fähigkeiten, wurden im Sekundarbereich zusätzlich diskursive Kompetenzen (vgl. Cramer, 2018; Knipping, 2019), insbesondere auf Seiten der Lehrkräfte, als wichtiger Aspekt angesprochen. Allerdings zeigte auch die Diskussion im Sekundarbereich ein uneinheitliches Bild, obwohl hier bereits verschiedene Untersuchungen zum Stellenwert von allgemeinen Argumentationskompetenzen für mathematisches Argumentieren und Beweisen bzw. zur Domänen-Spezifizität von Argumentationskompetenz existieren (vgl. bspw. Budke & Meyer, 2015; Fischer et al., 2018). So wurde zwar im direkten Vergleich von allen Expert*innen mathematisches Wissen als zentrale Voraussetzung angesehen, der Status von allgemeinen Argumentationskompetenzen je nach genauem Verständnis jedoch unterschiedlich eingeschätzt. Zum einen wurde festgestellt, dass bisherige Ergebnisse bei Schülerinnen und Schülern sowie Studierenden eher einen geringen Einfluss nahelegen (vgl. Ufer, 2021) und „inhaltsbezogene Argumentationen" als wesentlicher im Vergleich zu eher formal-logischen Argumentation gesehen wurden (vgl. auch Unterscheidung syntactic & semantic reasoning; Easdown, 2009). Zum anderen wurde Meta-Wissen zu Formen des Argumentierens und deren Gültigkeit (Evans et al., 1993; Heinze & Reiss, 2003; Inglis & Simpson, 2007; Johnson-Laird & Byrne, 2002; Sporn et al., 2021) durchaus als wesentlich gesehen, auch wenn unklar war, inwiefern dies nun als mathematisch oder allgemein logisch zu interpretieren sei. Auch wurde eine Fähigkeit zum Verallgemeinern im Sinne allgemeiner logischer Argumentationskompetenz als sehr wichtig herausgestellt und bspw. auch (sicherlich wichtiges) Wissen über den Stellenwert von Beispielen und Gegenbeispielen als Teil allgemeiner logischer Argumentationskompetenzen gesehen. Schließlich wurde auch auf die teilweise gegebene fächerübergreifende Vergleichbarkeit von Argumentationen bzw. Argumentationskompetenzen verwiesen, obschon sich diese durch verschiedene Arten von Argumenten (faktisch und normativ) unterscheiden (vgl. auch Budke & Meyer, 2015).

Um Moderations- bzw. Mediationseffekte ging es dann im Kontext der Hochschule. Dort wurde zunächst hinterfragt, inwieweit der Einfluss von logischen Argumentationskompetenzen und mathematisches Wissen überhaupt direkt betrachtet werden können oder ob deren Einfluss als Dispositionen auf spezifische mediierende Tätigkeiten wie das Lesen oder Konstruieren von Beweisen (potentiell im Sinne der situation-specific skills nach Blömeke et al., 2015) und schließlich auf die Performanz in diesen Tätigkeiten deutlich differenzierter diskutiert und untersucht werden müsste. Auch wurde die Frage aufgeworfen, ob sich angesichts der hohen Komplexität mathematischer Argumentationsanforderungen, welche bspw. über konditionale bzw. syllogistische Inferenzen (Bronkhorst et al., 2020; Leighton, 2006) deutlich hinausgehen, eine Trennung von Logik und mathematischem (Vor-) Wissen überhaupt ausreichend möglich sei. So ist die Messung von Argumentations- und Beweiskompetenzen, bspw. im Sinne der Konstruktion von Beweisen oder dem Lesen von Beweisen, im Allgemeinen durch Vorwissen konfundiert und eine separate Messung methodisch aufwendig (vgl. Sommerhoff, 2017).

Schließlich wurde auch im Hochschulkontext über den Stellenwert allgemeiner logischer Argumentationskompetenzen im Vergleich zu domänenspezifischem Vorwissen zu Beweisstrategien bzw. Beweismustern als Elementen eines mathematisch-strategischen Wissens oder noch allgemeineren Beweisverständnisses (Sporn et al., 2021) diskutiert.

Zusammenfassung und Desiderata

So gerne wir „fertige Antworten" zu den drei übergeordneten Fragen präsentiert hätten, so sehr zeigen die obigen Ausführungen doch, dass es national wie international noch keinen einheitlichen Forschungsstand zum Argumentieren und Beweisen von Elementarbereich bis Hochschule gibt und viele Fragen derzeit noch unbeantwortet, teils sogar noch unbearbeitet sind. So war im Vergleich der drei Bildungsstufen eine deutlich unterschiedlich dynamische und intensive Forschungstätigkeit in den letzten Jahren erkennbar. Über alle Bildungsstufen hinweg zeigte sich zwar, dass der Stellenwert des Experimentellen bzw. Exemplarischen unumstritten ist. Wie diese Aspekte jedoch anschlussfähig in den verschiedenen Bildungsstufen integriert werden können und bspw. universitäre Veranstaltungen weniger produktorientiert gestaltet werden können, ist aktuell weitgehend offen. Schließlich deutete sich im Hinblick auf den Stellenwert von logischen Kompetenzen an, dass diese in den verschiedenen Bildungsstufen bisher nicht ausreichend klar konzeptualisiert sind, um über deren Einfluss empirisch fundierte Aussagen machen zu können.

Die drei Expert*innenpodiumsdiskussionen verdeutlichten jedoch auch, dass die Diskurse in der Forschung zu den drei betrachteten Bildungsstufen an vielen Stellen durchaus ähnliche Fragestellungen untersuchen und die Forschung in den drei Bildungsstufen vor ähnlichen Herausforderungen steht. Gerade im Sinne der Etablierung von Argumentationskulturen und deren Veränderung bzw. Adaptation im Laufe der schulischen Ausbildung (sowie auch der Lehramtsausbildung und dem Wiedereintritt in den Schulkontext) stellt sich in der Zusammenschau der Diskussionen die Frage, ob Unterricht bzw. Forschung in den drei Bildungsstufen noch stärker verzahnt sein müssten. Selbst im Kontext des Übergangs Schule-Hochschule, welcher in den letzten Jahren ein hohes Forschungsinteresse erfahren hat, gibt es bisher nur wenige Untersuchungen, die beide Seiten des Übergangs (also Schule und Hochschule) empirisch erfassen und die konstruktive Passung beider Seiten untersuchen. Ebenso ist unklar, inwieweit beispielsweise am Übergang Primarstufe-Sekundarstufe überhaupt konstruktiv auf die Argumentationskulturen im Primarbereich eingegangen wird und dortige Erfahrungen zu (generischen) Beispielen genutzt werden bzw. genutzt werden könnten.

Zusammenfassend lässt sich ein deutlicher Forschungsbedarf auf theoretischer und empirischer Ebene konstatieren. Dabei lassen sich basierend auf den Gesprächen eine Reihe besonders interessanter und relevanter Themenbereiche für die Forschung in den nächsten Jahren identifizieren. So scheinen Argumentationskulturen bisher nicht ausreichend theoretisch beschrieben und empirisch untersucht zu sein. Dies wäre zusätzlich auch im Hinblick auf Übergänge zwischen Elementarbereich, Primarbereich, Sekundarbereich und Hochschule wichtig, um so weitere Hinweise zu deren konstruktiven Gestaltung zu erhalten. Hier wäre insbesondere spannend, wie Erfahrungen aus dem Elementar-/Primarbereich, bspw. mit materialgebundenen Argumentationen oder zum Stellenwert von Beispielen und generischen Beispielen, gewinnbringend in der Sekundarstufe 1 genutzt werden könnten, um auf den bereits etablierten Argumentationskulturen und den gemachten Erfahrungen aufzubauen, anstatt eine neue, teils alternative Argumentationskultur aufzuzeigen. Schließlich wäre in dem Kontext zu erforschen, wie sich Argumentationskulturen (auch jenseits spezieller Argumentations- und Beweisaufgaben) etablieren und aufrechterhalten lassen, um ein „argumentatives Klima" zu schaffen. Ein zweiter zentraler Forschungsbereich scheinen individuelle Charakteristika von Lehrkräften bzw. Pädagog*innen und deren Auswirkung auf die Argumentationskulturen in deren Klassen bzw. Gruppen und letztlich natürlich auf die Argumentationskompetenz der Lernenden zu sein. Ergebnisse könnten Möglichkeiten für die weitere Professionalisierung in der Lehrkräfteaus- und -weiterbildung aufzeigen. Ein dritter, paralleler Forschungsbereich fokussiert die individuellen Charakteristika der Lernenden, welche im Kontext von Meta-Wissen zu Beweisen oder dem Einfluss mathematisch-strategischen Wissens nach wie vor nicht ausreichend erforscht sind. Als vierter Bereich ist schließlich die Betrachtung unterschiedlicher argumentativer Aktivitäten wie das Konstruieren, Validieren oder Verstehen von Beweisen zu nennen, welche bisher innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung sowie der Lehre an Schule und Hochschule nicht ausreichend explizit berücksichtigt wurden. Insbesondere ist unklar, inwieweit diese Aktivitäten im Kontext von Argumentations- bzw. Beweiskompetenzen trennbar sind bzw. getrennt werden müssen, inwieweit eine explizite Berücksichtigung der Aktivitäten lernförderlich sein kann und welche Wissensfacetten sich beispielsweise besonders effektiv durch einzelne Aktivitäten thematisieren bzw. aufbauen lassen.

Die Expert*innenpodiumsdiskussionen waren gut besucht und die Resonanz der Zuhörer*innen, welche oft alle drei Veranstaltungen besuchten, klar positiv. Basierend auf dieser Erfahrung, wäre es wünschenswert, entsprechende Veranstaltungsformate regelmäßig auch auf GDM-Tagungen anzubieten.

Dank. Ein herzlicher Dank geht an die Expert*Innen, die im Rahmen der Podiumsdiskussionen ihre Expertise und ihre Einschätzungen zur Verfügung gestellt haben. Besonders möchten wir uns darüber hinaus bei Michael Meyer bedanken, welcher diesen Beitrag aus Sicht der Experten kommentiert hat.

Literatur

Alcock, L., & Simpson, A. (2016). Interactions between defining, explaining and classifying: the case of increasing and decreasing sequences. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 5–19. DOI:10.1007/s10649-016-9709-4

Andriessen, J., Baker, M., & Suthers, D. (2003). Argumentation, computer support, and the educational context of confronting cognitions. In *Arguing to learn* (pp. 1–25). Springer.

Andriessen, J. E. B. (2005). Arguing to Learn. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 443–459). Cambridge, Cambridge University Press.

Baccaglini-Frank, A., & Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. arXiv:1605.02583.

Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate ...* www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Kovac.

Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 141–179. DOI:10.1007/s13138-016-0097-1

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(1), 3–13. DOI:10.1027/2151-2604/a000194

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig (Ed.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 2–113). PME.

Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C., & Goedhart, M. (2020). Logical Reasoning in Formal and Everyday Reasoning Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(8), 1673–1694. DOI:10.1007/s10763-019-10039-8

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Springer.

Brunner, E. (2019). Förderung mathematischen Argumentierens im Kindergarten: Erste Erkenntnisse aus einer Pilotstudie [journal article]. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(2), 323–356. DOI:10.1007/s13138-019-00146-y

Budke, A., & Meyer, M. (2015). Fachlich argumentieren lernen - Die Bedeutung der Argumentation in den unterschiedlichen Schulfächern. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Eds.), *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (pp. 9–30). Waxmann.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 359–387. DOI:10.1007/bf01273371

Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2012). Knowledge Use in the Construction of Geometry Proof by Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 865–887. DOI:10.1007/s10763-011-9298-8

Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs: Eine theoretische und empirische Betrachtung diskursiver Hindernisse*. Springer.

Czocher, & Weber. (2020). Proof as a Cluster Category. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(1), 50–74. DOI:10.5951/jresematheduc.2019.0007

Dawkins, P. C. (2014). How students interpret and enact inquiry-oriented defining practices in undergraduate real analysis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 88–105. DOI:10.1016/j.jmathb.2013.10.002

Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: an overview. *ZDM*, 1-11.

Dignath, C., & Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition and Learning*, *13*(2), 127–157.

Easdown, D. (2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 941–949. DOI:10.1080/00207390903205488

Evans, J. S. B. T., Newstead, S. E., & Byrne, R. M. (1993). *Human reasoning: The psychology of deduction*. Psychology Press.

Fetzer, M. (2011). Wie argumentieren Grundschulkinder im Mathemathematikunterricht? Eine argumentationstheoretische Perspektive. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *32*(1), 27–51. DOI:10.1007/s13138-010-0021-z

Fischer, F., Chinn, C. A., Engelmann, K., & Osborne, J. (Eds.). (2018). *Scientific reasoning and argumentation: The roles of domain-specific and domain-general knowledge*. Taylor & Francis.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical Activity. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen, & S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (Vol. 327, pp. 75–87). Springer Netherlands. DOI:10.1007/1-4020-3335-4_5

Götze, D. (2019). Schriftliches Erklären operativer Muster fördern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(1), 95–121. DOI:10.1007/s13138-018-00138-4

Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM*. DOI:10.1007/s11858-020-01159-5

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 396–428. www.jstor.org/stable/749651

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik*. Springer.

Heinze, A., Cheng, Y.-H., Ufer, S., Lin, F.-L., & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM*, *40*(3), 443–453. DOI:10.1007/s11858-008-0092-1

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1–10).

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *36*(3), 98–104. DOI:10.1007/bf02652777

Heublein, U., & Schmelzer, R. (2018). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. In *Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012 (Forum Hochschule 4/2014)*. DZHW.

Hilbert, D. (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre [journal article]. *Mathematische Annalen*, *104*(1), 485–494. DOI:10.1007/bf01457953

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze.* Springer Fachmedien.

Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2008). Theoretical and methodological implications of a broader perspective on mathematical argumentation. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 107–119.

Inglis, M., & Simpson, A. (2007). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 187-204. DOI:10.1007/s10649-007-9098-9

Jahnke, H. N., & Krömer, R. (2020). Rechtfertigen in der Mathematik und im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(2), 459–484. DOI:10.1007/s13138-019-00157-9

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 331–355). Springer.

Johnson-Laird, P. N., & Byrne, R. M. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychol Rev*, *109*(4), 646–678. DOI:10.1037/0033-295x.109.4.646

Kempen, L. (2018). How Do Pre-service Teachers Rate the Conviction, Verification and Explanatory Power of Different Kinds of Proofs? In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 225–237). Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-70996-3_16

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. Springer.

Knipping, C. (2019). Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht - diskursive und epistemologische Herausforderungen. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (pp. 11–18). WTM-Verlag.

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2017). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Krummenauer, J., & Kuntze, S. (2018). Primary student's data-based argumentation – an empirical reanalysis. In E. Bergquist, M. Österholm, & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of PME42* (Vol. 3, pp. 251–258). PME.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning* (pp. 229–269). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Krummheuer, G. (2001). *Narrative Elements of Children\'s Agrumentations in Primary Mathematics Classrooms*. Franzbecker, Hildesheim.

Krummheuer, G. (2008). Inskription, Narration und diagrammatisch basierte Argumentation. Narrative Rationalisierungspraxen im Mathematikunterricht der Grundschule. In H. Jungwirth & G. Krummheuer (Eds.), *Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht* (Vol. 2, pp. 7–37). Waxmann.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).

Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).

Leighton, J. P. (2006). Teaching and Assessing Deductive Reasoning Skills. *The Journal of Experimental Education*, *74*(2), 109-136. DOI:10.3200/JEXE.74.2.107-136

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2011). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer Netherlands. DOI:10.1007/978-94-007-2129-6_13

Lindmeier, A., Brunner, E., & Grüssing, M. (2018). Early mathematical reasoning–Theoretical foundations and possible assessment. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' Example-Related Activity when Exploring and Proving Conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(2), 165–196. DOI:10.1007/s40753-016-0025-2

Markovits, H. (2000). A mental model analysis of young children's conditional reasoning with meaningful premises. *Thinking & Reasoning*, *6*(4), 335-347.

Markovits, H., & Thompson, V. (2008). Different developmental patterns of simple deductive and probabilistic inferential reasoning. *Memory & cognition*, *36*(6), 1066–1078. DOI:10.3758/MC.36.6.1066

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88–93).

Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 35–67. DOI:10.1007/s10857-018-9408-4

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: von der Abduktion zum Argument*. Franzbecker.

Meyer, M., & Schnell, S. (2020). What counts as a "good" argument in school?—how teachers grade students' mathematical arguments. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(1), 35–51.

Meyer, M., & Voigt, J. (2009). Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. *Mathematica didactica*, *32*, 31–66.

Neumann, A., Beier, F., & Ruwisch, S. (2014). Schriftliches Begründen im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 113–125.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Barros, R. (2015). Assessing Quantitative Reasoning in Young Children. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(2–3), 178–196. DOI:10.1080/10986065.2015.1016815

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. DOI:10.1007/s10649-006-9057-x

Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken: theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Springer Spektrum.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H., & Prediger, S. (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten*. Springer.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM*, *42*(2), 149–161. DOI:10.1007/s11858-010-0240-2

Schwarzkopf, R. (2000). *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Franzbecker.

Shilo, A., & Kramarski, B. (2019). Mathematical-metacognitive discourse: how can it be developed among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. *ZDM, 51*(4), 625–640.

Sodian, B., & Mayer, D. (2013). Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens im Vor- und Grundschulalter. In M. Stamm & D. Edelmann (Eds.), *Handbuch frühkindliche Bildungsforschung* (pp. 617–631). Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI:10.1007/978-3-531-19066-2_43

Sommerhoff, D. (2017). *The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills* [Ph.D., LMU München].

Sommerhoff, D., Brunner, E., & Ufer, S. (2019). Appraisals for different types of proof. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, & P. Vale (Eds.), *43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 101). PME.

Sommerhoff, D., Brunner, E., & Ufer, S. (in Vorbereitung). "Which proof for which class?" Factors influencing the selection of mathematical proofs for teaching.

Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). Acceptance Criteria for Validating Mathematical Proofs Used by Pupils, University Students, and Mathematicians in the Context of Teaching. *ZDM, 51*(5), 717–730.

Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2021). Beginning University Mathematics Students' Proof Understanding. In *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.

Sümmermann, M. L., Sommerhoff, D., & Rott, B. (2021). Mathematics in the Digital Age: The Case of Simulation-Based Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. DOI:10.1007/s40753-020-00125-6

Ufer, S. (2021). Wer kann es? Interindividuelle Unterschiede beim mathematischen Beweisen – zwischen Annahmen und Evidenz. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch, & S. Prediger (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*. WTM Verlag. DOI:10.37626/GA9783959871846.0

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the XX North American Chapter* (Vol. 1, pp. 361–368). PME.

Ufer, S., Leiss, D., Stanat, P., & Gasteiger, H. (2020). Sprache und Mathematik – theoretische Analysen und empirische Ergebnisse zum Einfluss sprachlicher Fähigkeiten in mathematischen Lern- und Leistungssituationen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*(1), 1–9. DOI:10.1007/s13138-020-00164-1

Unterhauser, E., & Gasteiger, H. (2017). „Das ist ein Viereck, weil das hat 4 Ecken." – Begründungen von Kindergartenkindern bei Identifikationsentscheidungen für die Begriffe Viereck und Dreieck. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (pp. 981–984). WTM-Verlag.

Welsing, F. (2017). Argumentationsprozesse beim Verallgemeinern anschaulich dargestellter arithmetischer Gesetzmäßigkeiten. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (pp. 1017–1020). WTM-Verlag.

Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: Resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 78*(1), 21–43.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis [When is a proof a proof?]. In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237–258). Cornelsen.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(2), 57–75.

Daniel Sommerhoff, IPN – Leibniz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
E-Mail: sommerhoff@leibniz-ipn.de

Esther Brunner, PH Thurgau
E-Mail: esther.brunner@phtg.ch

Rückblick auf den GDM-Monat und Fortsetzung der digitalen Angebote des Net(t)-Workings

Franziska Tilke, Silke Neuhaus-Eckhardt, Sebastian Geisler und Maximilian Pohl

Auch ein Jahr nach Beginn der Corona-Pandemie ist Anfang 2021 der Wunsch der Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler nach Fortbildungs- und Vernetzungsmöglichkeiten noch groß. Die konstant hohen Teilnehmendenzahlen bei den digitalen Angeboten des Net(t)-Workings und den Angeboten der GDM-Nachwuchsvertretung im GDM-Monat 2021 sowie die zahlreichen positiven Rückmeldungen sowohl von Teilnehmenden als auch von Seiten der Expertinnen und Experten oder weiteren Personen der Community bestätigten uns eine hohe Wertschätzung unserer Angebote, was wir als große Bestärkung ansahen, unsere digitalen Angebote weiter fortzusetzen.

GDM-Monat – Nachwuchstage und Nachwuchsdienstage

Nachdem der Nachwuchstag sowie die weiteren Angebote für den wissenschaftlichen Nachwuchs während der GDM-Tagung im Jahr 2020 nicht stattfanden, stand schnell fest, dass wir, die GDM-Nachwuchsvertretung, unsere Angebote im GDM-Monat 2021 zumindest digital anbieten würden. So wurden der Nachwuchstag digitalisiert, die Expertinnen- und Expertensprechstunde online koordiniert und aus den Workshops während der ‚normalen' GDM-Tagung wurde das neue Format der Nachwuchsdienstage geschaffen. Das Team um Sebastian Geisler, Norbert Noster und Franziska Peters stellte so ein umfangreiches Programm auf.

Die hohen Anmeldezahlen von über 100 Teilnehmenden zum Nachwuchstag haben uns positiv überrascht. Die Nachwuchstage, die sich vor allem an Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler im ersten Jahr ihres Promotionsprojekts richteten, begannen am Freitag, den 5. März 2021, nachmittags und endeten am folgenden Samstagmittag. Nach einer kurzen Begrüßung und Vorstellung der Nachwuchsvertretung ging es direkt in die verschiedenen Online-Angebote. In den verschiedenen Workshops gaben die Mitglieder der Nachwuchsvertretung sowie extern eingeladene Referentinnen ihre Tipps und Tricks zu den Themen ‚Poster gestalten', ‚Vorträge halten', ‚wissenschaftliches Schreiben' und ‚Umgang mit Literatur' sowie ‚Selbstmanagement' und ‚Madipedia' an die Teilnehmenden weiter. Die fleißige, aktive Mitarbeit der Teilnehmenden zeigt sich z. B. darin, dass zahlreiche Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler nun über ein neues eigenes Madipedia-Profil verfügen. Im Anschluss an die Workshops gab es zunächst in einem inhaltlichen und dann in einem methodischen Networking die Möglichkeit, andere Doktorandinnen und Doktoranden mit ähnlichen Forschungsinteressen kennenzulernen, aktuelle Fragen zu diskutieren und Probleme anzusprechen. Das digitale Kennenlernen wurde danach bei einem gemeinsamen Abend bei Zoom fortgesetzt. Der Samstagvormittag startete – nachdem einige Teilnehmende schon digital gemeinsam gefrühstückt hatten – mit einer weiteren Workshoprunde und bot den Teilnehmenden die Möglichkeit, andere Inhalte zu vertiefen und weitere Tipps für ihre eigenen Forschungsarbeiten zu erhalten. Den Abschluss der Nachwuchstage bildete eine Talkrunde mit Prof. Dr. Ute Sproesser und Prof. Dr. Mathias Hattermann, die von ihren eigenen Promotionszeiten und wissenschaftlichen Werdegängen berichteten. Die Evaluation der Nachwuchstage zeigte, dass diese insgesamt als sehr hilfreich und gut gestaltet wahrgenommen wurden. Auch die digitale Umsetzung hat in weiten Teilen problemlos geklappt und wurde in der Evaluation positiv hervorgehoben. Den positiven Gesamteindruck fasst eine teilnehmende Person in der Evaluation wie folgt zusammen: „Es hat Spaß gemacht und war gleichzeitig informativ – perfekt".

Auch wenn dieses Jahr auf den Kneipenabend des Nachwuchses verzichtet werden musste, sorgten die wöchentlichen Nachwuchsdienstage während des GDM-Monats für eine weitere Vernetzung unter den Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern. Die Nachwuchsdienstage begannen jeweils mit einem Workshop, der sich vor allem an fortgeschrittene Promovierende und Postdocs richtete; danach war das Programm auch für neuere Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler geöffnet. Trotzdem ließen es sich auch einige Promovierende, die sich noch in den Anfängen befanden, nicht nehmen, den ganzen Nachwuchsdienstag dabei zu sein. Den ersten Workshop hielt Prof. Dr. Aiso Heinze zum wissenschaftlichen Publizieren, der den Vortrag aus dem Net(t)-Working von Prof. Dr. Gabriele

Kaiser im vergangenen November hervorragend ergänzte. Lara Müller (Universität Bielefeld) berichtet: „Beim Workshop zum wissenschaftlichen Publizieren hat Aiso Heinze einen umfangreichen Überblick über das wissenschaftliche Publizieren gegeben und uns hilfreiche Tipps zum Publizieren mitgegeben. Vielen Dank dafür!“. In der darauffolgenden Woche startete der Abend mit einem Karriereforum, in dem Prof. Dr. Hedwig Gasteiger und Prof. Dr. Dominik Leiss von ihren Werdegängen erzählten und Fragen beantworteten. Im dritten Workshop stellte Prof. Dr. Jürgen Roth die Gestaltung einer fachdidaktischen Vorlesung vor, ging auf Herausforderungen ein und zeigte verschiedene Wege auf, die Studierenden auch in großen Vorlesungen zu aktivieren. Den Abschluss bildete der Workshop von Prof. Dr. Stefan Ufer, der eine Informationsveranstaltung zu DFG-Anträgen hielt. Er motivierte die Teilnehmenden, eigene Anträge zu verfassen, und wies auf weitere Unterstützungsangebote wie z. B. den DFG-Antragsworkshop hin.

Einen weiteren zentralen Programmpunkt der Nachwuchsdienstage stellten die Nachwuchsvorträge dar, bei denen wir Zeitslots für kurze Vorträge mit anschließender Diskussion anboten. 13 Doktorandinnen und Doktoranden, die sich zu Beginn ihrer Promotion befinden, nutzten die Chance, ihr Promotionsprojekt vorzustellen, und erhielten vielfältige und konstruktive Rückmeldungen von anderen Doktorandinnen und Doktoranden sowie von erfahrenen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern. Gleichzeitig boten sich den Zuhörerinnen und Zuhörern spannende Einblicke in vielfältige Forschungsprojekte, die von Ansichten österreichischer Mathematiklehrkräfte zur Unterrichtsqualität über die Entwicklung und Erprobung von Trainingsprogrammen für den Mathematikunterricht bis hin zur Diagnosekompetenz von Lehramtsstudierenden reichten.

Nach den Vorträgen ging der Abend in die Social-Events über, die viele der Teilnehmenden begeisterten. Während in der ersten Woche gemeinsam gekocht und Banoffee (fast) einstimmig zum neuen Lieblingsdessert gekrönt wurde, bot in der folgenden Woche ein Pub-Quiz die Gelegenheit, das eigene Wissen auf den Prüfstand zu stellen und viele Punkte für das Team zu sammeln. Ein Online-Spieleabend in der letzten Woche diente noch einmal dazu, sich weiter zu vernetzen oder auch im GDM-Monat kennengelernte Kolleginnen und Kollegen wiederzutreffen.

Auch wenn wir ganz stark hoffen, dass die GDM-Tagung und die Nachwuchstage 2022 wieder in Präsenz stattfinden können, haben die Nachwuchsangebote gezeigt, dass sowohl ein inhaltlicher Austausch als auch eine Vernetzung des wissenschaftlichen Nachwuchses auch auf digitalem Weg erfolgreich gelingen können. Annika Umierski (Universität Bielefeld) bilanziert: „Vom Publikationsworkshop bis hin zum gemeinsamen Spieleabend: Durch die Nachwuchsdienstage habe ich spannende und wichtige Einblicke in die Dos and Don’ts der Wissenschaft gewinnen können. Darüber hinaus wurde es uns allen sehr einfach gemacht mit Mit-DoktorandInnen ins Gespräch zu kommen – eine tolle und insbesondere angenehme Gelegenheit des Networkings.“

Net(t)-Working: Das Online-Angebot des wissenschaftlichen Nachwuchses geht in die 2. Runde

Nachdem im Herbst 2020 von der GDM-Nachwuchsvertretung kurzfristig ein Online-Angebot zur Förderung und Vernetzung des wissenschaftlichen Nachwuchses entwickelt wurde (wir berichteten in den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 110 (2021)), zeigte die enorme Resonanz der Teilnehmenden (über 180 Anmeldungen, von denen regelmäßig 60–80 Teilnehmende pro Veranstaltung anwesend waren), dass auch eine Fortführung nach Ende des Wintersemesters 2020/21 gewünscht war. So stellte das Team bestehend aus Lukas Baumanns, Raja Herold-Blasius, Judith Huget und Silke Neuhaus-Eckhardt auch für das Sommersemester 2021 ein umfangreiches Programm von fachlichen Vorträgen über Methodenworkshops bis hin zu einem Austauschforum über die Karriere mit (kleinen) Kinder auf, welches auch unter mathedidaktik.uni-koeln.de/doktorandinnen/nett-working zu finden ist. Im Anschluss an die inhaltlichen Impulse kam auch das Netzwerken unter den Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern nicht zu kurz. Wie sich schon im Wintersemester gezeigt hat, endeten die Online-Angebote montags für viele selten direkt nach dem Workshop und so setzten sich wieder viele Zoom-Meetings bis in den späten Montagabend fort. Die Teilnehmenden des Net(t)-Workings bildeten die große Bandbreite des wissenschaftlichen Nachwuchses in der Mathematikdidaktik ab: von Teilnehmerinnen und Teilnehmern, die ihre Promotion gerade erst begonnen hatten, bis hin zu Postdocs, die sich noch einmal weiterbilden wollten. Gerade neuen Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftlern, denen aufgrund der Pandemie die Teilnahme an Tagungen bisher verwehrt blieb, bot das Angebot einen guten Anschluss an die Community. So berichtet Kira Karras (WWU Münster): „Die Net(t)-Working-Angebote nehme ich gerade zu Beginn meiner Promotion als sehr bereichernd wahr, um Einblicke in und Überblick über verschiedene inhaltliche und methodische Themen zu erhalten.

Gleichzeitig kann ich von den persönlichen Erfahrungen anderer Promovierender profitieren."

Die zweite Runde des Net(t)-Workings startete im April 2021 mit einem Workshop zu ‚Grundvorstellungen' von Prof. Dr. Rudolf vom Hofe. Im zweiten Workshop von Prof. Dr. Andreas Eichler waren die Teilnehmenden aktiv gefordert und wurden zum Thema ‚Halbstrukturierte Interviews – Von der Frage bis zum Leitfaden' auf den Weg der Entwicklung mitgenommen und entwickelten selbstständig in Kleingruppen einen Interviewleitfaden. Anfang Mai stand dann ein Thema auf dem Programm, was immer wieder in der wissenschaftlichen Laufbahn eine große Herausforderung darstellt, die ‚Karriere mit (kleinen) Kindern'. Zu einer familiengerechteren, etwas früheren Uhrzeit berichteten Jun. Prof. Dr. Birte Friedrich, Dr. Raja Herold-Blasius, Prof. Dr. Eva Müller-Hill und Prof. Dr. Maike Vollstedt von ihren Erfahrungen als Eltern und Wissenschaftlerinnen zu unterschiedlichen Zeitpunkten in der Karriere. Fortgesetzt wurde das Programm mit einem Workshop zum Thema ‚Das was und wie beim Testen' von Prof. Dr. Stefanie Rach. Im Juni nahm Prof. Dr. Anke Lindmeier die Teilnehmenden in ihrem Workshop mit in das Gebiet der ‚situierten Erhebungsformate im Kontext der Lehrerprofessionsforschung' und Prof. Dr. Arthur Bakker berichtete vom ‚Schreiben von Journal Artikeln'. Neben den Workshops und Vorträgen der eingeladenen Expertinnen und Experten führte die Nachwuchsvertretung durch das informelle Programm. Zu Beginn des Semesters wurde ein Spieleabend organisiert und so an die Spielfreude aus dem GDM-Monat angeknüpft. Bei einem Wein- und Biertasting kamen alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer auf ihre Kosten und zum Semesterabschluss stand das gemeinsame Abgrillen auf dem Programm.

Wir bedanken uns an dieser Stelle ganz herzlich bei allen Expertinnen und Experten, ohne die dieses Angebot nicht möglich wäre, und freuen uns, dass auch in der zweiten Runde so viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer von unserem Angebot profitieren konnten.

Franziska Tilke, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: f.tilke@uni-muenster.de

Silke Neuhaus-Eckhardt, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
E-Mail: silke.neuhaus@ovgu.de

Sebastian Geisler, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
E-Mail: sebastian.geisler@ovgu.de

Maximilian Pohl, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: maximilian.pohl@uni-due.de

Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

Einladung zur Online-Herbsttagung, 8. 10. 2021

Renate Motzer

Die 33. Herbsttagung des Arbeitskreises „Frauen und Mathematik" der GDM findet in diesem Jahr nochmal online statt. Wir freuen uns auf Beiträge zu Themenfeldern wie Geschichte von Frauen in der Mathematik, Frauen in der Mathematik heute oder gendergerechter Mathematikunterricht. Darüber hinaus können auch aktuelle Lehr- oder Forschungsprojekte vorgestellt werden.

Das Tagungsprogramm und die Anmeldemodalitäten werden veröffentlicht unter www.uni-augsburg.de/de/fakultaet/mntf/frauenbeauftragte/arbeitskreis-frauen-und-mathematik/. Die Tagung beginnt am Freitag, 8. 10. um 09:00 Uhr und endet im Lauf des Nachmittags.

Für Rückfragen wenden Sie sich bitte an die Arbeitskreissprecherin Renate Motzer.

Renate Motzer, Universität Augsburg
E-Mail: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis: Grundschule

Einladung zur Online-Herbsttagung, 5.–6. 11. 2021

Elke Binner im Namen des Specher/-innenrats

Die Herbsttagung 2021 des Arbeitskreises Grundschule wird wegen der immer noch unklaren Pandemie-Situation (COVID-19) in diesem Jahr digital durchgeführt. Die 28. Herbsttagung findet am 5. und 6. 11. 2021 statt.

Das Thema der diesjährigen Tagung lautet: „Blick auf Schulcurricula Mathematik – Empirische Fundierung?"

Nähere Informationen zur Anmeldung und dem Programm finden Sie unter: https://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/herbsttagungen.html

Elke Binner, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: elke.binner@hu-berlin.de

Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore Mathematik

Online, 2. 3. 2021

Holger Wuschke, Katja Lengnink und Jürgen Roth

Im Rahmen des GDM-Monats traf sich auch der Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore Mathematik am 2. 3. 2021 online in einem Zoom-Meeting. Dabei unterteilte sich die Arbeitskreissitzung in einen inhaltlichen und einen geselligen Teil. Jürgen Roth eröffnete die Sitzung mit einem organisatorischen Einstieg bzgl. des Anliegens des AK und der gemeinsamen Publikationen. Anschließend informierte Uta Häsel-Weide als örtliche Tagungsleitung über die kommende Herbsttagung des Arbeitskreises in Paderborn.

Herbsttagung 2021

In diesem Jahr findet die Herbsttagung am 23. September 2021 digital in Paderborn statt. Das Rahmenthema der Tagung lautet „Inklusion und Lehr-Lern-Labore". Dabei ist ein Zeitslot für mögliche Vorträge und zwei Zeitslots für Workshops bzw. Work-In-Progress-Runden vorgesehen. In bewährter Herbsttagungstradition wird auch das Lehr-Lern-Labor des ausrichtenden Standortes vorgestellt. So können alle Teilnehmenden auf die Aktivitäten im Paderborner Lehr-Lern-Labor „Zahlenraum“ gespannt sein.

Die Anmeldung zur Tagung muss bis spätestens 30. Juni 2021 per E-Mail bei der Sprechergruppe (sprechergruppe-ak-lll@mathe-labor.de) erfolgen. Bis zu diesem Termin können auch mögliche Themen für Vorträge, Workshops oder Work-In-Progress-Runden bekannt gegeben werden. Nähere Informationen zur Herbsttagung finden sich auf der entsprechenden Webseite unter madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore/Herbsttagung_2021.

Wahl der Sprechergruppe

Auf der Herbsttagung wird es eine Neuwahl der Sprechergruppe des AK geben. Sowohl Jürgen Roth als aktueller Sprecher des Arbeitskreises als auch Holger Wuschke als Sprecher des wissenschaftlichen Nachwuchses stehen nicht für eine Wiederwahl zur Verfügung. Die Sprechergruppe ruft alle aktiven Mitglieder des AK Lehr-Lern-Labore dazu auf, sich zur Wahl für die Sprechergruppe zur Verfügung zu stellen und bittet darum, das Interesse an einer Mitarbeit in der Sprechergruppe in einer kurzen E-Mail an die aktuelle Sprechergruppe zu bekunden.

Inhaltliche Arbeitskreissitzung im Rahmen des GDM-Monats

In der weiteren inhaltlichen Arbeitskreissitzung wurde in zwei parallelen Workshops gearbeitet:

Annegret Nydegger (PH Bern) stellte in ihrem Workshop „Eine Verbindung von Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts mithilfe eines Praxisteams an der PH Bern – Eine Erweiterung des Lehr-Lern-Labor-Ansatzes?“ ihre Arbeit mit einem Team von Lehrkräften vor. Dieses Praxisteam arbeitet gemeinsam mit Mathematikdidaktikern und Mathematikdidaktikerinnen an Themen aus der Praxis unter Einbezug theoretischer Aspekte. An Beispielen konnten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Workshops so erkunden, wie durch die Arbeit im Praxisteam sowohl eine wissenschaftlich fundierte Praxis etabliert und multipliziert als auch eine praktisch inspirierte wissenschaftliche Auseinandersetzung vorangetrieben werden kann. Auch Studierende der PH Bern werden mit ihren Fragen im Rahmen von Unterrichtspraktika und Lehrveranstaltungen vom Praxisteam mit betreut. Es wurde diskutiert, in wie fern die Arbeit im Praxisteam sich von der Arbeit in Lehr-Lern-Laboren unterscheidet und welche Vorzüge und Nachteile die beiden Konzepte jeweils haben.

Parallel dazu hielt Timo Senfleben (Universität Leipzig) einen Workshop zum Thema „Forschung zu der Lernumgebung des Escape-Rooms mit der Thematik lineare Gleichungen in Lehr-Lern-Laboren“. In diesem Workshop wurde einerseits über das Format von Escape-Rooms und die zugrundeliegende wissenschaftliche Forschung diskutiert. Andererseits lag der Fokus auch auf dem von Timo Senfleben konzipierten digitalen Escape-Room, der in der Art eines „Point-and-Click-Adventure“ Aufgaben zu verschiedenen Aspekten von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen stellt. Dabei stellte sich die Frage, inwiefern der Escape-Room digital einen Mehrwert gegenüber einer analogen Variante bietet, ob Aspekte von linearen Gleichungen (Einsetzungsgleichheit, Wertgleichheit) berücksichtigt und veranschaulicht werden oder in wie fern empirisch erfasst werden kann, ob das vorgestellte Übungsformat lerneffizient ist. Des Weiteren wurde darüber diskutiert, ob es sich bei den Aktivitäten im Rahmen des Escape-Rooms eher um Problemlösungen oder um Routineaufgaben handelt.

Im letzten Teil der inhaltlichen Sitzung hielten Jürgen Roth und Holger Wuschke einen Vortrag mit anschließender Diskussion zum Thema „Digitale Lehr-Lern-Labor Formate – Bedarfe von und Angebote an Schulen“. Holger Wuschke stellte dabei die Schulperspektive einer Projektschule des Digital-Pakts in Mecklenburg-Vorpommern dar sowie die Gestaltungsmöglichkeiten von Unterricht im Rahmen von Präsenz-, Distanz- oder Wechselunterricht. Bei den Bedarfen wurden sowohl die materiellen, personellen als auch inhaltlichen Bedarfe der Schulen thematisiert. Jürgen Roth gab dazu passend einen Einblick in die Arbeit des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“, einem Lehr-Lern-Labor am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau. Dabei ging er insbesondere darauf ein, wie Schulen in der Corona-Zeit in ihrer Unterrichtsarbeit sowohl im Distanz- als auch im Wechselunterricht durch Lehr-Lern-Labor-Formate unterstützt werden können. Dazu wurden Lernumgebungen neu gedacht, in Teilen in Materialboxen an Schulen zur Durchführung im Home-Schooling geschickt, aber auch Labordurchläufe per Videokonferenzen in Kleingruppen mit Studierendenbetreuung in jeder Kleingruppe durchgeführt. In der anschließenden Diskussion zeigte sich, dass auch weitere Standorte von Lehr-Lern-Laboren in einer asynchronen Form diverse Kontaktschulen oder Schülerinnengruppen unterstützen und so den Kontakt teilweise durch individuelle Rückmeldungen intensivieren konnten.

Gesellige Arbeitskreissitzung im Rahmen des GDM-Monats

Im geselligen Teil der Sitzung kam es zu einem unterhaltsamen Austausch bei einem Getränk der eigenen Wahl. Ein Highlight war dabei ein Pub-Quiz, welches in Zoom-Breakout-Rooms die

Teams näher zusammenbrachte und diskutieren ließ. Im Resümee der weiteren Gespräche im Verlaufe des Abends wurde das Format des Pub-Quiz bereits für einen nächsten geselligen Teil festgesetzt. Besonders die zu ergänzenden Viererreihen wie 23 – 57 – 1113 – ??? brachten viel Freude und angeregte Diskussion unter Freunden der Mathematik ins Rollen. Aber auch die spezifischen Fragen zur Leuphana Lüneburg und der Stadt Lüneburg ließen den Tagungsort zumindest ein Stück weit erfahrbar werden.

Einladung zur Mitarbeit
Informationen zum Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore sind unter der URL http://ak-lll.mathe-labor.de zu finden. Interessierte sind herzlich eingeladen, im Arbeitskreis mitzuarbeiten und an den regelmäßigen Herbsttagungen und AK-Treffen teilzunehmen. Wer regelmäßig Informationen zum AK Lehr-Lern-Labore Mathematik und seinen Aktivitäten erhalten möchte, schreibt eine E-Mail an die Sprechergruppe (sprechergruppe-ak-lll@mathe-labor.de) und wird gerne in den E-Mail-Verteiler (ak-lll@mathe-labor.de) des Arbeitskreises eingetragen. Über diesen Verteiler werden unter anderem auch die Einladungen zu den Herbsttagungen verschickt werden.

Katja Lengnink, Universität Gießen
E-Mail: katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Jürgen Roth, Universität Koblenz-Landau
E-Mail: roth@uni-landau.de

Holger Wuschke, Universität Leipzig
E-Mail: wuschke@math.uni-leipzig.de

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Frühjahrstagung, 3. 3. 2021
Einladung zur Herbsttagung, 22.–23. 10. 2021

Tanja Hamann, Markus A. Helmerich und Stefan Pohlkamp

Traditionell trifft sich der Arbeitskreis Mathematik und Bildung anlässlich der GDM-Tagung im Frühjahr. So fand im diesjährigen GDM-Monat am 3. März ein digitaler Austausch statt, der inhaltlich geprägt war von einem Vortrag von David Kollosche (Alpen-Adria-Universität Klagenfurt) zum Thema „Epistemologische Bildung als Ziel von Mathematikunterricht“ sowie der anschließenden Diskussion zum Thema. Als Einblick in Kollosches Vortrag möge folgendes Abstract dienen:

> Relativistische Positionen in der Erkenntnistheorie lassen die Frage zurück, was Objektivität bedeuten kann – eine Frage, die aber gerade im postfaktischen Zeitalter elementar erscheint. Dieser Entwicklung wird im Vortrag philosophisch und anhand eines populärmathematischen Ausflugs nachgespürt. Sodann wird auf der Grundlage von Ian Hacking's Projekt der *styles of reasoning* eine Beschreibung versucht, was Objektivität in der Wissenschaft bedeuten könnte. Da im dabei artikulierten Vorschlag die Mathematik eine zentrale Stellung einnimmt, ergibt sich die abschließend besprochene Frage, inwieweit sich mathematische Bildung um eine erkenntnistheoretische Bildung bemühen kann, soll, oder gar muss.

Ausführlicher ist Kollosches Argumentation nachzulesen in seinem diesjährigen Artikel „Styles of reasoning for mathematics education“, *Educational Studies in Mathematics*, DOI:10.1007/s10649-021-10046-z.

Im Anschluss an die inhaltliche Diskussion hat der Arbeitskreis Tanja Hamann als seine Sprecherin bestätigt und Stefan Pohlkamp zum neuen Sprecher gewählt. Das neue Sprecherteam dankt Markus A. Helmerich für sein langes und erfolgreiches Wirken als scheidender Sprecher des Arbeitskreises und freut sich über sein weiteres kontinuierliches Engagement bei Aktivitäten des Arbeitskreises.

Der Arbeitskreis lädt auch dieses Jahr zur traditionellen Herbsttagung ein. Am Freitag/Samstag, dem 22./23. Oktober, steht das Online-Format unter dem Motto „Mathematik, Gesellschaft und Wahrheit“. Fragestellungen können sein:

- Was bedeutet mathematische Bildung angesichts der vielfältigen gesellschaftlichen Transformationen (Digitalisierung, Covid-19, FakeNews, ...)?
- Welchen konkreten Beitrag kann Mathematikunterricht zu diesen Herausforderungen leisten?
- Wie hat das letzte Jahr des Distanzlernens das Verständnis mathematischer Bildung verändert?

- Welche Rolle spielen mathematische Modellierungen in politischen und sozialen Kontexten?
- Was ist wahr in der Mathematik(didaktik), in der angewandten Mathematik und/oder in der mathematischen Modellierung?

Daneben ist die Tagung offen für die Betrachtung weiterer Facetten des Bildungsaspekts, gerne auch mit Bezug zur aktuellen Situation. Interessierte sind herzlich eingeladen teilzunehmen; auch Beiträge werden vom Sprecherteam des Arbeitskreises gern entgegengenommen.

Tanja Hamann, Universität Hildesheim
E-Mail: hamann@imai.uni-hildesheim.de

Markus A. Helmerich, Universität Siegen
E-Mail: helmerich@mathematik.uni-siegen.de

Stefan Pohlkamp, RWTH Aachen
E-Mail: stefan.pohlkamp@matha.rwth-aachen.de

Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Online, 2. 3. 2021

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

Aufgrund der Corona-Pandemie konnte auch das Frühjahrstreffen 2021 des GDM-Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ nicht als Präsenzveranstaltung stattfinden. Gleichwohl war es im Rahmen des GDM-Monats März 2021 möglich, sich im Online-Format auszutauschen. Dies geschah am 2. März 2021 (16.00 Uhr bis 18.15 Uhr). Zugeschaltet waren 15 Kolleginnen und Kollegen aus Budapest, Bratislava, Salzburg, Wien, Freiburg, Jena, Köln, Mainz und Osnabrück.

1 Bericht zu den Aktivitäten des Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ (Gabriella Ambrus)

Ziele des Arbeitskreises sind (a) die Stärkung der Mathematikdidaktik als eigenständige Wissenschaft in Ungarn durch den inspirativen Austausch über Grenzen hinweg, (b) die Erarbeitung von Konzepten zur Verbesserung des Mathematikunterrichts in Ungarn, (c) die Förderung von nationaler und internationaler Zusammenarbeit in der Mathematikdidaktik, (d) die Unterstützung von Promotionsvorhaben und Forschungskooperationen, (e) die Intensivierung von Publikationen im internationalen Verbund (Ungarn, Deutschland, Österreich, Schweiz, Slowakei, Polen u. a.).

Mathematik hat in Ungarn traditionell eine hohe kulturelle und wissenschaftliche Bedeutung. Der Arbeitskreis liefert mit seinen vielfältigen Aktivitäten wie Studienprojekten, Kooperationen, Tagungen und Publikationen zukunftsweisende Impulse.

Der Arbeitskreis trifft sich zweimal jährlich, im Frühjahr auf der GDM-Jahrestagung und im Herbst zu einer eigenen Arbeitskreis-Tagung in Budapest.

Im Jahr 2020 gab es nur Online-Treffen. Zusätzlich hat der Arbeitskreis „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ sich auf der 7. Herbsttagung (online) des Arbeitskreises „Problemlösen“ am 7. und 8. Oktober 2020 präsentiert, die Einladung zu einer gemeinsamen Herbsttagung in Budapest erneuert und über die internationale Konferenz „Varga 100“ vom November 2019 in Budapest berichtet (Zsuzsanna Jánvári).

Sprecherin des Arbeitskreises ist seit 2015 Gabriella Ambrus, seit 2019 besteht ein Sprecherteam aus Gabriella Ambrus und Johann Sjuts.

2 Bericht zu den Publikationen des Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ (Johann Sjuts)

(A) Über die Aktivitäten des Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ finden sich regelmäßige Berichte in den *GDM-Mitteilungen*.
(B) Von den Herbsttreffen in Budapest liegen mehrere Ausgaben der *Beiträge zur Tagung des GDM-Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“* vor.
(C) Seit 2019 existiert die *Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“* beim Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien (WTM) Münster. Erschienen sind bisher drei Bände: Band 1 *„Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren“* (Hrsg. Éva Vásárhelyi, Johann Sjuts, 2019), Band 2 *„Komplexer Mathematikunterricht. Die Ideen von Tamás Varga in ak-*

tueller Sicht" (Hrsg. Gabriella Ambrus, Johann Sjuts, Ödön Vancsó, Éva Vásárhelyi, 2020) und Band 3 *„Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken"* (Hrsg. Éva Vásárhelyi, Johann Sjuts, 2021).

Als Logo der Buchreihe dient der Gömböc. Mit dem Gömböc fanden die ungarischen Ingenieure, Mathematiker und Informatiker Gábor Domokos und Péter Várkonyi im Jahr 2006 einen konvexen homogenen dreidimensionalen Körper mit der Eigenschaft, bloß zwei Gleichgewichtslagen – eine stabile und eine labile – zu haben. Band 3 enthält ein Gespräch mit den beiden Erfindern. Ebenso wie der Gömböc gilt auch das Szilassi-Polyeder als sichtbares Zeichen herausragender mathematischer Leistungen in Ungarn. Der im Jahr 1977 von Lajos Szilassi gefundene und nach ihm benannte Körper ist ein nicht-konvexes Polyeder mit einem Loch und sieben hexagonalen Seiten, wobei jeweils zwei Seiten eine gemeinsame Kante haben. Das Szilassi-Polyeder hat 21 Kanten und 14 Ecken. Auch Lajos Szilassi kommt in dem Band 3 mit einem eindrucksvollen Bericht über die Entstehungsgeschichte zu Wort.

Der Band 3 widmet sich neuen Ansätzen zur Geometrie in der Schulmathematik. Mehr als 20 theoretische und empirische Analysen gehen der Frage nach, inwieweit diese Ansätze zum geometrischen Denken beitragen.

Für das Jahr 2022 ist der Band 4 *„Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche"* geplant. Am 1. Januar 1894 wurde in Ungarn die Schülerzeitschrift KöMaL (Középiskolai Matematikai Lapok, dt.: Mathematische Blätter für Mittelschulen) ins Leben gerufen. Die Herausgabe einer Schülerzeitschrift in Mathematik in Verbindung mit einem Mathematikwettbewerb kann als Pionierleistung für eine früh beginnende, gezielte und niveauvolle Förderung von Kindern und Jugendlichen in Mathematik gelten. Der Band 4 widmet sich mehreren mathematischen Schülerzeitschriften, verschiedenen nationalen und internationalen Mathematikwettbewerben sowie weiteren Maßnahmen zur Talentförderung.

Beiträge für den Band 4 sollen bis zum 1. Februar 2022 eingereicht werden. Für weitere Informationen stehen Éva Vásárhelyi (E-Mail: vasareva@gmail.com) und Johann Sjuts (E-Mail: sjuts-leer@t-online.de) zur Verfügung.

3 Vortrag „Die Methode ‚Lösungsstufen' bei der Untersuchung von Schülerlösungen" (Gabriella Ambrus)

Im Mittelpunkt des Vortrags stehen Lösungs- bzw. Niveaustufen in der Bearbeitung von offenen und wirklichkeitsnahen Aufgaben. (Genauere Ausführungen enthält der Beitrag Gabriella Ambrus: Untersuchung von Schülerlösungen mit Hilfe von Lösungsniveaus bei Textaufgaben mit realitätsnahem Inhalt. In: Ambrus, Gabriella & Sjuts, Johann & Vancsó, Ödön & Vásárhelyi, Éva (Hrsg.): Komplexer Mathematikunterricht. Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht. Münster 2020, S. 63–78.)

Erläutert werden einige schulische Ergebnisse in Zusammenhang mit der Lösung von solchen Textaufgaben, die auf realitätsnahen Situationen basieren. Sie sind so formuliert wie herkömmliche Textaufgaben, die in der Bearbeitung die Angabe einer konkreten Lösung erwarten. Zugleich ist die Situation offen, die Aufgabe hat von weiteren Bedingungen abhängige Lösungen. Zur Bewertung der Aufgabenbearbeitungen wird eine niveauklassifizierende Methode „Lösungsstufen" verwendet. Diese sieht wie folgt aus:

Stufe 0: Hierzu gehört eine herkömmliche geschlossene Lösung.

Stufe 1: Der Text der Aufgabe wird mit der Wirklichkeit in Zusammenhang gebracht – es wird mindestens eine genannte oder ungenannte Bedingung berücksichtigt und eine passende Lösung eventuell teilweise angegeben.

Stufe 2: Es werden Bedingungen formuliert, aber nur teilweise bearbeitet.

Stufe 3: Es werden mehrere Bedingungen aus der Situation analysiert, dazu Lösungen erarbeitet und diese auch reflektiert (ob sie „real" und nicht nur „mathematisch" möglich sind).

Aus der schulischen Erprobung solcher Textaufgaben entstand im Rahmen des didaktischen Projekts der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (siehe 4.) ein Programm zur Fortbildung von Lehrkräften und zum Einsatz im Unterricht. Das Entwicklungsprojekt führte zu wichtigen Ergebnissen. Es zeigte sich, dass eine Verbesserung hinsichtlich des Wahrnehmens der Offenheit solcher Aufgaben möglich ist und dass mit Hilfe der Niveaustufen eine genauere Einsicht in das Denken von Schülerinnen und Schülern gewonnen werden kann.

4 Vortrag „Was bedeutet der Komplexe Mathematikunterricht heute? Bilanz nach einem vierjährigen Projekt der Ungarischen Akademie der Wissenschaften" (Ödön Vancsó)

Eine umfassende Neugestaltung des ungarischen Mathematikunterrichts geht auf Tamás Varga (1919–1987) zurück. Anlässlich seines 100. Geburtstages fand zur Erinnerung an ihn und seine Konzeption

„Komplexer Mathematikunterricht" eine internationale Tagung (Connecting Tamás Varga's Legacy and Current Research in Mathematics Education) an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften in Budapest statt. (Teilgenommen haben 131 Personen aus 16 europäischen Ländern sowie Australien und den USA. Es gab vier Hauptvorträge, eine Podiumsdiskussion, 60 Einzelvorträge, 7 Workshops und 11 Poster.)

Die Tagung diente vor allem dem Ziel, Vargas Arbeit in einen internationalen Kontext zu stellen und die Relevanz für den heutigen Mathematikunterricht aufzuzeigen. Zugleich bot sie ein Forum für aktuelle internationale Forschung zum Mathematikunterricht in verschiedener Hinsicht und für die Pflege von Kooperationen und Verbindungen zwischen ungarischer Forschung in Mathematikdidaktik und internationaler Forschung auf diesem Gebiet.

Wesentliche Ergebnisse liegen in zwei Publikationen vor (beide im Peer-Review-Verfahren begutachtet), in einer Sonderausgabe der Zeitschrift *Teaching Mathematics and Computer Science* (Debrecen, Ungarn, Hrsg. Eszter Kónya) mit Beiträgen der Konferenz und im Buch *„Komplexer Mathematikunterricht. Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht"* mit Arbeiten, die eng mit Vargas Werk verbunden sind (WTM-Verlag Münster, Deutschland, Hrsg. Gabriella Ambrus, Johann Sjuts, Ödön Vancsó, Éva Vásárhelyi, 2020). Weitere Informationen zur Tagung: https://varga100.sciencesconf.org

Zur Vorbereitung der Tagung *Varga 100* – vor allem aber zur neueren Entwicklung des Mathematikunterrichts in Ungarn im Sinne von Tamás Varga – hat die Ungarische Akademie der Wissenschaften ein vierjähriges Projekt initiiert (und finanziert), das wegen der Pandemie um ein weiteres Jahr verlängert worden ist und dann, so ist zu hoffen, in einem vierjährigen Anschlussprojekt eine Fortsetzung findet. Im Zentrum der Projektarbeit stehen mathematikdidaktische Forschungen, darunter Fragen zur Lehrplangestaltung und zur Qualifizierung von Mathematiklehrkräften. Das Vorhaben soll sowohl zu schulischen Entwicklungen in Mathematik als auch zu wissenschaftlichen Untersuchungen in der Mathematikdidaktik führen.

5 Vortrag „Digitale Bildung in Zeiten der Corona-Virus-Pandemie" (Balázs Koren)

Über die Auswirkungen der Corona-Pandemie auf die Hochschulen und Schulen in Ungarn berichtet Balázs Koren (der in beiden Systemen tätig ist). Im März 2020 erfolgte (gewissermaßen übers Wochenende) die Umstellung auf Distanzlehre bzw. -unterricht. Während die Hochschulen Internet-Plattformen (wie Microsoft Teams, Google Classroom, Zoom) installierten und die Studierenden über passende Endgeräte verfügten, gestalteten sich die Lösungsmöglichkeiten an den Schulen deutlich schwieriger. Dort gelang es erst nach und nach, einen Hybrid-Unterricht mit technischen Mitteln (Boards und Tablets) so zu organisieren, dass der Unterricht gleichzeitig in der Schule und im Online-Format stattfinden konnte. Im Herbst 2020 schlossen die meisten Hochschulen und Schulen (Grundschulen ausgenommen) erneut. Mathematikunterricht erfolgt nun am Bildschirm, wozu auch das Schreiben und Zeichnen auf dem Screen gehört. Insgesamt wird viel mit digitalen Angeboten (wie etwa Microsoft Mathematics) experimentiert. Die Herausforderungen sind beträchtlich.

6 Abelpreis für László Lovász

Der Arbeitskreis „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik hat dem ungarischen Mathematiker László Lovász zur Verleihung des Abelpreises 2021 gratuliert. Die internationale Auszeichnung für außergewöhnliche wissenschaftliche Arbeiten in Mathematik ist eine besondere Würdigung seiner herausragenden Leistungen und Verdienste in Mathematik und eine große Ehre für die Mathematik in Ungarn.

Der Abelpreis 2021 geht gemeinsam an László Lovász (Ungarn) und Avi Wigderson (Israel) für ihre Arbeiten in diskreter Mathematik und theoretischer Informatik.

7 Sonstiges

Die Herbsttagung 2021 des GDM-Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" ist für den 1. und 2. Oktober 2021 im digitalen Format geplant. Im Mittelpunkt steht das Thema „Talentförderung in Mathematik".

Gabriella Ambrus, Eötvös-Loránd-Universität Budapest
E-Mail: ambrus.gabriella@ttk.elte.hu

Johann Sjuts, Universität Osnabrück
E-Mail: sjuts-leer@t-online.de

Arbeitskreis: Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge

Einladung zur Online-Herbsttagung, 21.–25. 9. 2021
Tagungsbände

Guido Pinkernell und Florian Schacht

Aufgrund der ungewissen Situation findet die Arbeitskreistagung im Herbst 2021 rein virtuell in der Zeit vom 24.–25. 9. 2021 statt. Je nach Anzahl der eingereichten Beiträge behält sich die AK-Leitung vor, die Tagung nur am 24. 9. 2021 durchzuführen. Das Tagungsthema ist: *Digitales Lernen in Distanz und Präsenz*. Wir laden ganz herzlich zu thematisch passenden Beiträgen ein. Wie immer ist es auch möglich, Beiträge einzureichen, die weitere Schwerpunkte jenseits des Tagungsthemas im engeren Sinne setzen. Als Beitragsformate können Poster, Vorträge oder auch Workshops eingereicht werden. Ein Tagungsband ist geplant. Im Rahmen der Tagung wird auch die Leitung des Arbeitskreises neu gewählt.

Die Anmeldefrist für Beiträge endet am 15. 8. 2021, eine Anmeldung ohne aktiven Beitrag kann bis zum 10. 9. 2021 vorgenommen werden. Informationen und Anmeldung zur Tagung finden Sie hier: www.uni-due.de/didmath/veranstaltungen/tagungen/akmdw/akmdw.php

Die Tagungsbände des AK MdW sind seit 2017 als Publikationen mit Peer-Review erschienen und sind online unter der Adresse wordpress.pinkernell.online/?page_id=581 frei verfügbar.

Guido Pinkernell, PH Heidelberg
E-Mail: pinkernell@ph-heidelberg.de

Florian Schacht, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: florian.schacht@uni-due.de

Arbeitsgruppe: PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Online-Sommertagung, 11.–12. 6. 2021

Roland Rink und Daniel Walter

Die vierte Sommertagung der AG ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe' fand am Freitag, 11. 6. 2021 und Samstag, 12. 6. 2021, im Onlineformat statt. 44 Teilnehmer*innen aus Praxis und Forschung tauschten sich im Rahmen von 18 Vorträgen über innovative Unterrichtsideen sowie aktuelle Forschungsprojekte zum Einsatz digitaler Medien in den Klassenstufen 1 bis 6 aus:

- Alexandra Pilgrim (Universität Hamburg): *Digitalunterstützten Mathematikunterricht der Grundschule gelingen lassen – Ergebnisse einer qualitativen Studie zum Einsatz von Tablets in einer substantiellen Lernumgebung zum Thema Würfelkonfigurationen*. Im Beitrag wurden Erkenntnisse eines Entwicklungsforschungsprojekt dargestellt. Zu den Themenschwerpunkten ‚Baudiktate' sowie ‚Dreitafelprojektion' fanden unterrichtliche Erprobungen sowie begleitende Interviews mit Lehrkräften zu Gelingensbedingungen des Einsatzes digitaler Medien statt.
- Jessica Kunsteller (TU Dortmund): *Kinder erstellen Erklärvideos für andere Kinder – Potenziale beim Entdecken operativer Beziehungen*. Die Nutzung von Erklärvideos hat (nicht erst seit der Covid-19-Pandemie) stärkere Beachtung gefunden. Die Autorin untersucht in ihrem qualitativ ausgerichteten Forschungsprojekt, welche fachdidaktischen Potenziale dabei bestehen können, wenn Dritt- und Viertklässler*innen Erklärvideos für andere Schüler*innen entwickeln.
- Frederik Dilling & Amelie Vogler (Universität Siegen): *Ein mathematisches Zeichengerät (nach)entwickeln – Eine Fallstudie zum Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Die 3D-Druck-Technologie ist in den letzten Jahren von zunehmendem Interesse im Mathematikunterricht und der mathematikdidaktischen Forschung. Im Beitrag wurden

Erkenntnisse einer Feldstudie zu den Nutzungsweisen von Lernenden vorgestellt.

- Kira Karras, Daniel Walter & Karina Höveler (WWU Münster): *Beweisen arithmetischer Zusammenhänge unterstützen – Einblicke in das Projekt DigiMal.nrw – Teilprojekt Arithmetik.* Ein mathematischer Inhalt, welcher vielen Studierenden Schwierigkeiten bereitet, ist das Beweisen arithmetischer Zusammenhänge. Im Rahmen eines Teilprojekts von DigiMal.nrw werden an der WWU Münster entsprechende Lehr-Lern-Angebote in Form von digitalen Kompetenzlisten und Selbstchecks entwickelt sowie evaluiert. Im Vortrag wurden erste Prototypen vorgestellt und diskutiert.
- Ulrich Schwätzer (Universität Duisburg-Essen): *ProMaPrim – Programmieren im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Das Projekt ProMaPrim werden mathematische Themen mit algorithmischen Strukturen aus den Klassen 3 und 4 sowohl analog als auch digital (mit Scratch) programmiert. Im Vortrag wurden Grundpositionen und Materialien des Projekts, sowie erste Ergebnisse aus der Erprobung zur Diskussion gestellt.
- Laura Abt (PH Schwäbisch Gmünd): *Wie wirkt sich die inhaltliche Konzeption einer Blended-Learning Fortbildung zur Sprache im Mathematikunterricht auf die Zufriedenheit der Teilnehmenden aus?* Die Professionalisierung von Lehrkräften ist ein zentraler Aufgabenbereich der Mathematikdidaktik. Die Autorin stellte die Konzeption einer Blended-Learning Fortbildung sowie erste Befunde der Wirkungsweisen vor.
- Marina Lentin (PH Schwäbisch Gmünd): *Grundvorstellungen zur Multiplikation anbahnen: Potenziale der App TouchTimes*. Die App TouchTimes bietet vielfältige Potenziale zur Erarbeitung der Multiplikation. Im Vortrag wurden Einblicke in ein Forschungsprojekt zur unterrichtlichen Einbettung der Software gegeben.
- Timo Münzing (PH Schwäbisch Gmünd): *Forschungsdesign einer Studie, die die Förderung von Problemlösekompetenzen durch Programmiertätigkeiten in der Primarstufe untersucht*. Im Fokus des Projekts steht die Frage, inwiefern Problemlösekompetenzen durch Programmiertätigkeiten an Robotern mit visuellen Programmiersprachen im Mathematikunterricht entwickelt werden können. Der Autor stellte das Design seiner Studie mit Schwerpunkt auf dem Instrument zur Messung von Problemlösekompetenz vor.
- Ulrike Dreher & Stephanie Schuler (Universität Koblenz-Landau): *Potentiale einer Lernumgebung mit BlueBots zur Förderung des Computational Thinkings und des räumlichen Vorstellungsvermögens*. Die Käferroboter ‚BlueBots' können zur Förderung des Computational Thinkings eingesetzt werden. Die Autorinnen stellten eine entsprechende Lernumgebung, die von Kindertandems bearbeitet wurden, sowie erste empirische Befunde einer qualitativen Begleitstudie vor.
- Sina Römer (TU Dortmund): *Entdeckerfilme im Mathematikunterricht der Grundschule – Entwicklung und Erforschung von videobasierten Lernumgebungen*. Entdeckerfilme stellen einen Gegenpol zu den weit verbreiteten Erklärvideos dar, zumal sie zur aktiven (und nicht vornehmlich rezeptiven) Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten anregen können. Die Autorin stellte ein Entwicklungsforschungsprojekt vor, in dem Entdeckerfilme in eine mathematische Lernumgebung eingebettet wurde.
- Andreas Leinigen (Justus-Liebig-Universität Gießen): *Das Veranschaulichen im Lehrfilm*. Mathematische Inhalte können durch Lehrfilme veranschaulicht und dadurch zugänglich gemacht werden. Am Beispiel der schriftlichen Subtraktion geht der Autor in seinem Projekt der Frage nach, wie Grundschulkinder einen mathematischen Inhalt für andere Kinder aufbereiten. Dabei steht der Prozess der Produktion des Films im Fokus der Studie.
- Jacqueline Bonow (Justus-Liebig-Universität Gießen): *Rechendreiecke physisch und virtuell: Nutzungsweisen und Potenziale in inklusiven Settings.* Inwiefern digitale Medien in inklusiven Settings genutzt werden können, ist bisweilen kaum erforscht. Die Autorin untersucht, wie die App ‚Rechendreieck' sowie das physische Pendant von Kindern in inklusiven Settings genutzt wird.
- Sebastian Schorcht (JLU Gießen) & Susanne Schnell (Universität Frankfurt): *Mathe-KLIPS: Videos zu mathematischen Kompetenzen für das Lehramt in der Primarstufe*. Erklärvideos können nicht nur für den Mathematikunterricht, sondern auch in der universitären Lehrerbildung Anwendung finden. Das Autorentandem stellte die Konzeption entsprechender Mathe-KLIPS vor, die in besonderer Weise typische Denk-, Arbeits- und Handlungsweisen von Mathematik anregen können.
- Sophie Tittel & Karina Höveler (WWU Münster): *Kombinatorische Aufgabenstellungen digital differenzieren mit der Tablet-App „Kombi"*. Software zur Bearbeitung kombinatorischer Aufgabenstellungen ist bisweilen rar. Die Autorinnen stellen die App „Kombi" vor, die einen Beitrag zur Schließung dieser Lücke leistet. Im Vortrag wurden Potentiale der App sowie der aktuelle Entwicklungsstand dargestellt.
- Julia Stark & Daniela Götze (Universität Siegen): *Die Anteilvorstellung von Brüchen fördern – darstellungsvernetzt, sprachsensibel und digital*. Ein

grundlegendes Verständnis zu Bruchzahlen und der damit verbundene Umbruch von den natürlichen zu den positiv rationalen Zahlen stellt viele Schüler*innen vor große Herausforderungen. Die Autorinnen gaben Einblicke in die Konzeption der Software ‚Partibo', die dabei unterstützen kann, Bruchzahlen zu verstehen, und rundeten den Vortrag mit der Darstellung ausgewählter Nutzungsweisen von Lernenden ab.

- Anne Rahn und Daniela Götze (Universität Siegen): *Konzept von „unitizing" digital fördern*. Viele Kinder zeigen große Schwierigkeiten, multiplikatives Denken zu entwickeln. Im Vortrag wurden eine App sowie das zugehörige Material vorgestellt, die bei der Erarbeitung eines grundlegenden Multiplikationsverständnisses unterstützen können. Überdies wurden Einblicke in erste Erprobungen mit Kindern gegeben.
- Chantal Müller (PH Weingarten): *Zum mathematikdidaktischen Potential „Synchronität und Vernetzung von Darstellungsebenen" für den Darstellungstransfer*. Darstellungen zu synchronisieren und zu vernetzen gilt gemeinhin als ein zentrales Potential digitaler Medien. Wie dieses von Kindern genutzt wird, ist jedoch wenig untersucht. Die Autorin stellte ein Projekt vor, das Darstellungstransfers mit digitalen Medien in einer qualitativen Studie bei Grundschulkindern beforscht.
- Joscha Müller-Späth & Ben Weiß (TU Dortmund): *Musterfolgen aus Formen programmieren*. Der Forderung, informatische Bildung bereits als Inhalt des Grundschulunterrichts einzuführen, kommt zunehmend mehr Bedeutung zu, wenngleich es bislang wenig Software gibt, die sowohl Inhalte des Mathematikunterrichts als auch informatischer Bildung gleichermaßen adressiert. Die Autoren haben die Software ‚Muster' entwickelt und im Vortrag mit ihren Funktionen vorgestellt.

Arbeitsgruppentreffen während der Herbsttagung des AK Grundschule

Am 5. und 6. 11. 2021 findet die Herbsttagung des AK Grundschule im Onlineformat statt, bei der die AG PriMaMedien mit einer Arbeitsgruppensitzung vertreten sein wird. Franziska Peters (Justus-Liebig-Universität Gießen) wird Einblicke in ihr Dissertationsprojekt geben, das sich mit der Nutzung auditiver Medien im Mathematikunterricht befasst.

Einladung zur Mitarbeit

Informationen zur Arbeitsgruppe PriMaMedien sind im Internet unter www.pri-ma-medien.de zu finden. Interessierte sind herzlich eingeladen, sich aktiv in der Arbeitsgruppe zu engagieren, indem sie an den regelmäßigen Arbeitsgruppentreffen während der GDM-Jahrestagungen sowie der jährlich stattfindenden Herbsttagung des AK Grundschule in Bad Salzdetfurth teilzunehmen. Sofern Sie regelmäßig Informationen zu Aktivitäten der Arbeitsgruppe per Mail erhalten möchten, können Sie in den AG-Newsletter aufgenommen werden. Gerne können Sie sich hierzu bei Roland Rink (rrink@leuphana.de) oder Daniel Walter (daniel.walter@uni-muenster.de) melden.

Roland Rink, Universität Lüneburg
E-Mail: rrink@leuphana.de

Daniel Walter, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: daniel.walter@uni-muenster.de

Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Einladung zur Online-Herbsttagung, 8.–9. 10. 2021

Daniel Sommerhoff und Anke Lindmeier

Die Herbsttagung des Arbeitskreis Psychologie und Mathematikdidaktik wird am 8. und 9. Oktober 2021 digital stattfinden. Informationen zum Arbeitskreis, aktuelle Hinweise zur Tagung sowie die Möglichkeit zur Anmeldung sind auf der Homepage des Arbeitskreises zu finden: https://akpsy.didaktik-der-mathematik.de

Daniel Sommerhoff, IPN Kiel
E-Mail: sommerhoff@leibniz-ipn.de

Anke Lindmeier, Friedrich-Schiller-Universität Jena
E-Mail: anke.lindmeier@uni-jena.de

Arbeitskreis: Stochastik

Einladung zur Online-Herbsttagung, 29.–30. 9. 2021

Karin Binder und Susanne Schnell

Liebe Kolleginnen und Kollegen,
hiermit möchten wir Sie ganz herzlich zur diesjährigen Herbsttagung des Arbeitskreises Stochastik einladen, die am 29. und 30. September 2021 (Mittwoch und Donnerstag) jeweils von 14–18 Uhr in diesem Jahr virtuell stattfinden wird. Wir hätten uns zwar sehr gefreut, Sie alle persönlich begrüßen zu dürfen, allerdings sehen wir uns durch die aktuelle und bis dahin schwer einschätzbare Corona-Lage gezwungen, die Tagung lieber digital stattfinden zu lassen. Geplant sind Online-Vorträge und anschließende Diskussionen.

Schwerpunktmäßig wird es in diesem Jahr um den Stochastikunterricht vor dem Hintergrund neuer Herausforderungen gehen. Dabei können unter anderem folgende Fragen diskutiert werden: Die Pandemie führt zu einer stärkeren Digitalisierung des Lernens und Lehrens – was bedeutet das für den Stochastikunterricht an Schule und Hochschule? Welche Aufgaben, Tools, Webseiten usw., aber auch welche Lehr- und Lernformate eignen sich? Welche neuen interessanten Kontexte und Anwendungsbeispiele für die Stochastik ergeben sich aus dieser Situation? Und wie kann die stochastikdidaktische Lehre und Forschung der zunehmenden Bedeutung von Big Data (nicht nur aber auch in Bezug auf Corona) begegnen?

Für den Austausch über diese und andere Fragen sind Beiträge zu empirischen Studien, Best Practice Beispielen sowie Vorschläge und Ideen für Inhalte und deren Umsetzung herzlich eingeladen. Darüber hinaus wird es Slots für freie Beiträge zu stochastikdidaktischen Themen und einen eingeladenen Vortrag von Katharina Schüller geben:

> *Datenkompetenz für alle:*
> *Die App Stadt | Land | Datenfluss*
> Datenkompetenz für alle schaffen, für die Themen des Datenumgangs sensibilisieren und einen souveränen Umgang mit neuen technologischen Entwicklungen wie KI, IoT oder Big Data und den eigenen Daten etablieren – das sind einige der Ziele, die der Deutsche Volkshochschul-Verband mit der App „Stadt | Land | DatenFluss“ verfolgt. Die App steht unter der Schirmherrschaft der Bundeskanzlerin. Auf spielerische Weise werden in einer virtuellen Stadt die Themenbereiche Arbeit/Wirtschaft, Smart City/Mobilität und Gesundheit behandelt.
> Der Beitrag gibt einen kurzen Überblick über die App und diskutiert insbesondere, wie man aus einem wissenschaftliches Kompetenz-Framework ein Curriculum und ein mediendidaktisches Konzept für eine Lern-App zum Thema KI und Daten entwickeln kann.

Für die Anmeldung von Vorträgen wenden Sie sich bitte bis zum 1. August 2021 an karin.binder@ur.de.

Da die Tagung in diesem Herbst lediglich virtuell stattfinden wird, erheben wir keine Tagungsgebühren. Die Teilnahme ist kostenfrei. Die Anmeldung erfolgt per E-Mail an karin.binder@ur.de.

Bitte melden Sie sich bis zum 24. September 2021 an. Der konkrete Programmablauf sowie alle weiteren Informationen werden wie üblich auf der Webseite des Arbeitskreises veröffentlicht und per Rundmail bekannt gegeben.

Wir möchten Sie außerdem darauf hinweisen, dass die Webseite des Arbeitskreises Stochastik umzogen ist. Sie finden unseren Arbeitskreis nun auf dieser Seite: didaktik-der-mathematik.de/ak/stochastik/

Für die Aufnahme in den Mail-Verteiler des Arbeitskreises schicken Sie bitte einen entsprechenden Hinweis an die oben genannte E-Mail-Adresse.

Wir freuen uns auf eine anregende virtuelle Herbsttagung.

Die Sprecherinnen des
Arbeitskreises Stochastik

Susanne Schnell, Goethe-Universität Frankfurt
schnell@math.uni-frankfurt.de

Karin Binder, Universität Regensburg
karin.binder@ur.de

ISTRON-Gruppe

Herbsttagung, 5./6. 11. 2021

Gilbert Greefrath und Hans-Stefan Siller

Die diesjährige ISTRON-Tagung mit einem Fortbildungstag für Lehrkräfte findet am 5. und 6. 11. 2021 an der Hochschule Darmstadt statt. Alle weiteren Informationen zur Anmeldung etc. finden Sie auf der Homepage der ISTRON-Gruppe: www.istron-gruppe.de

Gilbert Greefrath, WWU Münster
E-Mail: greefrath@uni-muenster.de

Hans-Stefan Siller, Universität Würzburg
E-Mail: hans-stefan.siller@mathematik.uni-wuerzburg.de

Erstes Netzwerktreffen der mitteldeutschen Mathematikdidaktiken zum Thema Seiteneinstieg ins Lehramt Mathematik

Andrea Hoffkamp, Kerstin Koch, Hannah Rose, Silvia Schöneburg-Lehnert, Sebastian Geisler und Stefanie Rach

Das Netzwerk der mitteldeutschen Mathematikdidaktiken (mdMD, www.mi-didaktik.uni-jena.de/netzwerk+mdmd) besteht als Austauschforum über mathematikdidaktische Themen seit 2020 und wurde auf Initiative der Jenaer Mathematikdidaktik gegründet. Beim ersten Netzwerktreffen wurden die Qualifizierungsprogramme für Seiteneinsteigende der drei Universitäten in Dresden, Leipzig und Magdeburg vorgestellt, um danach in virtuellen Kleingruppen Herausforderungen und Gelingensbedingungen dieser Programme zu identifizieren.

1 Seiteneinstieg im Fach Mathematik

In vielen Bundesländern herrscht ein eklatanter Mangel an Lehrkräften, insbesondere im Fach Mathematik. Deswegen wurden bundesweit Sondermaßnahmen gestartet, um Quer- oder Seiteneinsteigerinnen bzw. -einsteiger, also Personen ohne grundständiges Lehramtsstudium, zu Lehrkräften weiterzubilden (KMK, 2013). Dabei erwerben Quereinsteigende ihre Qualifikation vor dem Berufseinstieg, während Seiteneinsteigende direkt in den Schuldienst eingestellt werden und die lehramtsbezogenen Qualifikationen ausschließlich berufsbegleitend erhalten (Gehrmann, 2019).

Schon 2018 verweist die GFD (2018) darauf, dass derartige Sondermaßnahmen zur Lehrkräftegewinnung forschungsbasiert entwickelt werden sollten. Dennoch ist dieses Thema unserer Auffassung nach innerhalb der betreffenden Fachgesellschaften noch nicht ausreichend in der Diskussion.

2 Seiteneinstieg in Sachsen

Der Grundsatz zur Ausbildung von Lehrkräften im Seiteneinstieg in Sachsen beruht auf dem Anspruch, ein dem grundständigen Studium vergleichbares Angebot zu schaffen. In der Lehrer-Qualifizierungsverordnung (www.revosax.sachsen.de/vorschrift/18648-Lehrer-Qualifizierungsverordnung) ist diese berufsbegleitende Qualifizierung verbindlich geregelt. Die schulpraktische Ausbildung liegt in der Verantwortung der Schulaufsichtsbehörde. Die sächsischen Universitäten Chemnitz, Dresden und Leipzig sind mit der wissenschaftlichen Ausbildung im Fach und in der Fachdidaktik beauftragt. Grundlage hierfür ist die Lehramtsprüfungsordnung (LAPO I) Sachsen, in der die schulformspezifischen Inhalte für alle Module der jeweiligen Fächer eines grundständigen Studiums verpflichtend festgelegt sind. Je nach Vorqualifikation dauert die Qualifizierung drei bis fünf Jahre. Nach Absolvierung aller notwendigen Qualifikationsbausteine für den Erwerb der Lehrbefähigung für zwei Fächer erfolgt die Gleichstellung mit den grundständig ausgebildeten Lehrerinnen und Lehrer.

2.1 *Universität Leipzig*

Am Zentrum für Lehrerbildung und Schulforschung (ZLS) der Universität Leipzig wird seit September 2017 die wissenschaftliche Ausbildung von Lehrkräften (wAL) in verschiedenen Fächern angeboten, die außerhalb der Schulferien an zwei Tagen pro Woche stattfindet.

Seit dem Wintersemester 2019 ist auch die Mathematik Teil des Programms. Aktuell studieren donnerstags und freitags 45 Seiteneinsteigende im 2. und 4. Semester Mathematik für Berufsschulen, Gymnasien, Oberschulen, Förderschulen und Grundschulen. Dabei ist eine Regelstudienzeit von vier Semestern bzw. für das Lehramt an Grundschulen von drei Semestern vorgesehen. Im September 2020 konnten erstmalig 16 wAL-Studierende im Fach Mathematik mit erfolgreichem Abschluss exmatrikuliert werden.

Während das ZLS die organisatorische Leitung und allgemeine Projektkoordination übernimmt, ist die Fakultät für Mathematik, insbesondere die Abteilung Didaktik der Mathematik, für die inhaltliche Ausgestaltung des Studiengangs verantwortlich. Die enge Kooperation zwischen der Didaktik der Mathematik und der Studiengangkoordination sorgt dabei für eine positive Betonung der didaktischen Ausbildung auch in den Seminaren und Tutorien zu den fachmathematischen Veranstaltungen, die von Dozierenden durchgeführt werden, die vielfältige Erfahrungen aus der grundständigen Lehre mitbringen.

Weitere Informationen zum Programm sind unter www.zls.uni-leipzig.de/studium-beratung/wissenschaftliche-ausbildung-von-lehrkraeften/mathematik/ zu finden.

2.2 *TU Dresden*

Seit 2017 wird an der TU Dresden die Berufsbegleitende Qualifizierung von Lehrkräften (BQL) in verschiedenen Fächern für Grund- und weiterführende Schulen angeboten (vgl. Hoffkamp & Koch, 2020).

Die wissenschaftliche Ausbildung im Fach Mathematik findet je nach Lehramt über einen Zeitraum von drei, vier oder fünf Semestern an jeweils zwei Wochentagen statt. Seit 2017 haben in Dresden 103 Teilnehmende die wissenschaftliche Ausbildung begonnen, 39 haben diese bisher erfolgreich abgeschlossen.

Die Lehrveranstaltungen gestalten fast ausschließlich Dozierende, die auch Erfahrungen in der grundständigen Lehramtsausbildung haben. Der zeitliche Ablauf orientiert sich am Studienjahresablauf der TU Dresden und nimmt kaum Rücksicht auf Schulferien.

Die fachliche Verantwortung trägt die Professur für Didaktik der Mathematik. Administrativ und organisatorisch ist das Projekt BQL am ZLSB (Zentrum für Lehrerbildung, Schul- und Berufsbildungsforschung) verankert. Für jedes Fach sind dort Fachkoordinatorinnen und -koordinatoren angestellt. Diese begleiten die Teilnehmenden über den gesamten Ausbildungszeitraum. Sie sind erste Ansprechperson für alle Angelegenheiten, die mit der universitären Ausbildung zusammenhängen und sie lehren gleichzeitig in der Fachdidaktik. Zusätzlich bietet das Team BQL-digital besondere Unterstützung für spezifische Belange der digitalen Lehre aller Fächer sowie zusätzliche Angebote für fächerübergreifende Inhalte (z. B. Bildungswissenschaften, Psychologie, Inklusion).

3 Seiteneinstieg in Sachsen-Anhalt an der OvGU Magdeburg

Im September 2020 sind die ersten Programme an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg für die Fächer Deutsch und Englisch und an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg (OvGU Magdeburg) für das Fach Mathematik, jeweils für weiterführende Schulen, gestartet. Das Programm an der OvGU Magdeburg wird in Kooperation zwischen der Fakultät für Mathematik (FMA, Dr. Friedrich von Haeseler, Prof. Dr. Stefanie Rach) und dem Zentrum für wissenschaftliche Weiterbildung (ZWW, Frau Yvonne Paarmann, Herr David Bremer) konzipiert und durchgeführt. Während das ZWW für die organisatorischen und technischen Aspekte des Programms zuständig ist, ist die FMA für die Durchführung der fachlichen und fachdidaktischen Lehrveranstaltungen verantwortlich. Bildungswissenschaftliche Angebote sind zum Teil auch in diesem Programm integriert.

Interessierte Seiteneinsteigerinnen und -einsteiger aus weiterführenden Schultypen bewerben sich beim Landesschulamt und werden von dieser Behörde ggf. zugelassen, wenn sie bestimmte Voraussetzungen, z. B. einen unbefristeten Arbeitsvertrag an einer Schule in Sachsen-Anhalt und mindestens ein Jahr selbstständiges Unterrichten, vorweisen können. Während des Programms erhalten die Lehrkräfte eine Abmilderung von fünf Unterrichtsstunden und werden einen Tag freigestellt, an dem dann die Lehrveranstaltungen an der OvGU Magdeburg liegen. Die Lehrveranstaltungen sind an die Schulhalbjahre angepasst und finden jede Woche außerhalb der Schulferien statt. Mit dem erfolgreichen Abschluss dieses Programms nach vier (für Sekundarschule, 60 CP) bzw. nach fünf Schulhalbjahren (für Gymnasien, 70CP) erwerben die Lehrkräfte die Möglichkeit, in ihrem schon anerkannten Fach und im Fach Mathematik ein berufsbegleitendes Referendariat zu belegen und dann den grundständig ausgebildeten Lehrkräften gleichgestellt zu werden. Auch aus diesem Grund sind die Inhalte der Lehrveranstaltungen an die KMK-Richtlinien für Lehramtsstudiengänge (KMK, 2008/2019) angepasst.

Dieses Programm für das Fach Mathematik an der OvGU Magdeburg ist im ersten Jahr mit 30 Teilnehmenden erfolgreich angelaufen: Weitere Informationen zum Programm sind hier (https://www.ovgu.de/Weiterbildung/Zertifikatskurs+f%C3%BCr+seiteneinsteigende+Lehrkr%C3%A4fte+im+Fach+Mathematik+an+Sekundarschulen+und+Gymnasien.html) zu finden.

4 Herausforderungen und Gelingensbedingungen

Eine der größten Herausforderungen im Rahmen der Programme stellt die ausgeprägte Heterogenität der Teilnehmerinnen und Teilnehmer dar. Neben den unterschiedlichen Altersgruppen und der unterschiedlich langen Schulpraxiserfahrung spielen dabei vor allem die verschiedenen angestrebten Abschlüsse innerhalb einer Kohorte und die Vorerfahrungen (MINT-affin vs. MINT-nicht affin) der Teilnehmenden eine Rolle. Aber auch die Mehrfachbelastung der Teilnehmenden durch Studium, Familie und Schule und die damit einhergehenden zeitlichen und inhaltlichen Überforderungen sind in diesem Kontext nicht zu unterschätzen. Und nicht zuletzt müssen auch die unterschiedlichen Zielvorstellungen der einzelnen Akteurinnen und Akteure – Stichwort doppelte Diskontinuität – unter einen Hut gebracht werden.

Den hier geschilderten Problemen und Herausforderungen kann auf ganz unterschiedliche Art begegnet werden. Sei es bereits vor Studienbeginn durch transparente Informationen zu den Anforderungen der einzelnen Seiteneinsteigerprogramme durch intensive oder individuelle Betreuungs- und Beratungsangebote während des Studiums. Zusätzliche Unterstützungsangebote, wie z. B. Tutorien, in denen u. a. fachwissenschaftliche, fachdidaktische und schulische Inhalte miteinander verknüpft werden, und „offene Matheräume", in denen die Teilnehmenden individuelle Hilfe bei der fachlichen Durchdringung der Inhalte suchen können, haben sich als ein wesentliches Element erwiesen. Der großen Heterogenität kann und muss schließlich mit einer starken Differenzierung, z. B. Übungsaufgaben auf unterschiedlichen Niveaustufen, etc. begegnet werden, um eine für alle Akteurinnen und Akteure erfolgreiche Qualifizierung der Seiteneinsteigenden voranzutreiben.

Der bisherige Austausch kann hier nur der Anfang sein, eine breitere Diskussion dieses Themenkreises innerhalb der GDM ist geboten und gewünscht.

5 Literatur

Gehrmann, A. (2019). Seiteneinstieg in den Lehrerberuf – Alternativer Weg oder Sackgasse? *Bildung und Erziehung*, 72, 2, 215–229.

GFD (2018). *Ergänzende Wege der Professionalisierung von Lehrkräften. Positionspapier der GFD zur Problematik des Quer- und Seiteneinstiegs*. Heruntergeladen von https://www.fachdidaktik.org/wordpress/wp-content/uploads/2015/09/PP-20-Positionspapier-der-GFD-2018-Erg%C3%A4nzende-Wege-der-Professionalisierung-von-Lehrkr%C3%A4ften.pdf am 27. 5. 2021.

Hoffkamp, A. & Koch, K. (2020). Seiteneinstieg als alternativer Weg zum grundständigen Lehramtsstudium an der TU Dresden. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 437–440). Münster: WTM-Verlag.

KMK (2008/2019). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung*. Heruntergeladen von https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16-Fachprofile-Lehrerbildung.pdf am 27. 5. 2021.

KMK (2013). *Gestaltung von Sondermaßnahmen zur Gewinnung von Lehrkräften zur Unterrichtsversorgung*. Heruntergeladen von https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2013/2013_12_05-Gestaltung-von-Sondermassnahmen-Lehrkraefte.pdf am 27. 5. 2021.

Andrea Hoffkamp, TU Dresden
E-Mail: andrea.hoffkamp@tu-dresden.de

Kerstin Koch, TU Dresden
E-Mail: kerstin.koch@tu-dresden.de

Hannah Rose, Universität Leipzig
E-Mail: Hannah.Rose@math.uni-leipzig.de

Silvia Schöneburg-Lehnert, Universität Leipzig
E-Mail: Silvia.Schoeneburg@math.uni-leipzig.de

Sebastian Geisler, OvGU Magdeburg
E-Mail: sebastian.geisler@ovgu.de

Stefanie Rach, OvGU Magdeburg
E-Mail: stefanie.rach@ovgu.de

Nachruf auf Hans Schupp – *Erinnerungen für die Zukunft*

Anselm Lambert und Marie-Christine von der Bank

Prolog

„Sie müssen die Kinder lieben" sagte er in dieser ihm eigenen Mischung aus distinguiertem Auftreten, konzentrierter Ernsthaftigkeit und zugleich empathischer Wärme, durch die man sich sofort angenommen fühlte und die einen bewegte, noch mehr erfahren zu wollen. Und man spürte, dass dies ein besonderer Moment war in dieser Vorlesung, im Rückblick dann sogar im ganzen Studium …

Hans Schupp hat uns mit diesem einen schlichten Satz eine ganz wesentliche Erkenntnis kurz und klar und einprägsam mit auf den Weg gegeben: Wir sind Lehrpersonen *für die Kinder im Mathematikunterricht*, die uns (vom Staat und vielmehr noch von ihren Eltern) anvertraut werden, um ihnen echte Bildungschancen, Chancen zu einer allgemeinen Bildung zu ermöglichen – das ist unsere selbstgewählte Verpflichtung. Und wir können unseren Teil dazu leisten, durch Mathematik qua deren implizit anerkannter Bedeutung für unsere Kultur und die in ihr lebenden Menschen sowie mit unserer gemeinsam geteilten Freude an jener.

Biografisches

Hans Schupp wurde am 10. 6. 1935 in Idar-Oberstein geboren und starb am 18. 5. 2021 in Saarbrücken. Ab 1955 studierte er in Heidelberg und Mainz Mathematik sowie Geographie und Geologie für das Lehramt an höheren Schulen – damals siezten sich sogar die Studierenden dort noch höflich und achtend gegenseitig. 1961 wurde er in Mainz zum Dr. rer. nat. promoviert mit einer seine beiden Fächer integrierenden Dissertation. Danach legte er das erste und das zweite Staatsexamen ab und wirkte ab 1964 in Darmstadt im Schuldienst, sehr bald schon als Fachleiter. Seit 1970 lehrte und forschte er in Saarbrücken, zunächst an der Pädagogischen Hochschule, dann an der Universität des Saarlandes als Professor für Mathematik und ihre Didaktik – immer wieder hat er betont, dass eine solche Denomination besser „Mathematik und Didaktik des Mathematikunterrichts" lauten sollte.

1975 organisierte er die *Gründung der GDM* in Saarbrücken im Rahmen der 9. Jahrestagung für Mathematikdidaktik. Von 1979 bis 1983 war er dann Vorsitzender der GDM und gründete 1980 das Journal für Mathematik-Didaktik mit. 2016 wurde ihm die wohlverdiente Ehrenmitgliedschaft in der GDM verliehen. Hans Schupp hat (mindestens) 161 Publikationen veröffentlicht, darunter ein Unterrichtswerk für die Sekundarstufe I [21, 22], das seiner Zeit voraus kommerziell wenig erfolgreich war – ein leider weiter aktuelles Phänomen. Zeitlos unter seinen Monographien ist unbestritten „Thema mit Variationen" [118] – ein wesentlicher Impuls zur erfolgreich forcierten Weiterentwicklung von Mathematikunterricht hin zur Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler Mathematik als Prozess statt Produkt (mit- und dann selbst-)erleben zu lassen.

Weitere biografische Details finden Sie in der Laudatio zur Ehrenmitgliedschaft in den Mitteilungen der GDM Nr. 102 sowie in der Laudatio zu seinem 70. Geburtstag in „Mathematikdidaktik für den Unterricht", dem ihm gewidmeten ersten Themenheft von mathematica didactica.

Sein Werk

Hans Schupp mochte es nie sehr, wenn man viel über ihn als Person sprach. Ihm ging es immer primär um die Sache: *Mathematikdidaktik für den Unterricht*, die er immer offen diskutierte; und um das Ziel: *Bildung* auch in und durch Mathematik *für alle, in allen Schulformen*.

Mathematikdidaktik für den Unterricht … gestalten
Hans Schupp hat dazu zahlreiche konkrete konstruktive Vorschläge vorgelegt und verteidigt, im Großen und im Kleinen, oft als Pionier. Einige von diesen sind heute selbstverständlich:

- Stochastik als Thema in der Sekundarstufe I [u. a. 24, 29, 30, 31, 39, 42, 46, 122],
- reflektierende Modellbildung im Zusammenspiel von Welt und Mathematik [insb. 39, 46, 55],
- anschauungs- und verständnisfördernder Computereinsatz [u. a. 53, 63, 65, 67, 74, 78, 80, 83, 85, 96],

- Mathematik (subjektiv) erschaffende Aufgabenvariation durch Lernende selbst [insb. 118].

Zwar hat er das Wort *Stoffdidaktik* zu einer Fehlschöpfung erklärt [158, 161], da eine Mathematikdidaktik ohne Stoff gar keine Mathematikdidaktik sein kann, und seinem Verständnis nach in pädagogischer Absicht stets auch „auf anthropogene und sozialkulturelle Voraussetzungen, [...], Methodik und Medienwahl" [158, S. 38] zu achten sei. Doch kann man sagen, dass Hans Schupp ein äußerst verdienter Stoffdidaktiker ist, in eben diesem von ihm konstruktiv abgesteckten Sinn – herausragend in Stochastik und Geometrie, letztere über höhere Kurven auch verflochten mit der Analysis, diese aber in der Optimierung nicht darauf reduzierend. Einige seiner Arbeiten sind dann auch von tieferen bildungstheoretischen Erörterungen durchzogen [insb. 122].

Stochastisches Denken – Mensch, Welt und Mathematik
Hans Schupp ist ein Pionier der reflektierenden Modellbildung – PISA 2000 Deutschland würdigt das mit der Referenz auf seinen Modellbildungskreislauf ... Wenn man „Modellieren" wie die KMK in ihren sog. Bildungsstandards für den MBA unter diesem Schlagwort

> [...] zusammenfasst, dann darf man sagen, daß der Stochastikunterricht hiervor nicht nur bestehen kann, sondern daß er traditionelle Kapitel der Schulmathematik hierin deutlich übertrifft, von allem Anfang bis heute. Viele Kolleginnen und Kollegen, darunter der Autor, haben die Struktur und Relevanz von Modellierungsprozessen zunächst in der Stochastik kennengelernt und erstmals dort an ihre Schüler, Referendare und Studenten weitergegeben. [122, S. 5]

Hans Schupps besonderes Anliegen gilt einem Stochastikunterricht, der *auch* anwendungsbezogen und *hinreichend* lernendennah ist. In zahlreichen Publikationen liefert er theoretische Begründungen für Stochastikunterricht in allen Jahrgangsstufen [29, 31, 33, 37, 42, 80, 122], didaktische und methodische Anregungen für einen lebendigen Unterricht [30, 39, 46, 90] sowie spannende praktische Unterrichtsbeispiele [24, 40, 47, 48, 53, 54, 89] – und entwickelt dazu früh auch selbst Computerprogramme [78]. Dabei hat er auch stets jene Lernenden im Blick, die besonderer pädagogischer Zuwendung bedürfen. Dass er dafür bereit war, nicht im Mainstream seiner Zeit zu segeln, zeigt das von ihm geprägte Curriculumprojekt „Stochastik in der Hauptschule" [42]. Den noch nachwirkenden Auswüchsen der Strukturmathematik mit ihrer für den Mathematikunterricht unbrauchbaren (Über-)Formalisierung und

> wie Ballast wirkender Sätze, Begriffe und Symbole, etwa innerhalb der Ereignisalgebra (manchmal könnte man meinen, die Mengenlehre habe hier Asyl gefunden), [46, S. 235]

begegnet er mit einem Lehrgang, der vor allem befähigen möchte, sich *in* stochastischen *Situationen rational* zu *verhalten*. Die für Hans Schupp typische Verzahnung von Theorie und Praxis für den Mathematikunterricht findet sich auch hier: Konsequent wurden praktizierende Lehrpersonen in Entwicklung, Durchführung und Evaluation einbezogen, denn ein

> [...] sorgfältig geplantes und evaluiertes Curriculum kommt nur dann zustande, wenn ein leistungsfähiges und engagiertes Team mit präziser Aufgabenteilung und bei ständiger Kommunikation in allen Phasen der Curriculumentwicklung über Jahre hinweg zusammenarbeitet. [42, S. 5]

Welch ein fruchtbarer Idealzustand, dessen Fehlen man in Curricula dann in alltäglicher Praxis immer wieder schmerzlich spüren kann. Sein damals entstandener Vorschlag ist an solchen stochastischen Inhalten ausgerichtet, die ermöglichen, Beziehungen zwischen Realität und Theorie, also zwischen Welt und Mathematik herzustellen. Der reflektierende Prozess des Modellierens ist hier – schon vor PISA und den aktuellen KMK-Bildungsstandards – bereits zentraler Baustein. Einen wichtigen Beitrag zur didaktischen Theoriebildung leistete Hans Schupp dabei bereits 1982 mit (s)einem Übersicht schaffenden, strukturierten Modellbildungskreislauf [39, 46, 55]: Die Ebenen Welt und Mathematik und die Seiten Problem und Lösung unterscheidend und die zirkulären Übergänge von der Situation aus durch *Modellieren*, *Kalkulieren*, *Interpretieren* und *Rückkoppeln* charakterisierend, ordnet er den Modellierungsprozess und macht ihn für den Mathematikunterricht transparent und greifbar.

Ausgangspunkt jeder Modellierung ist stets eine *problematische*, das heißt eine Fragen aufwerfende *Situation* – inner- oder außermathematisch. Solche Situationen zeigt Hans Schupp in seinen zahlreichen Praxisbeiträgen in Hülle und Fülle auf (s. o.). So stellt er z. B. im ml-Themenheft 12 „Galton-Brett" die Arbeit an diesem heraus, denn dort stehen sich bei der ersten Begegnung mit dem Zufall die für die Stochastik charakteristische

> Regellosigkeit im Kleinen und Gesetzmäßigkeit im Großen [...] in beeindruckender Weise gegenüber. [48, S. 15]

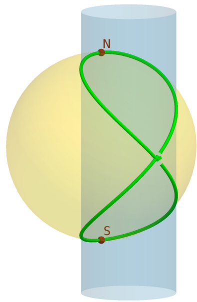
Entsprechende Erfahrungen sind somit leicht gewinnbar. In seiner lebendigen und authentischen Schilderung des zugehörigen Unterrichtsgangs zeigt Hans Schupp ganz konkret, wie kausaldeterministische Primärintuitionen der Lernenden ernstgenommen und schrittweise durch mathematische Argumente behutsam in rationale Sekundärintuitionen überführt werden können. Gerade solche konkreten Unterrichtsbeschreibungen in mathematikdidaktischen Publikationen, die auch leitende Fragestellungen, Impulse und Arbeitsaufträge sowie (mögliche) Schüleräußerungen enthalten, bieten Lehrpersonen bis heute noch im schulischen Alltag Ankerpunkte und Orientierung und ermutigen zum Transfer ins eigene Klassenzimmer. Schließlich handelt es sich bei einer ernstgenommenen Verbindung von Welt und Mathematik um ein anspruchsvolles Unterfangen, mit Konsequenzen in der eigenen Welt – also der persönlichen und der gesellschaftlichen:

> Unterricht, der wesentlicher wird, wird immer auch schwieriger. Die Phasen des Modellierens i. e. S., des Interpretierens und Rückkoppelns, also die beidseitigen Übergänge zwischen Mathematik und sonstiger Welt, stellen erhebliche Anforderungen und stehen immer in der Gefahr des Verkürztwerdens. So sind wir heute mehr denn je im Unterricht gehalten, unsere stochastischen Vorgehensweisen und Resultate sowie diejenigen anderer kritisch zu betrachten, sie eher als Entscheidungshilfen denn als Entscheidungen anzusehen. Wir dürfen nicht zulassen, dass aus der Kleinheit der Chancen beim Lottospielen „geschlossen" wird, dass man darauf verzichten solle. Und wir sollten herausarbeiten, daß die allwöchentlichen Befragungen zur Parteienbeliebtheit nicht so sehr ein Triumph der Befragungstechnik oder gar Zeichen einer offenen Demokratie sind als vielmehr eine eminente Bedrohung ihrer Handlungsfähigkeit. [122, S. 6]

Geometrisches (und funktionales) Denken – ein Vermächtnis für einen Neuanfang

Weitere Ideen aber, die Hans Schupp vorantreiben wollte, warten noch immer auf ihren Einzug in den real existierenden Unterricht in der Fläche (zumindest in Deutschland) und verweisen uns so auf bleibende offene mathematikdidaktische Handlungsfelder. Drei ihm besonders wichtige sind:

- *Kurvendiskussionen*, in denen tatsächlich *über Kurven* diskutiert wird, *statt* dass Eigenschaften von *Funktionsgraphen* abgearbeitet werden [91]; prominente lernreiche elementare Beispiele sind für ihn hier *Radlinien* und *Spiralen* mit ihren jeweiligen funktionalen Zusammenhängen. Besonders schön fand er die *Viviani*-Kurve mit ihren möglichen unterschiedlichen Darstellungen, u. a. *historisch* als *Schnitt von Kugel und Zylinder* [128].



Viviani-Kurve – in Parameterdarstellung: $\left(\cos^2(\theta)\,|\,\cos(\theta)\sin(\theta)\,|\,\sin(\theta)\right)$

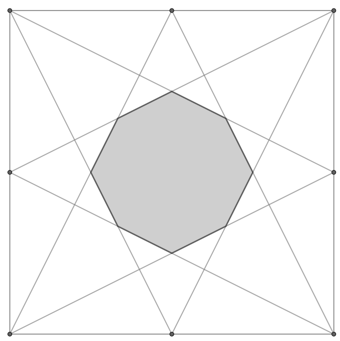
- Analytische und nicht nur linear vektoriell reduzierte *Raumgeometrie* mit „genügend reichhaltigen Objekten, die unterschiedliche Beschreibungen bzw. Darstellungen gestatten" [114, S. 55], wie *Kegelschnitte* [59, 115] – Ja, Kurven! – sowie eine *Geo-Metrie* auf der Kugel [114, S. 63]. Übrigens: Die Erde ist keine Ebene und die Winkelsumme im Dreieck ist darauf *immer* größer als 180°.
- Themenübergreifend: Genetisch entwickelte, aufschließende und geeignet präzisiert lokal geordnete *Begriffs- und Aussagennetze* [161, S. 74], die auch die *historische Dimension* integrieren [161, S. 76] – Gruß nach Österreich: In den aktuellen dortigen Lehrplänen findet sich ein solcher *kulturell-historischer Aspekt* explizit.

Zur Weiterentwicklung mathematisch katalysierter Bildung hat Hans Schupp damit einiges aufgezeigt und gut begründet, für uns und für die Zukunft, zu einer mutigen *Re-Geometrisierung* des Mathematikunterrichts (nicht nur in der Oberstufe), gegen die nicht nur dort allgegenwärtige, bremsende systemische „Macht der Gewohnheit" – einen möglichen Weg dazu hat er pointiert motiviert und skizziert:

> Insbesondere wird deutlich, daß an die Stelle interessanter mathematischer Objekte, die auf vielfältige Weise darzustellen und zu untersuchen waren, geometrische Banalitäten getreten sind, die auf formal-akademische Weise abgehandelt werden. [91, S. 327]
> Zweifellos werden geometrische Sachverhalte lebendiger, interessanter, einsichtiger und schöner, wenn Entstehungs- und Veränderungsprozesse (Genesen und Metamorphosen) mitgesehen und mitreflektiert werden. [114, S. 61]
> Wir benötigen dringend eine geometrisch relevantere Materialbasis, an der polydeskriptiv unterstützte Überlegungen ansetzen können. Und wir sollten klare Prioritäten schaffen: Beschreibungen sind zur Objektexploration da und nicht Objekte als Futter von Beschreibungen. [114, S. 56]

> Die Geometrie ist unerschöpflich. Doch wird man den Autor ohnehin schon für einen Utopisten halten, auch wenn er anführt, daß Anfänge all dieser Themenkreise schon in der Sekundarstufe I behandelt werden können (wozu durchaus positive Erfahrungen vorliegen) und sollten. Denn was steht nicht alles dagegen: geltende Lehrpläne, Prüfungswesen, Lehrerausbildung, Macht der Gewohnheit [...] Andererseits: Wer hindert uns, für Curricula einzutreten, welche ernstmachen mit der Regeometrisierung der Oberstufengeometrie, [...] und mit der Vorarbeit zu beginnen [...] durch Projekte von bzw. mit engagierten Lehrerinnen und Lehrern, durch werbende Publikationen? Niemand, wenn nicht wir selbst. [114, S. 64]

Geometrie in ihrer vollen Breite (euklidische, analytische, differentialgeometrische, axiomatische, diskrete ...) ist für Hans Schupp DAS Feld, das im besonderen Maße geeignet ist, den Darstellungs- und Methodenreichtum der Mathematik zu erfahren und so selbst zu eigenen orientierten Erkundungen vorzustoßen. In der Geometrie beginnt das erfreulich oft schon im Kleinen.



Ist dies Achteck regelmäßig? Eine gute Motivation zur exakten Argumentation am Ende der Anschauung [58].

Computer können heute das *Vorstellen geometrischer Zusammenhänge,* das *Entdecken geometrischer Eigenschaften und Beziehungen* und das *Begründen geometrischer Sachverhalte* – klassische Medien ergänzend – unterstützen, und wir können dadurch Herausforderungen des Mathematikunterrichts angehen [68, S. 26].

> Seit 1985 beschäftigen wir uns an der Universität des Saarlandes mit Möglichkeiten und Grenzen computergraphischer Hilfen für den Geometrieunterricht. [68, S. 25]
> PRO GEO [...] möchte ansetzen bei den tatsächlichen Defiziten des Geometrieunterrichts; selbstverständlich nicht mit dem Anspruch, sie beheben zu können, wohl aber mit der Absicht, zu ihrem Abbau beizutragen. [68, S. 26]

Durch das mächtige Potenzial digitaler Werkzeuge und dessen Bedeutung für die *Auswahl* und Weiterentwicklung *von Unterrichtsinhalten* bleibt weiter kreative Entwicklungs- und Implementationsarbeit zu leisten – denn es gilt unverändert, wie von Hans Schupp nun bereits vor einem viertel Jahrhundert auf einer Tagung des (von ihm 1978 mitinitiierten) *AK Mathematikunterricht & Informatik* konstatiert: „Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer längst hätten nachdenken müssen.“

Als einen erneuernden Kristallisationskeim hat er einen Vorschlag wieder aufgegriffen, den Oskar Lesser bereits 1912 in einem Schulbuch im Ansatz realisiert hat,

> diejenigen Ortslinien miteinander zu behandeln, die entstehen, wenn man von zwei verschiedenen Punkten ausgehend die Menge aller Punkte bildet, deren Entfernungssumme (-differenz, -quotient, -produkt) in bezug auf diese Punkte konstant ist. [114, S. 58]

Aus der damaligen Zeit trägt Hans Schupp uns auch noch weitere konkrete Anregungen und bleibende Handlungsaufforderungen für den heutigen und zukünftigen Mathematikunterricht zu, zuvörderst diese: Die Meraner Forderung nach funktionalem Denken ist durch die heutige „alleinige Betrachtung von kartesisch notierten Funktionen einer Veränderlichen und deren Graphen“ [122, S. 4] in den Curricula nur defizitär erfüllt.

Allgemeinbildung durch Mathematik(unterricht) ... ermöglichen

Ein Blick in das Werk von Hans Schupp hält der heutigen Mathematikdidaktik einen Spiegel vor. Einen, in dem die Welt, wie bei *Alice im Wunderland*, anders ist, hintergründiger und phantasievoller, und der uns so Auslassungen und Fehlstände derzeitiger Diskussionen als blinde Flecke aufzeigt. Kognitive Konflikte können fruchtbare Lernanlässe sein, auch das haben wir bei Hans Schupp – in der Tradition von Jean Piaget – gelernt. Das gilt eben auch für mathematikdidaktische Fragen: Wenn man seine Ideen als nicht mehr zeitgemäß empfindet ... könnte das auch an der Zeit liegen.

Der Allgemeinbildungsbegriff von Hans Schupp unterscheidet sich signifikant vom derzeit in Deutschland dominierenden und durch die KMK institutionell manifestierten. Denn er zielt wesentlich auf die Wirkung von Bildung im einzelnen Menschen (s. u.) und weniger auf eine vermeintlich messbare Wirkung für das System.

> TIMSS und PISA haben den Kompetenzbegriff in den Vordergrund gerückt. Das erscheint insofern gerechtfertigt, als damit ein Paradigmen-

Kurvendiskussion in der Innenstadt von Saarbrücken: Rund um zwei Punkte (in der Tradition von Oskar Lesser)

> wechsel intendiert ist: Ziele haben die Lehrenden, Kompetenzen (und Qualifikationen) sollen die Lernenden haben. Aber schon geschieht, was damals [in den 70ern und 80ern] mit den Zielen geschah: Sie werden klassifiziert, hierarchisiert, herunterdetailliert, mit Aufgaben und endlich mit allumfassenden Tests in Verbindung gebracht [...]. *„Bildung", ein pädagogischer und vor allem auch ein subjektiv-prozessualer Begriff, gerinnt zu „Bildungsstandards"*, welche säuberlich konstruiert und evaluiert werden müssen, damit man nächstens bei PISA besser abschneidet [...]. [122, S. 5]

Er rät dann, also umgehend 2004, sich stattdessen an Winters *Allgemeinen Haltungen und Fähigkeiten* von 1972 bzw. *Grunderfahrungen* von 1995 zu orientieren,

> nicht in dem Sinne, daß konkrete, kurzfristige Ziele daraus abgeleitet werden könnten (das ist grundsätzlich nicht möglich), sondern daß unterrichtliche Bemühungen und Planung sich davor zu verantworten haben. [122, S. 5]

Für eine Definition von Bildung im schulischen Kontext favorisiert Hans Schupp die des Deutschen Ausschusses für das Erziehungs- und Bildungswesen von 1966:

> „Gebildet ist, wer in der ständigen Bemühung lebt, sich selber, die Gesellschaft und die Welt zu verstehen und diesem Verstehen gemäß zu handeln". Deshalb, weil er [...] Dimensionen von Allgemeinheit berücksichtigt, auf die Bildungsbedürftigkeit des Menschen hinweist und gleichzeitig heraushebt, daß Bildung als personenbezogener Prozeß grundsätzlich (nicht de facto) unabhängig ist von Schule [...] und Kenntnisstand, vom Bestehen von Tests ganz zu schweigen. [122, S. 8]

Verantwortung für *notwendig personenbezogene Bildungsprozesse, um die man sich selbst bemühen muss, und die dann konsequente Handlungen implizieren,* trägt damit jede gebildete Lehrperson ungeteilt mit. Hans Schupp fokussiert so insgesamt in der Tradition neuhumanistischer Bildung nach Wilhelm von Humboldt auf *Bildung als einem Prozess,* dem es nicht primär um Effizienz in einem Kompetenzwettbewerb geht, sondern um die Bildung des Menschen in seiner *vertiefenden und be-sinnenden Begegnung* mit der Welt [122, S. 9]. Zur Bestimmung von *allgemein* in *Allgemeinbildung* mit drei Bedeutungen von allgemein (kurz: Totalität der Welt, Gesamtheit der Gesellschaft, Medium des Allgemeinen) schließt Hans Schupp explizit auch an Wolfgang Klafki an und spricht bevorzugt von allgemeiner Bildung.

Auslassungen ... benennen

Menschen sind bildungsbedürftig, und Bildung ist ein Prozess. Doch das Wort *Mensch* findet sich tatsächlich gar nicht in den aktuellen Bildungsstandards der KMK für den HSA bzw. MBA ... Vielleicht ist es auch ein Fortschritt, denn vor einem halben Jahrhundert stand in KMK-Empfehlungen für die Hauptschule noch unverblümt:

> Unser wirtschaftliches Wachstum hängt davon ab, daß hinreichend viele, naturwissenschaftlich,

> mathematisch und technisch gut ausgebildete Menschen zur Verfügung stehen. (sic!) [9, S. 73]

Doch *Zurverfügungstehen* darf aber eben nicht begründendes Motiv für allgemeine Bildung durch öffentliche Schulen sein – so Hans Schupp schon damals: Alle Menschen haben ein Recht auf eigene Teilhabe an einer gebildeten Gesellschaft. Und: Welches Wachstum und welchen Wohlstand eine Gesellschaft anstrebt, ist keine Prämisse, sondern Resultat von Bildungsprozessen. Aktuell findet dazu ja vor dem Hintergrund der Fragen nach Gerechtigkeit und Nachhaltigkeit – nach Wolfgang Klafki zivilisatorische Schlüsselprobleme von Bildung, die wir bei Hans Schupp und nicht in Lehrveranstaltungen der derzeit sog. Bildungswissenschaften kennengelernt haben – wieder ein breiter gesellschaftlicher Diskurs statt (auf den allgemein bildender Unterricht *alle Menschen* vorbereiten sollte).

Auch die Worte *Ästhetik, Spiel* und *Phantasie* suchen wir in den aktuellen KMK-Vorgaben vergeblich. Wir finden dort gerade ein spärliches Mal Mathematik als (u. a.) *kreatives* Betätigungsfeld. Ästhetik und Spiel sind für Hans Schupp didaktisch verwoben (s. u.); methodisch hat er elf Funktionen des Spiels im Mathematikunterricht als Auswahlkriterien herausgearbeitet und erläutert [27]. *Sachgebundene Phantasie* [122, S. 6] ist ihm ein wichtiger didaktischer Begriff. Dass in Heymanns Katalog zur Allgemeinbildung letztlich die Phantasie neben der Kreativität verschwunden ist, findet er bedauerlich [122, S. 12]. Man darf

> [...] der grundsätzlichen Überzeugung sein, daß für deren Wecken und Fördern der Mathematikunterricht mit *allen* seinen Teilen in besonderer Weise geeignet ist. Gelten muß dabei allerdings, daß dort Mathematik nicht vorgesetzt wird, sondern betrieben wird und im Betreiben entsteht. [122, S. 6]

Aufgabenvariation durch Lernende selbst ist – langfristig etabliert empirisch evident – eine erfolgreiche Methode, Mathematik im Betreiben so *entstehen* zu lassen, in allen Gebieten der Mathematik (auch im Unterricht).

Fundamentalziele für den Mathematikunterricht ... formulieren

Hans Schupp selbst hat vor einem halben Jahrhundert einen möglichen Rahmen abgesteckt und fünf *Fundamentalziele* des Mathematikunterrichts fixiert, als „ungefähren“ damaligen Konsens der Mathematikdidaktik. Er bleibt diskussionswürdig: Dort spielt auch das ästhetisch-spielerische, nicht unmittelbar Nützliche die prominente Rolle eines Fundamentalziels [9, S. 74] sowie die aktive Fähigkeit zu rationaler Kritik:

a) das pragmatische Ziel („Anwenden können“)
   - α) über elementare mathematische Kulturtechniken verfügen
   - β) Sachzusammenhänge mathematisieren können
   - γ) zeittypische Erscheinungen mathematischer Art verstehen
b) das logisch-methodologische Ziel („Denken können“)
   - α) argumentieren können
   - β) definieren können
   - γ) beweisen können
   - δ) lokal ordnen können
c) das heuristische Ziel („Probleme sehen und lösen können“)
d) das erzieherische Ziel (z. B. „sachliche Eigen- und Fremdkritik üben können“)
e) das ästhetisch-spielerische Ziel („sich mit nicht unmittelbar Nützlichem auseinandersetzen können“)

Ebenso verweisen *definieren, beweisen* und *lokal ordnen* sowie *Kritik üben können* auf Entwicklungspotential für mathematikgerechte Bildungsstandards – in Deutschland. Da lohnt sich wieder ein Blick nach Österreich, wo wir heuer im Lehrplan schon als ersten *den schöpferisch-kreativen Aspekt* sowie *Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen* (s. o.) und die Kompetenz *kritisch-argumentatives Arbeiten* finden.

Enzyklopädisch sind solch breite Fundamentalziele sicher nicht zu erreichen. Um sich ihnen im Mathematikunterricht wenigstens nähern zu können, präferiert Hans Schupp immer wieder drei didaktische Prinzipien:

- *exemplarisch auswählen* nach Martin Wagenschein,
- *genetisch entwickeln* nach Alexander Israel Wittenberg und
- *operativ denken* nach Jean Piaget und Hans Aebli,

und er weist hin auf die methodische Notwendigkeit

> [...] für lehrerbestimmte, informierende ebenso wie für aktivitätsorientierte und (nach) forschende Unterrichtsphasen [...] [122, S. 9]

Fundamentale Ideen ... nutzen

Wer Mathematikunterricht planen und gestalten will, kommt um das Problem der Auswahl von konkreten Unterrichtsinhalten nicht herum. Das „Warum?“/„Wozu?“ und das „Wie?“ lässt sich ohne das „Was?“ nur leer diskutieren. Im Mathematikunterricht können Fundamentale Ideen der begründeten und begründbaren Stoffauswahl dienen und so Stofffülle und -isolation vorbeugen. Unterschiedliche Forschungsstränge zusammenfassend, sind

Fundamentale Ideen für die Mathematik und das Mathematiktreiben zentrale Aspekte wie Inhalte, Handlungen und Einstellungen – erst ihr Zusammenspiel macht das Wesen der Mathematik aus. Hans Schupp hat dazu wiederholt angemahnt, dass es die Handlungen selbst sind, die eine Fundamentale Idee bestimmen. Was auf keine archetypische Handlung zurückgeführt werden kann, kann auch nicht fundamental sein, da Handlungen stets lange vor inhaltlichen Begriffen erworben werden [77].

Optimieren lag ihm dabei besonders am Herzen. Entlang dieser universellen Idee der Mathematik entwickelt er unterrichtspraktische Beispiele, um sie für den Mathematikunterricht fruchtbar zu machen. Zur theoriebasierten Begründung der unterrichtsrelevanten Fundamentalität des Optimierens entwickelt Hans Schupp einen Ansatz von Fritz Schweiger – der im Übrigen Optimieren im Dialog mit Hans Schupp seinem eigenen Katalog Fundamentaler Ideen hinzufügt – weiter, indem er dessen Kriterienkatalog begrifflich ausschärft und erweitert [77, S. 105]. Fundamentale Ideen zeichnen sich demnach durch *Historizität*, *Ubiquität*, *Typizität* und *Archetypizität* aus. Ein weiteres Kriterium, die *Aktualität*, fügte Hans Schupp bei der Betrachtung charakteristischer Ideen der Stochastik hinzu [122, S. 7].

Auch leitet Hans Schupp aus den Kriterien Fritz Schweigers in Anlehnung an Erich Ch. Wittmann ein Prinzip für den Einsatz von Fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht ab. Sein „Prinzip der tragfähigen Zwischenabschlüsse“ besagt, dass valide Vorstellungen, die mithilfe Fundamentaler Ideen gewonnen wurden, nicht nur am Ende einer Beschäftigung mit ihnen stehen dürfen. Sie müssen auch „zwischendurch“ angestrebt werden. Auch hier hat er wieder jene Lernenden im Blick, „welche die Schule – aus welchen Gründen auch immer – vorzeitig verlassen“ [77, S. 104].

Auf Basis seiner theoretischen Überlegungen entwickelt er einen durchkomponierten Vorschlag zur curricularen Realisierung des Optimierens in allen Klassenstufen und Schulformen. Dabei tritt Hans Schupp, ganz im Sinne der Theoriebildung Fundamentaler Ideen, vehement dafür ein, nicht erst und vor allem *nicht nur* im Analysisunterricht zu optimieren. Im von ihm herausgegeben ml-Themenheft 81 „Optimieren“ lädt er seine Leserinnen und Leser ein,

> [...] sich durch dieses Heft davon beeindrucken lassen, welche Fülle von Möglichkeiten es gibt, Maxima und Minima mit elementaren Mitteln zu bestimmen. Vielleicht können wir Sie auch davon überzeugen, dass es nicht um ‚noch einen neuen Stoff‘ für das ohnehin schon überladene Curriculum geht, sondern um einen durchziehenden Aspekt, der den Mathematikunterricht der Sekundarstufen auf vielfache Weise zu bereichern vermag. [101, S. 3]

Es ist auch dort wieder vor allem die Einfachheit der vorgestellten Beispiele, die deren Lösungsreichtum so bestaunenswert macht. Mit dem folgenden didaktisch reduzierten Beispiel aus einer unpublizierten Arbeit, die Hans Schupp uns im letzten Jahr auf den Schreibtisch legte – sein Büro lag zwischen den unseren – möchten wir Sie das nacherleben lassen. Seine Fragestellung: „Zwei positive Zahlen x, y haben die konstante Summe $s > 0$. Gesucht ist das mögliche Maximum für ihr Produkt“. Und sein Credo im Wortlaut des Manuskripts:

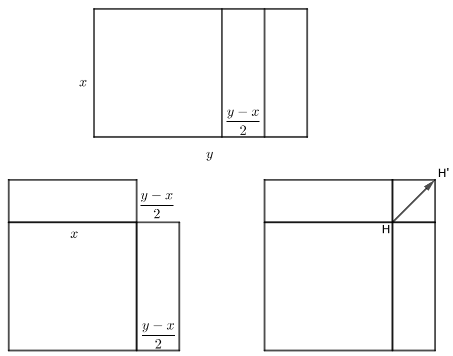
> Mathematik ist kein Seil, sondern ein Geflecht. Um dies zu erkennen, muss man einleuchtende Beispiele behandeln. Dazu gehört u. a. die Einsicht, dass der Nachweis eines Satzes häufig auf recht verschiedene Weise und unter Zuhilfenahme ganz unterschiedlicher Stützen gelingen kann.

Hier vier seiner Lösungen – finden Sie gern weitere, er hat zehn ausgewählt:

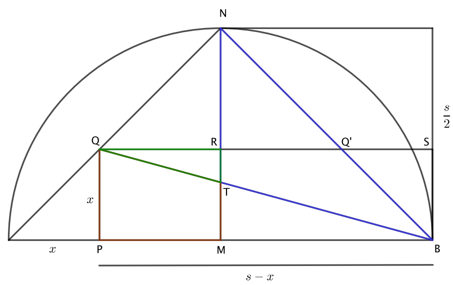
⑤ Aus $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ *(Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel)* folgt $xy \leq \frac{s^2}{4}$, und Gleichheit wird erreicht für $x = y = \frac{s}{2}$.

⑦ Das Produkt der beiden Zahlen kann als Funktion gedeutet werden: $f(x) = x(s-x)$. Die zugehörige *nach unten geöffnete Parabel* hat Nullstellen bei 0 und s. Aus Symmetriegründen hat ihr Scheitelpunkt die x-Koordinate $\frac{s}{2}$.

⑨ Ohne Worte:



⑩ $x(s-x) \leq \frac{s^2}{4}$, da |4eck PMTQ| $\leq$ |3eck TBN|:



Und wie ist das entsprechend beim Produkt von *drei* positiven Zahlen mit konstanter Summe ...

Epilog

Wissenschaft hat nach dem Philosophen Jean-François Lyotard zwingend eine Erinnerung und einen Entwurf, sonst ist sie keine. In der Mathematikdidaktik von Hans Schupp finden wir beides in vorbildlicher Weise und dazu den expliziten Willen, Zukunft aus reflektierter Tradition heraus aktiv zu gestalten, eben Bildung weiterzureichen. Nun ist Hans Schupp selbst Teil der Mathematikdidaktikgeschichte. Neben den mindestens 161 publizierten Arbeiten – meist ohne weitere Autoren, zitationszahlenfördernde Rudelbildung fand er unschicklich – liegen noch über 40 unpublizierte Schriften in der (von ihm selbst so benannten) *Schupplade*. Ein überaus reichhaltiger Fundus. Wir waren im detaillierten Rückblick wieder beeindruckt angesichts seiner vorbildlichen Konsequenz für einen allgemein bildenden Unterricht, eben auch *für alle*. Bildung war für Hans Schupp, der das klassische vierhändige Klavierrepertoire beherrschte und sich darin wohl fühlte und aufging und bekanntlich konsequent Goethe rezipierte, keine bürgerliche Attitüde, sondern stets und bis zuletzt eine verantwortungsvolle gesellschaftliche Aufgabe und eine persönliche Verpflichtung.

Eine systematische Aufarbeitung seines Werkes wird uns alle an weitere wertvolle Entwürfe zur konstruktiven Weiterentwicklung von Mathematikdidaktik erinnern – für einen auch zukünftig allgemein bildenden Mathematikunterricht.

Literatur

Die Literaturangaben beziehen sich auf das letzte von Hans Schupp selbst autorisierte Werkverzeichnis (madipedia.de/wiki/Hans_Schupp).

1967–1979:	[1]–[34]
1980–1989:	[35]–[66]
1990–1999:	[67]–[111]
2000–2010:	[112]–[144]
Nach 2010:	[145]–[161]

Die geometrischen Figuren haben wir mit GeoGebra nachgebaut.
Fotos: Hans-Joachim Jäger bzw. Anselm Lambert.

Anselm Lambert, Universität des Saarlandes Saarbrücken
E-Mail: lambert@math.uni-sb.de

Marie-Christine von der Bank, Robert-Schuman-Gymnasium Saarlouis und Universität des Saarlandes Saarbrücken
E-Mail: vonderbank@rsg-saarlouis.de

Im Gedenken an Andreas Vohns

Zusammengestellt von David Kollosche

Wenn ein geschätzter und umtriebiger Kollege unsere Welt verlässt, gibt es viele Akteure, die ein letztes Mal auf sein Wirken zurückblicken und sich verabschieden möchten. Ich habe daher – weniger als Autor und mehr als Herausgeber – die Aufgabe übernommen, die folgenden kurzen Nachrufe vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt, von aktuellen und früheren Vorstandsmitgliedern der GDM, vom Arbeitskreis „Mathematik und Bildung", vom Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich" und von den Herausgeberinnen und Herausgebern der Zeitschrift *mathematica didactica* zusammenzustellen.

Nachruf der Vorstände der GDM

> Wir trauern um Assoc. Prof. Dr. Andreas Vohns, der am 19. 1. 2021 unerwartet im Alter von 45 Jahren verstorben ist. Wir haben mit Andreas Vohns einen Kollegen verloren, mit dem wir bis zu seinem Ausscheiden im März 2018 im Vorstand der GDM gerne und vertrauensvoll zusammengearbeitet haben.

Mit diesem knappen Text hat der Vorstand der GDM im Januar auf der Homepage unserer Gesellschaft versucht, seine Bestürzung in Worte zu fassen. Nun nehmen wir, die Mitglieder der GDM, die mit Andreas Vohns im Vorstand tätig waren, die Gelegenheit wahr, an diese fruchtbare Zusammenarbeit mit ihm im Rahmen dieses multiperspektivischen Rückblicks zu erinnern.

Andreas Vohns hat unsere Gesellschaft vielfältig mitgeprägt. Dazu gehört etwa die Arbeit als

Sprecher des Arbeitskreises „Mathematik und Bildung“ der GDM, die in einem anderen Nachruf in diesem Heft gewürdigt wird. Ebenso bleibt sein Engagement für die Belange des wissenschaftlichen Nachwuchses im Gedächtnis, insbesondere die Organisation der GDM-Summerschool 2013 in Klagenfurt.

Auf der Mitgliederversammlung im Rahmen der Jahrestagung 2012 in Weingarten wurde Andreas Vohns zum Schriftführer der GDM gewählt und hat anschließend über sechs Jahre die Geschicke unserer Gesellschaft maßgeblich mitbestimmt. Besonders deutlich war das daran zu sehen, dass Andreas Vohns die Mitteilungen der GDM inhaltlich und im äußeren Erscheinungsbild auf ein neues Niveau gehoben und dazu beigetragen hat, dass die MGDM heute eine Zeitschrift ist, die im aktuellen Geschehen der Mathematikdidaktik verankert ist und verstärkt zitiert wird. Akribie und Sorgfalt hat Andreas Vohns nicht nur beim Bewerten und Redigieren eingereichter Artikel gezeigt, er war auch stets an einem ansprechenden Layout der Zeitschrift interessiert. Die Art des gegenwärtigen Titelbildes, das in Kachelform Bilder aus unserer (mathematischen) Umwelt mit dem Logo auf der linken Seite zeigt, hat sich Andreas Vohns erstmals für die Ausgabe vom Januar 2013 ausgedacht und dann konsequent fortgesetzt. Weniger im Vordergrund, aber für die Organisation unserer Gesellschaft von hoher Bedeutung, war die systematische Aufbereitung aller Dokumente der GDM, in die er viel Energie investiert hat. Dadurch ist es heute den Mitgliedern, dem Beirat und schließlich dem Vorstand der GDM jederzeit möglich, aktuelle Entscheidungen auf der soliden Grundlage der relevanten Dokumente, auch der Dokumente vergangener Tage, zu treffen. Auf dieser in Strukturen und Dokumenten manifesten Ebene bleibt Andreas Vohns’ Engagement für die GDM auch in Zukunft sichtbar.

Darüber hinaus wird uns Andreas Vohns als sehr umsichtiger und gewissenhafter Kollege in Erinnerung bleiben, der Diskussionen auf den Punkt zusammenfassen und Neuerungen mit der Bemerkung, man müsse „auch mal etwas wagen dürfen“, vorantreiben konnte. Die dafür notwendige Autorität zog er einerseits aus dem profunden Sachwissen und seiner Reflektiertheit, andererseits aber auch aus seiner Freundlichkeit und der Gabe, über sich selbst herzlich lachen zu können. Mit diesem durch Ernsthaftigkeit wie Humor geprägten Bild werden wir Andreas Vohns in Erinnerung behalten.

Für die Vorstände der GDM:
Andreas Eichler, Torsten Fritzlar, Rudolf vom Hofe,
Silke Ruwisch, Hans-Georg Weigand

Nachruf vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt

Mit großer Bestürzung haben wir am 19. Jänner 2021 vom unerwarteten und viel zu frühen Tod unseres Freundes und Kollegen Assoc. Prof. Dr. Andreas Vohns erfahren. Andreas kam im Jahre 2008 ans Institut für Didaktik der Mathematik und habilitierte sich im Jahre 2013 mit einer Habilitationsschrift mit dem Titel „Zur Dialektik von Kohärenzerfahrungen und Differenzerlebnissen: Bildungstheoretische und sachanalytische Studien zur Ermöglichung mathematischen Verstehens“.

Von 2018 bis 2020 leitete er als Institutsvorstand die Geschicke des IDM. Andreas setzte sich unermüdlich für das Institut, seine Kolleginnen und Kollegen sowie die Studierenden ein. Er hatte immer ein offenes Ohr und konstruktive Ratschläge und war in vielen Belangen ein hochgeschätzter Ansprechpartner. Fachlich beeindruckte Andreas mit seinem umfangreichen und reflektierten Wissen in der Mathematikdidaktik und darüber hinaus, mit seiner stets scharfsinnigen Kritik und mit seiner Fähigkeit, fachlichen Fragen sogleich inhaltlich souverän und dennoch mit seinem originellen Witz zu begegnen. Die Lehre war ihm mindestens ein so großes Anliegen wie die Forschung, wie etwa seine aufwändig produzierten Lehrvideos eindrücklich zeigen.

Nach außen hin vertrat Andreas das Institut unter anderem in verschiedenen Arbeitsgruppen des österreichischen Bildungsministeriums, im Vorstand der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik und als Mitherausgeber der Fachzeitschrift *mathematica didactica*. Erst im Oktober 2020 hatte Andreas die Leitung der School of Education an der Universität Klagenfurt übernommen. Mit Andreas verliert das Institut einen herausragenden und engagierten Kollegen und jede und jeder von uns persönlich einen geistreichen, hilfsbereiten, humorvollen und ganz besonderen Menschen. Wir vermissen ihn sehr.

Für das Institut,
David Kollosche und Annika Wille

Erinnerungen des Arbeitskreises „Mathematik und Bildung“

Im Jahr 2011 reaktivierte Andreas Vohns den Arbeitskreis mit der Übernahme des Sprecheramtes und leitete ihn im Team bis 2015. Andreas Vohns war bei den Arbeitskreistreffen und den Tagungen immer präsent und mit viel Engagement dabei. Mit seinen eigenen Vorträgen sowie zahlreichen kritischen Diskussionsbeiträgen hat er die inhaltliche Arbeit des Arbeitskreises entscheidend geprägt und um vitale Impulse für die weitere Auseinandersetzung bereichert.

Bildung mit und durch Mathematik und Allgemeinbildung im Mathematikunterricht waren ihm eine Herzensangelegenheit. Hier eine Auswahl seiner Vorträge in den letzten Jahren auf den Herbsttagungen des Arbeitskreises, die er oft auch öffentlich zugänglich gemacht hat:

- 2020: Das Digitale als Bildungsherausforderung für den Mathematikunterricht. (Un-)Zeitgemäße Betrachtungen (als Artikel erschienen in: *Mitteilungen der GDM* 110, S. 47–55)
- 2019: „Blended Learning“-Szenarien in fachdidaktischen Proseminaren: Ein Werkstattbericht zur Integration interaktiver Videos
- 2018: Der absolute Kern eines Bildungsbegriffs für den Unterricht (Einblicke in die beiden Vorträge von 2018 und 2019 sind über *ResearchGate* möglich.)
- 2015: Diskussion des Textes „Socio-Political Perspectives“ von Paola Valero
- 2013: Staatsbürgerliche Erziehung im und durch den Mathematikunterricht? Eine Exploration
- 2012: Zum Bildungspotential des Vektorbegriffs

Im Jahr 2015 war Andreas Vohns auch Mit-Herausgeber des Themenheftes „Mathematik und Bildung“ bei *mathematica didactica* (Heft 38) mit Beiträgen von Arbeitskreismitgliedern. Die Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* (Heft 4) ist 2013 unter dem Schwerpunkt „Mathematische Bildung als staatsbürgerliche Erziehung?“ in enger Verbindung zum Arbeitskreis maßgeblich von ihm gestaltet worden.

Wir haben mit Andreas Vohns einen konstruktiven kritischen Denker und einen lieben Menschen verloren. Seine inhaltlich so fundierte und kompetente Mitarbeit im Arbeitskreis wird uns ebenso wie seine menschenfreundliche, aufgeschlossene Lebensweise sehr fehlen.

Für den Arbeitskreis,
Tanja Hamann, Stefan Pohlkamp
und Markus Helmerich

Nachruf des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“

Im Jänner 2021 wurde Andreas Vohns völlig unerwartet und viel zu früh aus dem Leben gerissen. Die Erinnerung an ihn werden wir noch lange aufrechterhalten. Nicht nur, weil Andreas Vohns ein Kollege war, mit dem man*frau sich inhaltlich hervorragend über mathematische, fachdidaktische aber auch gesellschaftliche Themen auseinandersetzen konnte; er war auch witzig und seine Studierenden beschreiben ihn als gutmütig, nett und lebensfroh.

Vor allem seine Expertise im Bereich der mathematischen Allgemeinbildung war immer wieder gefragt. Er war als Experte für die Überarbeitung des aktuellen Lehrplans für die Sekundarstufe I in Mathematik tätig. Bei dieser Entwicklungsarbeit zeigte Andreas Vohns das ganze Spektrum seines Könnens. Er war sowohl Ansprechpartner auf Augenhöhe für die an der Lehrplanarbeit beteiligten Lehrer/-innen als auch steter Mahner und Einforderer fachlicher Notwendigkeiten und – soweit das vorgegebene rigide Konzept dies zuließ – visionärer Prophet fachdidaktischer Entwicklungen. In diesem Punkt hat Österreich auch wirklich Nachholbedarf.

In Bezug auf die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik war ein Austausch mit ihm ebenfalls immer wieder sehr ertragreich. In einem Forschungsprojekt zum Einfluss des Textverständnisses auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben untersuchte er mit großer Sorgfalt und Umsicht sowohl AHS- als auch BHS-Aufgaben, Aufgaben aus der bayrischen Abiturprüfung, die AHS-Deutschmatura und gängige Mietverträge, um sie hinsichtlich ihrer bildungssprachlichen Anteile zu vergleichen und unter dem Aspekt mathematischer Bildungsziele zu betrachten. Dies unter der Prämisse faktenbasierte Aussagen über die oft kritisierte scheinbar schwere Verständlichkeit von Maturaaufgaben („Textlastigkeit“) treffen zu können.

Sein großes Wissen in vielen Bereichen der Mathematik und der Mathematikdidaktik hat ihn dazu befähigt, Diskussionen und einem Austausch über fachdidaktische Fragen herausfordernd zu begegnen. Das hielt ihn aber nicht davon ab, Argumenten anderer zu folgen, sie zu prüfen, und gegebenenfalls zu akzeptieren oder eine gemeinsame, fundierte Sicht- bzw. Vorgangsweise zu finden.

Die in Österreich im Vergleich zur fachmathematischen Community kleine Community der Fachdidaktik Mathematik wird diesen Verlust lange nicht verkraften. Andreas Vohns war ein Glücksfall für die österreichische fachdidaktische Landschaft, der viel zu früh wieder verschwunden ist. Eine menschliche Tragödie für alle, die ihn kannten und schätzten, und eine wissenschaftliche Katastrophe für dieses Land.

Für den Arbeitskreis,
Stefan Götz und Eva Sattlberger

Nachruf auf Andreas Vohns von den Herausgebenden der Zeitschrift *mathematica didactica*

Wir trauern um unseren Mitherausgeber Andreas Vohns, der am 19. Januar 2021 plötzlich und unerwartet im Alter von 45 Jahren verstorben ist. Andreas war seit 2018 im Herausgeberteam von *mathematica didactica* aktiv und hat gemeinsam mit Benjamin Rott die Herausgabe verantwortlich geleitet. Zuletzt betreute er ein Themenheft zum funktionalen Denken, das in diesem Jahr erscheinen wird.

Besonders beeindruckend waren für uns in der Zusammenarbeit die stets sehr tiefgründigen aber auch oft sehr humorvollen Kommentare von Andreas, die immer an der Sache orientiert waren. Er hat mit seiner unglaublichen fachdidaktischen Belesenheit die Themen stets hervorragend einordnen können und so substanziell zur Verbesserung von Publikationen beigetragen. Ein Urteil, das er fachlich scharf und präzise gefällt hatte, konnte er stets konstruktiv und oft augenzwinkernd milde kommunizieren. So hat er in seiner Herausgebertätigkeit viele Autorinnen und Autoren auf dem Weg zur Publikation konstruktiv kritisch sowie wertschätzend begleitet.

Wir haben mit Andreas Vohns einen Kollegen verloren, der uns bei der Herausgabe von *mathematica didactica* nicht nur tatkräftig unterstützt, sondern maßgeblich zur Weiterentwicklung der Zeitschrift beigetragen hat. Nicht zuletzt forcierte er mit seinem großen Wissen auch den Umzug der Zeitschrift in ein neues Online-Format, dessen Umsetzung er nun nicht mehr erleben konnte. Wir vermissen sein Mitwirken, vor allem aber Andreas als Person bereits jetzt.

Für die Zeitschrift,
Ralf Benölken, Katja Lengnink, Benjamin Rott,
Silke Ruwisch, Markus Vogel

David Kollosche, Universität Klagenfurt
E-Mail: david.kollosche@aau.at

Hinweise für Autor(inn)en

Zielgruppe/Inhalte
Die *Mitteilungen der GDM* werden halbjährlich an alle Mitglieder der GDM versandt. Redaktionsschluss ist jeweils der 30. 5. und der 30. 11. eines Jahres. Die Mitteilungen möchten über alles berichten, was einen deutlichen Bezug zur Mathematikdidaktik, zum Mathematikunterricht und zur Lehrer(innen)bildung im Fach Mathematik aufweist, insbesondere über alle Aktivitäten der GDM, ihrer Arbeitskreise und der von der GDM mitbestellten Kommissionen. Vor dem Schreiben eines freien Beitrags für die Mitteilungen (Rubriken: Magazin, Diskussion) wird empfohlen, zunächst mit dem Herausgeber abzuklären, in wie weit der geplante Beitrag für die Mitteilungen von Interesse ist.

Bilder/Illustrationen
Wir streben an, den Anteil schöner Illustrationen aller Art zu erhöhen. Alle Autoren sind dazu aufgerufen, sich hierzu Gedanken zu machen und möglichst qualitativ hochwertige Illustrationen mit ihrem Beitrag mitzuliefern (als Dateien oder Vorlagen zum Scannen) oder Vorschläge zu unterbreiten.

Manuskripte/Umfang
Der Umfang eines Beitrags sollte für freie Beiträge (Rubriken: Magazin, Diskussion) zunächst mit dem Herausgeber abgestimmt werden. Er sollte in der Regel sechs Seiten (also zwölf Spalten) inklusive Illustrationen nicht überschreiten. Eine reine Textspalte in den Mitteilungen hat ca. 2500 Anschläge (inklusive Leerzeichen). Für die anderen Rubriken gelten zum Teil andere Längenempfehlungen, die auf der Internetseite der Zeitschrift detaillierter angegeben sind (s. tinyurl.com/ycxhvaqj). Beiträge sollten als weitestgehend unformatierte WORD- oder LaTeX-Files eingereicht werden, Abbildungen sind immer auch als separate Dateien einzureichen. Auf der Internetseite stehen für LaTeX und WORD auch Manuskriptvorlagen zur Verfügung, die Sie bei der Längenabschätzung und den zu verwendenden Formatierungen unterstützen. Alle Beiträge werden von uns unabhängig vom Einreichungsformat anschließend professionell gesetzt. Bei Manuskripten mit einem hohen Anteil mathematischer Formeln helfen Sie uns mit einer Einreichung als LaTeX-File.

Am Ende eines Beitrags drucken wir üblicherweise die Kontaktadresse des Autors (inkl. E-Mailadresse) ab – *bitte geben Sie am Ende des Manuskripts selbst unbedingt Ihren Namen, Ihre Institution und Ihre E-Mailadresse an.*

Einreichung/Kontakt
Bitte reichen Sie Ihre Manuskripte bevorzugt online unter:

ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/author/submit

ein (einmalige Registrierung erforderlich) oder senden Sie alternativ Manuskripte (mit Ausnahme der Rubrik: Rezensionen) an die Herausgeberin (schriftfuehrer@didaktik-der-mathematik.de). Wegen Rezensionen und Rezensionsanfragen wenden Sie sich bitte an an Ulrich Kortenkamp (ulrich.kortenkamp@uni-potsdam.de) oder Thomas Jahnke (jahnke@math.uni-potsdam.de).

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

■ *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg. Tel.: 0821 . 598-2494 reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
■ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641 . 99-32221, katja.lengnink@math.uni-giessen.de
■ *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31, 06110 Halle (Saale). Tel. 0345 . 5523-880, torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de
■ *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Universität Siegen, Fakultät IV, Department Mathematik, Didaktik der Mathematik, Adolf-Reichwein-Straße 2, 57076 Siegen. Tel. (0271) 740-3538, goetze@mathematik.uni-siegen.de
■ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
■ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Grafische Gestaltung: Christoph Eyrich, Berlin ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.