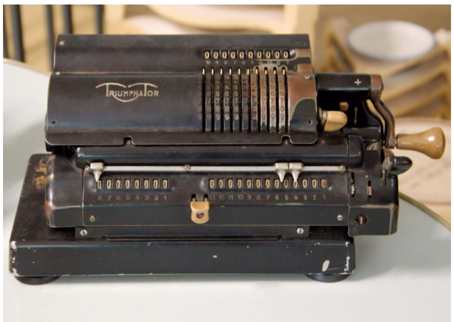
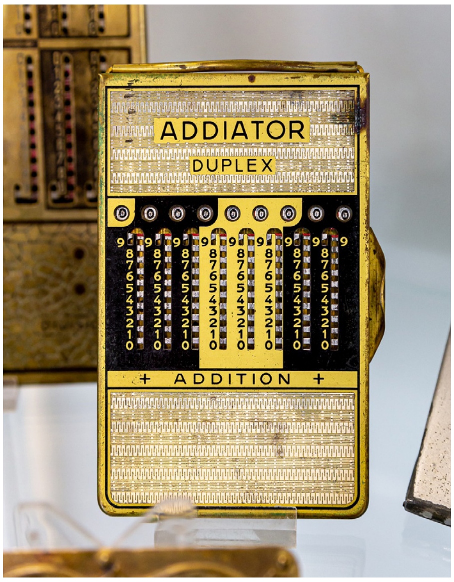
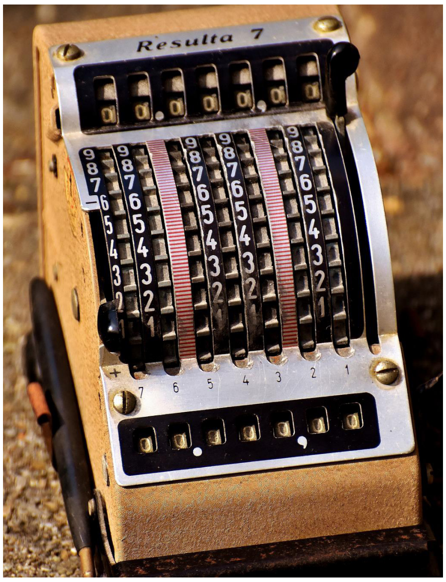
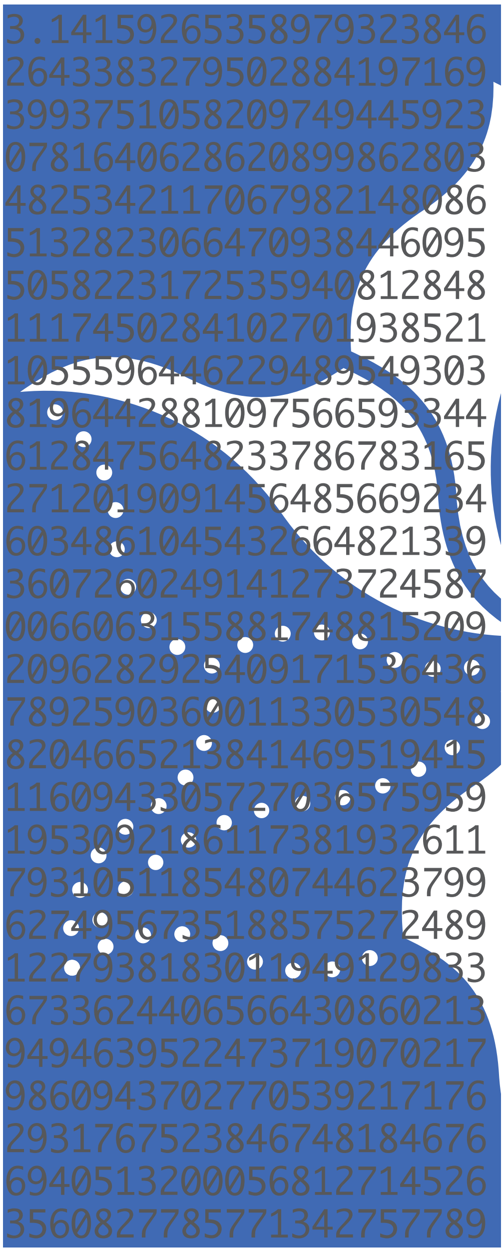
MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK









GDM

113

August 2022

Editorial: Von Permutationen und Neuanordnungen

Vertauscht man auf jede Weise die Ziffern einer Primzahl und die so entstehenden neuen Zahlen sind ebenfalls wieder Primzahlen, spricht man von einer permutierbaren Primzahl. Die kleinste dreistellige permutierbare Primzahl im Dezimalsystem ist die Zahl 113, die zeitgleich der Nummer des vorliegenden Heftes der *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (MGDM) entspricht. Alle Neuanordnungen der Ziffern der Zahl 113 führen wieder zu Primzahlen.

Das Thema „Neuanordnungen“ hat in den letzten Wochen die GDM-Geschäftsführerin und den GDM-Vorstand intensiv beschäftigt. Allerdings wurden nicht Ziffern neu angeordnet, sondern die Neuanordnungen waren struktureller Art und betrafen die GDM-Homepage. Unter der URL didaktik-der-mathematik.de findet sich der neue Webauftritt der GDM in einem modernisierten Design, mit aktualisierten Inhalten und vielen neuen Funktionen.

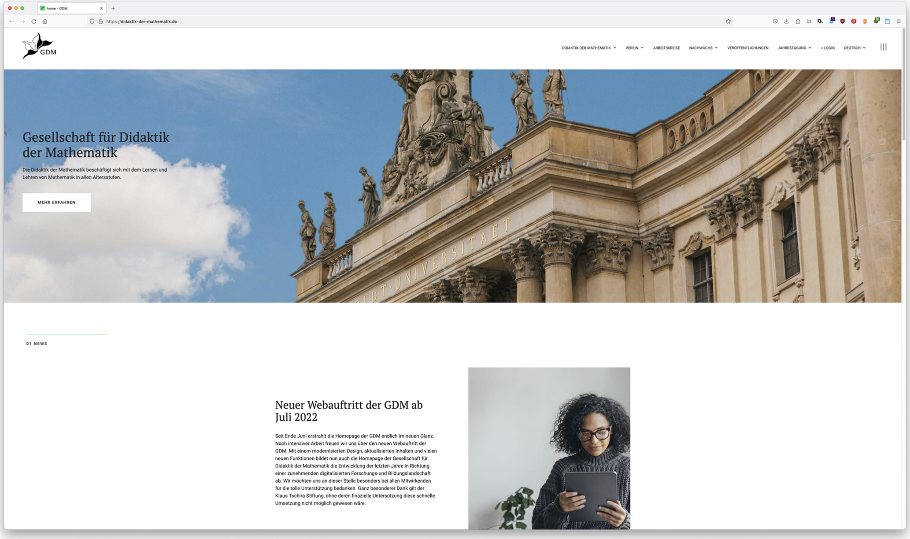
Neben einem Blog, der zukünftig wichtige Informationen und Ereignisse rund um die GDM und die Mathematikdidaktik thematisieren wird, gibt es ebenfalls die Möglichkeit Forschungsprojekte und sehr praxisnahe Projekte auf der Seite vorzustellen. Darüber hinaus sind nun alle Arbeitskreise, Kommissionen und Landesverbände mit den jeweiligen Inhalten und Zielen sichtbarer und bieten einen direkten Zugriff auf alle relevanten Informationen. Neben mehr Transparenz und guter Kommunikation der Vereinsarbeit war ein besonderes Anliegen, die Benutzerfreundlichkeit für die Mitglieder zu erhöhen. Aus diesem Grund wurde ein interner Mitgliederbereich angelegt, über den sich Mitglieder einloggen können, um eigene Daten zu aktualisieren, sich in Mailverteiler ein- und auszutragen, automatische Mitgliederbescheinigungen als pdf herunterladen und einen direkten Zugriff auf die Veröffentlichungen der GDM zu erhalten.

Für die Leser und Leserinnen dieser Zeitschrift wird es zukünftig die Möglichkeit geben, die gedruckten Zeitschriften abzubestellen und diese nur noch digital zu beziehen. Damit wollen wir ermöglichen, die GDM-Zeitschrift im Hinblick auf ökologische Herausforderungen zukunftsfähig zu machen und die Umwelt zu schützen. Falls Sie diese Option ab der nächsten Ausgabe nutzen möchten, können Sie diese Einstellung ganz einfach in Ihrem persönlichen Benutzerkonto vornehmen. Die elektronischen Versionen der Zeitschrift sind weiterhin unter ojs.didaktik-der-mathematik.de abrufbar.

Natürlich ist die neue Homepage (noch) nicht perfekt. Wir danken daher allen, die uns bereits Hinweise für Verbesserungen oder Fehlerkorrekturen geschickt haben. Wir freuen uns über jeden weiteren Hinweis. Zudem würden wir uns über Fotos freuen, die wir statt der aktuellen verwenden dürften. Falls Sie uns Fotos rechtssicher zur Verfügung stellen könnten, wenden Sie sich an die Geschäftsführerin der GDM. In diesem Sinne wünschen wir fröhliches Erkunden und Entdecken!

Ein besonderer Dank gilt der Klaus Tschira Stiftung, ohne deren finanzielle Unterstützung diese schnelle Umsetzung nicht möglich gewesen wäre.

Daniela Götze (Schriftführerin der GDM) und
Karoline Haier (Geschäftsführerin der GDM)



Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Die Didaktik der Mathematik beschäftigt sich mit dem Lernen und Lehren von Mathematik in allen Altersstufen.

Neuer Webauftritt der GDM ab Juli 2022

Seit Ende Juni erstrahlt die Homepage der GDM endlich im neuen Glanz. Nach intensiver Arbeit freuen wir uns über den neuen Webauftritt der GDM. Mit einem modernisierten Design, aktualisierten Inhalten und vielen neuen Funktionen bildet nun auch die Homepage der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik die Entwicklung der letzten Jahre in Richtung einer zunehmenden digitalisierten Forschungs-und Bildungslandschaft ab. Wir möchten uns an dieser Stelle besonders bei allen Mitwirkenden für die tolle Unterstützung bedanken. Ganz besonderer Dank gilt der Klaus Tschira Stiftung, ohne deren finazielle Untersützung diese schnelle Umsetzung nicht möglich gewesen wäre.

ISSN 0722-7817

Inhalt

Diskussion

Aktivitäten

Arbeitskreise

Personalia

Bildnachweise der Umschlagseite
Alle Fotos: Pixabay

Grußwort des 1. Vorsitzenden

Vor genau 140 Jahren, also im August des Jahres 1882, hat Friedrich Nietzsche seinen Gedanken der „ewigen Wiederkehr des Gleichen“ formuliert und in Gesprächen mit seiner Freundin Lou Andreas Salome analysiert und reflektiert. Sie erinnerte sich später, er habe dabei besonders leise gesprochen, weil ihn die Tragweite des Gedankens selbst entsetzt habe. Keine zehn Jahre später hat Poincaré seinen Wiederkehrsatz veröffentlicht und damit die philosophische Spekulation zumindest für bestimmte Systeme der klassischen Mechanik auf mathematischen Boden gestellt. Zu diesem Zeitpunkt war Nietzsche bereits umnachtet, und auch seine zeitweisen Hoffnungen, Lou Andreas Salome würde seine Gedanken weiterführen, hatten sich nicht erfüllt – sie hatte andere Pläne. Ohnehin galt 1882 eine Frau, die am akademischen Diskurs teilnehmen wollte, als äußerst verdächtig und so wurde sie von ihren engstirnigen Göttinger Mitbürger*innen als „Hexe vom Hainberg“ stigmatisiert. Insofern mag man die ewige Wiederkehr solcher Zeiten nicht herbeisehnen. Da ist es beruhigend, dass die Periodendauer recht groß sein dürfte – und Quantenphysik und Kosmologie stützen die Erwartung, dass es sehr lang dauern wird, bis sich im Großen und Ganzen alles wiederholt. Allerdings können die Zyklen in Teilsystemen kleiner sein. In der Mathematikdidaktik scheint sich die Periodendauer bestimmter Diskussionen nicht in Äonen, sondern eher in menschlichen Generationen zu bemessen. Müssen alle Kinder in der Schule Mathematik lernen? Braucht es wirklich Mathematik als Pflichtfach? Vor 25 Jahren hat es die *Frankfurter Rundschau* geschafft, die wohlüberlegte Allgemeinbildungstheorie von Heymann in die eine Schlagzeile „Acht Jahre Mathe sind genug“ zu destillieren. Nachdem sich der Staub der öffentlichen Diskussion gelegt hatte, zeigte sich, dass ein gutes Fundament für Diskussionen zur allgemeinbildenden Natur der Mathematik gelegt war. 25 Jahre davor führte die damalige Sinnkrise des Mathematikunterrichts zur „Neuen Mathematik“. Und heute, etwa 25 Jahre nach Heymann, wird wieder darüber diskutiert. Diesmal ist es kein Erziehungswissenschaftler, sondern ein Mathematiker, der die scheinbare Selbstverständlichkeit in Frage stellt: Muss wirklich jeder Mathematik in der Schule belegen? Insbesondere: Muss wirklich jeder Mathematik im Abitur haben? Und ganz wichtig: Muss das wirklich so gelernt werden, dass es geprüft werden kann? Edmund Weitz ist ein hervorragender Mathematiker und er liebt die Mathematik – davon kann man sich in seinen Büchern überzeugen. Seine u. a. in einem Podcast von *Spektrum der Wissenschaft* verbreitete Argumentation richtet sich vor allem gegen das Argument, man müsse Mathematik lernen, weil man sie brauche. Sicher – und das würde Weitz wohl auch nicht bestreiten, einige Grundlagen der Mathematik sind in der Tat nötig oder zumindest nützlich, um sich in unserer modernen Gesellschaft zurechtzufinden, um politische Entscheidungen bewerten und mitgestalten zu können. Diagramme, Prozente, bedingte Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte, da wird man schnell Konsens finden (könnte man denken). Aber was braucht man in der beruflichen Praxis? Ich fürchte, dass die Mathematikdidaktik die Berufs- und Fachoberschulen und erst recht die Berufsausübung so lange vernachlässigt hat, dass die einzig ehrliche Antwort ist: Wir wissen es nicht. Was braucht man für das Studium? Die MaLeMINT- und MaLeMINT-E-Studien haben Anforderungen aus einer Vielzahl von Studiengängen zusammengetragen und geben damit der Diskussion eine solide Grundlage. Trotzdem bleiben Fragen offen: Braucht man das, was in den Studienordnungen steht und was die Dozierenden erwarten nur für die Prüfungen oder auch in den Berufen, die man danach ausübt? Das ist eine weiterreichende Frage, auf die es bestenfalls Ansätze von Antworten gibt. Edmund Weitz hat bzgl. der Ausbildung an Hochschulen Zweifel angemeldet. Und selbst bezüglich elementarer Schulmathematik ist Nützlichkeit im Alltag keineswegs garantiert. Es ist mir noch nicht gelungen, eine Ingenieur*in oder Architekt*in zu treffen, die jemals den Inkreis eines Dreiecks mit Zirkel oder DGS konstruiert hätte. Dagegen müssen viele Ingenieur*innen Programmieren, Gleichungen und Differentialgleichungen und/oder Optimierungsprobleme lösen. Dazu braucht man solide elementare Algebra. Für Simulationen auch Stochastik. Im Zweifel schreibt man häufiger das Summenzeichen als das Integralzeichen. Hilfreich ist sicher, eine Vorstellung von numerischen Verfahren zu haben, zwischen Approximations- und Modellierungsfehler unterscheiden zu können. Aber nicht mal alle Ingenieur*innen und Natwurwissenschaftler*innen brauchen all das das. Und in anderen Berufsfeldern dürfte es viel weniger sein. Heymann mahnt uns allerdings, dass Allgemeinbildung nicht an bestimmten Berufen ausgerichtet werden darf. Andererseits fordert er die Orientierung an zukünftigen Aufgaben – und dazu gehört sicher eine realistische Einschätzung, welche Rolle Mathematik tatsächlich jenseits von Studium und Ausbildung spielt. Dazu sollten wir noch mehr solides Wissen zusammentragen.

Neben dieser, wenn man so will, utilitaristischen Perspektive gibt es eine zweite, die in Diskussionen zum Thema schnell ins Feld geführt wird: Der in vielen Lehrplänen zitierte oder plagiierte Heinrich Winter hat uns als dritte Grundhoffnung gegeben, dass man in der Mathematik ein Denken lernen könne, das über die Mathematik hinaus relevant sei. Dieses Denken ermöglicht Problemlösen und genaues Argumentieren, es erzieht, Dinge kritisch zu hinterfragen und Begründungen einzufordern. Ich möchte das nicht nur glauben, ich glaube es – obwohl man zugeben muss, dass es wohl keine Studie gibt, die das in dieser Allgemeinheit versucht hat zu zeigen. Zugegeben, Mathematiker*innen denken besonders, sonst gäbe es keine Mathematiker*innenwitze, über die andere nicht lachen können. „Sei epsilon < 0“. Wer da verständnislos schaut, saß nie in einer Mathevorlesung. Und selbst in Detailfragen kann man Einflüsse des Studiums nachweisen: Eine Nebenerkenntnis von Studien zu Grundvorstellungen in der Analysis war, dass Studierende, die auch Physik gewählt haben, andere Vorstellungen in ihrem Denken bevorzugen als solche, die „nur“ Mathematik studieren. Eine professionelle Deformation ist aber noch kein für alle anzustrebendes Ziel. Ob mathematische Bildung tatsächlich weit abseits mathematischer Themen etwas bewirkt, lässt sich nur spekulativ beantworten. Zur Vorsicht mahnen sollte bei solchen Überlegungen zur allgemeinen Bildungswirkung bestimmter Schulfächer die Studie von Haag und Stern, die entgegen verbreiteten Annahmen keinen Effekt des Lateinlernens auf allgemeine kognitive Fähigkeiten gefunden hat. Eine vergleichbare Studie zur Mathematik hat es wohl noch nicht gegeben. Es ist also nicht klar, ob die Legitimation des Mathematikunterrichts über das Formalbildungsargument sich empirisch wird halten lassen. Zusammengefasst kann man sagen, dass sowohl die inhaltlichen wie die formalen Argumente für den Mathematikunterricht kritisch hinterfragt werden können. Der Vergleich mit Latein bietet sich in mehrerer Hinsicht an, und er eröffnet eine ebenso lehrreiche wie beunruhigende Perspektive. Einst war Latein schlicht notwendig, um sich auf hohem Niveau informieren und austauschen zu können. Als man es dann nicht mehr brauchte, schwand seine Bedeutung und die konservierende Überzeugung, es fördere das Denken, kam unter empirischen Beschuss. Poincarés Wiederkehrsatz – um dahin zurückzukehren – sagt nicht eine exakte Periode vorher, sondern nur eine Analysis-typische Annäherung. Wiederholt sich die Geschichte des Bedeutungsverlusts des Schulfachs Latein jetzt mit der Mathematik? Vieles spricht dafür. Wir alle sind der Überzeugung, Mathematik sei wichtig – ich hoffe nicht nur, weil uns die Folgen dieser verbreiteten Ansicht in Lohn und Brot gebracht haben. Es ist offensichtlich, was getan werden sollte, um die Bedeutung der Mathematik auf beiden Argumentationsschienen deutlich zu machen: Erstens muss die Nützlichkeit mathematischer Bildung in unserer Welt deutlich werden. Dazu sollten die Inhalte und Methoden überdacht werden. Es sollte kritisch hinterfragt werden, welchen Sinn es hat, mit Computerhilfe Problemlösungen zu simulieren, die notwendig waren, als es noch keine Computer gab. Es sollte untersucht werden, welche mathematischen Konzepte sich beim Strukturieren auch von außermathematischen Fragen bewähren (ich denke z. B. an Graphen, insbesondere auch an Kausalitätsgraphen) und welche davon in den Unterricht integriert werden könnten, um veraltete Inhalte zu ersetzen. Zweitens sollten wir die Hoffnung auf eine über das Fach hinausgehende Wirkung des mathematischen Denkens nicht aufgeben, sondern gezielt fördern. Dazu gehören Heuristiken des Problemlösens (und dazu wurde schon erfreulich viel geforscht), aber auch der penible Umgang mit Formalismen. Wenn Lateinunterricht tatsächlich über die Sprache selbst hinaus grammatikalische Fähigkeiten fördern sollte, dann liegt das – so vermute ich – eben daran, Analysen ganz genau zu betreiben und jede Endung ernst zu nehmen – mathematisch gesprochen sich also nicht mit gerundeten Ergebnissen zufrieden zu geben. Mathematikunterricht kann diese schärfende Funktion formaler Präzision gerade auch in der Kommunikation mit Computersystemen oder der Fassung schillernder Begriffe wie dem der Unendlichkeit zeigen.

Angenommen aber, Mathematik sei weder für den Beruf notwendig noch für die Entwicklung des Denkens nützlich, dann beliebt doch etwas jenseits aller Nützlichkeit: Mathematik ist schön. Diese Antwort, die auch Edmund Weitz gibt, legitimiert nicht ein Pflichtfach Mathematik, aber sie reicht aus, allen Heranwachsenden zumindest das Angebot zu machen, diese schöne Welt entdecken zu dürfen.

Reinhard Oldenburg
(1. Vorsitzender der GDM)

LAMBDA: Lehrerausbildung in Mathematik – Best Practice digitaler Anwendung

Heike Hahn und Natalie Hock

Theoriebezug

Der Umgang mit digitalen Medien ist sowohl für die meisten Erwachsenen als auch für Schülerinnen und Schüler selbstverständlich und Bestandteil ihres alltäglichen Lebens. Nicht nur im Alltag, auch in der Arbeits- und Berufswelt sind digitale Medien mittlerweile weit verbreitet. Diese Allgegenwärtigkeit hat in den vergangenen Jahren – auch bereits vor der Corona-Pandemie – die Notwendigkeit der Professionalisierung von (angehenden) Lehrkräften bezüglich des Einsatzes digitaler Medien im Unterricht verstärkt, was beispielsweise die Strategien der Kultusministerkonferenz zur Bildung in der digitalen Welt einfordern (Kultusministerkonferenz, 2017). In diesem Professionalisierungsprozess besitzen die lehrerbildenden Universitäten mit der ersten Phase der Lehrkräfteausbildung eine besondere Verantwortung beim Erwerb von Qualifikationen in diesem Bereich, denn in jedem Unterrichtsfach sollen digitale Kompetenzen durch fachspezifische Sach- und Handlungszusammenhänge entwickelt werden. Hierdurch wird deutlich, dass Medienbildung in universitären Veranstaltungen stets im Verbund mit fachlichen und fachdidaktischen Inhalten stattfinden kann und muss. Ferner sollen alle (angehenden) Lehrkräfte in der Lage sein, digitale Medien adäquat im Unterricht einzusetzen, um eine lernförderliche, individuell unterstützende und inhaltsangemessene Lernumgebung zu realisieren sowie den digitalen Medieneinsatz zu reflektieren (Kultusministerkonferenz, 2017).

Projektetablierung

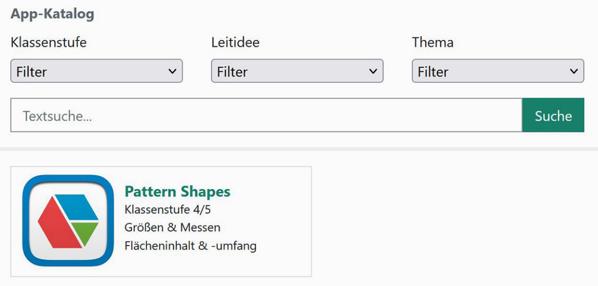
Um diese Verknüpfung zu erreichen, wurde das Projekt „**L**ehrer**a**usbildung in **M**athematik – **B**est **P**ractice digitaler **A**nwendung" (kurz: LAMBDA) etabliert, in dem ein semesterübergreifender, lehrveranstaltungsunabhängiger, digitaler Lernraum auf der Lernplattform Moodle (dem Lernmanagementsystem der Universität Erfurt) für alle Lehramtsstudierenden aller Studienjahre und Schularten entwickelt wird. Inhaltlich finden digitale Werkzeuge wie Apps, Erklärvideos und interaktive Übungen als mediale Elemente Berücksichtigung, da sie sich als zentrale Gestaltungsformate von Lehr-Lern-Prozessen herausgestellt haben (siehe Petzko (2014), Ladel (2016), Brandt et al. (2020)). Besonders ist hierbei, dass neben Wissensbausteinen zu allen medialen Elementen Best-Practice-Beispiele zum Einsatz der entsprechenden Elemente im Mathematikunterricht angeboten werden, die Studierenden Anregungen geben, wie das jeweilige mediale Element bei einem Unterrichtsinhalt verständnisunterstützend eingesetzt werden kann. Anlass dafür sind Beobachtungen in fachdidaktischen Schulpraktika, die zeigen, dass es vielen Lehramtsstudierenden aller Schularten schwerfällt, das erworbene fach- und mediendidaktische Wissen konkret und methodisch passend unter Einbeziehung medialer Elemente für einen lernförderlichen Unterricht einzusetzen. Ähnliche Beobachtungen waren auch in fachdidaktischen Seminaren erkennbar, in denen ebenso digitale Medien zum Einsatz kamen, was durch die Abbildung 1 illustriert werden soll.

Abbildung 1. Gespräch zwischen Dozierenden und Studierenden

Im Folgenden wird nun auf die bisherige Entwicklung und den aktuellen Stand beim Aufbau des Lernraumes eingegangen. Darüber hinaus wird am Ende ein Ausblick bezüglich der weiteren Entwicklung sowie des Einsatzes des Lernraumes in der Lehre an der Universität Erfurt gegeben.

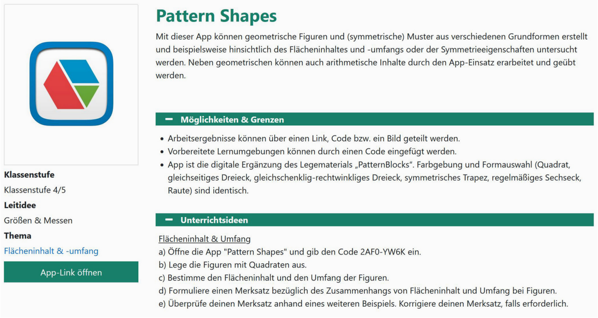
Entwicklung des Lernraumes und aktueller Stand

Zunächst wurde eine Fragebogenerhebung bei Lehramtsstudierenden durchgeführt, um ihre Erwartungen an einen Lernraum zu erfassen und ihn entsprechend der Rückmeldungen adressatengerecht gestalten zu können. Im Ergebnis der Befragung wurde deutlich, dass die befragten Studie-



Pattern Shapes
Klassenstufe 4/5
Größen & Messen
Flächeninhalt & -umfang

Abbildung 2. Filter für Apps im Mathematikunterricht



Pattern Shapes

Mit dieser App können geometrische Figuren und (symmetrische) Muster aus verschiedenen Grundformen erstellt und beispielsweise hinsichtlich des Flächeninhaltes und -umfangs oder der Symmetrieeigenschaften untersucht werden. Neben geometrischen können auch arithmetische Inhalte durch den App-Einsatz erarbeitet und geübt werden.

Klassenstufe
Klassenstufe 4/5
Leitidee
Größen & Messen
Thema
Flächeninhalt & -umfang

– Möglichkeiten & Grenzen

- Arbeitsergebnisse können über einen Link, Code bzw. ein Bild geteilt werden.
- Vorbereitete Lernumgebungen können durch einen Code eingefügt werden.
- App ist die digitale Ergänzung des Legematerials „PatternBlocks“. Farbgebung und Formauswahl (Quadrat, gleichseitiges Dreieck, gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, symmetrisches Trapez, regelmäßiges Sechseck, Raute) sind identisch.

– Unterrichtsideen

Flächeninhalt & Umfang
a) Öffne die App "Pattern Shapes" und gib den Code 2AF0-YW6K ein.
b) Lege die Figuren mit Quadraten aus.
c) Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der Figuren.
d) Formuliere einen Merksatz bezüglich des Zusammenhangs von Flächeninhalt und Umfang bei Figuren.
e) Überprüfe deinen Merksatz anhand eines weiteren Beispiels. Korrigiere deinen Merksatz, falls erforderlich.

Abbildung 3. Struktur der Ergebnisseite zur App „Pattern Shapes“

renden ein großes Interesse bezüglich des App-Einsatzes im Mathematikunterricht besitzen und Informationen wie eine Kurzbeschreibung der App, möglicher Klasseneinsatz, den Preis, Vor- und Nachteile sowie konkrete Unterrichtsbeispiele für den App-Einsatz wünschen. Ferner sollten bezüglich mathematischer Erklärvideos Tools zum Erstellen, Kriterien zur Auswahl eines guten Erklärvideos sowie entsprechende Beispiele Berücksichtigung finden.

Aufgrund des großen Interesses der Studierenden am Einsatz von Apps im Mathematikunterricht wurde beim Aufbau des Lernraumes mit diesem medialen Element begonnen.

Zur Gewährleistung einer übersichtlichen Strukturierung aller Apps wurde durch eine externe Spezialfirma für E-Learning ein neues Plug-In für Moodle entwickelt. Dieses Plug-In ermöglicht eine Filtrierung aller Apps nach den Kriterien Klassenstufe, Leitideen laut Bildungsstandards des Mittleren Schulabschlusses sowie für den Primarbereich und mathematische Thematik, wobei das letztgenannte Kriterium von der Klassenstufe und der Leitidee abhängig ist (siehe Abbildung 2) (Kultusministerkonferenz, 2003, 2004). Bezüglich des Filters „Klassenstufe“ werden in Übereinstimmung mit dem Lehrplan in Thüringen jeweils Doppeljahrgangsstufen (wie 1 & 2, 3 & 4, usw.) angeboten.

Eine Volltextsuche ermöglicht es, alle Ergebnisseiten nach passenden Begriffen wie mathematische Thematik, Unterrichtsphase oder ähnliches zu durchsuchen.

Außerdem wurde folgende Struktur für die „Ergebnisseiten“ festgelegt:

- Kurzbeschreibung der App
- Möglichkeiten und Grenzen der App
- Unterrichtsideen

Diese Unterteilung ermöglicht einen einheitlichen Aufbau der Seiten bei Apps mit Aufgabenstellungen (Beispiel: Klipp Klapp) und ohne Aufgabenstellungen (Beispiel: Pattern Shapes).

In der Abbildung 3 ist dies exemplarisch für die App Pattern Shapes erkennbar.

Weitere Entwicklung des Lernraumes

Im weiteren Projektverlauf werden als nächstes zu diversen Apps „Ergebnisseiten“ erstellt und konkrete Unterrichtsideen entwickelt, erprobt und reflektiert bzw. aus didaktischen Publikationen rezipiert. Eine Pilotierung der Unterrichtsideen findet in den passenden Schulformen und Klassenstufen zur Generierung der Best-Practice-Beispiele statt.

Ferner werden Auswahl- und Produktionskriterien sowie Produktionsmöglichkeiten von Erklärvideos adressatengerecht dargestellt und durch passende Beispiele illustriert. Zukünftig soll zudem ein Serviceangebot etabliert werden, in dem zum Beispiel ein technischer Support stattfindet.

Einsatz des Lernraumes in der Lehre

Aufgrund der Lehrveranstaltungsunabhängigkeit des Moodle-Lernraumes wird in den fachdidaktischen Lehrveranstaltungen sowohl im Bachelor- als auch im Masterstudium auf ihn aufmerksam gemacht. Somit kann der Lernraum einerseits von den Lehramtsstudierenden eigenständig genutzt werden, um Mathematikunterricht im Rahmen von Praktika vorzubereiten. Andererseits ist auch die konkrete Einbettung in Seminare durch gezielte Aufträge denkbar.

Mit der Umsetzung des Projektes LAMBDA können angehende Mathematiklehrkräfte verschiedener Schularten derart qualifiziert werden, dass sie die Chancen digitaler Medien – insbesondere den Einsatz von Apps und Erklärvideos – erkennen, aber auch ziel- und inhaltsadäquat nutzen und zudem kritisch reflektieren, was mit den Strategien der KMK (2017) einhergeht.

Literaturverzeichnis

Brandt, B., Bröll, L. & Dausend H (Hrsg.) (2020). *Digitales Lernen in der Grundschule II.: Aktuelle Trends in Forschung und Praxis.* Waxmann.

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. tinyurl.com/shepqfp

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. tinyurl.com/y7d6t9qq

Kultusministerkonferenz (2017). *Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“*. tinyurl.com/2ynlvypo

Ladel, S. (2016). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. In M. Peschel & T. Irion (Hrsg.), *Neue Medien in der Grundschule 2.0. Grundlagen – Konzepte – Perspektiven* (S. 154–165). Grundschulverband.

Petzko, D. (2014). *Einführung in die Mediendidaktik. Lehren und Lernen mit digitalen Medien*. Beltz.

Heike Hahn, Universität Erfurt
E-Mail: heike.hahn@uni-erfurt.de

Natalie Hock, Universität Erfurt
E-Mail: natalie.hock@uni-erfurt.de

Die elementare Version des Nim-Spiels als App

Eine digitale Experimentierumgebung

Günter Krauthausen & Heiko Etzold

Ausgangssituation

Seit den 1990er Jahren wird die (fach-)didaktische Qualität digitaler Werkzeuge für die Grundschule anhaltend beklagt (Krauthausen, 1991). Ging es damals vornehmlich um Produkte für den gerade erst im Grundschulbereich zugelassenen PC und sog. Lernsoftware auf Disketten bzw. CD-ROM, so haben sich das Interesse und der Markt seit Erscheinen des iPad im Januar 2010 zunehmend auf Tablet-Anwendungen verlegt. Die Klagen über die Qualität der entsprechenden Apps sind jedoch nicht signifikant weniger geworden.

Bisherige Bestandsanalysen (Goodwin & Highfield, 2013; Larkin, 2014 & 2015) sehen neben einer thematischen Dominanz von *Number and Algebra* bzw. der Leitidee *Zahlen und Operationen* v. a. ein nach wie vor instruktives Design bei etwa drei Vierteln des Angebots. Auch Walter (2022) findet in seiner Bestandsaufnahme des App-Stores unter 137 Apps kaum solche zu den weiteren Leitideen der KMK-Standards und ebenso wenig Apps, mit denen ausdrücklich auch die allgemeinen, prozessbezogenen Kompetenzen (KMK, 2005) in den Blick genommen werden.

Vor allem in Relation zu der schier unüberschaubaren Menge des Marktangebots – Walter (2022) spricht mit Bezug auf das Portal *statista* von 400 000 Apps in der (allerdings recht allgemeinen) Rubrik *Bildung* (Stand Februar 2022) – stellen auch Apps, die nachweislich fachdidaktischen Gütekriterien entsprechen, noch ein sehr kleines Angebot dar. Aber, das muss ausdrücklich hervorgehoben werden, es hat sich eine Menge getan, seitdem die fachdidaktische Community ihre Rolle als an sich zwingend notwendiger Player bei der Entwicklung und Beforschung von HighQuality-Apps angenommen hat. Zahlreiche v. a. jüngere Kolleginnen und Kollegen aus der Mathematikdidaktik befassen sich seit rund zehn Jahren intensiv mit ‚guten‘ Apps, sei es in der Forschung und/oder in der Entwicklung. Beispiele wie *Klötzchen* (Etzold, 2021), *Klipp Klapp* (Etzold, 2020) – hier wird erfreulicher Weise auch einmal die Geometrie adressiert! – , *Stellenwerttafel* (Kortenkamp, 2019) oder die Apps von Urff wie z. B. *Rechendreieck* (2018) oder *Rechenfeld* (2022) sind auch in Grundschulen inzwischen wohlbekannt und im Zuge des Digitalpakts breit im Einsatz.

Damit beginnt sich das Spektrum zwischen den als ‚Extremen‘ gedachten *Automatisierungs*-Apps wie *Blitzrechnen* (Klett Verlag, o. J.) und dem *Zahlenforscher* (Krauthausen, 2006) als eine Anwendung zum *produktiven Üben* und zu allgemeinen Kompetenzen wie das Kommunizieren und Problemlösen zu füllen. Unter den lange formulierten Hoffnungen (zuletzt Krauthausen, 2020) lauteten zwei wie folgt:

1. Mehr Experimentier- & Simulationsumgebungen zum Erkunden mathematikhaltiger Situationen:
Ein frühes Beispiel zu einer solchen Kategorie, das Newton-Pendel (Krauthausen, 1994), wurde nur

zu Forschungszwecken eingesetzt und war nie für eine Markteinführung vorgesehen. In dieser grundsätzlich aber wünschenswerten Kategorie (Simulationen) wäre es auch sehr naheliegend, den allgemeinen Kompetenzen verstärkt zu ihrem Recht zu verhelfen!

2. Klein aber fein statt All-in-one:
Zu viele Produkte des App-Stores tendieren noch dazu, ihre thematischen Inhalte möglichst umfassend und ‚vollständig' auszuweiten. Umfangreiche (meist zufällig generierte) Aufgabensammlungen oder „Die ganze Mathematik für Klasse 3 auf 1 CD-ROM" war eine solche Praxis vor 20 Jahren, dem manchmal auch heutige Apps (und einige Lehrkräfte) noch anzuhängen scheinen. Aussichtsreicher scheinen uns hingegen – nicht allein wegen eines nur *ergänzend* gedachten Einsatzes digitaler Werkzeuge im Unterricht – kleinere, wohlausgewählte Ausschnitte mathematikhaltiger Kontexte oder Themen, die dann aber *state-of-the-art* sind …

- im Design (User Interface),
- in der Handhabung,
- in der potenziellen Handlungsvielfalt,
- in der fachlichen Substanz,
- im fachdidaktischen Support (gehaltvolle Handreichungen) und
- in den Differenzierungsmöglichkeiten.

Als einen möglichen und unseres Erachtens geeigneten Kontext für eine Konkretisierung der beiden genannten Postulate haben wir uns das Strategiespiel Nim vorgenommen. Wir widmen uns im Folgenden zunächst der ‚Offline'-Variante, weil sich daraus Konsequenzen für die digitale App-Entwicklung erklären.

Das Strategiespiel Nim

Nim ist ein sehr altes Strategiespiel, das es in zahlreichen Varianten gibt: mit Wegnehmen statt Legen, mit Streichhölzern statt Plättchen, mit mehreren Stapeln usw. (Wikibrief, 2021). Im Folgenden legen wir eine elementare Version zugrunde (vgl. Wittmann, 1982, S. 81 ff.; Müller & Wittmann, 1984, S. 72–75), die ab der 1. Klassenstufe eingesetzt werden kann und auch bereits mit Vorschulkindern sowie Kindern mit besonderen Lernschwierigkeiten erfolgreich erprobt wurde (Scherer, 1996). Aber auch für Jugendliche und Erwachsene bietet das Spiel eine Herausforderung, wenn es darum geht, die *Gewinnstrategie* unter variablen Bedingungen zu identifizieren und v. a. zu verallgemeinern. Im Handbuch produktiver Rechenübungen (Wittmann & Müller, 2017, S. 42 f.) heißt das Spiel „Rot gegen Blau".

Die Spielregel
Es handelt sich um ein Zwei-Personen-Spiel. Abwechselnd legen die beiden Akteure (beginnend links bei Feld 1) Plättchen ihrer Farbe sukzessive auf den Spielplan. Man darf wahlweise jeweils ein oder zwei Plättchen auf die freien Plätze legen. Gewonnen hat, wer das letzte Feld belegt.

Die Spielregeln sind einfach und auch für jüngere Kinder unmittelbar zu verstehen. Dem Spiel liegt eine Gewinnstrategie zugrunde, d. h. man kann ein Spiel zu jedem Zeitpunkt (!) des Spielverlaufs kontrollieren und damit auch determinieren, sodass man sicher gewinnt – sofern man die Strategie kennt und ihr konsequent folgt. Neue Herausforderungen – auch für ältere Schülerinnen und Schüler und Erwachsene – stellen sich ad hoc ein, wenn man sich auf die verschiedenen Variationen einlässt. Diese ergeben sich durch die (singuläre oder kombinierte) Variation der drei Parameter Spielfeldlänge (F), maximal erlaubte Legezahl (L) und Status des letzten Feldes (*gewonnen/verloren*).

In der Online-Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer zur App (s. u.) werden die Grundform aus Abb. 1 und die prinzipiellen Parameter-Variationen bis hin zur verallgemeinerten Version für beliebige Feldlängen und Legezahlen fachlich verständlich aufgeklärt und begründet.

Typische Phasen des Spielverlaufs
Zahlreiche Erprobungen im Unterricht und in klinischen Interviews haben immer wieder die folgenden typischen Phasen deutlich gemacht, die daher später auch für die Gestaltung der digitalen App maßgeblich waren:

Freies Spielen. Zunächst werden – unbeschwert und noch wenig strategisch – mehrere Spieldurchgänge unternommen. Diese Phase liefert einerseits den Erfahrungshintergrund für die anschließende bewusstere Auseinandersetzung, und andererseits dient sie (v. a. bei jüngeren Kindern) der Festigung der Spielregeln.

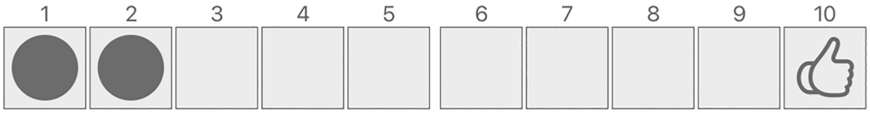


Abbildung 1. Spielplan mit 10 Feldern

Erste Vermutungen. Bald werden auch Ideen darüber geäußert, was wohl für das Gewinnen oder Verlieren verantwortlich sein könnte. Diese sind anfangs noch wenig argumentativ durchdrungen oder abgesichert; sie beruhen eher auf spontanen Assoziationen, evoziert durch situativ Erlebtes wie einen gerade gewonnenen Spieldurchgang.

Gezieltere Analyse. Nach einer gewissen Zahl von Spieldurchgängen wird dann eine Position (Gewinnposition) auf dem Spielplan augenfällig, ab der man mit Gewissheit sagen kann, ob man verlieren oder gewinnen wird. Auf dem Spielplan bis 10 ist das die Position 7, denn ab hier gibt es ab dann nur noch zwei Optionen für den bereits feststehenden Sieger: Entweder die Spielpartnerin legt ein rotes Plättchen, dann gewinnt Blau mit zwei gelegten Plättchen. Oder der Spielpartner legt zwei rote Plättchen, dann belegt Blau mit einem Plättchen die 10 und gewinnt ebenfalls.

Auffällig ist an dieser Stelle – sowohl bei Erwachsenen als auch bei Grundschulkindern –, dass manche sich hier bereits am Ziel wähnen, sobald die 7 als Gewinnposition identifiziert wurde. Eine Gewinnstrategie zu haben, bedeutet aber nicht erst bei der 7 zu wissen, ob man gewinnen wird, sondern zu jedem Zeitpunkt des Spielverlaufs, also auch bereits gleich zu Spielbeginn. Dazu muss man jederzeit wissen, wie man selbst vorgehen und wie man klugerweise auf die Lege-Aktionen der Spielpartnerin oder des Spielpartners reagieren sollte.

Die App

Die bisherige Erläuterung des Nim-Spiels deutet noch nicht zwingend daraufhin, dass für dieses eine digitale Alternative oder Ergänzung nötig wäre. Betrachtet man ausschließlich das freie Spielen, wollen wir auch gar nicht vom Gegenteil überzeugen. Spannend wird es aber dann, wenn die Schülerinnen und Schüler – ganz im Sinne der prozessbezogenen Kompetenzen – darin unterstützt werden sollen, Spielstrategien zu finden und zu begründen. Ins ‚Pflichtenheft' der App-Entwicklung hatten wir uns daher v. a. folgende Postulate geschrieben:

- Schwerpunkt der App sei das Erkunden und Problemlösen – initiiert durch die Analyse von beliebig vielen Vorgehensweisen/Spielverläufen mit dem Ziel, eine Gewinnstrategie finden, erklären und begründen zu können.
- Die App habe ein klare Bedienung durch eine zurückhaltende Benutzerschnittstelle (*"If something hasn't to be there, it is not there"*; J. Ive).
- Die App unterstütze Variabilität und Individualisierung (sachgerechte und flexible Einstellungs-Optionen).
- Die App ermögliche auch Kindern mit besonderen Bedürfnissen zur Teilhabe (etwa durch Bedienungshilfen) und biete vielen Schülerinnen und Schüler eine leichte Zugänglichkeit.

Die aus diesen Forderungen entwickelte Nim-App (Etzold, 2022a), die gleichermaßen auf dem iPad wie auch auf dem Mac (ab macOS 10.15) läuft, besteht aus drei Bildschirmdarstellungen (Abb. 2):

1. *Einstellungen*: Folgende Eingaben sind hier möglich: Feldlänge (5–20), Legezahl (1–4), Status letztes Feld (gewonnen/verloren), Namen der beiden Spielerinnen oder Spieler, Farbe ihrer Plättchen (6 zur Auswahl: die drei Primärfarben und die drei Sekundärfarben), Beschriftung der Spielfelder (ohne/nur Fünferzahlen/alle – sowohl in den *Globaleinstellungen* zu fixieren oder freizugeben, als auch auf allen weiteren Bildschirmen *jederzeit flexibel* zu ändern).
2. *Spiel*: Plättchen werden durch Antippen der Felder gelegt. Die App informiert durch zurückhaltende, status-adaptive Erinnerungen daran, wer an der Reihe ist, was jeweils getan werden kann oder wenn versucht wird, nicht regelkonform zu legen.
3. *Archiv*: Diese Funktion – die Einrichtung eines Archivs – ist sicher diejenige, die am meisten

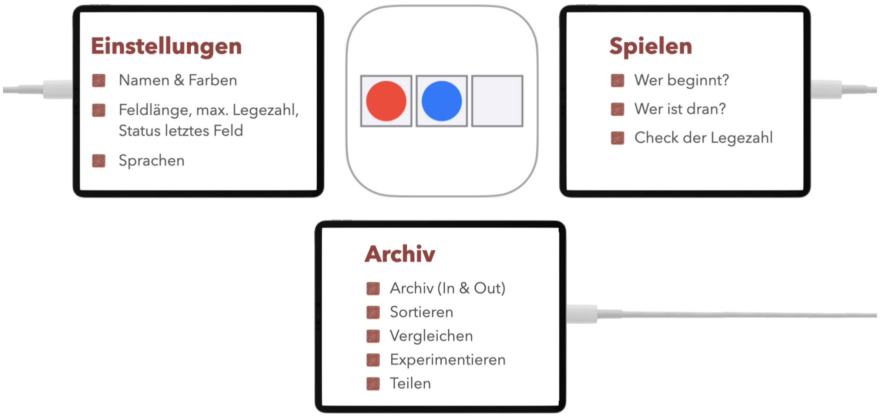
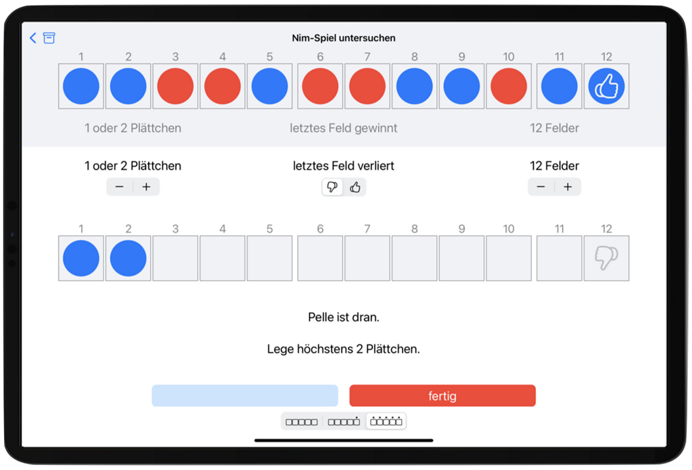


Abbildung 2. Die drei Ebenen der App: Einstellungen — Spielen — Archiv


Nim-Spiel untersuchen

1 oder 2 Plättchen

letztes Feld gewinnt

12 Felder

1 oder 2 Plättchen

letztes Feld verliert

12 Felder

Pelle ist dran.

Lege höchstens 2 Plättchen.

Abbildung 3. Genauere Untersuchung im Vergleich zweier Spielverläufe

die *medienspezifischen* Vorteile der Digitalisierung des Spiels adressiert. Wir betrachten sie daher im Folgenden eingehender.

Das Archiv
Thematisierungen des Nim-Spiels – sei es im Unterricht oder klinischen Interviews mit Kindern jeglichen Alters oder im Rahmen von Fortbildungen mit Erwachsenen – haben immer wieder gezeigt, dass die zahlreichen Spielverläufe bei der Suche nach einer Gewinnstrategie sehr schnell das Arbeitsgedächtnis der Akteure jedweden Alters überfordern. Der Überblick geht bald verloren. Und je zufälliger die Spiele aufeinander folgen und je mehr nur das aktuelle Spiel Grundlage des Nachdenkens ist, um so weniger Anbindungen und Vernetzungen mit vorausgegangenen Erfahrungen sind möglich. Das be- oder verhindert eine gründliche Analyse. Es gibt für das analoge Spielen im Unterricht *work-arounds* in Form von kopierten Spielplan-Vorlagen, die aber in unterschiedlicher Länge und Größe (für eine Diskussion im Plenum) verfügbar sein müssten. Auch das Sortieren, dem hier bei der Strategieanalyse eine besondere Bedeutung zukommen kann, ist nur mit einem gewissen Aufwand möglich.

Es ist also die eminent wichtige *Rolle der Dokumentation*, die besonderer Beachtung bedarf. Dazu sind in der App die folgenden Optionen integriert:

- *Transfer ins Archiv*: Mit dem Ausfüllen des letzten Feldes eines Spielverlaufs erfolgt eine Rückmeldung, wer gewonnen hat. Anschließend kann das Spiel ins Archiv bewegt werden (oder man startet, ohne Archiv, ein neues Spiel). Mit nur einem Fingertipp lassen sich so sämtliche Spielverläufe, auch mit allen möglichen Parametervariationen, auf Dauer im Archiv verfügbar halten und nachhaltig dokumentieren.
- *Sortier-Optionen*: Die Spielverläufe im Archiv lassen sich manuell per *drag-&-drop* umsortieren – sowie zusätzlich nach Feldlänge, chronologisch oder nach der beginnenden Farbe ordnen. Die spaltenweise Anordnung ist in waagerechter Richtung scrollbar, wenn sehr viele Spiele im Archiv liegen. Diese Optionen erleichtern direktere Vergleiche von Spielverläufen und machen Hypothesen leichter prüfbar, weil beliebig viele Spielverläufe dafür einbezogen werden können.
- *Split-Screen-Technik*: Die systemimmanente Multitasking-Funktion des iPads erlaubt es, neben der Nim-App auch eine weitere App zu öffnen, die Multitasking unterstützt. So kann etwa die Notizen-App daneben gelegt werden, um Vermutungen hinsichtlich der Spielstrategie zu notieren. Die Multitasking-Funktion ist ebenfalls geeignet, um die Nim-App selbst zweimal nebeneinander geöffnet zu haben, wenn etwa das Spiel mit verschiedenen Parametern vergleichend durchgeführt werden soll.
- *Exportieren*: Das Archiv kann vollständig oder mit einer beliebigen Auswahl an Spielverläufen exportiert (App-eigenes nim-Format) oder als pdf-Datei ausgedruckt/gespeichert/geteilt werden. Öffnet man ein zuvor gespeichertes nim-Archiv (z. B. über die Dateien-App), kann man dieses zu seinem bisherigen Archiv hinzufügen oder das alte Archiv überschreiben.
- *Untersuchen*: Tippt man im Archiv ein einzelnes Spiel an, erhält man die Möglichkeit, dieses nach einer Bestätigungsabfrage zu löschen oder genauer zu untersuchen. Im letzteren Fall wird dann das Archiv-Spiel (grau hinterlegt) sowie ein weiteres Spiel mit zunächst denselben Voreinstellungen dargestellt (Abb. 3). Die Einstellungen des zweiten Spiels sind nun variierbar, d. h. es kann simultan sichtbar und vergleichend zum ursprünglich dargestellten Spiel gespielt werden.

Zugänglichkeit und Teilhabe

Die App unterstützt einige der betriebssysteminternen Bedienungshilfen (in den Globaleinstellungen des iPad bzw. Systemeinstellungen des Mac), die Kindern mit besonderen Bedürfnissen die Nutzung der App erleichtern können.

- *Farben und Kontraste*: Die Nim-App unterstützt die kontrastreichere Darstellung von Farben, wenn diese über die Bedienungshilfen aktiviert werden. Über die entsprechenden Einstellungen können auch Farbfilter, bspw. bei Farbfehlsichtigkeiten, angepasst werden. Auch der Dunkelmodus wird von der Nim-App unterstützt.
- *Schriftgröße*: Die App unterstützt dynamische Schriftgrößen. Diese können nicht nur global eingestellt werden, sondern ab iOS 15, auch für diese einzelne App. Mit dieser Option sollte jedoch behutsam umgegangen werden, da die Bildschirmdarstellung ab einer bestimmten Vergrößerung verständlicherweise deutlich verschoben und zumindest ungewöhnlich aussehen kann.
- *Texte vorlesen lassen*: Die im System verankerte Funktion *VoiceOver* ermöglicht das Vorlesen einzelner Bildschirminhalte. Eine Bedienung bei eingeschalteter *VoiceOver*-Funktion ist aber nicht trivial und sollte daher nur dann genutzt werden, wenn (bspw. blinde oder sehbehinderte) Schülerinnen und Schüler darauf angewiesen sind. Innerhalb der Nim-App wurden in der deutschen und englischen Sprachversion für einige Bedienelemente spezifische Texte hinterlegt. Wird beispielsweise die Farbwahl geöffnet und ein farbiges Feld angetippt, so wird vom Gerät die entsprechende Farbe vorgelesen. Auch beim Antippen des Spielfeldes wird vorgelesen, um welches Feld (z. B. „Feld 3 von 10“) es sich gerade handelt. Die Realisierung dieser Unterstützung wurde jedoch bisher noch nicht mit Schülerinnen und Schülern erprobt, die auf das Vorlesen von Bildschirminhalten angewiesen sind, weshalb wir für entsprechende Rückmeldungen dankbar sind.

Im Sinne einer besseren Zugänglichkeit unterstützt die App verschiedene Sprachoptionen, u. a. Deutsch, Englisch und Französisch, aber gerade in Hinblick auf den Unterricht mit geflüchteten Schülerinnen und Schülern auch zum Beispiel Ukrainisch und Arabisch (wobei hier folgerichtig auf der Spielen-Seite auch von rechts nach links gelegt werden muss – auch als Beitrag zur interkulturellen Bildung nutzbar). Indem der Quelltext der App frei zur Verfügung steht (Etzold, 2022b), können Unterstützerinnen und Unterstützer unkompliziert dazu beitragen, weitere Sprachen zu integrieren oder auch – Programmiererinnen und Programmierer fühlen sich bitte aufgefordert – die App für andere Plattformen zu adaptieren.

Handreichung für Lehrkräfte

Nicht selten werden Mathe-Apps auf den Markt geworfen und die Lehrerinnen und Lehrer sind anschließend sich selbst überlassen, diese (erst einmal zu finden sowie) sinnvoll im Unterricht einzusetzen. Bei den weit verbreiteten *drill-and-practice*-Apps mag dies ja noch nachvollziehbar und realisierbar sein, aber gerade wenn prozessbezogene Kompetenzen in Experimentierumgebungen von Bedeutung sind, halten wir mehr Unterstützung für angebracht. Aus diesem Grund haben wir uns entschieden, mit der Veröffentlichung der App unmittelbar auch eine Handreichung für Lehrkräfte und andere Interessierte zur Verfügung zu stellen, die jedoch mehr als nur die Funktion einer Bedienungsanleitung übernimmt. Die 40-seitige Handreichung kann online eingesehen oder als pdf-Datei abgerufen werden (Etzold & Krauthausen, 2022). Enthalten sind neben der Beschreibung des Nim-Spiels, der Nim-App und der fachlichen Aufklärung der Gewinnstrategie(n) auch didaktische Empfehlungen für eine unterrichtliche Thematisierung des Nim-Spiels – mit oder ohne App. Die Handreichung ist als offene Bildungsressource lizenziert, um Anpassungen für Lehrkräfte und andere Interessierte unkompliziert und rechtssicher zu ermöglichen.

Zusammenfassung

Wir denken, dass die *allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen* i. S. der KMK-Standards mithilfe der App weitreichend gefördert und gefordert werden können: Das Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen und auch Darstellen lässt sich sowohl im Spielmodus, als auch beim Austausch im Plenum praktizieren und *explizit thematisieren*. Damit ist gemeint, dass nicht ‚nur‘ argumentiert *wird* und Probleme gelöst *werden*, sondern dass allgemeine Kompetenzen wie diese auch ausdrücklich zum *Thema*, also Unterrichts-*Inhalt* werden, z. B.:

- Was macht eine ‚gute‘ Argumentation aus?
- Was lernen wir im Vergleich zweier konkreter Argumentationen *A* und *B*?
- Wie ‚geht Problemlösen‘, d. h. welche heuristischen Strategien gibt es (z. B. das Rückwärtsarbeiten, mit dem sich gerade das Nim-Spiel aufklären lässt)?
- Wie kann man Vermutungen prüfen und sich z. B. vor vorschnellen Deutungen und Schlussfolgerungen schützen? Nicht alles, was auf den ersten Blick wie eine Falsifikation wirkt, muss tatsächlich eine solche sein (man denke an einen Fall von *notwendig, aber nicht hinreichend*).

Lernen findet also nicht ‚nur‘ statt *durch* prozessbezogene Kompetenzen, sondern es handelt sich auch um ein Lernen *über*. Die Teilen-Funktionen der App legt es z. B. auch nahe, einzelne oder ausgewählte Spielverläufe der Kinder zu sammeln, neu zusammenzustellen und (z. B. über AirPlay) für die ganze Lerngruppe sichtbar und verfügbar zu machen – zum gemeinsamen Diskutieren und Beraten, über ein interaktives Whiteboard oder einen Beamer.

Zwangsläufig sind natürlich auch *inhaltsbezogene* mathematische Kompetenzen angesprochen – wenn auch bei weitem nicht so primär und im Vordergrund stehend, wie man es von der Masse sog. ‚Apps zum Lernen' kennt. Aber das ist weder Zufall noch ein Nachteil – im Gegenteil: Wir haben bewusst und gezielt versucht, eine Produkt-Entwicklung zu konkretisieren, die die allgemeinen Kompetenzen nicht nur ‚irgendwie' oder auf der Proklamationsebene mitlaufen lässt, sondern sie explizit in den Mittelpunkt stellt. Vielleicht können wir damit eine Tür öffnen für eine solche weitere App-Kategorie und d. h. für interessierte Nachahmer und dann weitere vergleichbare Produkte.

Aber über all dem steht selbstverständlich die Botschaft, dass auch diese App keine Anwendung zum ‚automatischen Selbstlernen' sein soll und kann. Enthaltene ‚Beschränkungen' wie die Feldlängen bis 20 oder die Legezahlen bis 4 sind weder ein Versehen noch einer technischen Grenze geschuldet, sie stellen bewusste Entscheidungen dar. Die App soll aus guten Gründen keine ‚vollständige Simulation' des Nim-Spiels liefern, durch die der staunende User über die zunehmende Verallgemeinerung für alle Parameter ‚belehrt' würde. Wir verstehen die App vielmehr als Rampe für Erkundungen und Problemlöseprozesse, als initiierende Experimentierumgebung, die didaktisch kundig eingebettet werden sollte.

Jene Erfahrungen und Einsichten, die für eine weiterreichende Betrachtungen auf höherem Niveau notwendig sind, lassen sich über die App aber allesamt erwerben. Für dieses höhere Niveau lege man die App dann aber getrost beiseite.

Literatur

Etzold, H. (2022a). *Nim* (1.0) [App]. apps.apple.com/de/app/nim/id1590325148

Etzold, H. (2022b). *nim-app* [Quelltext]. github.com/heiko-etzold/nim-app

Etzold, H. (2021). *Klötzchen* (7.1) [App]. apps.apple.com/at/app/klötzchen/id1027746349

Etzold, H. (2020). *Klipp Klapp* (2.0) [App]. apps.apple.com/at/app/klipp-klapp/id1157365733

Etzold, H., & Krauthausen, G. (2022). *Nim-Spiel – Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 1.0). heiko-etzold.github.io/nim-material/de/1.0

Goodwin, K., & Highfield, K. (2013). A Framework for Examining Technologies and Early Mathematics Learning. In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 205–226). Springer Science+Business Media.

Klett Verlag (o. J.): *Blitzrechnen* 0–4 [App]. apps.apple.com/de/app/blitzrechnen-1-mathe-üben/id1027799669

KMK (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15. 10. 2004*. Luchterhand Wolters Kluwer.

Kortenkamp, U. (2019). *Stellenwerttafel* (Version 5.0) [App]. apps.apple.com/at/app/stellenwerttafel/id568750442

Krauthausen, G. (1991). Software im Mathematikunterricht: Eine Betrachtung aus fachdidaktischer Sicht. *Schulpraxis/Computer Bildung*, *5/6*, 36–41.

Krauthausen, G. (1994). Mathematik-treiben im ganzheitlichen Sachkontext: Schulanfänger erkunden Zahlbeziehungen. *Computer und Unterricht*, *15*, 19–23.

Krauthausen, G. (2006). *Zahlenforscher 1: Zahlenmauern. CD-ROM & Didaktische Handreichung*. Auer.

Krauthausen, G. (2020). Tablets ante portas – Innovation oder/und Déjà-vu (?). In B. Brandt, L. Bröll & H. Dausend (Hrsg), *Digitales Lernen in der Grundschule II. Aktuelle Trends in Forschung und Praxis* (S. 41–60), Waxmann.

Larkin, K. (2014). iPad apps that promote mathematical knowledge? Yes, they exist! *APMC*, *19*(2), 28–32.

Larkin, K. (2015). »An App! An App! My Kingdom for an App«: An 18-month quest to determine whether apps support mathematical knowledge building. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls* (pp. 249–274). Springer Science+Business Media Dordrecht. DOI:10.1007/978-94-017-9517-3_13

Müller, G., & Wittmann, E. C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe* (3. Aufl.). Vieweg.

Scherer, P. (1996). Das NIM-Spiel – Mathematisches Denken auch für Lernbehinderte? In W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.), *Mathematik und Sachunterricht im Primar- und Sekundarbereich – Beispiele sonderpädagogischer Förderung* (pp. 88–98). Diesterweg.

Urff, C. (2018). *Rechendreieck* (Version 1.3) [App]. apps.apple.com/de/app/rechendreieck/id575736731

Urff, C. (2022). *Rechenfeld* (Version 2.1) [App]. apps.apple.com/de/app/rechenfeld/id1558366734

Walter, D. (2022). Durchblick im App-Dschungel. *Mathematik differenziert*, *3*, (im Druck).

Wikibrief (2021). *Nim – Wikibrief*. de.wikibrief.org/wiki/Nim

Wittmann, E. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*. Vieweg.

Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (Neufassung). Klett.

Günter Krauthausen, Universität Hamburg
E-Mail: krauthausen@uni-hamburg.de

Heiko Etzold, Universität Potsdam
E-Mail: heiko.etzold@uni-potsdam.de

Kriterien zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik

Adaptation eines Evaluationsinstruments im Rahmen des Schülerforschungsclubs (SFC) Mathematik mit digitalen Werkzeugen

---

Matthias Müller und Alexander Hörig

Digitale Medien spielen eine immer entscheidendere Rolle beim Lehren und Lernen von Mathematik. Aufgrund der aktuellen Herausforderungen des Distanz- und Hybrid-Unterrichts ist eine onlinegestützte Fern-Lernumgebung im Rahmen des Schülerforschungsclubs (SFC) Mathematik mit digitalen Werkzeugen kriterienorientiert entwickelt worden. Dabei konnte auf Grundlage des MTTE-Frameworks zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien im Mathematikunterricht ein adaptiertes Konzept für den SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen entwickelt werden. In diesem Artikel werden das Evaluationsinstrument und ein ausgewähltes Beispiel vorgestellt und beschrieben.

Mathematikunterricht mit digitalen Medien: Die Bedeutung einer kriteriengeleiteten Auswahl

Unter der Prämisse, dass der Einsatz digitaler Medien Lernenden dabei helfen kann, mathematische Inhalte zu verstehen, stellt sich die Frage nach der Auswahl der digitalen Medien. Eine ständig wachsende Anzahl verfügbarer technologischer Ressourcen und der Druck, diese zu nutzen, stellt Lehrkräfte vor Entscheidungsschwierigkeiten (Smith, Shin, & Kim, 2017). Viele Mathematiklehrkräfte stehen vor der besonderen Herausforderung, geeignete digitale Medien auszuwählen, sich entsprechende Kompetenzen im Umgang mit den Medien anzueignen und sie im Unterricht zu implementieren. Dies wurde durch die getroffenen Maßnahmen im schulischen Bereich im Zusammengang mit der COVID-19-Pandemie verschärft (Whalen, 2020).

Kriterien zur Auswahl und Bewertung digitaler Medien können Lehrkräften Anleitung zur Bestimmung der Wirksamkeit eines digitalen Mediums zum Lehren und Lernen von Mathematik geben. So können z. B. Kriterien zu spezifischen mathematischen Themenbereichen formuliert werden, um den Einsatz von digitalen Medien im Mathematikunterricht zu steuern (Günster, & Weigand, 2020). Ebenso können sich derartige Kriterien an unterschiedliche Adressaten richten, evtl. kann man zwischen Forschung und Praxis unterscheiden (Hegedus, Laborde, Brady, Dalton, Siller, Tabach, …, & Moreno-Armella, 2017; Traglová, Clark-Wilson, & Weigand, 2018). Es besteht der Bedarf der wissenschaftlichen Begleitung des Einsatzes digitaler Medien im Mathematikunterricht, um die Arbeit der Lehrenden zu unterstützen (Thurm, & Barzel, 2020). Die Auswahl digitaler Medien für den Mathematikunterricht in Präsenz-, Distanz- oder Hybridform sollte in jedem Fall kriteriengeleitet erfolgen. Der Einsatz der ausgewählten Medien muss im Prozess fortlaufend überprüft und mit den didaktischen und pädagogischen Zielen abgeglichen werden. Ein möglicher Ausgangspunkt für die kriteriengeleitete Auswahl und Bewertung digitaler Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik kann das Mathematical Technological Tool (MTT) Framework sein (Müller, 2021).

Vor der Vorstellung des Evaluationsinstrumentes und der zugehörigen theoretischen Grundlagen sollen allerdings die beiden Begriffe digitale Medien zum Lehren und Lernen von Mathematik und digitale Mathematikwerkzeuge (DMW) begrifflich in Beziehung gesetzt werden. Allgemein sind Medien einerseits kognitive und anderseits kommunikative Gegenstände zur Verarbeitung, Speicherung und Übermittlung von zeichenhaften Informationen (Petko, 2014, S. 13). Das betrifft analoge und digitale Medien in gleicher Weise. Entscheidend im Rahmen des Lehrens und Lernens von Mathematik ist die Eigenschaft des Mediums als Mittler, zwischen Inhalt und Lernenden zu fungieren. Dies kann sowohl physisch als auch digital erfolgen (Rink & Walther, 2020, S. 7). Im speziellen bezeichnen digitale Medien nach Rauh (2012, S. 39) technische Geräte zur Darstellung von digital gespeicherten Inhalten. Konkreter handelt es sich um elektronische Geräte, die Informationen digital speichern oder übertragen und in bildhafter oder symbolischer Darstellung wiedergeben (Pallack, 2018, S. 28). DMW sind besondere digitale Medien, deren primärer Zweck es ist, mathematisches Arbeiten zu unterstützen. Das umfasst insbesondere Medien, die mathematikspezifisch an Beruf und Alltag oder didaktisch orientiert sind (Barzel, 2019, S. 2). Im Sinne des theoretischen Ansatzes der instrumentalen Genese (Rabardel, 2002) wird im Folgenden der Begriff der DMW verwendet.

Gütekriterien zur Auswahl und Bewertung: Fidelities nach Dick (2008)

Nach Dick (2008) sind drei Grundprinzipien beim Bewerten von DMW zu betachten: *Pedagogical Fidelity*, *Mathematical Fidelity* und *Cognitive Fidelity*. Die Grundlage dieser drei Fidelities ist das pädagogische Grundprinzip, dass das Lernen von Mathematik eine aktive Auseinandersetzung auf Seiten der Lernenden mit dem mathematischen Objekt voraussetzt:

> [. . .] Students learn mathematics by taking mathematical actions (e.g., transforming, representing, manipulating) on mathematical objects (e.g., symbolic expressions, graphs, geometric figures, physical models), observing the mathematical consequences of those actions, and reflecting on their meanings. (Dick, 2008, S. 334)

Das Vorgehen der Interaktion, Beobachtung und Reflexion stellt sich im Prediciton-Conjecture-Testing-Zyklus dar, welcher zu einem Beweis oder Widerspruch der eigenen Ideen und Vorstellung führt (Dick, 2008, S. 334). Daraus geht auch die Aufgabe der DMW hervor: Sie sollen die Arbeit mit dem mathematischen Objekt vereinfachen und transparent machen. DMW müssen den Fidelities genügen damit sie die beschriebene Aufgabe erfüllen können. Somit richten sich die Fidelities in erster Linie an die Entwicklungsteams der DMW (Dick, 2008, S. 333). Allerdings können die drei Fidelities auch für Lehrkräfte unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten von Interesse sein. Sie stellen in diesem Zusammenhang Gütekriterien für die Bewertung und Auswahl von DMW dar (Bos, 2009b; Moyer et al., 2008; Smith et al., 2017). Im Folgenden werden die drei Fidelities anhand von Indikatoren beschrieben, um zu verdeutlichen, wann die DMW das jeweilige Grundprinzip erfüllen.

Pedagogical Fidelity

Aus dem beschriebenen pädagogischen Grundprinzip der aktiven Auseinandersetzung mit dem mathematischen Objekt wird die *Pedagogical Fidelity* abgeleitet. Bei dieser wird untersucht, wie viel der Arbeitszeit mit den DMW aktive Lernzeit ist. Dazu sollen die DMW mathematische Aktivitäten auf mathematischen Objekten vereinfachen und erweitern (Dick, 2008, S. 334) ohne die Lernenden abzulenken oder einzuschränken (Bos, 2009b, S. 522) und sie somit beim Lernen unterstützen (Larkin, 2015, S. 342).

Indikatoren für ein hohes Maß an *Pedagogical Fidelity* sind gegeben, wenn die Lernenden die folgenden Eigenschaften bei DMW wahrnehmen können (Dick, 2008, S. 333):

- Die Erstellung von mathematischen Objekten wird unterstützt bzw. ermöglicht,
- mathematische Aktivitäten an den Objekten werden erlaubt und motiviert,
- die Konsequenzen der Aktionen werden klar aufgezeigt.

Die Beschreibung der eigenen Arbeit mit den DMW ist ein guter Indikator dafür, ob und wie die Lernenden die obigen Punkte wahrnehmen. Bei im Sinne der *Pedagogical Fidelity* guten DMW werden die eigenen Schritte und Aktivitäten in mathematischen Aktionen („ich zeichne die Funktion . . . “, „ich erstelle das Dreieck“, „ich messe den Flächeninhalt . . . “) angegeben. Wird hingegen lediglich die Interaktion mit den DMW beschrieben („ich bin in das . . . -Menü gegangen“, „ich habe diese Einstellung vorgenommen“), lässt das auf eine niedrige *Pedagogical Fidelity* schließen.

Weiterhin ist die Bedienoberfläche (die Organisation der Befehle und des Menüs) ein Indikator für *Pedagogical Fidelity*. Demnach soll die Oberfläche so gestaltet werden, dass mathematische Aktionen möglichst einfach und ohne Ablenkungen durchführbar sind. Ein Beispiel dafür sind die Bedienelemente bei Grafiksoftware. Die Bedienelemente für das Äußerliche (wie etwa Schriftgröße der Beschriftung und Skalen) sollten klar von denen der Mathematik (wie Vergrößern und Verkleinern des mathematischen Objekts) getrennt sein (Dick, 2008, S. 335).

Nach Bos (2011) sollen die DMW die aktive Arbeit mit dem Thema motivieren und ohne Training verwendbar sein. Dafür muss die Manipulation der mathematischen Objekte logisch und natürlich wirken und die DMW für die entsprechende Zielgruppe altersgerecht sein. Zudem sollen die DMW zum Thema des Unterrichts passen, dem Lehren und Lernen des zu vermittelnden Konzepts dienen und einen Mehrwert zu analogen Alternativen bringen (Bos, 2009a, 2011; Larkin, 2015).

Nach Shin et al. (2018) müssen DMW die gebündelte Aufmerksamkeit auf die Mathematik erlauben und unterstützen. Dafür sollte zum Beispiel bei der Repräsentation von mathematischen Objekten kein Übermaß an Farben verwendet werden. Auch sollten keine unnötigen Objekte, Einstellungen und Funktionalitäten vorhanden sein (Shin et al., 2018, S. 158f.).

Mathematical Fidelity

DMW besitzen ein hohes Maß an *Mathematical Fidelity*, wenn die Repräsentationen der mathematischen Objekte auf den DMW dieselben Eigenschaften und Verhaltensweisen aufzeigen wie die idealisierten mathematischen Objekte.

Eine Vielzahl an konformen Repräsentationen erlaubt die vielseitige Betrachtung und Manipulation der mathematischen Objekte und somit das Finden mathematischer Muster, welche wiederum den Aufbau des konzeptionellen Verständnisses ermöglichen (Bos, 2011). Ist die *Mathematical Fidelity* nicht gegeben, können die Lernenden die zugrundeliegenden mathematischen Konzepte nicht erkennen und somit auch kein Verständnis für diese aufbauen. Es kann sogar zum Entwickeln von Fehlvorstellungen kommen, welche individuell wieder korrigiert werden müssen (Shin et al., 2018, S. 159).

Grundsätzlich lassen sich einige Indikatoren für *Mathematical Fidelity* finden (Bos, 2009b; Larkin, 2015). So sollten die dargestellten mathematischen Objekte korrekt und adäquat sein. Häufig werden jedoch mathematische Konzepte zu einfach oder nur extrahiert dargestellt. Dabei werden bspw. mathematische Konventionen und Normen verkürzt, abgeändert, inkorrekt oder gar nicht angegeben. So finden sich z. B. einige Apps, deren Präsentation der mathematischen Objekte nicht altersgerecht ist. Es werden mathematische Objekte falsch benannt und fehlerhaft klassifiziert (Quadrate werden bspw. nicht den Rechtecken zugeordnet). Bei Funktionen wird zudem der Definitionsbereich nicht immer angegeben.

Insgesamt sollten DMW Muster korrekt und vorhersehbar präsentieren. Sind die Muster nicht eindeutig oder nicht vorhanden, kann auch kein konzeptionelles Verständnis aufgebaut werden und es kommt lediglich zum bloßen Auswendiglernen. So gibt es Applikationen für mobile Endgeräte, welche nur typische Formen (das Quadrat als Viereck) auf eine spezielle Art und Weise (ein Quadrat ist parallel zu den Rändern des Darstellungsbereichs) präsentieren. Damit können die Lernenden das mathematische Konzept „Viereck“ jedoch nicht hinreichend untersuchen. Die Anwendung der mathematischen Objekte sollte zudem eine Verbindung zur Realität herstellen, eine realistische und zweckdienliche Anwendung mathematischer Konzepte ist dabei anzustreben. Es finden sich nur sehr wenige Beispiele, die diesem Anspruch gerecht werden (Larkin, 2015).

Cognitive Fidelity

DMW besitzen ein hohes Maß an *Cognitive Fidelity*, wenn die Prozesse innerhalb des Werkzeugs den kognitiven Prozessen der Lernenden ähneln oder an diese angepasst sind (Dick, 2008, S. 337). Zudem sollen die mathematischen Gedankengänge der Lernenden unterstützt werden, während diese in die mathematischen Aktivitäten vertieft sind (Larkin, 2015, S. 343).

Die meisten DMW, welche außerhalb von Bildungseinrichtungen verwendet werden (CAS-Handhelds, Tabellenkalkulationssoftware, . . .) besitzen ein geringes Maß an *Cognitive Fidelity*. Dick (2008) präsentiert zwei Gründe dafür: Zum einen geben sie lediglich die Lösung an, ohne die inneren Prozesse und Vorgehensweisen aufzuzeigen. Deshalb werden sie z. T. auch als „Black Box“ bezeichnet (Dick, 2008, S. 337). Zum anderen verwenden diese DMW Lösungsmethoden und -verfahren, welche sich wesentlich von den bekannten Lösungsmöglichkeiten der Lernenden unterscheiden (Dick, 2008, S. 337). Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion, bei der viele grafische Taschenrechner das Newtonverfahren verwenden (Shin et al., 2018, S. 161). Dieses Verfahren ist jedoch den wenigsten Lernenden bekannt und unterscheidet sich auch konzeptionell von den bekannten Lösungsmethoden.

Im Vergleich zu einer „Black Box“, welche (für die Lernenden) unbekannte Lösungsverfahren verwendet, empfiehlt sich für das Lehren und Lernen von Mathematik eine „Glas Box“. Bei dieser werden die inneren Prozesse des Werkzeugs dargestellt, welche den mathematischen Gedankengängen und den gelernten Lösungsmethoden der Lernenden ähneln (Dick, 2008, S. 337). Die Arbeit mit DMW kann das Verständnis vertiefen, wenn sie die Eigenschaften einer „Glas Box“ besitzen. Die einzelnen Aktionen und deren Folgen ergeben für die Lernenden Sinn und erlauben damit den Aufbau aussagekräftiger Schemata über die mathematischen Konzepte (Bos, 2009b). Dafür werden Muster und Strukturen des Konzepts erzeugt, Schritt für Schritt untersucht, getestet und überprüft (Bos, 2011). Um dies zu gewährleisten, müssen die kognitiven Prozesse der Lernenden vom Werkzeug erst einmal darstellbar sein und auch wiedergegeben werden (Bos, 2011; Moyer et al., 2008).

Damit ein DMW ein hohes Maß an *Cognitive Fidelity* aufweist, sollten: (1) Die inneren Prozesse des Werkzeugs transparent, nachvollziehbar und kleinschrittig dargestellt werden, (2) die mathematischen Gedankengänge im Lösungsprozess beleuchtet werden und (3) diese mathematischen Prozesse des Werkzeugs denen der Lernenden ähneln.

Ein kurzes und anschauliches Beispiel für *Cognitive Fidelity* ist Folgendes: Eine Webseite zum Lösen von linearen Gleichungssystemen gibt nach Eingabe der linearen Gleichungen nur die Antwort aus („eindeutige Lösung“, „keine Lösung“, „unendlich viele Lösungen“). Die Lernenden erhalten zwar schnell eine korrekte Antwort auf die gestellte Frage. Es kann jedoch kein konzeptionelles Verständnis aufgebaut werden, da der algebraische Prozess nicht dargestellt wird und das Werkzeug keine Verbindung zu einer geometrischen Repräsentation ermöglicht (Shin et al., 2018).

Das MTTE-Framework

Die drei Fidelities werden in verschiedenen Arbeiten aufgegriffen und und als theoretische Grundlage bzw. als Gütekriterien für die Bewertung von DMW genutzt (Dick, 2008; Bos, 2009b; Larkin, 2015; Namukasa et al., 2016; Shin et al., 2018). In einigen Arbeiten werden die Fidelities als Design-Prinzipien geeigneter DMW für das Lehren und Lernen von Mathematik verwendet (Smith et al., 2017; Bos, 2009a). Moyer et al. (2008) und Bos (2011) hingegen nutzen die Fidelities auch für Weiterbildungskonzepte von Lehrkräften im Umgang mit DMW. Es kann an dieser Stelle festgestellt werden, dass die beschriebenen drei Fidelities theoretisch fundiert sind und in verschiedener Weise angewandt werden können. Sie stellen somit eine gute Grundlage für die Untersuchung und Bewertung von DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik dar.

Theoretische Rahmung des Evaluationsinstruments

Shin et al. (2018) beschreiben ein Evaluationsinstrument für DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik: Mathematical Technological Tool Evaluation (MTTE)-Framework. Dieses Evaluationsinstrument fußt auf thematisch enger gefassten Vorarbeiten, die Kriterien untersuchen, nach dehnen Mathematiklehrkräfte bei der Auswahl dynamischer Geometrie-Software vorgehen (Smith et al., 2017). Die gewonnenen Kenntnisse wurden aufbereitet und mit Informationen von NCTM (2000), NCTM (2014) und Bokhove & Drijvers (2010) verknüpft und für die Anwendung auf DMW zum Lehren und Lernen von Mathematik erweitert. Das MTTE wird in Tabelle 1 überblicksartig dargestellt.

Adaptation des Evaluationsinstruments

In jeder Zeile der Tabelle 1 ist eine von drei Fidelities mit Namen, einer Beschreibung und mehreren Leitfragen angegeben. Die drei Fidelities stellen zum einen Gütekriterien für die Bewertung von DMW dar und sind zum anderen die Qualitätsdimensionen für die Evaluation der DMW. Gemäß den bereits skizzierten Beschreibungen, kann eingeschätzt werden, wann ein DMW einer bestimmten Fidelity entspricht. *Pedagogical Fidelity*, beschreibt wie gut mathematische Aktivitäten mittels des DMW möglich sind, ohne von Funktionalitäten oder der Benutzeroberfläche beeinflusst oder eingeschränkt zu werden. *Mathematical Fidelity*, beschreibt wie gut die Eigenschaften und möglichen Aktivitäten eines mathematischen Objektes mittels des DMW repräsentiert werden. *Cognitive Fidelity*, beschreibt wie gut mathematische Gedankenprozesse und Arbeitsschritte mittels des Werkzeugs dargestellt und aufgezeigt werden. Auf Grundlage des MTTE-Frameworks wurde ein adaptiertes Evaluationsinstrument für den SFC Mathematik mit

Tabelle 1. Übersicht zu Mathematical Technological Tool Evaluation Framework (Shin et al., 2018, S. 158)

Fidelity	Descriptions (Dick, 2008)	Questions to Consider When Evaluating and Selecting Technological Tools
Pedagogical fidelity	How well the technological tool allows students to "do" mathematics without difficulty and to manipulate and not be distracted or limited by technical features	Is the tool difficult to use? Does the tool include clear instructions and directions on how to use it? Are there features that distract students from learning? How well does the tool allow students to interact with the mathematical object (e.g., shape, figure, table, plot, formula, equation) and take mathematical actions? How well does the tool offer students the opportunity to explore and develop conjectures and generalizations? How accessible is the tool for all students and does the tool offer customization or accommodations?
Mathematical fidelity	How well a mathematical object in the technological tool represents the underlying mathematical properties of the object with mathematical accuracy	How accurately does the tool represent the mathematics? Does the tool display mathematical formulas correctly, including basic assumptions? (Bokhove, & Drijvers, 2010) What mathematical misconceptions may students develop while using the tool?
Cognitive fidelity	How well the technological tool reflects students' cognitive actions with emphasis on illuminating mathematical thinking processes rather than simply arriving at the final results	How well does the tool show the ways in which the solution is produced? Does the tool simply display the final results? How well does the tool's solution method resemble your students' methods? Does the tool allow multiple solution methods? How well does the tool allow you to gain insight into how students are thinking?

Tabelle 2. Deutschsprachige Leitfragen des adaptierten Evaluationsinstruments

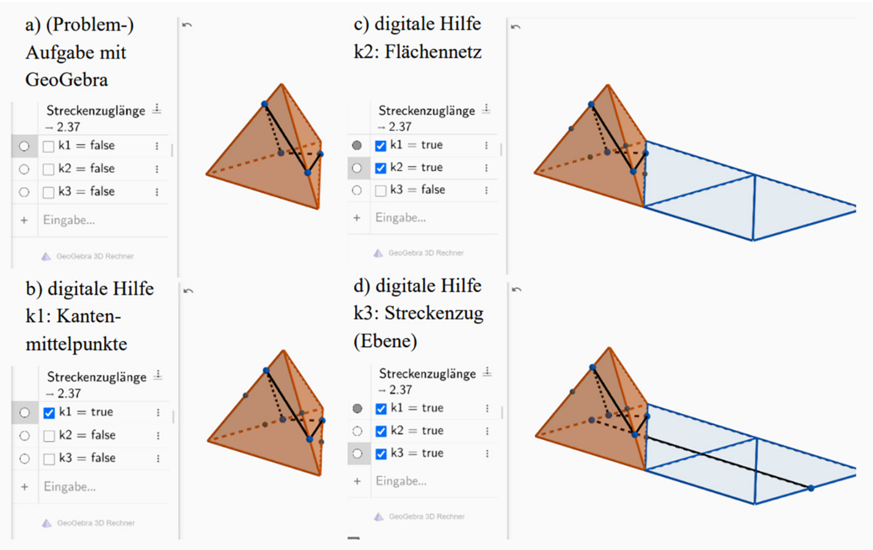
Fidelity	Questions (Shin et al., 2018)	Leitfragen
Pedagogical fidelity	Is the tool difficult to use?	Ist das digitale Mathematikwerkzeug schwer zu benutzen?
	Does the tool include clear instructions and directions on how to use it?	Besitzt das digitale Mathematikwerkzeug klare Anweisungen und Hinweise, Angaben oder Richtungsangaben zur Nutzung?
	Are there features that distract students from learning?	Gibt es Funktionen des digitalen Mathematikwerkzeugs, welche die Lernenden vom Lernen ablenken (könnten)?
	How well does the tool allow students to interact with the mathematical object (e.g., shape, figure, table, plot, formula, equation) and take mathematical actions?	Wie gut können die Lernenden mathematischen Aktivitäten durchführen und mit mathematischen Objekten interagieren (wie Formen, Tabellen, Funktionen, Formeln, Gleichungen, ...)?
	How well does the tool offer students the opportunity to explore and develop conjectures and generalizations?	Wie viele Möglichkeiten der Erkundung und Entwicklung von Vermutungen und Generalisierung erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug?
	How accessible is the tool for all students and does the tool offer customization or accommodations?	Wie zugänglich und anpassbar ist das digitale Mathematikwerkzeug?
Mathematical fidelity	How accurately does the tool represent the mathematics?	Wie präzise wird die Mathematik durch das digitale Mathematikwerkzeug repräsentiert?
	Does the tool display mathematical formulas correctly, including basic assumptions? (Adapted from Bokhove and Drijvers 2010)	Werden mathematische Formeln (gemeinsam mit grundlegenden Voraussetzungen) korrekt angezeigt?
	What mathematical misconceptions may students develop while using the tool?	Welche mathematischen Fehlvorstellungen könnten durch die Nutzung des digitale Mathematikwerkzeug entstehen?
Cognitive fidelity	How well does the tool show the ways in which the solution is produced? Does the tool simply display the final results?	Wird lediglich das Endresultat angezeigt? Wenn nein, wie gut wird der verwendete Lösungsweg beschrieben bzw. gezeigt?
	How well does the tool's solution method resemble your students' methods? Does the tool allow multiple solution methods?	Wie ähnlich ist der verwendete Lösungsweg den bekannten Lösungswegen der Lernenden? Erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug verschiedene Lösungswege?
	How well does the tool allow you to gain insight into how students are thinking?	Wie gut ist das Vorgehen der Lernenden für die Lehrkraft mit Hilfe des digitale Mathematikwerkzeug nachvollziehbar?

digitalen Werkzeugen mit deutschsprachigen Leitfragen entwickelt. Mittels der zugehörigen Leitfragen wurde während einer Erprobung untersucht, inwiefern das betrachtete DMW dem jeweiligen Gütekriterium entspricht. Die deutschsprachigen Leitragen sind in der Tabelle 2 zu finden.

Erprobung des Evaluationsinstruments im SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen

Die Erprobung des Evaluationsinstruments im Rahmen des SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen erfolgte in drei Schritten, die an frühere Erprobungen des Evaluationsinstruments angelehnt sind (Shin et al., 2018, S. 161).

1. Lernziele bestimmen und Erstauswahl möglicher DMW
   Die Bestimmung der Lernziele bei der Verwendung der zu bewerteten DMW ist der erste Schritt der Erprobung. Mit vorab definierten Lernzielen können gerichtete Entscheidungen während der Verwendung der DMW getroffen werden, was dem Lehren und Lernen von Mathematik zuträglich ist. Zu den aufbauenden Entscheidungen zählt auch die Auswahl der passenden DMW (Shin et al., 2018). Nach Festlegung der Lernziele werden mögliche DMW für die Untersuchung ausgewählt. Shin et al. (2018) schlagen keine weiteren Kriterien für die Erstauswahl vor; jedes DMW kommt prinzipiell für die Evaluation in Frage.
2. Leitfragen untersuchen
   Die ausgewählten Werkzeuge werden mittels der



a) (Problem-) Aufgabe mit GeoGebra

Streckenzuglänge → 2.37
○ ☐ k1 = false
○ ☐ k2 = false
○ ☐ k3 = false

b) digitale Hilfe k1: Kanten-mittelpunkte

Streckenzuglänge → 2.37
○ ☑ k1 = true
○ ☐ k2 = false
○ ☐ k3 = false

c) digitale Hilfe k2: Flächennetz

Streckenzuglänge → 2.37
● ☑ k1 = true
○ ☑ k2 = true
○ ☐ k3 = false

d) digitale Hilfe k3: Streckenzug (Ebene)

Streckenzuglänge → 2.37
● ☑ k1 = true
○ ☑ k2 = true
○ ☑ k3 = true

Abbildung 1. 3D-Annimation mittels GeoGebra 3D. Abgebildet ist ein animierter Streckenzug auf einer Tetraeder-Oberfläche und (a) sowie die drei digitalen Hilfen (b, c, d).

Leitfragen aus Tabelle 2 untersucht. Wie im Beispiel (vgl. Abbildung 1) zusehen, werden die Resultate der Ergebnisse mit wenigen Worten gegenübergestellt. Wichtig ist die Betrachtung des Kontexts, in dem die DMW verwendet werden. Dabei sind die Lernziele (Schritt 1) und die Auswahl der DMW (Schritt 3) entscheidend.

3. Auswahl des passenden DMW
   Im dritten Schritt wird das passende und evtl. nicht das „beste“ DMW ausgewählt. In einer ausführlichen Diskussion werden zuerst alle DMW in den drei Gütekriterien zusammenfassend untersucht. Ausgewählt wird dann das DMW, welches am besten zu den vorher gewählten Lernzielen passt (Schritt 1). Dies kann sich vom „besten“ Werkzeug unterscheiden, welches vielleicht in anderen Situationen besser abschneidet (Shin et al., 2018, S. 162).

Als ein Beispiel eines bewerteten DMWs, welches mit dem adaptierten Evaluationsinstrument für die Arbeit im SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen ausgewählt wurde, sei folgende 3D-Animation mit GeoGebra 3D vorgestellt (vgl. Abb. 1): Gesucht ist der kürzeste Streckenzug auf der Oberfläche eines Tetraeders, der alle vier Seiten schneidet. Die erstellte 3D-Animation enthält digitale Hilfen, über die die Lernenden digitales Feedback erhalten können, um die eigenen Lösungsansätze zu überprüfen. Durch die digitalen Hilfen kann erarbeitet werden, dass die Länge des kürzestes Streckzuges genau der doppelten Kantenlänge entspricht. Wird der virtuelle Streckenzug in der 3D-Animation verändert, so wird dessen veränderte Länge automatisch angezeigt. Weiterhin motivieren die digitalen Hilfen eine Begründung der Minimalitäts-Eigenschaft auf Grundlage des (virtuellen) Flächennetzes und der Uneindeutigkeit der Lösung. Die drei digitalen Hilfen konnten durch die Lernenden schrittweise ausgewählt und sich in der 3D-Animation angezeigt werden lassen. Alle digitalen Hilfen sind im Sinne der dynamischen Geometriesoftware echt dynamisch (Schmidt & Müller, 2020, S. 380).

Die 3D-Animation wurde mithilfe des adaptierten Evaluationsinstruments bewertet. Die Antworten auf die (deutschsprachigen) Leitfragen sind in der Tabelle 3 aufgelistet. Dieses Beispiel soll einen Eindruck über die Anwendung des Evaluationsinstrumentes geben.

Abschließend kann festgehalten werden, dass das MTTE-Framework sich für die Bewertung von DMW im Rahmen des SFC Mathematik mit digitalen Werkzeugen bewährt hat und auch zukünftig eingesetzt wird.

Literatur

Bokhove, C., & P. Drijvers (2010) Digital Tools for Algebra Education: Criteria and Evaluation. *International Journal of Computers Mathematical Learning*, *15*(1), 45–62. DOI:10.1007/s10758-010-9162x

Bos, B. (2009a). Technology with Cognitive and Mathematical Fidelity: What It Means for the Math Classroom. *Computers in the Schools*, *26*, 107–114. DOI:10.1080/07380560902906088

Bos, B. (2009b). Virtual Math Objects with Pedagogical, Mathematical, and Cognitive Fidelity. *Computers in Human Behavior*, *25*(2), 521–528. DOI:10.1016/j.chb.2008.11.002

Bos, B. (2011). Professional Development for Elementary Teachers Using TPACK. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *11*, 167–183.

Tabelle 3. Bewertung der 3D-Animation aus Abb. 1 mithilfe der Leitfragen des adaptierten Evaluationsinstruments

Fidelity	Leitfrage	3D-Annimation mittels GeoGebra 3D-Rechner
Pedagogical fidelity	Ist das digitale Mathematikwerkzeug schwer zu benutzen?	Die 3D-Annimation ist nicht schwer zu bedienen und enthält klare Anweisungen bzw. Aufgabenstellungen.
	Besitzt das digitale Mathematikwerkzeug klare Anweisungen und Hinweise, Angaben oder Richtungsangaben zur Nutzung?	Es ist darauf zu achten, dass die Konstruktionsschritte der 3D-Annimation ausgeblendet sind.
	Gibt es Funktionen des digitalen Mathematikwerkzeugs, welche die Lernenden vom Lernen ablenken (könnten)?	Die Konstruktionsschritte der 3D-Annimation sind leicht zugänglich (Scrollen) und können die Lernenden ablenken.
	Wie gut können die Lernenden mathematischen Aktivitäten durchführen und mit mathematischen Objekten interagieren (wie Formen, Tabellen, Funktionen, Formeln, Gleichungen, ...)?	Die 3D-Annimation bietet verschiedene Möglichkeiten Längen zu verändert, zu messen und Punkte zu verschieben, so dass eine Untersuchung der mathematischen Objekte auf unterschiedliche Art und Weise möglich ist.
	Wie viele Möglichkeiten der Erkundung und Entwicklung von Vermutungen und Generalisierung erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug?	Die 3D-Annimation bietet neben der generellen Anwendung drei Hilfefunktionen, die bei der Entwicklung von Vermutungen unterstützen.
	Wie zugänglich und anpassbar ist das digitale Mathematikwerkzeug?	Die 3D-Annimation ermöglicht den Lernenden zu zoomen und die Werkzeugsprache auszuwählen.
Mathematical fidelity	Wie präzise wird die Mathematik durch das digitale Mathematikwerkzeug repräsentiert?	Die 3D-Animation zeigt ein hohes Maß an Präzession bei der Darstellung.
	Werden mathematische Formeln (gemeinsam mit grundlegenden Voraussetzungen) korrekt angezeigt?	Die mathematischen Objekte werden in der 3D-Annimation grundsätzlich richtig dargestellt.
	Welche mathematischen Fehlvorstellungen könnten durch die Nutzung des digitale Mathematikwerkzeug entstehen?	Bei der Erprobung konnten keine Fehlvorstellungen identifiziert werden.
Cognitive fidelity	Wird lediglich das Endresultat angezeigt? Wenn nein, wie gut wird der verwendete Lösungsweg beschrieben bzw. gezeigt?	Der Lösungsweg wird digital dokumentiert und ist in den Konstruktionsprotokollen der 3D-Annimation nachzuvollziehen.
	Wie ähnlich ist der verwendete Lösungsweg den bekannten Lösungswegen der Lernenden? Erlaubt das digitale Mathematikwerkzeug verschiedene Lösungswege?	Die 3D-Annimation ermöglicht verscheide alters- und adressatengerechte Lösungswege (z. B. Parallelverschiebung, Strahlensatzfigur).
	Wie gut ist das Vorgehen der Lernenden für die Lehrkraft mit Hilfe des digitale Mathematikwerkzeug nachvollziehbar?	Die 3D-Annimation Zeigt sowohl das Endergebnis als Teil der Animation an als auch die Art und Weise, wie die Lösung schrittweise erstellt wurde.

Dick, T. P. (2008). Keeping the Faith: Fidelity in Technological Tools for Mathematics Education. In G. W. Blume, & M. K. Heid (Hrsg.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives* (S. 333–339). Charlotte, NC: Information Age.

Günster, S. M., & Weigand, H. G. (2020). Designing digital technology tasks for the development of functional thinking. *ZDM*, 1–16.

Hegedus, S., Laborde, C., Brady, C., Dalton, S., Siller, H. S., Tabach, M., ... & Moreno-Armella, L. (2017). *Uses of technology in upper secondary mathematics education*. Springer Nature.

Larkin, K. (2015). The Search for Fidelity in Geometry Apps: An Exercise in Futility? Verfügbar 20. September 2021 unter tinyurl.com/28bf8rl4

Moyer, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual Manipulatives Used by K-8 Teachers for Mathematics Instruction: The Influence of Mathematical, Cognitive, and Pedagogical Fidelity (G. L. Bull, L. Bell & C. Mouza, Hrsg.). *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *8*(3), 202–218.

Müller, M. (2021a). Distanzlernen am Beispiel des Schülerforschungsclubs Mathematik mit digitalen Werkzeugen – Theoretische Ausgangspunkte zur Rahmung und Entwicklung einer onlinegestützten Fern-Lernumgebung. *Mitteilungen der GDM*, *110*, 33–38.

Namukasa, I. K., Gadanidis, G., Sarina, V., Scucuglia, S., & Aryee, K. (2016). Selection of Apps for Teaching Difficult Mathematics Topics: An Instrument to Evaluate Touch-Screen Tablet and Smartphone Mathematics Apps. In P. S. Moyer-Packenham (Hrsg.), *International*

Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives (S. 275–300). Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-32718-1_12

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.

Rabardel, P. (2002). People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments. HAL, Université Paris, tinyurl.com/2yfrqs2r

Rauh, B. (2012). Höheres Lernen mit digitalen Medien – auch im Bereich der Arithmetik? In S. Ladel, C. Schreiber (Hrsg.), *Lernen, Lehren und Forschen in der Primastufe* (S. 37–58). Franzbecker.

Schmidt, S., & Müller, M. (2020). Students learning with digital mathematical tools – three levels of instrumental genesis. In B. Barzel, R. Bebernik, L. Göbel, M. Pohl, H. Ruchniewicz, F. Schacht, & D. Thurm (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14* (S. 378–383). DOI:10.1080/0020739X.2016.1264635

Shin, D., Smith, R. C., & Kim, S. (2018). Evaluating technology for teaching mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *24*(3), 156–163. DOI:10.5951/mathteacmiddscho.24.3.0156

Smith, R. C., Shin, D., & Kim, S. (2017). Prospective and Current Secondary Mathematics Teachers' Criteria for Evaluating Mathematical Cognitive Technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(5), 659–681. DOI:10.1080/0020739X.2016.1264635

Smith, R., Shin, D., Kim, S., & Zawodniak, M. (2018). Novice secondary mathematics teachers' evaluation of mathematical cognitive technological tools. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *18*(4), 606–630.

Thurm, D., & Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM Mathematics Education*, *52*(3), 1411–1422.

Traglová, J., Clark-Wilson, A., & Weigand, H.-G. (2018). Technology and resources in mathematics education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Hrsg.), *Developing research in mathematics education: Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (S. 142–161). Springer.

Whalen, J. (2020). Should teachers be trained in emergency remote teaching? Lessons Learned from the COVID-19 Pandemic. *Journal of Technology and Teacher Education*, *28*(2), 189–199.

PD Dr. habil. Matthias Müller, Friedrich-Schiller-Universität Jena
E-Mail: matthias.mueller.2@uni-jena.de

Alexander Hörig, Friedrich-Schiller-Universität Jena
E-Mail: alexander.hoerig@uni-jena.de

Das Projekt <colette/>

Computational Thinking (auch) im Mathematikunterricht

Tim Läufer, Rebecca S. Stäter und Matthias Ludwig

Die digitale Transformation hat unser aller Leben fundamental geändert. Die Nutzung von digitalen Medien in der Freizeit von Schülerinnen und Schülern liegt seit Jahren konsistent hoch, so haben beispielsweise deutlich über 94 % der jugendlichen Schülerinnen und Schüler in Deutschland ein Smartphone oder nutzen zum Lernen oder in der Freizeit das Internet (Feierabend et al., 2021). Konkret sind 12- bis 19-Jährige durchschnittlich 241 Minuten am Tag online – mehr als 4 Stunden täglich (ebd.). Die Kompetenzen für einen *verantwortungsvollen* und *zukunftsorientierten* Umgang damit werden aber nicht automatisch aufgebaut. Viele der sog. *21st Century Skills* sind nicht nur heute, sondern auch zukünftig im beruflichen sowie privaten Leben essenziell (Wing, 2006, Lodi & Martini, 2021).

Einer dieser Skills ist *Computational Thinking* (CT), welches 2006 in einem Seminarpapier von Jeannette Wing für Aufsehen sorgte. Dieses Papier stieß eine große Debatte über die Definition und Fächerverortung von formalem, algorithmischem Denken an, die bis heute andauert (Bocconi et al., 2016; Lodi & Martini, 2021). CT liegt (kurz zusammengefasst) das strukturierte, abstrakte, formale und logische Problemlösen zugrunde, mit dem sich die heutige Welt betrachten lässt (Wing, 2006, Bocconi et al., 2016, Weintrop et al., 2016, Lodi & Martini, 2021). Ein großer Teil von CT ist algorithmisches Denken.

Probleme für und mit dem Computer lösen

CT wird von vielen Autorinnen und Autoren (auch) im Mathematikunterricht verortet. So setzen bspw. Bescherer und Fest mathematisches Denken und CT in eine Beziehung zueinander, indem sog. Mikrowelten zum entdeckenden Lernen genutzt werden (Bescherer & Fest, 2020). Van Borkulo et al. untersuchten außerdem CT (besonders den Aspekt des algorithmischen Denkens) bei der Nutzung von Geogebra, einer Geometriesoftware (u.A.) für den Mathematikunterricht, und stießen auf positive Rückmeldungen von sowohl den Schülerinnen und Schülern als auch von den Lehrkräften zu Unterrichtsinhalten, die gezielt CT fördern:

> Students' overall reflections in the interviews indicate that they welcomed the use of computational tools in their calculus lessons. They perceived the benefits of using dynamic mathematics software as more significant than the challenges new computational tools bring. [...] The teacher was particularly satisfied with the successful completion rate of the assignments [...] (van Borkulo et al., 2021, S. 5)

Obwohl einige negative Aspekte wahrgenommen wurden, haben Lehrkräfte sowie Schülerinnen und Schüler die Arbeit mit Aufgaben zur Generalisierung und algorithmischem Denken im Mathematikunterricht in der Summe als gewinnbringend wahrgenommen.

Im Fokus: Algorithmen

Algorithmen sind nicht nur in der Mathematik (Horner-Schema, Heron-Verfahren, Gauß-Algorithmus, ...), sondern auch im Alltag allgegenwärtig: Ein prominentes Beispiel ist die Wahl der Kasse im Supermarkt. Dort iterieren wir alle implizit über die vor uns befindlichen Warteschlangen, schätzen die Zeiten ab, die wir bei der jeweiligen Wahl anstehen müssten, und suchen daraufhin diejenige aus, welche die absehbar kürzeste Wartezeit hat (Wing, 2006). Algorithmisches Denken kann definiert werden als das Erreichen einer Lösung durch klar definierte Lösungsschritte und ist ein zentraler Teil von CT (Bocconi et al., 2016). Das ist vor Allem mit Hilfe von Programmierung abbildbar.

Andere Autoren führen an, dass das algorithmische Denken zudem das mathematische Argumentieren fördern kann, und umgekehrt, wenn der Algorithmus selbst als Lerngegenstand beleuchtet wird und nicht als Nebenprodukt genutzt wird (Stephens & Kadijevich, 2020). Dennoch ist die direkte Förderung von algorithmischem Denken in der Mathematik unterrepräsentiert (van Borkulo et al., 2021).

Algorithmisches Denken ist laut Bocconi et al. (2016) nicht der einzige CT-Skill. *Abstraktion* vereinfacht Sachverhalte, durch Beschränkung auf das Wesentliche und damit verbunden auch das Weglassen von unnötigen Details, aber auch die Auswahl der Repräsentation eines Systems, da dieses die relevanten Details hervorhebt und die irrelevanten Details dadurch in den Hintergrund treten (Csizmadia et al., 2015). Davon getrennt ist ein anderer CT-Skill, die *Generalisierung*, welche das Erkennen und Nutzen von Mustern, Ähnlichkeiten und Verbindungen innerhalb und zwischen verschiedenen Inhalten ist. Hier werden Fragen wie „Ist dieses Problem ähnlich wie ein anderes Problem, welches ich schon mal gelöst habe?" oder „Worin unterscheidet sich das?" gestellt (Csizmadia et al., 2015).

Die *Dekomposition*, ebenfalls ein CT-Skill, beschreibt das Aufteilen des Problems in kleinere Teilprobleme, und spielt bei der Generalisierung eine große Rolle. Hierbei werden die kleineren Teilprobleme zuerst gelöst, um dann das gesamte Problem zu lösen. Diese Teilprobleme können sich in verschiedenen Problemen wiederfinden und somit sind deren Lösungen auch für andere Probleme wiederverwendbar.

Nun soll die Lösung von Problemen in vielen Disziplinen auch automatisiert ablaufen; *Automatisierung* ist auch ein CT-Skill, wobei es sich um einen arbeitssparenden Prozess handelt, der den Computer zu effizientem Maße nutzt (Lee et al., 2011). Damit eng verbunden ist das oben erwähnte *Algorithmische Denken*. Bei der Automatisierung sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, wie sie den Computer und ihre digitalen Werkzeuge optimal nutzen.

Weil die Lösung von Problemen, gerade automatisiert, nicht immer reibungslos verläuft, müssen Schülerinnen und Schüler *debuggen* können. Beim CT-Skill *Debugging* geht es um das systematische, strukturierte Finden und Beheben von Fehlern (Csizmadia et al., 2015). Das Wort „Debugging" setzte sich dabei aus dem Wort „Bug", was einen Fehler im Programmcode bezeichnet, und „de", was deutlich machen soll, dass dieser Fehler im Programmcode gefunden und entfernt wird. Vor Allem beim algorithmischen Denken in Verbindung mit Automatisierung ist diese Kompetenz von Nöten zum Aufbau eines *kompetenten* Umgangs mit den gegebenen Werkzeugen. CT hat eine enge Verbindung zu Problemlösekompetenzen (Labusch et al., 2019), da das Lösen von Problemen auch als ein Prozess von einem unerwünschten Stadium zu einem erwünschten, finalen Stadium verstanden werden kann. Im Laufe dieses Prozesses müssen Barrieren überwunden, *Fehler* in dem Lösungsweg vielleicht sogar auch in der Herangehensweise gefunden und gelöst werden.

Es zeigt sich also, dass CT ein vielschichtiges Konzept ist, welches in vielen Disziplinen genutzt wird und genutzt werden kann. In dessen Mittelpunkt steht dabei das algorithmische Denken. Diese Kompetenz wird (u. A.) durch Programmierung angesprochen und gefordert:

> Almost all teachers expressed their concerns about including programming in the math curriculum, mainly because of time constraints. They thought that learning a specific digital tool or programming language might take too much time. [. . .] However, almost all teachers saw the added value of using programming in math education to address CT. (van Borkulo et al., 2020, S. 3)

Diese Studie von van Borkulo (2020) zeigt, dass die Förderung von CT im Mathematikunterricht mit Hilfe von Programmierung einen klaren Mehrwert hat. Weiter untersuchten viele Autorinnen und Autoren die Förderung von CT im Mathematikunterricht bspw. mit Geogebra (van Borkulo et al., 2021), Mikrowelten (Bescherer & Fest, 2020), oder durch Entwicklung einer App die Förderung des Verständnisses von Primzahlen (Kong, 2019). Allerdings steht der Umsetzung von CT-Förderung im (Mathematik-)Unterricht ein großer Vorbereitungsaufwand entgegen: Viele Lehrkräfte wünschen sich aus Zeitgründen unterrichtsfertiges Material („ready-to-use teaching materials“, vgl. van Borkulo et al., 2020), welches nur geringen Vorbereitungsaufwand benötigt. Dies ist ein zentrales Ziel von <colette/>. Zusätzlich argumentieren viele Autorinnen und Autoren, dass CT nicht als eigenes Fach in das sonst schon volle Curriculum eingeführt, sondern in MINT-Unterrichtsfächer integriert werden soll (Bocconi et al., 2016; Stephens & Kadijevich, 2020; Weintrop et al., 2016).

Das Projekt <colette/>

Mit dem Projekt <colette/> (**Co**mputational **T**hinking **L**earning **E**nvironmen**t** For **T**eachers in **E**urope, Erasmus+; KA201, 09/20–08/23), wird in einem Zweikomponentensystem mit Webportal zur Lernpfaderstellung (Roth, 2015) und einer Hybrid-App für Android und iOS zur Aufgabenbearbeitung ein Werkzeug entwickelt, welches im Unterricht einfach genutzt werden kann. Dabei wird explizit CT gefördert, und zwar ganz ohne teure programmierbare Drohne, schwer vorzubereitende Materialien, komplexe Programmierumgebungen oder andere zeit- und kostenintensive Voraussetzungen. Dadurch adressieren wir den oben von van Borkulo et al. angesprochenen Punkt der „ready-to-use teaching materials“ direkt.

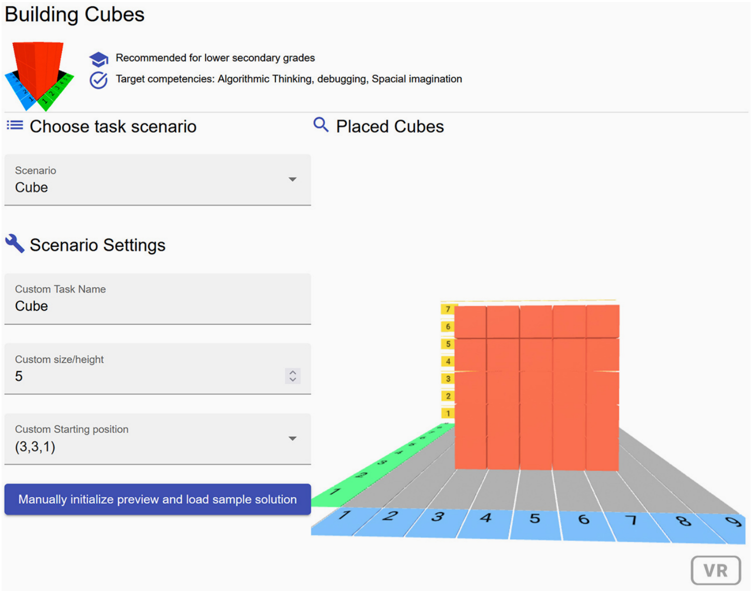
Abbildung 1. Der AR-Marker, der bei der Verwendung der <colette/>-App zur Positionierung des Objekts in der „Realität“ verwendet wird.

Ein weiterer Punkt ist die gezielte Entwicklung für so viele Schülerinnen und Schüler wie möglich, ohne Abhängigkeit des sozioökonomischen Status: Es werden nur Smartphones (für die App für die Schülerinnen und Schüler) und ein PC (für das Webportal für die Lehrkraft), sowie ein Drucker für das Drucken des *Augmented Reality* (AR)-Markers (Abbildung 1) benötigt, falls es sich um eine AR-Aufgabe handelt. AR ist die kameragestützte Ansicht von (meist dreidimensionalen) Objekten, wobei dieses Objekt auf dem Bildschirm „in die Realität“ gelegt wird, da es virtuell auf dem Bildschirm des Smartphones in die Ansicht der Umgebung eingebaut wird.

Damit greift <colette/> auch bei den Schulen das Problem auf, welche die mangelnde digitale Ausstattung als die größte Herausforderung in der Corona-Krise wahrgenommen haben (forsa, 2020). Mit dem „*Bring Your Own Device*“-Ansatz, wo alle Schülerinnen und Schüler das eigene Handy nutzen, kann auch jeder teilhaben, da, wie oben erwähnt, über 94 % der Schülerinnen und Schüler in Deutschland Smartphones besitzen (Feierabend et al., 2021). Alternativ kann die App auch auf Schultablets installiert und genutzt werden.

Im Webportal können Lehrkräfte generische Aufgaben (vgl. Ludwig & Jablonski, 2020) modifizieren (Abbildung 2), sie können hierbei aus einer generischen Aufgabe eine auf die Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler und des Unterrichtsgeschehens angepasste Aufgabe erstellen. Dabei wählen die Lehrkräfte bei einer generischen Aufgabe ein Szenario, welches als eine Art Kontext- oder Inhaltsvariation aufgefasst werden kann, und ein Antwortformat inklusive Aufgabenstellung aus.

Zu jeder generischen Aufgabe gehören in <colette/> auch Hinweise für die Aufgabenbearbeitung, die in jedem Szenario bei jedem Antwortformat didaktisch ausgearbeitet sind (vgl. Ludwig & Jablonski, 2020). Dort besteht im ersten Prototyp die



Building Cubes

Recommended for lower secondary grades

Target competencies: Algorithmic Thinking, debugging, Spacial imagination

Scenario: Cube

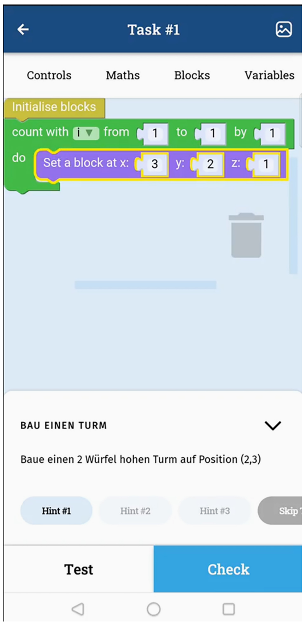
Custom Task Name: Cube

Custom size/height: 5

Custom Starting position: (3,3,1)

Abbildung 2. Der Webportal-interne Aufgabeneditor mit den dazugehörigen, anpassbaren Einstellungen der generischen Aufgabe „Building Cubes“. Das ist die Ansicht der Lehrkräfte während der Erstellung eines Pfads für die Schüler*innen.

Möglichkeit für textuelle Hinweise (Abbildung 4). Weitere Medieninhalte wie Bilder und Videos sind geplant.



Task #1

Initialise blocks

count with i from 1 to 1 by 1

do Set a block at x: 3 y: 2 z: 1

BAU EINEN TURM

Baue einen 2 Würfel hohen Turm auf Position (2,3)

Abbildung 3. Der App-interne Editor für die Implementationsaufgaben. Das ist die Ansicht der Schüler*innen, bei der Bearbeitung der Aufgaben.

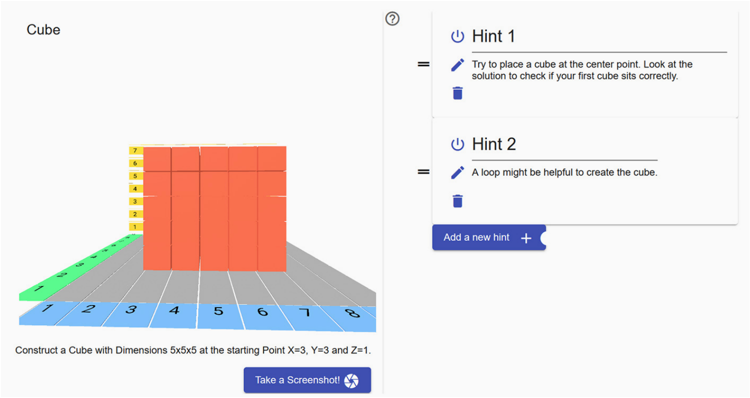
Sobald eine individuelle Aufgabe erstellt wurde, kann sie zu einem Lernpfad hinzugefügt werden. Dieser Pfad ist durch einen Nummerncode identifizierbar. Wenn diese nun in der App der Schüler und Schülerinnen eingegeben wird, werden die von der Lehrkraft erstellten Aufgaben auf dem Handy der Schüler und Schülerinnen zur Bearbeitung angezeigt (Abbildung 3). Die Schülerinnen und Schüler können nun die für sie konzipierten Aufgaben bearbeiten und ihre Lösung abgeben, welche dann die Lehrkraft für die ganze Klasse gesammelt im *digitalen Klassenzimmer* (Ludwig & Jablonski, 2020) in einem *Lernportfolio* einsehen kann. Ziel des digitalen Klassenzimmers ist die Auf- und Darstellung der Klassenfortschritte mit Möglichkeit der Anzeige einzelner Lösungsversuche. Dadurch ist eine tiefere Analyse der Lösungen und Lösungswege, sowie der eventuellen Schwierigkeiten möglich.

Ausblick

Zu Beginn des Jahres 2022 ist ein Prototyp des Webportals und der App mit der Aufgabengruppe der Bausteine live gegangen. In den kommenden Monaten sind weitere generische Aufgaben geplant, beispielsweise zu den Themen *Graphenprobleme*, *Prozessdiagramme*, *Drohnen-Flüge* sowie *Informatik Unplugged*. Das digitale Klassenzimmer wird vermutlich in der zweiten Version von <colette/> in 2023 verfügbar sein. Zum Ende des Projektes (August 2023) soll ein voll funktionsfähiges Webportal inklusive App und reichhaltiger Aufgabensammlung für Unterrichtszwecke kostenfrei zur Verfügung stehen. Weitere Informationen finden Sie unter www.colette-project.eu.

Literatur

Bescherer, C., & Fest, A. (2020). Mathematische Entdeckungen und Computational Thinking. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020. 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* WTM-Verlag. DOI:10.17877/DE290R-21232



Try to place a cube at the center point. Look at the solution to check if your first cube sits correctly.

A loop might be helpful to create the cube.

Construct a Cube with Dimensions 5x5x5 at the starting Point X=3, Y=3 and Z=1.

Abbildung 4. Die Aufgabenvorschau inklusive Hinweiseditor. Es können weitere Hinweise hinzugefügt werden und bestehende Hinweise abgeändert oder ganz gelöscht werden. Dies stellt sicher, dass die Hinweise immer auch passend zum Unterrichtsgeschehen sind.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., & Engelhardt, K. (2016). *JRC Science For Policy Report: Developing Computational thinking in Compulsory Education*. Implications for policy and practice. Seville (Spain). European Comission, Joint Research Centre. DOI:10.2791/792158

Csizmadia, A., Curzon, P., Dorling, M., Humphreys, S., Ng, T., Selby, C., & Woollard, J. (2015). *Computational Thinking: A Guide for Teachers*. computingatschool.org.uk/computationalthinking

Feierabend, S., Rathgeb, T., Kheredmand, H., & Glöckler, S. (2021). *JIM 2021: Jugend, Information, Medien*. Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger in Deutschland. Stuttgart. tinyurl.com/yxlxusf8

forsa (2020). *Das Deutsche Schulbarometer Spezial: Corona Krise: Folgebefragung*. tinyurl.com/2d3as37u

Kong, S.-C. (2019). Learning Composite and Prime Numbers Through Developing an App: An Example of Computational Thinking Development Through Primary Mathematics Learning. In S.-C. Kong & H. Abelson (Hrsg.), *Computational Thinking Education* (1. Aufl.). Springer Singapore. 145–166

Labusch, A., Eickelmann, B., & Vennemann, M. (2019). Computational thinking processes and their congruence with problem-solving and information-processing. In S. C. Kong & H. Abelson (Hrsg.), *Computational Thinking Education* (S. 65–78). Singapore: Springer

Lee, I., Martin, F., Denner, J., Coulter, B., Allan, W., Erickson, J., Malyn-Smith, J., & Werner, L. (2011). Computational thinking for youth in practice. *ACM Inroads*, *2*(1), 32–37. DOI:10.1145/1929887.1929902

Lodi, M., & Martini, S. (2021). Computational Thinking, Between Papert and Wing. *Science & Education*, *30*(4), 883–908. DOI:10.1007/s11191-021-00202-5

Ludwig, M., & Jablonski, S. (2020). MathCityMap: Mit mobilen Mathtrails Mathe draußen entdecken. *MNU Journal*, (01/2020), 29–36.

Roth, J. (2015). Lernpfade – Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz. In J. Roth (Hrsg.), *Medienvielfalt im Mathematikunterricht: Lernpfade als Weg zum Ziel* (S. 3–25). Springer Spektrum.

Stephens, M., & Kadijevich, D. M. (2020). Computational/Algorithmic Thinking. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 117–123). Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-030-15789-0_100044

van Borkulo, S., Chytas, C., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Computational Thinking in the Mathematics Classroom: Fostering Algorithmic Thinking and Generalization Skills Using Dynamic Mathematics Software. In M. Berges, A. Mühling & M. Armoni (Hrsg.), *The 16th Workshop in Primary and Secondary Computing Education* (S. 1–9). ACM. DOI:10.1145/3481312.3481319

van Borkulo, S., Kallia, M., Drijvers, P., & Tolboom, J. (2020). Computational practices in mathematics education: Experts' opinions. In *Conference: The 14th International Congress on Mathematical Education*, Shanghai.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, *25*(1), 127–147. DOI:10.1007/s10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. DOI:10.1145/1118178.1118215

Tim Läufer, Goethe Universität Frankfurt am Main
E-Mail: laeufer@math.uni-frankfurt.de

Rebecca S. Stäter, Goethe Universität Frankfurt am Main
E-Mail: staeter@math.uni-frankfurt.de

Matthias Ludwig, Goethe Universität Frankfurt am Main
E-Mail: ludwig@math.uni-frankfurt.de

E-Learning in der fachdidaktischen Ausbildung von Mathematiklehrkräften

Effekte verschiedener Lehrveranstaltungsangebote auf den Studienerfolg

Silvia Schöneburg-Lehnert, Lea Dasenbrock, Jennifer Rothe und Felix Wlassak

Die universitäre Ausbildung von Lehrkräften umfasst in der Mathematik traditionell sowohl fachmathematische als auch fachdidaktisch-pädagogische Inhalte (Beutelspacher et al., 2011). In der empirischen Forschung rückt häufiger die fachmathematische Seite in den Fokus. Insbesondere der Kompetenzerwerb in der Studieneingangsphase (Rach, 2014), die Motivationsentwicklung (Liebendörfer, 2018) sowie das selbstregulierte Lernen fachmathematischer Inhalte am Übergang Schule-Hochschule (Göller, 2020) wurden ausführlich beschrieben. Ebenso wurden Qualitätskriterien für fachmathematische Lehrveranstaltungen erarbeitet und in Bezug auf Vorlesungen und Tutorien ausgewertet (Rach et al., 2016). Für fachdidaktische Lehrveranstaltungen eines Mathematiklehramtsstudiengangs ist die Befundlage deutlich geringer.

Der Einfluss der COVID-19-Pandemie auf das Lehrangebot an den Hochschulen in Deutschland war und ist enorm. Der Großteil der Veranstaltungen in den letzten Semestern konnte nicht als Präsenzangebot ausgestaltet werden, was mit erheblichen technischen, methodischen und organisatorischen Herausforderungen für Lehrende und Lernende einherging. Im Zuge der schrittweisen Normalisierung des Lehrbetriebs an der Universität Leipzig wurde im Wintersemester 2021/2022 die Strategie der *Präsenzuniversität im digitalen Zeitalter* ausgegeben, welche das Primat von Präsenzlehre fordert; die Möglichkeit zur Schaffung digitaler Angebote jedoch offen lässt. In Bezug auf den Einfluss solcher digitalen Lehrangebote auf den Studienerfolg sind bisher wenige Ergebnisse bekannt. Selbstauskünfte von Studierenden verschiedener Studiengänge lassen darauf schließen, dass Vorteile beim Lernen eher auf Seiten der Präsenzlehre gesehen werden (Kögler et al., 2021). Dies legt die Vermutung nahe, dass Studierende, die ausschließlich an digitalen Lehrformaten teilnehmen, im Mittel auch schlechtere Leistungen erzielen als jene Studierenden, die an vergleichbaren Präsenzlehrveranstaltungen teilnehmen. Eine Untersuchung dieser Frage soll am Beispiel des Moduls *Grundkurs Didaktik der Mathematik*, einer fachdidaktischen Lehrveranstaltung des Lehramts für Sekundarstufen im Fach Mathematik erfolgen.

E-Learning in der Lehramtsausbildung

Nicht nur an der Universität Leipzig wurde für das Wintersemester 2021/2022 eine Rückkehr zur Möglichkeit der Präsenzlehre angestrebt (Hochschulrektorenkonferenz, 2021). Aufgrund der anhaltenden Pandemielage wurde dies schließlich an vielen Universitäten in Form hybrider Lehre umgesetzt, wobei dieser Begriff jedoch von den verschiedenen Einrichtungen nicht einheitlich definiert wird. Teilweise wird damit Präsenz mit synchroner Online-Teilnahme bezeichnet, teilweise aber auch ein Wechsel zwischen Online- und Präsenzphasen (Lübcke et al., 2022). Eine konkretere Ausgestaltung dieser Vorgaben für die Lehrpraxis wurde in der Regel den Fakultäten bzw. den Dozentinnen und Dozenten überlassen.

Angesichts solch allgemein gehaltener Rahmenbedingungen kann hybride Lehre in Form verschiedener E-Learning-Szenarien bzw. als Mischform dieser umgesetzt werden. Arnold et al. (2018) unterscheiden diesbezüglich drei Grundformen des E-Learnings nach deren Grad der Virtualisierung. Diese drei Grundszenarien wurden bereits vor der COVID-19-Pandemie an deutschen Hochschulen in der Ausbildung von Studierenden des Lehramts Mathematik eingesetzt:

1. Der Einsatz digitaler Medien zur Anreicherung von Präsenzveranstaltungen bezieht sich entweder auf den Einsatz digitaler Medien während einer Präsenzveranstaltung oder den begleitenden Einsatz parallel zur Lehrveranstaltung, indem etwa über ein Lernmanagementsystem Materialien oder Kommunikationsmöglichkeiten bereitgestellt werden (Schulmeister et al., 2008). Beispielsweise stellt Meyerhöfer (2020) im Rahmen einer Didaktikvorlesung Videoaufzeichnungen zum Nacharbeiten zur Verfügung.
2. Blended Learning bezeichnet die Verzahnung von Online- und Präsenzphasen in einer didaktisch sinnvollen Struktur (Wipper & Schulz, 2021). Eine spezifische Umsetzungsmöglichkeit dieses Szenarios ist der Inverted Classroom bzw. Flipped Classroom. Hier eignen sich Studierende Vorlesungsinhalte mittels Videos an, während die Präsenzzeit zur Vertiefung dieser Inhalte ge-

nutzt wird (Arnold et al., 2018), wie beispielsweise im Rahmen einer Grundlagenvorlesung von Spannagel (2012).

3. Virtuelle Veranstaltungen finden vollständig digital statt und reichen von Liveübertragungen von Veranstaltungen per Videokonferenz bis hin zu digitalen Lernpfaden (Arnold et al., 2018). Auch Mischformen verschiedener digitaler Elemente sind möglich, wie beispielsweise in der Konzeption eines Didaktikmoduls bei Geisen und Zender (2022).

Obwohl sich die Unterscheidung dieser Grundszenarien als Basismodell zur Betrachtung online unterstützter Lernarrangements etabliert hat (Wipper & Schulz, 2021), lässt jede dieser drei Varianten weiteren Spielraum zur Konkretisierung, sodass sich unterschiedliche Ausgestaltungen innerhalb derselben Grundform immer noch stark voneinander unterscheiden können. Daher werden zur genaueren Klassifikation digitaler Lehr-Lern-Szenarien neben der Virtualität noch weitere Kategorien herangezogen. Nachfolgend wird eine Auswahl solcher Kategorien vorgestellt, welche sich an Means et al. (2014) und Schulmeister et al. (2008) orientiert:

- Gruppengröße: Lehr-Lern-Szenarien an der Hochschule können für individuelles Lernen, das Lernen in Gruppen oder das Lernen in Großgruppen, etwa in großen Seminaren oder Vorlesungen, konzipiert werden (Schulmeister et al. 2008).
- Tempo: Es ist zu unterscheiden, ob die Lernenden das Tempo der Lehrveranstaltung selbst bestimmen können, etwa durch Pausieren bei der Wiedergabe eines Vorlesungsvideos, oder ob das Tempo vom Dozenten festgelegt wird (Means et al., 2014).
- Grad der Synchronizität: In asynchronen Veranstaltungen findet Lehren und Lernen zeitversetzt statt, beispielsweise durch Bearbeitung von Aufgaben in einem Lernmanagementsystem, während synchrone Veranstaltungen von allen zur gleichen Zeit absolviert werden, etwa als Videokonferenz (Pauschenwein & Schinnerl-Beikircher, 2021).
- Aktivitätsgrad: Der Aktivitätsgrad einer Veranstaltung bewegt sich zwischen den beiden Polen rezeptiver, d.h. Informationsaufnahme, und aktiver Beteiligung der Studierenden (Schulmeister et al. 2008). In 90-minütigen Lehrveranstaltungen, die in der Regel aus mehreren Aktivitäten bestehen, können hier entsprechend auch Mischformen auftreten.
- Rolle der Studierenden: Means et al. (2014) unterscheiden im Gegensatz dazu noch spezifischer in Studierendentätigkeiten im Rahmen einer Veranstaltung. Dies kann reines Zuhören oder Lesen beinhalten, das Lösen von Aufgaben oder Beantworten von Fragen, Exploration mit Simulationen oder Materialien sowie die Zusammenarbeit mit Kommilitoninnen und Kommilitonen. Hierbei können mehrere der genannten Tätigkeiten im Rahmen einer Lehrveranstaltung auftreten.

Diese Kategorien und ihre jeweiligen Ausprägungen sind dabei nicht spezifisch für E-Learning, sondern können auch zur Beschreibung von Präsenzlehrveranstaltungen herangezogen werden. Allerdings unterscheidet die sorgfältige Planung, Gestaltung und Weiterentwicklung von digital unterstützten Lehrveranstaltungen entlang solcher Kategorien E-Learning von *Emergency Remote Teaching* (Hodges et al., 2020).

Grundkurs Didaktik der Mathematik als E-Learning-Angebot an der Universität Leipzig im Wintersemester 2021/2022

In der Lehramtsausbildung für Oberschule und Gymnasium an der Universität Leipzig wurden die Rahmenbedingungen der hybriden Lehre im vergangenen Wintersemester zum Anlass genommen, das Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* ausgehend von einer ersten Implementation als rein virtuelle Veranstaltung aus dem Wintersemester 2020/2021 weiterzuentwickeln und als E-Learning Angebot zu verstetigen.

Bei diesem Modul handelt es sich um die erste Fachdidaktikveranstaltung im Lehramtsstudium, die im fünften Semester besucht wird, bestehend aus 2 SWS Vorlesung und 2 SWS Übung. Als Grundlagenmodul werden hier zunächst die institutionellen Bedingungen der Unterrichtsplanung, insbesondere Bildungsstandards und Lehrplan, besprochen. Die folgenden Wochen widmen sich ausgewählten Phasen und dem Wissenserwerb im Mathematikunterricht, insbesondere Einstiegen, Erarbeitung von Begriffen, dem Aufbau von Grundvorstellungen, Üben und Differenzieren sowie Diagnose und Leistungsbewertung. Schließlich werden die Kompetenzen des Argumentierens, Problemlösens und Modellierens genauer betrachtet. Abgeschlossen wird das Modul mit einer schriftlichen Klausur.

Im Wintersemester 2021/2022 wurde die Vorlesung in zwei inhaltsgleichen Varianten angeboten, sowohl als Präsenzvorlesung als auch digital über das Lernmanagementsystem Moodle. Dabei stand die Moodle-Variante allen Studierenden dauerhaft zur Verfügung unabhängig von der Teilnahme in Präsenz. Für die Übungen war in der Konzeption der hybriden Lehrveranstaltung aufgrund der deutlich reduzierten Gruppengrößen im Vergleich zur Vorlesung ursprünglich keine digitale Variante geplant. Aufgrund der lokalen Entwicklung der

Tabelle 1. Mögliche E-Learning-Szenarien im Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* im Wintersemester 2021/2022

		Teilnahme an der Vorlesung	
		Teilnahme in Präsenz	Teilnahme an Video-Vorlesung via Moodle
Teilnahme an der Übung	Teilnahme in Präsenz	Angereicherte Präsenzveranstaltung	Blended Learning (Inverted Classroom)
	Teilnahme via BigBlueButton	Blended Learning	Virtuelle Veranstaltung

Fallzahlen wurde sich allerdings kurzfristig für ein digitales Ersatzangebot in Form einer Liveübertragung der Präsenzübung mittels Videokonferenzsoftware entschieden. Entsprechend ergaben sich vier verschiedene E-Learning-Szenarien für die Studierenden gemäß der gewählten Variante des Veranstaltungsbesuchs (siehe Tabelle 1).

Die Präsenzvorlesung fand in der klassischen frontalen Variante statt, die durch regelmäßige Diskussionsphasen angereichert wurde. Als digitale Vorlesung wurden keine Aufzeichnungen der Präsenzveranstaltung angeboten, sondern besprochene PowerPoint-Folien derselben Vorlesungsinhalte. Diese wurden in mehrere Videos mit einer durchschnittlichen Länge von 20 Minuten untergliedert. Um hier die Studierenden zur aktiven Mitarbeit anzuhalten, wurden die Videos durch Arbeitsaufträge ergänzt, die die Studierenden in Einzelarbeit mit Hilfe zusätzlich zur Verfügung gestellter Materialien bearbeiten konnten. In den Übungen wurden die Vorlesungsinhalte vertieft und an weiterführenden Beispielen angewendet. Digital zugeschaltete Teilnehmerinnen und Teilnehmer konnten sich am Seminargespräch über einen Chat oder per Wortmeldung live beteiligen. In Gruppenarbeitsphasen konnten diese Studierenden in Unterräumen ebenfalls kooperativ arbeiten. Eine überblicksartige Zusammenfassung der Charakteristika der vier Lehrveranstaltungsformate ist in Tabelle 2 dargestellt.

Entsprechend dieser Charakterisierung unterscheiden sich die beiden Möglichkeiten des Vorlesungsbesuchs auf den ersten Blick deutlich stärker als die Varianten des Übungsbesuchs. Hierbei bleibt aber zu berücksichtigen, dass für die digitalen Varianten der Veranstaltungen die tatsächlichen Rahmenbedingungen stark von der individuellen Nutzung der Studierenden zu Hause abhängen. So fiel im Laufe des Wintersemesters insbesondere in der Übung auf, dass es im Rahmen von Gruppenarbeiten immer wieder Kleingruppen gab, in deren Breakout-Räumen durchgängig Stille herrschte. Für diese Studierenden ist der Lehrveranstaltungsbesuch daher mindestens in der Kategorie Gruppengröße (sowie ggf. auch in den Kategorien Aktivitätsgrad und Rolle der Studierenden) anders zu klassifizieren als in Tabelle 2.

Tabelle 2. Charakterisierung der Lehrveranstaltungsoptionen im Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* im Wintersemester 2021/2022

	Vorlesung in Präsenz	*Video-Vorlesung*	*Übung in Präsenz*	*Übung via BigBlueButton*
Gruppengröße	Lernen in Großgruppen	Individuelles Lernen	Lernen in Gruppen	Lernen in Gruppen
Tempo	Vom Dozenten bestimmt	Selbstbestimmt	Vom Dozenten bestimmt	Vom Dozenten bestimmt
Grad der Synchronizität	Synchron	Asynchron	Synchron	Synchron
Aktivitätsgrad	(Eher) Rezeptiv	Mischform	(Eher) Aktiv	(Eher) Aktiv
Rolle der Studierenden	Zuhören oder lesen, Aufgaben lösen oder Fragen beantworten	Zuhören oder lesen, Aufgaben lösen oder Fragen beantworten	Aufgaben lösen oder Fragen beantworten, Exploration mit Simulationen oder Materialien, mit Kommilitonen zusammenarbeiten	Aufgaben lösen oder Fragen beantworten, Exploration mit Simulationen oder Materialien, mit Kommilitonen zusammenarbeiten

Vergleich der Lehrveranstaltungsangebote

Rahmenbedingungen der Untersuchung
Die Evaluation des Erfolgs von Lehrveranstaltungen stellt eine institutionelle Perspektive auf Studienerfolg dar (Hillebrecht, 2019). Im Rahmen einer Lehrveranstaltung können die Ergebnisse der Abschlussklausur als Indikator für eine erfolgreiche Ausgestaltung genutzt werden. Dabei muss allerdings bedacht werden, dass aus konstruktivistischer Sicht Lernerträge von Studierenden nicht nur als unmittelbare Folge von Lehraktivitäten betrachtet werden können, sondern insbesondere die individuelle Nutzung des Lehrangebots berücksichtigt werden müsste.

Für die Untersuchung stehen die Klausurergebnisse der Wintersemester 2019/2020 und 2021/2022 zur Verfügung. Im Wintersemester 2019/2020 fanden dabei die Lehrveranstaltungen in einem reinen Präsenzformat ($n = 121$) statt. Das Lehrformat im Wintersemester 2021/2022 ($n = 113$) konnte entsprechend der in Tabelle 1 beschriebenen vier Möglichkeiten von den Studierenden individuell gewählt werden. Die Belegung der einzelnen E-Learning-Szenarien kann Tabelle 3 entnommen werden.

Ergebnisse
Das Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* wurde sowohl im Wintersemester 2019/2020 als auch 2021/2022 inhaltlich ähnlich ausgestaltet. Ebenso wurde eine vergleichbare Modulabschlussklausur, insbesondere mit der gleichen erreichbaren Maximalpunktzahl von 72 Punkten, absolviert. Daher erfolgt zunächst ein Vergleich der Klausurergebnisse der beiden Jahre. Das arithmetische Mittel der Gesamtpunktzahlen liegt im Wintersemester 2019/2020 bei 48,9 Punkten und im Wintersemester 2021/2022 bei 46,6 Punkten. Es kann festgestellt werden, dass die Streuung der Ergebnisse im Wintersemester 2021/2022 größer ist als 2019/2020 (vgl. Abbildung 1).

Der Levene-Test ($F(1, 231) = 8.779$, $p = .003$) bestätigt einen signifikanten Unterschied in den Varianzen der Klausurergebnisse der beiden Jahrgänge. Daher werden die zentralen Tendenzen der Klausurergebnisse beider Jahrgänge mit Hilfe des Mann-Whitney-U-Tests verglichen. Dieser zeigt keinen signifikanten Unterschied zwischen beiden Gruppen ($U = 6154.00$, $z = -1.319$, $p = .187$).

Die Mittelwerte der Klausurpunktzahlen der vier verschiedenen E-Learning-Szenarien im Wintersemester 2021/2022 sind 57,4 Punkte für die angereicherte Präsenzveranstaltung, 43,5 Punkte für das Blended-Learning-Format mit Präsenzvorlesung und digitaler Übung, 54 Punkte für die Inverted-Classroom-Veranstaltung sowie 41,3 Punkte für die virtuelle Veranstaltung. Anhand der Boxplots kann bei letzterer eine vergleichsweise große Streuung festgestellt werden (vgl. Abbildung 2). Aufgrund der geringen Belegung des Präsenzvorlesungsangebots (vgl. Tabelle 3) werden im Folgenden nur die Mittelwerte von Online- bzw. Präsenzteilnahme an den Übungen verglichen.

Um den Einfluss des gewählten Übungsformats auf die Mittelwerte der Klausurergebnisse bestimmen zu können, wurden die Gruppen *Inverted Classroom* und *Virtuelle Veranstaltung* wiederum auf Varianzgleichheit getestet. Der Levene-Test ($F(1, 96) = 9.546$, $p = .003$) zeigt einen signifikanten Unterschied in den Varianzen der Klausurergebnisse je nach Übungsteilnahme. Daher wird auch hier der Mann-Whitney-U-Test angewendet. Dieser zeigt einen signifikanten Unterschied zwischen den zentralen Tendenzen der Klausurergebnisse beider Gruppen an ($U = 310.50$, $z = -5.874$, $p < .001$). Die Teilnehmenden des Inverted Classrooms schneiden besser ab als die Teilnehmenden der virtuellen Veranstaltung.

Auswertung
Der Vergleich der Klausurergebnisse der reinen Präsenzveranstaltung (Jahrgang 2019/2020) und der E-Learning-Veranstaltung (Jahrgang 2021/2022) zeigt im Mittel kaum Unterschiede, sodass vermutete Vorteile der Präsenzlehre im Hinblick auf den Studienerfolg im Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* nicht grundsätzlich bestätigt werden können. Jedoch ist im E-Learning-Jahrgang eine signifikant größere Streuung der Ergebnisse zu verzeichnen. Da sich die beiden Veranstaltungsvarianten insbesondere durch ein erweitertes Lehrveranstaltungsangebot unterscheiden, legt dieses Ergebnis nahe, dass sich die Schaffung von Wahlmöglichkeiten für den Veranstaltungsbesuch im Rahmen des E-

Tabelle 3. Teilnahmezahlen der Veranstaltungsvarianten im Modul *Grundkurs Didaktik der Mathematik* im Wintersemester 2021/2022

		Vorlesung	
		Teilnahme in Präsenz	Teilnahme an Video-Vorlesung via Moodle
Übung	Teilnahme in Präsenz	9	35
	Teilnahme via BigBlueButton	6	63

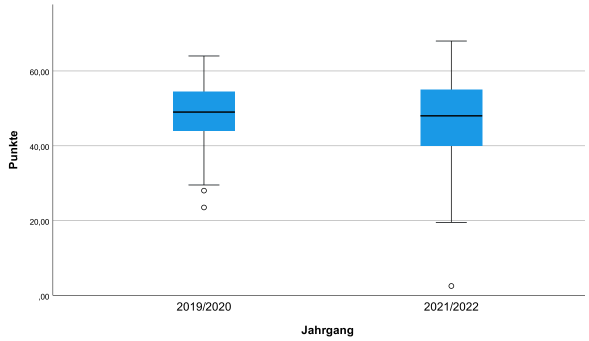


Abbildung 1. Klausurergebnisse der Jahrgänge 2019/2020 (reine Präsenzveranstaltung) und 2021/2022 (E-Learning-Veranstaltung)

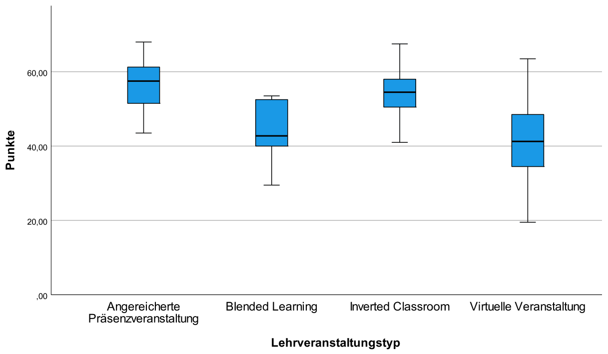


Abbildung 2. Klausurergebnisse der verschiedenen E-Learning-Szenarien im Jahrgang 2021/2022

Learnings für einen Teil der Studierenden positiv auf den Studienerfolg auswirken kann. Dies setzt jedoch eine angemessene Angebotsnutzung voraus. Entsprechend kann vermutet werden, dass andere Studierende mit einer derartigen Angebotsauswahl überfordert sind, da sie ein höheres Maß an Selbstregulation erfordert.

Betrachtet man die Veranstaltungsvarianten des E-Learnings im Wintersemester 2021/2022 (vgl. Abbildung 2), kann ein stärkerer Einfluss der Art des Übungsbesuchs im Vergleich zur Art des Vorlesungsbesuchs auf das Klausurergebnis ausgemacht werden. Dies kann einerseits auf die Konzeption der digitalen Übung als kurzfristig implementiertes *Emergency Remote Teaching* zurückgeführt werden, die im Gegensatz zur digitalen Vorlesung nicht gesondert entwickelt wurde, um den Studierenden ein zur Präsenz gleichwertiges Lernangebot bereitzustellen. Andererseits wurde die digitale Vorlesungsvariante von einem Großteil der Studierenden, die an der Vorlesung in Präsenz teilnahmen, zusätzlich zum Präsenzbesuch auch im Rahmen der Selbststudienzeit genutzt, wie aus informellen Rückmeldungen der Studierenden hervorgeht. Entsprechend erscheint eine vertiefende Betrachtung der Art des Vorlesungsbesuchs hier nicht zielführend.

Stattdessen soll im Folgenden die Art des Übungsbesuchs genauer betrachtet werden. Hier kann eindeutig zwischen den Gruppen *Inverted Classroom* und *Virtuelle Veranstaltung* unterschieden werden, wobei die Veranstaltungsvariante des Inverted Classrooms (Video-Vorlesung via Moodle und Präsenzbesuch der Übung) mit einem besseren Abschneiden in der Klausur einhergeht als die virtuelle Veranstaltung (Video-Vorlesung via Moodle und Übungsteilnahme via BigBlueButton). Dieses Ergebnis spiegelt die Defizite des *Emergency Remote Teachings* im Vergleich zu tatsächlichem E-Learning wieder. Im Gegensatz zum Vorlesungsangebot wurde im Rahmen der Übung hybride Lehre als Präsenzlehre mit der zusätzlichen Option einer synchronen digitalen Teilnahme umgesetzt. Dadurch konnten besondere Potenziale digitaler Lernumgebungen im Vergleich zur Präsenzlehre hier nicht genutzt werden, wie beispielsweise eine stärkere Individualisierung durch Asynchronität oder Selbstbestimmung des Veranstaltungstempos. Derartige Potenziale sollten bei der Konzeption von E-Learning-Angeboten verstärkt in den Fokus gerückt werden. Dies verdeutlicht, dass digitale Lehrveranstaltungsangebote in der fachdidaktischen Ausbildung angehender Lehrkräfte nicht zwangsläufig möglichst identisch zur entsprechenden Präsenzveranstaltung konzipiert sein müssen (vgl. Tabelle 2). Stattdessen kann vermutet werden, dass bei der Entwicklung von Onlineangeboten die Aktivierung von Studierenden von besonderer Bedeutung ist und auch für Veranstaltungen mit einem vermeintlich inhärent hohen Aktivitätsgrad, wie Übungen, vermutlich noch stärker als bei Präsenzveranstaltungen berücksichtigt werden muss. Dies entspricht bisherigen Befunden zu digitalen Lehrveranstaltungsangeboten im universitären Kontext, die aufzeigen, dass Studierenden die aktive Beteiligung in Onlineveranstaltungen schwerer fällt als in Präsenzveranstaltungen (Kreidl & Dittler, 2021).

Fazit

Im vorherigen Abschnitt wurden die verschiedenen E-Learning-Szenarien im *Grundkurs Didaktik der Mathematik* miteinander verglichen. Insbesondere die Variante der angereicherten Präsenzveranstaltung und des Inverted Classrooms erscheinen vielversprechend. Daher werden die verschiedenen Angebote des Vorlesungsbesuchs aus dem Wintersemester 2021/2022 auch zukünftig weitergeführt. Für digitale Lehrveranstaltungsangebote im Rahmen der Übung ist dagegen eine Weiterentwicklung über *Emergency Remote Teaching* hinweg zu einem tatsächlichen E-Learning-Angebot erforderlich. Dies kann beispielsweise in Form von ausschließlich digital stattfindenden synchronen Lehrveranstaltung oder durch Einbindung weiterer Funktionen von Lernmanagementsystemen, wie etwa Lernpfaden, Foren oder Chats, umgesetzt werden. Da dafür allerdings erhebliche Ressourcen auf Seiten der Lehrenden aufgewendet werden müssen, stellt sich angesichts der hier präsentierten Ergebnisse die Frage, inwiefern ein solcher Aufwand gerechtfertigt ist.

Dies gilt insbesondere, da im Rahmen der vorgestellten Untersuchung die Wahl des Veranstaltungsformats durch die Studierenden selbst vorgenommen wurde. Es kann nicht angenommen werden, dass die entstandenen Gruppen (vgl. Tabelle 3) hinsichtlich etwaiger Störfaktoren, beispielsweise Motivation, homogen sind. Daher ergibt sich als Desiderat dieser Untersuchung die Klärung der Frage, inwiefern Mathematiklehramtsstudierende mit ungünstigen Voraussetzungen für universitäres Lernen dazu neigen, im Rahmen von Didaktikmodulen den Besuch von Präsenzveranstaltungen zu meiden. Insbesondere vor dem Hintergrund eines vergleichsweise hohen Aktivitätsgrads in Fachdidaktikveranstaltungen im Lehramt Mathematik gilt es für solche Studierende angemessene Lehrveranstaltungsangebote zu entwickeln.

Literatur

Arnold, P., Kilian, L., Thillosen, A., & Zimmer, G. (2018). *Handbuch E-Learning: Lehren und Lernen mit digitalen Medien* (5. Aufl.). W. Bertelsmann Verlag.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Vieweg +Teubner Verlag. DOI:10.1007/978-3-8348-8250-9

Hochschulrektorenkonferenz. (16. Juli 2021). *Präsenzstudium anstreben – Impfung forcieren – Pandemielage beachten: HRK-Präsident blickt auf das kommende Wintersemester* [Pressemeldung]. tinyurl.com/27y863y4

Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., & Bond, A. (27. März 2020). *The difference between emergency remote teaching and online learning*. Educause Review. tinyurl.com/rekxcrq

Geisen, M., & Zender, J. (2022). Asynchrone mündliche Prüfungen in der fachdidaktischen Ausbildung von Lehrpersonen: Erfahrungen und Reflexion. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 112*, 11–17.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium*. Springer Spektrum. DOI:10.1007/978-3-658-28681-1

Hillebrecht, L. (2019). *Studienerfolg von berufsbegleitend Studierenden. Entwicklung und Validierung eines Erklärungsmodells*. Springer. DOI:10.1007/978-3-658-26164-1

Kögler, K., Ștefănică, F., Sälzer, C., Behrendt, S., Scherfer, M., & Atlihan, S. (2021). Digitales Lehren und Lernen im Corona-Semester aus der Sicht von Bachelor- und Masterstudierenden. Konsequenzen für eine agile Qualitätsentwicklung der Hochschullehre. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung, 40*, 487–518. DOI:10.21240/mpaed/40/2021.11.30.X

Kreidl, C., & Dittler, U. (2021). Die Corona-Lehre: Wahrnehmung der Studierenden. In U. Dittler & C. Kreidl (Hrsg.), *Wie Corona die Hochschullehre verändert: Erfahrungen und Gedanken aus der Krise zum zukünftigen Einsatz von eLearning* (S. 159–177). Springer Gabler. DOI:10.1007/978-3-658-32609-8_11

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Springer Spektrum. DOI:10.1007/978-3-658-22507-0

Lübcke, M., Bosse, E., Book, A., & Wannemacher, K. (März 2022). *Zukunftskonzepte in Sicht? Auswirkungen der Corona-Pandemie auf die strategische Hochschulentwicklung* (HFD-Arbeitspapier Nr. 63). Hochschulforum Digitalisierung. tinyurl.com/2d6s4xud

Means, B., Bakia, M., & Murphy, R. (2014). *Learning online: What research tells us about whether, when and how*. Routledge.

Meyerhöfer, W. (2020). Machen E-Lectures die Studierenden faul? *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 109*, 36–39.

Pauschenwein J., & Schinnerl-Beikircher I. (2021). Online-Lehre – funktioniert ja! Unterricht in Zeiten des Lockdown an der FH JOANNEUM. In U. Dittler & C. Kreidl (Hrsg.), *Wie Corona die Hochschullehre verändert: Erfahrungen und Gedanken aus der Krise zum zukünftigen Einsatz von eLearning* (S. 159–177). Springer Gabler. DOI:10.1007/978-3-658-32609-8_11

Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium. Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Waxmann.

Rach, S., Siebert, U., & Heinze, A. (2016). Operationalisierung und empirische Erprobung von Qualitätskriterien für mathematische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 601–618). Springer Spektrum. DOI:10.1007/978-3-658-10261-6_38

Schulmeister, R., Mayrberger, K., Breiter, A., Fischer, A., Hofmann, J. & Vogel, M. (2008*). Didaktik und IT-Service-Management für Hochschulen: Referenzrahmen zur Qualitätssicherung und -entwicklung von eLearning-Angeboten*. tinyurl.com/2j039878

Spannagel, C. (2012). Selbstverantwortliches Lernen in der umgedrehten Mathematikvorlesung. In J. Handke & A. Sperl (Hrsg.), *Das Inverted Classroom Model: Begleitband zur ersten deutschen ICM-Konferenz* (S. 73–81). Oldenbourg Verlag. DOI:10.1515/9783486716641

Wipper, A., & Schulz, A. (2021). *Digitale Lehre an der Hochschule: Vom Einsatz digitaler Tools bis zum Blended-Learning-Konzept*. Verlag Barbara Budrich.

Silvia Schöneburg-Lehnert, Universität Leipzig
E-Mail: schoeneburg@math.uni-leipzig.de

Lea Dasenbrock, Universität Leipzig
E-Mail: dasenbrock@math.uni-leipzig.de

Jennifer Rothe, Universität Leipzig
E-Mail: rothe@math.uni-leipzig.de

Felix Wlassak, Universität Leipzig
E-Mail: wlassak@math.uni-leipzig.de

VIONS –- Lernvideos interaktiv behandeln

Ysette Weiss

Ein Problem und ein Lösungsansatz

Das außerschulische Lernen mit Mathematikerklärvideos wird meist aus der Nutzerperspektive, also der Sicht der Schüler/-innen dargestellt. Dabei wird den Lernenden auch die Verantwortung für den eigenen Bildungsprozess zugesprochen. Aus der Sicht der jungen Menschen, die diese Videos nutzen, liegt diese Verantwortung jedoch auch bei denjenigen, die digital belehren, deren Erklärvideo sie schauen und deren Anweisungen sie (oft unhinterfragt) annehmen – oder im Zweifelsfall einfach durch die Erklärungen einer anderen passenderen Belehrer/-in ersetzen. Die YouTuber können jedoch keinerlei Verantwortung für die individuelle mathematische Entwicklung der Schüler/-in haben, da sie ihre jugendlichen Abonnenten in der Regel nicht kennen.

Im Mathematikunterricht sieht die Schüler/-in die Verantwortung für ihre mathematische Bildung selbstverständlich bei der Mathematiklehrkraft. Die Verbindungen zwischen der häuslichen Welt des Mathematiklernens und dem schulischen Mathematikunterricht sind nur für die Schüler/-in sichtbar und meist unreflektiert. Ebenso ist die von der Schüler/-in vorgenommene Arbeitsteilung zwischen der Mathematiklehrer/-in und den digitalen Lehrer/-innen nicht explizit und für die Mathematiklehrkraft nicht nachvollziehbar. Auch können sich Werte und Normen von YouTubern und der Mathematiklehrer/-in unterscheiden und sogar widersprüchlich sein. Das kann sich auf die Motivation der Schüler/-in auswirken und es der Lehrkraft erschweren ihre Verantwortung für den eigenen Unterricht wahrzunehmen, da letztere die zugrundeliegenden Probleme gar nicht kennt.

Aus der Nutzerperspektive wird z. B. ein besonderer Vorteil von Erklärvideos darin gesehen, dass man die Möglichkeit hat, das Video so oft man will anzuschauen. Aus der pädagogischen Sicht der Lehrkraft führt das wiederholte Anschauen aber zu einer passiven Aneignung und Memorisieren möglicherweise auch unverstandener Sachverhalte, an die sich die Schüler/-in durch die häufige Wiederholung gewöhnt hat und sie deshalb nicht mehr hinterfragt. Der schulische Unterricht orientiert sich an Verständnisproblemen und würde diesen anstatt mit wörtlichen Wiederholungen mit verschiedenen Zugängen, Problemen und Darstellungen begegnen.

Die beim wiederholten Schauen kurzer Videos entstehenden Lerngewohnheiten können auch zu Abwehrhaltungen der Schüler/-in gegenüber längeren Argumenten, umständlichen Erklärungen, anstrengenden nicht relevanten Perspektivwechseln der Lehrkraft führen. Es scheint dann auch überflüssig, sich auf diese Anstrengungen einzulassen, da man es sich ja später Zuhause auch kurz und „passender“ erklären lassen kann.

Um der Lehrkraft die Möglichkeit zu geben, diese Haltungen explizit werden zu lassen, sie bewusst in die Unterrichtsplanung einzubeziehen und damit zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, wurde an der Universität Mainz gemeinsam mit der Firma VIONS das gleichnamige Tool VIONS entwickelt. Mit VIONS können YouTube-Videos angeschaut und die dargebotene Erklärung durch Sprach- oder Textkommentare unterbrochen werden. Diese „Einsprüche“ sieht die Lehrkraft in übersichtlicher Form und wird damit zum Ansprechpartner für die Fragen, die beim Schauen des Videos entstanden sind. Im Gegensatz zur YouTuber/-in kann die Lehrkraft damit ihre Verantwortung für den Lernprozess ihrer Schüler/-innen auch beim außerschulischen Lernen wahrnehmen. Die Möglichkeit der Unterbrechung wirkt dabei dem Memorisieren durch wörtliche Wiederholung entgegen. Im Folgenden begründen wir unseren Ansatz und stellen die Möglichkeiten von VIONS bei der Nutzung von Mathematikerklärvideos als Lernmittel und als Lehrmittel vor.

Mathematikerklärvideos als Lernmittel

Der Nutzung von Erklärvideos aus dem Internet als außerschulisches Lernmittel sind zahlreiche Beiträge gewidmet. In theoretischen und empirischen Studien wurden u. a. quantitative, deskriptive und qualitativ-analytische Darstellungen des Nutzungsverhaltens entwickelt (z. B. Bednorz & Bruhn, 2021;

Balcke, 2022) das Potenzial von Mathematikerklärvideos aus der Perspektive konstruktivistischer Lerntheorien analysiert (z. B. Oldenburg, Bersch, Merkel & Weckerle, 2020) und Bestandsaufnahmen und Klassifikationen existierender YouTube-Mathematikvideos mit dem Ziel der besseren Einbindung in den Mathematikunterricht vorgenommen (z. B. Müller & Oeste-Reiß, 2019, Korntreff & Prediger 2020, Hoffart & Schneider, 2022).

Auch über Kriterien, welche die Wahrscheinlichkeit dafür erhöhen, dass Videos angewählt werden, wissen Forscher/-innen und auch Produzenten immer besser Bescheid (Beautemps & Bresges, 2021). Der coronabedingte Fernunterricht und dabei auftretende technische Probleme beim Livestreamen förderten die Nutzung von Erklärvideos im Fernunterricht, die nicht von der Lehrkraft selbst produziert wurden und deren Einsatz vor allem in deren vorherrschenden Popularität im Internet begründet ist. Die Erfahrungen des pandemiebedingten online-Mathematikunterrichts und die in dieser Zeit entstandenen Gewohnheiten der Schüler/-innen, vor dem Computer sitzend Mathematik erklärt zu bekommen, unterstützen eine Dynamik, die Widersprüche zwischen schulischem und außerschulischem Lernen scheinbar verschwinden lässt. Die Online-Lehre der vergangenen zwei Jahre sowohl im Mathematikunterricht sämtlicher Klassenstufen als auch in den Bildungs- und Ausbildungsphasen der Lehrer/-innenbildung hat zu tiefgreifenden, oft unreflektierten Veränderungen der Lerngewohnheiten von Schüler/-innen, Lehrer/-innen und zukünftigen Lehrkräften geführt, die vielerorts als endlich einsetzende Digitalisierung und damit automatisch als Modernisierung des Mathematikunterrichts begrüßt werden (vgl. Vohns, 2021).

Sätze, wie „Erklärvideos erfreuen sich bei Schüler*innen immer größerer Beliebtheit als Ergänzung zum regulären Unterricht und als Rettungsanker zur Vorbereitung auf bevorstehende Klausuren und Tests in der Schule“ (Balke, 2022) offenbaren die Selbstverständlichkeit, mit welcher der Erfolg mathematischer Bildungsprozesse mit der Wahrnehmung subjektiver Nützlichkeit und punktueller Erfolgserlebnisse gleichgesetzt wird. Die Schüler/-innen scheinen zu wissen, wie die unterrichtliche Begriffsentwicklung durch Zugaben mundgerechter und genießbarer gemacht werden kann. Es stellt sich aber die Frage, was denn dann genau in dieser Zusammenstellung genossen wird.

Ein wichtiges Bildungsziel des Mathematikunterrichts ist die Schulung des Abstraktionsvermögens. Problemorientierte konzeptuelle Begriffsentwicklung, die kognitiven Konflikte und unbequeme Umwege einbezieht, unterstützt die dafür notwendigen Verallgemeinerungsprozesse. Erklärvideos ermöglichen Abkürzungen in Form griffiger Merkregeln und erleichtern die Verinnerlichung abstrakter Aussagen durch Geschmacksverstärker in Form von visuellen und auditiven „Aufmerksamkeitscatchern“. Aus der Schüler/-innenperspektive ist der Unterschied zwischen dem konzeptuellen Verständnis abstrakter Begriffe und dem Nennen und Beschreiben der Strukturen schwer nachvollziehbar, besonders wenn es um Reproduktionsleistungen dieser eben erst gelernten Inhalte geht. Dass sich die Beurteilung mathematischer Bildung aus der Schüler/-innenperspektive vor allem an subjektiver Nützlichkeit und Erfüllung psychologischer Bedürfnisse orientiert, zeigen die Qualitätskriterienkataloge für „erfolgreiche“ Erklärvideos (Beautemps & Bresges, 2021).

Leider wird mit der immer besseren Erfüllung dieser Kriterien auch die Wahrscheinlichkeit geringer, dass gerade mathematisch unbedarfte Schülerinnen auch einmal unpassende, sich weniger an behavioristischen Lerntheorien ausrichtende Videos anschauen werden. Dass Methoden des programmierten Unterrichtens aus der Schüler/-innenperspektive als effektiv und zielführend wahrgenommen werden, ist seit den 60er Jahren bekannt (Correll, 1968).

Pragmatismus und Nützlichkeitsdenken stehen oft auch im Widerspruch zu dem Bemühen von Lehrkräften den Unterricht nicht am *teaching to the test* auszurichten und die emotionale Bedeutsamkeit von Klassenarbeiten und Leistungsüberprüfungen zu verringern. Die angedeuteten Widersprüche betreffen nicht nur die Schüler/-innen, die zwischen der schulischen Unterrichtskultur und der außerschulischen Kultur des Lernens mit Erklärvideos hin- und herwechseln.

Die Lehrer-Schüler-Rollen im Kontext der Nutzung von Mathematikerklärvideos

Wesentliche Widersprüche zwischen den Werten der Communities der online-Lehrenden und der Mathematiklehrer/-innen sind im pädagogischen Bereich zu finden. Wenn man Mathematikvideos der Art betrachtet, wie sie der YouTube-Star Daniel Jung serienweise produziert, werden Unterschiede zwischen traditioneller Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht und der Choreographie eines Internet-Erklärvideos besonders gut sichtbar.

Wie die meisten, besonders häufig angeklickten Erklärvideos sind sie kurz (meist etwa 5 Minuten) und versprechen das, worauf es in Mathematiktests ankommt, auf den Punkt zu bringen. Ängste vor dem Versagen in Mathematiktests, Gefühle der Unfähigkeit mit Mathematik umgehen zu können und der Wunsch Schulmathematik beherrschbar zu machen, werden als Gemeinschaftsgefühle angesprochen, in Kommentaren abgebildet und dadurch verstärkt. Daniel Jung nimmt in seinen Videos gleichsam die Rolle des souveränen Beherrschers der Mathematik und Retters der Verängstigten ein. Im Gegensatz zu YouTubern, die bei der Begeisterung für Mathematik als Gemeinschaftsgefühl ansetzen, spiegelt seine Wortwahl oft einen gemeinsamen Kampf gegen Mathematik wider, deren Bezwingung über maschinelles Abarbeiten von Arbeitsschritten wie „Informationen abrufen, verwerten, mixen" (youtu.be/b4lwMrMltQk) erfolgt. Sich wiederholende Verweise auf „Gefahren", Beruhigungen wie „keine Panik" unterstützen dieses Gemeinschaftsgefühl. Derartige kleinschrittige Mathematikerklärvideos beruhen auf behavioristischen und kybernetischen Lerntheorien, nutzen Belohnungsstrategien und bauen auf den Motivationstheorien auf, wie sie von Skinner (Correll, 1968) und später von Deci und Ryan (Deci & Ryan, 2008) entwickelt wurden. Dabei steht die gefühlte Erfüllung von Bedürfnissen im Vordergrund und nicht deren Aushandlung, Reflexion und Realisierung (Brousseau, Sarrazy & Novotná, 2020).

Hier offenbart sich eine grundsätzliche Unverträglichkeit der Rolle des Erklärers im Video mit dem in der Mathematikdidaktik vorherrschenden Verständnis vom Lernen als Interaktion in einer Beziehung und der damit verbundenen Rolle der Lehrkraft: Die in Deutschland in den Bildungswissenschaften vermittelten Lehr- und Lerntheorien gehen, da sie in konstruktivistischen oder sozialkonstruktivistischen Traditionen stehen, vom Lernen als der Entwicklung einer Beziehung zwischen Lernenden und Lehrenden aus. Wesentlich für das Recht der Methodenfreiheit der Lehrkräfte in deutschen Schulen ist die damit im Zusammenhang gesehene Verantwortung der Lehrer/-in für die Bildung der Schüler/-innen. Dabei stehen allgemeine und fachliche Bildung in einem Spannungsverhältnis, dessen Auslotung eine der vielfältigen erzieherischen Herausforderungen ist, welchen sich die Lehrkraft stellt. Der Umfang und die Intensität der Bereitschaft der Schüler/-innen, sich auf die Vorgaben der Lehrkraft einzulassen, wird maßgeblich durch die Wahrnehmung der Lehrkraft als Persönlichkeit bestimmt. Der Eindruck der Schüler/-in von der Persönlichkeit der Lehrer/-in ist dabei nicht das Resultat einer kurzzeitigen Beobachtung ihrer digitalen Selbstinszenierung, sondern wird durch längerfristige, vielfältige Wahrnehmungen u. a. auch unkontrollierten Verhaltens der Lehrperson, wie ihr Agieren mit anderen Schüler/-innen, mit Kolleg/-innen, informelle Treffen auf dem Schulhof, der Mensa, bei Schulfeiern, Klassenfahrten, AG's … geformt.

Die Auseinandersetzung zwischen Schulunterricht und häuslichen „Gegenprogrammen" ist nicht explizit, eine methodische oder inhaltliche Auseinandersetzung zwischen der schulischen Lehrkraft und der digitalen Hausnachhilfe findet nicht statt. Das außerschulische digitale Lernen mit Lernvideos verschwindet nicht mehr aus dem Schulalltag (Höhne, 2018). Diesen auch durch ökonomische Interessen bestimmten Trend unreflektiert seiner eigenen Dynamik zu überlassen, widerspräche aber Grundprinzipien demokratischer Bildungs- und Schulpolitik.

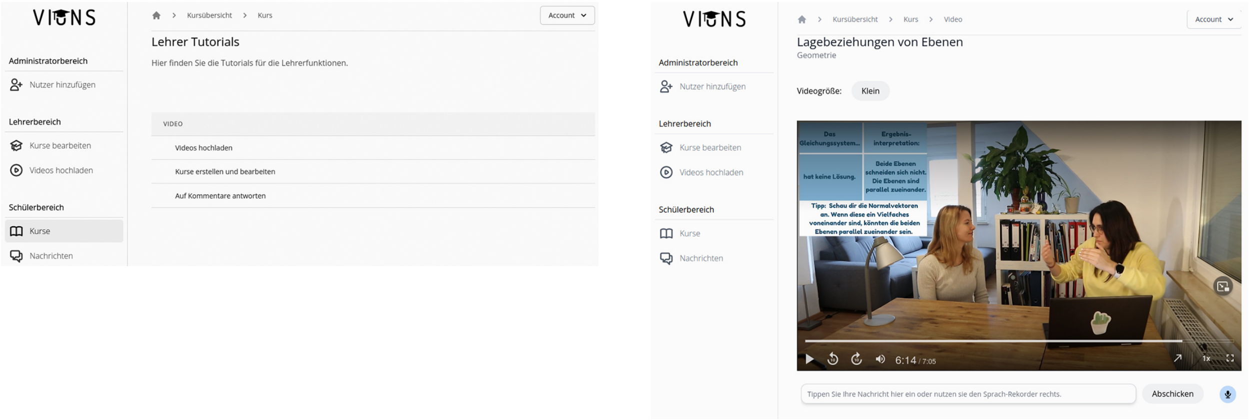
Im Projekt „Lernvideos interaktiv diskutieren – VIONS" wird mit dem Tool VIONS eine Lernumgebung geschaffen, in welcher die Mathematiklehrer/-in die Bezugsperson bei der Auseinandersetzung mit Erklärvideos ihrer Wahl ist. Ziele des Projekts sind,

- dem sich unreflektiert breitmachenden Lernen durch passive Wiederholung des Erklärten einen interaktiven Modus entgegenzusetzen,
- mathematische Schwachstellen ausgewählter Videos im Netz anerkannter Mathematikerklärvideoproduzenten im Unterricht besprechbar zu machen,
- die Lehrkraft bei der Nutzung von Erklärvideos als Lehrmittel zu unterstützen,
- die kritische Reflexion des eigenen Nutzerverhaltens zu fördern,
- besser zu verstehen, welche Phasen mathematischer Begriffsentwicklung und welche mathematischen Themen für das Videoformat geeignet sind und welche weniger.

Die Plattform VIONS

Im Tool VIONS sind die Rolle der Lehrkraft und der Schüler/-in mit unterschiedlichen Rechten versehen. Die Schüler/-innen haben die Möglichkeit Fragen die beim Anschauen des Videos in VIONS entstehen, direkt an der entsprechenden Stelle in das Erklärvideos zu sprechen oder zu texten. Sie können das Tool auch zum Kommentieren mit „Einsprüchen" nutzen. Die Ansprechpartner/-in ist dabei die Lehrer/-in, die auf die Fragen und Kommentare reagiert und diese diagnostisch zur Unterrichtsvorbereitung nutzen kann.

Das Kommentieren wird dadurch erleichtert, dass das entsprechende Tool sehr ähnlich zu denen gestaltet ist, die die Schüler/-innen von Sprach- und Textnachrichten bei WhatsApp, Signal oder Telegram kennen. Hat die Schüler/-in im Video eine Frage gestellt, die sie sich selbst nach dem weiteren Anschauen des Videos beantworten konnte, so kann sie ihren Kommentar auch wieder löschen. Nach der Anmeldung per Link finden die Schüler/-innen kurze Tutorials, die Ihnen zeigen, wie sie in VIONS mit den Videos arbeiten können (Abb. 1 links).



Lehrer Tutorials

Hier finden Sie die Tutorials für die Lehrerfunktionen.

VIDEO
Videos hochladen
Kurse erstellen und bearbeiten
Auf Kommentare antworten

Lagebeziehungen von Ebenen
Geometrie

Das Gleichungssystem…	Ergebnis-interpretation:
hat keine Lösung.	Beide Ebenen schneiden sich nicht. Die Ebenen sind parallel zueinander.

Tipp: Schau dir die Normalvektoren an. Wenn diese ein Vielfaches voneinander sind, könnten die beiden Ebenen parallel zueinander sein.

Tippen Sie Ihre Nachricht hier ein oder nutzen sie den Sprach-Rekorder rechts.

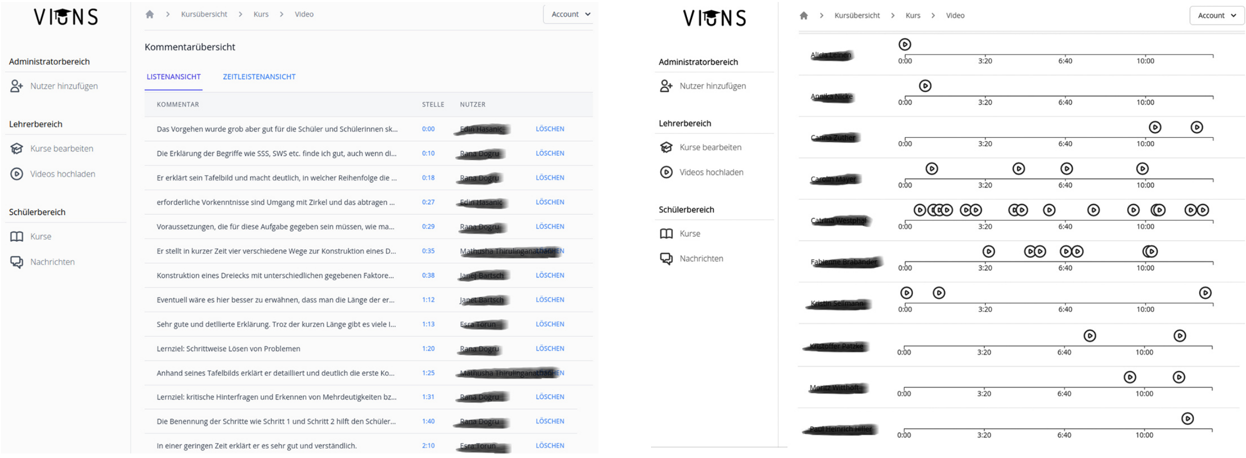
Abbildung 1. Ansicht des Menüs der Lehrperson links und die Videoansicht rechts

Die Lehrkraft hat nach ihrer Anmeldung Zugang zum Tutorial für die Schüler/-innen und auch einem Lehrer/-innentutorial. Hier wird ihr erklärt, wie sie ein virtuelles Klassenzimmer einrichten kann, zu welchem ihre Schüler/-innen durch einen von ihr erstellten Link Zugang haben. In dem Virtuellen Raum können von der Lehrkraft eigene Videos hochgeladen werden oder Videos durch Links zu Internetseiten wie YouTube für die Schüler/-innen anwählbar gemacht werden (Abb. 1 rechts). Für unterschiedliche Klassen können verschiedene Klassenzimmer eingerichtet werden.

Die Lehrkraft kann nun von ihr ausgewählte Videos von den Schüler/-innen als Hausaufgabe „bearbeiten“ lassen. Im Vergleich zu schriftlichen Aufgaben ist es bedeutend einfacher und schneller möglich, sich einen Überblick über auftretende Fragen und Probleme zu verschaffen. Der Lehrperson stehen dafür zwei Ansichten der kommentierten Videos zur Verfügung, die Listenansicht (Abb. 2 links) und die Zeitleistenansicht (Abb. 2 rechts).

In der Listenansicht sind alle Kommentar chronologisch geordnet und den Schüler/-innen zugeordnet. Falls die Lehrkraft Anonymität der Kommentierenden wünscht, kann dies durch fiktive Namen bei der Anmeldung der Schüler/-innen umgesetzt werden. Aus unserer Erfahrung empfehlen wir jedoch die personalisierte Nutzung von VIONS, da dadurch das diagnostische Potenzial bei der Unterrichtsvorbereitung bedeutend besser ausgenutzt und im Unterricht auch adressiert auf die Fragen eingegangen werden kann. Es zeigte sich auch, dass anfänglich vor allem Kommentare in Textform gegeben werden, nachdem aber erste Berührungsängste überwunden sind, wird auch der schnellere Sprachmodus genutzt.

Die Erziehung zum kritischen Umgang mit Online-Quellen ist im Kontext von *fake news* ein fächerübergreifendes Bildungsziel. Problematische Darstellungen von Schulwissen sind aber durch ihre Komplexität oft eigentlich nur vor dem Hintergrund von Expertenwissen zu beurteilen und auch dann, für den Laien nachvollziehbar, nicht so einfach zu entlarven. Fehler, lückenhafte Beweise, unlogische Argumentationen in Schulmathematikerklärvideos können aber auch von Schüler/-innen



Kommentarübersicht

KOMMENTAR	STELLE	NUTZER	
Das Vorgehen wurde grob aber gut für die Schüler und Schülerinnen sk…	0:00	[redacted]	LÖSCHEN
Die Erklärung der Begriffe wie SSS, SWS etc. finde ich gut, auch wenn di…	0:10	[redacted]	LÖSCHEN
Er erklärt sein Tafelbild und macht deutlich, in welcher Reihenfolge die …	0:18	[redacted]	LÖSCHEN
erforderliche Vorkenntnisse sind Umgang mit Zirkel und das abtragen …	0:27	[redacted]	LÖSCHEN
Voraussetzungen, die für diese Aufgabe gegeben sein müssen, wie ma…	0:29	[redacted]	LÖSCHEN
Er stellt in kurzer Zeit vier verschiedene Wege zur Konstruktion eines D…	0:35	[redacted]	LÖSCHEN
Konstruktion eines Dreiecks mit unterschiedlichen gegebenen Faktore…	0:38	[redacted]	LÖSCHEN
Eventuell wäre es hier besser zu erwähnen, dass man die Länge der er…	1:12	[redacted]	LÖSCHEN
Sehr gute und detllierte Erklärung. Troz der kurzen Länge gibt es viele I…	1:13	[redacted]	LÖSCHEN
Lernziel: Schrittweise Lösen von Problemen	1:20	[redacted]	LÖSCHEN
Anhand seines Tafelbilds erklärt er detailliert und deutlich die erste Ko…	1:25	[redacted]	LÖSCHEN
Lernziel: kritische Hinterfragen und Erkennen von Mehrdeutigkeiten bz…	1:31	[redacted]	LÖSCHEN
Die Benennung der Schritte wie Schritt 1 und Schritt 2 hilft den Schüler…	1:40	[redacted]	LÖSCHEN
In einer geringen Zeit erklärt er es sehr gut und verständlich.	2:10	[redacted]	LÖSCHEN

Abbildung 2. Kommentarübersicht als Liste links und als Audiodateien in entsprechender Zeitleiste rechts (Namen geschwärzt)

bemerkt werden. Dies führt dann zwar noch nicht zu der angestrebten Medienkompetenz, sensibilisiert die Schüler/-innen aber und sorgt für emotionale Kratzer im bedingungslosen Glauben in die im Internet agierenden „Experten“ und deren Aussagen. Im Video zur Umkehrbarkeit von Funktionen beispielsweise behauptet Daniel Jung die strenge Monotonie einer Funktion sei hinreichend für ihre Umkehrbarkeit und lässt die Zuschauer bei der Betrachtung des von ihm skizzierten Graphen mit kryptischen Bemerkungen über den „ln“, d. h. den Logarithmus naturalis, zurück (youtu.be/D43VyAGwtVA). Auch Ungenauigkeiten, wie das Kürzen des Nenners aus einer gebrochenrationalen Funktion, deren Definitionsbereich nicht erwähnt wird (youtu.be/2onnK4cJuZI) oder begriffliche Ungereimtheiten wie die Identifikation der globalen Eigenschaft Monotonie einer Funktion und der lokalen Positivität der Steigung im Punkt (youtu.be/DUduGskMh3Q) können Diskussionsanlässe bieten.

Die Nutzung von VIONS ermöglicht eine begleitete kritische Auseinandersetzung mit Fehlern oder Trivialisierungen in Erklärvideos, in dem die Lehrkraft entsprechende Videos anschauen lässt und durch die Rückmeldungen sieht, ob die Probleme erkannt wurden. Hier ist die Zeitleistenansicht besonders bequem, da sich die Lehrkraft unmittelbar einen Überblick verschaffen kann, ob und wie oft die entsprechenden Stellen kommentiert wurden. In der Zeitleistenansicht springt das Video beim Anwählen eines Kommentars auf die entsprechende Stelle, so dass sich die Lehrkraft auch schnell orientieren kann, zu welchen Stellen Kommentare abgegeben wurden. Diese Möglichkeiten der kritischen Auseinandersetzung mit Inhalten und Darstellungen in Erklärvideos ermöglichen nicht nur den Einsatz und die Nutzung problematischer, zumindest nicht perfekter Videos im Unterricht, sie unterstützen auch die Umsetzung metakognitiver Ziele durch die begleitete Reflexion der Erstellungsprinzipien und sichtbar werdender Haltungen zur Mathematik.

Ein weiteres uns sehr wichtiges Bildungsziel, welches mit VIONS unterstützt werden kann, ist der Mut zum Widerspruch. Die Unterbrechung eines Vortrags, sei es der Lehrkraft in der Schule oder in der Universität erfordert Mut und Selbstvertrauen. Die direkte Unterbrechung durch Schüler/-innen und auch Student/-innen eines Lehrer/-innenvortrags bzw. einer Vorlesung wird außerdem in den meisten Fällen aus Gründen der Höflichkeit nicht möglich sein. Andererseits ist es aber wichtig Vorträgen und Belehrungen mit einer Haltung zu begegnen, bei der es zumindest der inneren Stimme erlaubt ist, Widerspruch zu erheben. VIONS gibt der Stärkung dieser inneren Stimme Raum, indem, wenn auch in Abwesenheit der Sprecher/-in, diese unterbrochen werden kann und bei Verständnisschwierigkeiten sogar soll. Die Artikulation der Verständnisprobleme und die unmittelbare Formulierung von Fragen in einem geschützten Raum eröffnen Möglichkeiten den Mut zum Widerspruch zu stärken und sich „zu trauen“.

In den Rollen Lehrperson und Teilnehmer/-in sieht nur die Lehrkraft die Kommentare der Schüler/-innen. Die Lehrkraft kann aber den Status ihrer Schüler/-innen auch auf Lehrperson setzen und damit der Klasse die Möglichkeit geben, die Kommentare der Mitschüler/-innen zu sehen. Die Lehrkraft kann auch eine Chatfunktion aktivieren, die es ihr erlaubt, sofort online auf die Fragen der Schüler/-innen zu antworten. In der Listenansicht sind die Antworten dann direkt neben den Kommentaren zu sehen. Damit sich die Lehrkraft jedoch nicht im ständigen Bereitschaftsdienst fühlt, kann diese Funktion auch abgeschaltet werden.

VIONS kann nicht nur für die Einbeziehung von Online-Videos verwendet werden, die die Schüler/-innen zum Lernen benutzen, es kann auch helfen, Videos, die die Lehrkraft selbst als Lehrmittel für die eigene Lehre produziert hat, weiter zu entwickeln und Rückmeldung zu bekommen.

Mathematikvideos als Lehrmittel

Vor der Corona-Pandemie beschränkte sich die Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht vor allem auf die Verwendung des Computers als Rechen-, Konstruktions- und Simulationswerkzeug oder der Präsentationsfunktionen interaktiver Whiteboards. In anderen Schulfächern wurde der Einsatz von Videos als Lehrmittel im Unterricht wegen der zusätzlichen auditiven und visuellen Möglichkeiten seit längerem eingesetzt und fachdidaktisch diskutiert und beforscht, in der Mathematikdidaktik war die Verwendung von Videos im Unterricht als Lehrmittel weniger üblich. Entsprechend selten war die Nutzung von Videos im Mathematikunterricht Thema der universitären mathematikdidaktischen Veranstaltungen oder der zweiten Ausbildungsphase. Zur gemeinsamen Erstellung von Lehrvideos mit Schüler/-innen oder die Erstellung eines Erklärvideos durch die Lehrkraft gab es Berichte über die Vorteile dieser Lehr- und Lernumgebungen (Marquardt, 2016), gleichwohl verschob der hohe damit verbundene Zeitaufwand, der vor allem der technischen Ausführung und Perfektionierung der Videos gilt, solche Aktivitäten eher in selten stattfindende Projektarbeiten. Der Fernunterricht während der Pandemie führte dazu, dass sich viele schulische und universitäre Lehrkräfte mit dem Thema Erstellung von Erklärvideos beschäftigten. Dabei entdeckten einige auch eigene

Talente und fanden durchaus Gefallen an der neuen Lehrmethode. Auch in den online durchgeführten fachdidaktischen Veranstaltungen war es naheliegend das Problem zum Anlass zu nehmen und die Studierenden Videos entwickeln zu lassen.

In den Hauptseminaren zur Analyse, Nutzung und Entwicklung von Mathematikvideos an der JGU Mainz, konnte VIONS vielfältig zur Rückmeldung genutzt werden (lernvideos.mathematik.uni-mainz.de/lehr-und-lernvideos/). So war es für die Entwickler/-innen der Videos möglich, sowohl detaillierte Informationen bezüglich des unmittelbaren Eindrucks zu bekommen, den ihre Videos bei den Kommilitoninnen und Kommilitonen hinterlassen hatten, welche sowohl für Veränderungen als auch die Anfertigung der Hausarbeit sehr hilfreich waren. VIONS bietet auch Dozent/-innen der Mathematik, die während der Corona-Pandemie Aufzeichnungen ihrer Vorlesung angefertigt haben, die Möglichkeit unmittelbar Rückmeldung bzgl. Geschwindigkeit, Verständlichkeit, Plausibilität, Lesbarkeit und anderen Parametern zu bekommen, die in einer gewöhnlichen Vorlesung kaum möglich ist. Die Rückmeldungen in Form von begleitenden Kommentaren können den in Evaluationen ermittelten Gesamteindruck helfen zu differenzieren und zu interpretieren und so die Entwicklung der eigenen Lehrveranstaltung fördern.

Von Aktivitäten engagierter Lehrkräfte, die selbst Unterrichtsmaterialien und Lehrmittel für den eigenen Unterricht entwickeln, hat die Mathematikdidaktik, im Speziellen die Entwicklungsforschung, bisher wichtige Impulse erhalten, wie langjährige Projekte wie das Projekt *Sinus* zeigen.

Interessante, näher zu untersuchende, Fragen zur Nutzung von Erklärvideos im Schulunterricht, bei deren Klärung auch VIONS sinnvoll eingesetzt werden könnte, sind z. B.

- welche Phasen mathematischer Begriffsentwicklung und welchen mathematischen Themen sind für das Videoformat geeignet und welche weniger,
- welche Erfahrungen aus der Aufgabendidaktik können auf das Videoformat übertragen werden,
- wie können die zusätzlichen visuellen und auditiven Möglichkeiten genutzt werden um Schüler/-innen mit sonderpädagogischem Bedarf zu unterstützen.

Literatur

Balcke, D. (2022). Erklärvideos – Eine kritische Analyse ihres Selbstanspruchs aus fach-und allgemeindidaktischer Perspektive. *Bildung und Erziehung, 75*(1), 24–40.

Barlovits, S., Jablonski, S., & Ludwig, M. (2021). „Die Motivation war ein sinkendes Schiff" – Mathematikunterricht im Homeschooling. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47*(110), 6–10.

Beautemps, J., & Bresges, A. (2021). What comprises a successful educational science YouTube video? A five-thousand user survey on viewing behaviors and self-perceived importance of various variables controlled by content creators. *Frontiers in Communication, 137*.

Bednorz, D., & Bruhn, S. (2021). Mehr als nur erklären – Eine Bestandsanalyse des Angebots an mathematische YouTube-Videos. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47*(110), 10–17.

Brousseau, G., Sarrazy, B., & Novotná, J. (2020). Didactic contract in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 197–202.

Correll, W. (1968). Programmiertes Lernen und Lehrmaschinen: Eine Quellensammlung zur Theorie u. Praxis des programmierten Lernens. Westermann.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2008). Self-determination theory: A macrotheory of human motivation, development, and health. *Canadian psychology/Psychologie canadienne, 49*(3), 182–185.

Hoffart, E., & Schneider, R. (2022). Ein Weg durch die bunte Welt der Lehr-Lern-Videos – Mathematikdidaktische Perspektiven und Impulse für den Einsatz in der Schule. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien* (S. 1–23). Springer Spektrum, Wiesbaden.

Höhne, T. (2018). Ökonomisierung der Produktion von Schulbüchern, Bildungsmedien und Vermittlungswissen. In Sozioökonomische Bildung und Wissenschaft (S. 141–162). Springer VS.

Korntreff, S., & Prediger, S. (2020). Fachdidaktische Qualität von YouTube-Erklärvideos. In Ch. Maurer, K. Rincke & M. Hemmer (Hrsg.), *Fachliche Bildung und digitale Transformation – Fachdidaktische Forschung und Diskurse* (S. 123–126). GFD.

Marquardt, K. (2016). *Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos: Chancen, Grenzen und Durchführung einer Operationalisierung mittels Resultaten aus der Schulbuchforschung*. Universität Wien.

Müller, F., & Oeste-Reiß, S. (2019). Entwicklung eines Bewertungsinstruments zur Qualität von Lernmaterial am Beispiel des Erklärvideos. In J. Leimeister & K. David. (Hrsg.), *Chancen und Herausforderungen des digitalen Lernens. Kompetenzmanagement in Organisationen* (S. 51–73). Springer.

Oldenburg, R., Bersch, S., Merkel, A., & Weckerle, M. (2020). Erklärvideos: Chancen und Risiken Zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 46*(109), 58–63.

Vohns, A. (2021). Das Digitale als Bildungsherausforderung für den Mathematikunterricht? (Un-) Zeitgemäße Betrachtungen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47*(110), 47–55.

Ysette Weiss, Johannes Gutenberg-Universität Mainz
E-Mail: yweiss@uni-mainz.de

Lehr-Lern-Labore an der Bergischen Universität Wuppertal

Einblicke in aktuelle Projekte

Sarah Beumann und Dirk Weber

Einleitung

Die Organisation inklusiver Bildung im Mathematikunterricht ist vor dem Hintergrund einer individuellen Förderung unterschiedlicher Lernbedarfe sowie gemeinsamen Lernens nach wie vor herausfordernd (Jütte & Lüken, 2021). Besonders relevant scheinen daher einerseits Wissen um unterschiedliche Diversitätsfacetten (bspw. Lernschwierigkeiten oder besondere Begabung) als auch Kompetenzen zu deren Erfassung und Methoden ihrer Förderung (Benölken, 2017). Während das Praxissemester in der ersten Phase der Lehramtsbildung eher allgemein berufsorientierte Zielsetzungen verfolgt (König & Rothland, 2018), ist offen, wie professionelle Kompetenzen von Lehramtsstudierenden hinsichtlich individueller Diagnostik und Förderung im Fach Mathematik nachhaltig entwickelt werden können. Trotz vielfältiger Definitionen und Konzeptionen an zahlreichen Standorten (Brüning & Käpnick, 2020) eröffnen gerade Lehr-Lern-Labore

> Studierenden die Möglichkeit in authentischen, aber komplexitätsreduzierten Lernumgebungen – je nach Schwerpunktsetzung – besondere Diagnose-, Förder- bzw. Handlungskompetenzen sowie Professionswissen zu erwerben [. . .] und in vielfältiger Weise anzuwenden. (Brüning, 2016, S. 1274)

Gegenüber anderen Organisationsformen der Lehramtsbildung vereinen Lehr-Lern-Labore drei wesentliche, miteinander in Beziehung stehende Zielebenen (ebd.): (1) die zielgerichtete *Förderung von Schüler/-innen* in einem speziellen Bereich, wie etwa vor dem Hintergrund unterschiedlicher Diversitätsfacetten bzw. ihrer Lernbedarfe; (2) die *Bildung Lehramtsstudierender* in diesem speziellen Kontext sowie die Entfaltung professioneller Handlungskompetenzen (zum Konstrukt u. a. Baumert & Kunter, 2006) und (3) *Forschung* im fokussierten Kontext, die Grundlagen- wie auch Entwicklungsforschung umfassen kann.

An der Bergischen Universität Wuppertal entstanden in der Vergangenheit bereits vielfältige Lehr-Lern-Labore in der Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik (wie z. B. MATHletics, zum Konzept: Auhagen et al., 2020), die sich der Förderung unterschiedlicher Diversitätsfacetten und auf Forschungsebene entsprechend fokussiertem Kontext widmeten. Aktuell werden am Standort Wuppertal drei mathematikdidaktische Lehr-Lern-Labore organisiert:

- MaKosi 2.0: Ein Förderprojekt für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen,
- MIKADU: Ein Förderprojekt für mathematisch begabte und interessierte Kinder der 5. und 6. Jahrgansstufe,
- THINK: Erweiterung des MIKADU-Projekts für Kinder der 3. und 4. Klasse.

Insbesondere die Verzahnung von Theorie und Praxis sowie genannter Zielebenen liefern mit Blick auf die Herausforderung inklusiver Bildung im Mathematikunterricht Argumente für die Berücksichtigung und den Nutzen von Lehr-Lern-Laboren in der universitären Lehramtsbildung. Das Ziel des vorliegenden Beitrags besteht darin, zu zeigen, wie mathematikdidaktische Lehr-Lern-Labore im Kontext verschiedener Lehramtsstudiengänge und Facetten von Diversität Lernender organisiert werden können und welche Forschungen sich anschließen lassen. Hierzu werden im Folgenden exemplarisch die Konzeptionen der Lehr-Lern-Labore *MaKosi 2.0* und *MIKADU* vorgestellt.

MaKosi 2.0 – Ein Lehr-Lern-Labor zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen unter digitalen Bedingungen

MaKosi 2.0 – Übergreifende Ziele und Rahmung

Den Kern des Lehr-Lern-Labors MaKosi 2.0 („Mathematische Kompetenzen sichern 2.0“) bildet die individuelle Diagnostik und Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in der Grundschule unter Nutzung digitaler Medien im hybriden Lernarrangement. Die organisatorischen und theoretischen Grundlagen fußen auf den didaktischen Rahmungen sowie Erfahrungen des von 2013 bis 2018 durchgeführten Lehr-Lern-Labors „MaKosi“ („Mathematische Kompetenzen sichern“) (Benölken, 2015). Im Sinne eines

Lehr-Lern-Labors verfolgt MaKosi 2.0 drei *Zielebenen*: Ausgehend von der Grundannahme, dass ein „Anders Lernen mit Medien“ (Kerres, 2018, S. 120) möglich ist, widmet sich das (1) *Forschungsanliegen* der „professionelle[n] Planung eines didaktischen Lernangebots“ (Kerres, 2020, S. 2), das einerseits fachdidaktische Potenziale digitaler Medien wie etwa virtueller Anschauungsmittel (Walter, 2018) zur individuellen Förderung im Fach Mathematik berücksichtigt und andererseits vor dem Hintergrund mathematischer Bildung durch die „kluge Kombination“ (Prediger, 2021, S. 131) von Präsenz- und Onlineelementen, synchroner und asynchroner Lernphasen etc. den „Möglichkeitsraum der Digitalität“ (Stalder, 2021, S. 5) eröffnet. Auf Seiten der (2) *Kinder* zielt MaKosi 2.0 einerseits auf die Aufarbeitung wesentlicher „Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffs“ (Gaidoschik et al., 2021, S. 5) und andererseits auf die Stärkung u. a. affektiver und motivationaler Faktoren gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik, sowie Vermittlung eines adäquaten Bildes von Mathematik (Käpnick & Benölken, 2020). Die (3) *Bildung Lehramtsstudierender* richtet sich in Bezug auf die zielgerichtete Förderung von Schüler/-innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen auf eine Entfaltung von Fach-, Personal-, Sozial und Methodenkompetenzen im spezifischen Kontext eines hybriden Lernarrangements. Hierzu stellt MaKosi 2.0 seit dem Wintersemester 2020/2021 eine Zusatzqualifikation für Studierende des Master of Education für das Lehramt an Grundschulen und das Lehramt für Sonderpädagogische Förderung der Bergischen Universität Wuppertal dar.

Der *Projektdurchlauf* gliedert sich in *Vorbereitungs-* und *Praxisphase*. Zu Beginn des Semesters erarbeiten die Studierenden in der (1) *Vorbereitung* theoretische und methodische Fundamente zur Erfassung und Förderung besonderer Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sowie zu digitalen Medien und digital-gestützten Lernarrangements aus fachdidaktischer wie interdisziplinärer Perspektive. Die *Auswahl des Kindes* (2. bis 4. Jahrgangsstufe) mit anhaltenden Schwierigkeiten beim Erwerb des Basisstoffs erfolgt anhand einer begründeten Nominierung aus Sicht der Lehrkräfte, wobei es gleichfalls einer formellen Anmeldung des Kindes durch dessen Eltern bedarf. Vor dem Hintergrund einer ganzheitlichen Diagnostik und Förderung sowie des Wechselspiels möglicher inter- und intrapersonaler Faktoren stehen Projektleitung, Studierende, Lehrkräfte und Eltern kontinuierlich im Austausch. Die (2) *Praxisphase* wird durch eine spielerische *Kennenlernsitzung* an der Schule eingeleitet, in der für den gesamten Projektdurchgang (i. d. R. 10 Sitzungen à 90 min, plus Kennenlernen und Abschluss) *feste Lernteams* aus jeweils einem Kind und einem oder einer Studierenden gebildet werden. In der *ersten Hälfte* der Praxisphase widmen sich die Studierenden vor allem der *prozessorientierten Diagnostik* „typischer Erscheinungsformen“ (Käpnick & Benölken, 2020) von Schwierigkeiten beim Mathematiklernen auf Basis einer bewährten Sammlung von Aufgaben mit informellem Charakter, die in der einschlägigen Literatur in Bezug auf diagnostische Einschätzungen als geeignet beurteilt werden. Darüber hinaus werden die Eindrücke im Sinne einer ganzheitlichen Diagnostik durch Durchführung und Auswertung leitfadengestützter Interviews mit Eltern, mit der Mathematiklehrkraft sowie dem Kind flankiert. In der *zweiten Hälfte* des Projektdurchgangs werden in den Lernteams vor allem auf die individuellen Bedarfe der Schüler/-innen ausgerichtete *Förderaktivitäten* durchgeführt, wobei fachdidaktische Prinzipien, etwa der Einsatz von Arbeits- und Anschauungsmitteln, eine durchgehende Verstehensorientierung und der Aufbau von Basisfakten (Gaidoschik et al., 2021), berücksichtigt werden. Diagnose- und Förderung werden selbstverständlich gemeinsam gedacht; im Kontext kontinuierlicher Prozessorientierung ist die Abstimmung der Diagnose- und Förderphasen de facto variabel.

MaKosi 2.0 – Organisation der Förderstunden

Im Sinne hybrider Lernarrangements finden im Rahmen von MaKosi 2.0 *Diagnose- und Fördersitzungen* in Kombination von Präsenz- und Distanzformaten sowie Elementen digital-gestützter Lernaktivitäten (Kerres, 2018) statt. *Distanzdiagnostik und -förderung* werden in den Lernteams mittels einer Videokonferenzsoftware und auf Seiten der Schüler/-innen mit schulüblichen Tablets realisiert. In regelmäßigen Abständen finden zudem *Präsenzdiagnostik- und -förderung* statt, wobei in beiden Formaten auf Kinder- und Studierendenseite eine Palette *analoger und virtueller Arbeitsmittel* mit Blick auf ihre Potenziale (u. a. Walter, 2018) und individuelle Zugangsweisen der Schüler/-innen (Walter & Dexel, 2020) zur Verfügung stehen. In der Regel werden Diagnose- und Fördersitzungen als wöchentlich am Nachmittag stattfindendes Förderangebot an den Partnerschulen organisiert. Um in Anlehnung an Kerres (u. a. 2018) flexibel und effizient ein diagnostisches Anliegen lösen oder ein bestimmtes fachdidaktisches Ziel entlang individueller Förderbedarfe erreichen zu können, ist bei MaKosi 2.0 kein starres Verhältnis aus Präsenz- und Distanzsitzungen angedacht. Infolge des Differenzierungspotenzials unterschiedlicher Lehr-Lern-Formate (Weber & Auhagen, 2021) können derart Lernorte auch außerhalb des Schulgebäudes, wie etwa das häusliche Umfeld der Kinder erschlossen werden. Der *Aufbau der Diagnose- und Fördersitzun-*

gen (90 min) ist dabei in die folgenden drei Phasen unterteilt: Der (1) *gemeinsame Einstieg* (15 min) stellt die Stärkung des mathematischen Kompetenzerlebens der Schüler/-innen und Vermittlung eines vielfältigen Bildes von Mathematik anhand von „Enrichment"-Formaten (Benölken, 2017) in den Vordergrund. Die *Hauptphase* (60 min), in der sich Kinder und Studierende zur Diagnostik und Förderung in ihre festen Lernteams begeben, kann entweder in Präsenz oder mittels Videokonferenz auf Distanz durchgeführt werden. Auf Distanz dienen Annotations- und Kollaborationsfunktion der Videokommunikationssoftware zur direkten Bearbeitung der Aufgaben durch die Lernenden. Handlungen mit analogen Arbeitsmitteln werden durch die Ausrichtung von Vorder- oder Rückseitenkamera des Tablets durch die Kinder von den Studierenden beobachtbar. Präsenzsitzungen werden genutzt, um diagnostische Eindrücke zu verdichten und mögliche ‚blinde Flecken' in der Diagnostik zu beleuchten oder zum Lernenden passende Förderaktivitäten durchzuführen, die auf dem virtuellen Weg an ihre Grenzen stoßen. Die Förderstunden schließen mit einem (3) *Abschlussspiel* (15 min), um affektive Komponenten der Kinder gegenüber der Beschäftigung mit Mathematik zu stärken. Einstieg und Abschluss bilden auch im Falle individueller Förderung auf Distanz (bspw. im häuslichen Umfeld) einen festen Bestandteil von MaKosi 2.0. *Asynchrone Lernphasen* ergänzen die Organisation des Lehr-Lern-Labors durch den Einsatz von geeigneten Lernplattformen. Einer 45-minütigen *Gruppenreflexion* nach jeder Sitzung zwischen Projektleitung und Studierenden von Praxisphase sowie zur bedarfsorientierten Planung der weiteren Diagnostik und Förderung kommt mit Blick auf die Professionalisierung angehender Lehrkräfte eine besondere Rolle zu.

MaKosi 2.0 – Aktuelle Begleitforschung

Der in der Vergangenheit praktizierte digitalgestützte und hybride (Mathematik-)Unterricht berücksichtigte insbesondere die Lernbedarfe leistungsschwacher Schüler/-innen nur geringfügig (Schult et al., 2021; Hammerstein et al., 2021). Umso mehr stehen aus fachdidaktischer Perspektive eine Entfaltung und Sicherung von Basiskompetenzen und Verstehensgrundlagen im Vordergrund digitalgestützter Unterrichtsplanung (Prediger, 2021). Um bestehenden und neuerlichen „Barrieren im Lernprozess" (Nolte, 2015, S. 194) begegnen und zielgerichtete konzeptuelle Unterstützung leisten zu können, ist daher die bestmögliche Berücksichtigung individueller Bildungsprozesse aus der Perspektive der Schüler/-innen wünschenswert. Hierbei stellt sich die Frage, wie ein solches auf die Bedarfe von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen abgestimmtes individuelles und hybrides Lernarrangement unter Nutzung digitaler Medien gestaltet werden kann. Hierzu liegen bis dato kaum Forschungsarbeiten vor, sodass qualitative Zugänge konstruktiv sein mögen, die spezifische Gruppen von Lernenden (Helm et al., 2021) im angedeuteten Kontext berücksichtigen. Auf dieses Desiderat bezugnehmend widmet sich die Begleitforschung bei MaKosi 2.0 u. a. der Rekonstruktion schüler/-innenseitiger Erfahrungen, um mögliche Konsequenzen für die Organisation hybrider Lernarrangements zur Diagnostik und Förderung von Kindern mit anhaltenden Schwierigkeiten beim Erwerb des Basisstoffs ableiten zu können. Zur Initiierung von Reflexionen über den gemeinsamen Erfahrungsraum hybrider Lernarrangements wurde die Methode der Gruppendiskussion gewählt, da sie „ein Verstehen der Eigendynamik und Sinnhaftigkeit von Lernsituationen sowie die Rekonstruktion von Orientierungsmusterm, die der Herstellung von Lehr- und Lernpraxis zugrunde liegen" (Nentwig-Gesemann & Gerstenberg, 2014, S. 277) eröffnen. Die Auswertung des Datenmaterials erfolgte anhand der Dokumentarischen Methode (Bohnsack, 2014). Die Eindrücke aus der bisherigen Untersuchung weisen u. a. darauf hin, dass Potenziale digital-gestützter und hybrider Lernarrangements individuelle Lernwege zur Aufarbeitung wesentlicher arithmetischer Inhalte eröffnen, sofern die Gestaltung der Förderung entlang gruppenspezifischer Bedarfe erfolgt: Eine unmittelbare (d. h. synchrone), kontinuierliche und individuelle Vermittlungspraxis der Lehrenden scheint für verstehensorientierte Lehr-Lern-Prozesse im Mathematikunterricht der Grundschule auch in hybriden Lernarrangements und unter Nutzung digitaler Medien von besonderer Relevanz für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen.

MIKADU – Mathematisch interessierte Kinder an der Bergischen Universität Wuppertal

MIKADU – Übergreifende Ziele und Rahmung

Das MIKADU-Projekt ist ein außerschulisches Enrichment-Förderprojekt für mathematisch begabte und interessierte Kinder der fünften und sechsten Klasse. Ins Leben gerufen wurde es unter der Leitung von Prof. Dr. Klaus Volkert und wird seit über zehn Jahren durchgeführt und angeboten. Pro Durchgang unterstützen dabei ca. 15 Lehramtsstudierende der Lehrämter der Sekundarstufen I und II sowie der Sonderpädagogischen Förderung die Schüler/-innen. Pro Durchgang (Block Winter: Oktober bis Januar, Block Sommer: April bis Juli) nehmen etwa 20 interessierte und begabte Kinder im zweiwöchentlichen Rhythmus außerhalb der Schulferien an den 90-minütigen Fördertreffen teil. Dieses außerschulische Enrichment-Förderprojekt ist als Lehr-Lern-Labor konzipiert, sodass hier die drei Zielebenen *Kinder, Studierende* und *Forschung* miteinander vereint werden: (1) Mit Blick auf die teilnehmenden *Kinder* wird deren individuelle Förderung in mathematischen Kontexten fokussiert, sodass sich ihr Begabungspotential im Rahmen des Projekts bestmöglich entfalten und gezielt unterstützt werden kann. Innerhalb der Fördersitzungen, die als Enrichment (Anreicherung) geplant sind, bekommen die Kinder die Möglichkeit, den Spaß im Umgang mit mathematischen Problemen zu entfalten, eine forschende Neugier gegenüber mathematischen Sachverhalten zu entwickeln, aber auch ihr Bild von Mathematik und typischen mathematischen Tätigkeiten zu erweitern. (2) Durch eine stetige Theorie-Praxis-Verknüpfung soll den unterstützenden *Studierenden* die Entwicklung sowohl ihrer Handlungskompetenz (über die bloße Fachkompetenz hinaus) als auch einer forschenden Grundhaltung ermöglicht werden. Mit Blick auf den inklusiven Diskurs wird die Diversitätsfacette Begabung im Projekt erfahrbar gemacht und die Studierenden sollen lernen, diagnostische Verfahren anzuwenden sowie begabte und interessierte Kinder bestmöglich zu fördern. (3) Die Zusammenarbeit mit den teilnehmenden Kindern ermöglicht den *Forschenden,* einen Einblick in die Arbeits- und Denkweisen mathematisch interessierter Kinder. So können spezielle Merkmale mathematischer Begabung konkret analysiert, aber auch gezielte Fördermaterialien entwickelt werden.

Wie angedeutet lässt sich das MIKADU-Projekt in der Enrichmentförderung verorten. Das bedeutet eine Anreicherung und Erweiterung des regulären schulischen Unterrichtsstoffs. Bei der Aufgabenauswahl für die Förderstunden wird deshalb gezielt darauf geachtet, keinen schulischen Unterrichtsstoff vorwegzunehmen. So ist das MIKADU-Projekt von der Grundidee und seiner Organisation übereinstimmend zu anderen Enrichmentprojekten wie „Mathe für kleine Asse“ (Käpnick, 2008) konzipiert. Neben den Zielebenen eines Lehr-Lern-Labors gibt es eine wichtige Grundposition zur mathematischen Begabung, die hier zugrunde gelegt wird. Eine mathematische Begabung wird als ein dynamisches System betrachtet (z.B. iPEGE, 2009), das eine ganzheitliche Sicht auf die individuelle (kindliche) Persönlichkeit erfordert. Dies verlangt somit eine komplexe, aber auch langfristige Prozessdiagnostik unter der Verwendung sowohl standardisierter als auch nicht-standardisierter Instrumente (Fuchs & Käpnick, 2009). Im MIKADU-Projekt wird ein vielschichtiges Diagnosebild über das mathematische Leistungspotenzial, aber auch über Interessen, motivationale und affektive Komponenten und weitere kognitive und metakognitive Aspekte der Kinder erstellt. Dazu wird ein diagnostisches Stufenmodell eingesetzt (u. a. Käpnick, 1998), das in ähnlicher Form auch in weiteren vergleichbaren Enrichment-Förderprojekten zum Einsatz kommt.

MIKADU – Organisation der Förderstunden

Im MIKADU-Projekt treffen sich alle zwei Wochen nachmittags in der Zeit von ca. 16:00 bis 17:30 Uhr zwei jahrgangsübergreifende Gruppen (5. und 6.) sowie eine Gruppe aus etwa 15 Lehramtsstudierenden in einem Seminarraum der Bergischen Universität Wuppertal. Neben der Mitwirkung bei den einzelnen Förderstunden nehmen die Studierenden auch an einer *Vorbesprechung* (30 min vor der Sitzung) sowie einer *nachträglichen Auswertung* (30 min nach der Sitzung) teil. Hierbei werden zunächst das Aufgabenformat mit Lösungen und möglichen Schwierigkeiten vorgestellt, aber auch interessante Beobachtungen z. B. zu Lösungsideen reflektiert und diskutiert. Die regelmäßigen Fördersitzungen finden nach einem identischen Prinzip statt. Begonnen wird mit einer *Einstiegsphase*, die im Stuhlkreis stattfindet und in der das Thema der Stunde vorgestellt wird. Dabei wird versucht, an die vorherigen Erfahrungen anzuknüpfen, ohne aber Lösungsstrategien vorwegzunehmen. Danach beginnt die (eigenständige) *Arbeitsphase*, in der die Kinder sowohl die Sozialform als auch Materialien und Vorgehensweisen frei wählen können. In einer *Abschlussrunde* werden die verschiedenen Lösungsansätze und -ideen der Kinder vorgestellt und diskutiert. Insgesamt wird großen Wert daraufgelegt, dass möglichst viele Lösungswege als auch Ergebnisse der Kinder vorgestellt und wertgeschätzt werden.

MIKADU – Aktuelle Begleitforschung

(Mathematikdidaktische) Forschung auf dem Gebiet der mathematischen Begabung berührt bis heute vermehrt Konzepte der Diagnostik, wie z. B. empirische Arbeiten zu charakterisierenden Merkmalen (z. B. Käpnick, 1998) sowie die Entwicklung spezieller Fördermaterialien (z. B. Käpnick et al., 2021). Demgegenüber sind die Vorstellungen, also Beliefs von mathematisch begabten Schüler/-innen über Mathematik oder gar mathematische Aktivitäten eher unzureichend erforscht. Dieses Desiderat wird im aktuellen Projektdurchlauf aufgegriffen. In der TIMSS-Studie zeigte sich beispielsweise, dass Schüler/-innen Mathematik oft als rein formales System wahrnehmen und dass mit dem Begriff Mathematik meist Zahlen sowie die Verarbeitung von Schemata und Algorithmen assoziiert werden (Köller et al., 2000). Solche Ansichten von Lernenden können sich aber negativ auf das schulische Lernen, auf mathematische Leistungen (ebd.) oder die Entfaltung mathematischer Potenziale und die damit verbundenen mathematischen Begabungen auswirken. Bisher werden (mathematische) Beliefs in

Modellen zur mathematischen Begabung nicht explizit berücksichtigt (z. B. Fuchs & Käpnick, 2009; Sjuts, 2017); es gibt bis dato noch keine explizite Verzahnung der beiden Konzepte. Mathematische Beliefs können in den national oft genutzten Begabungsmodellen unter dem Begriff der (fördernden und hemmenden) intrapersonalen Katalysatoren vermutet werden, dies wird aber nicht explizit ausgeschärft. Aktuellere Begabungsmodelle (z. B. Benölken & Veber, 2020) thematisieren zwar zunehmend Aspekte, wie die mathematische Identität, differenzieren dies aber auch nicht weiter aus. Vor diesem Hintergrund werden im aktuellen MIKADU-Durchlauf 12 Längsschnitt-Fallstudien (8 Jungen und 4 Mädchen) begabter Kinder durchgeführt. Zu den in den Fallstudien eingesetzten Instrumenten gehören neben einem halbstandardisierten Leitfadeninterview, ein Pretest mit offenen sowie geschlossenen Fragen (z. B. zu Aspekten der Motivation, Rakoczy et al., 2005) sowie ein Indikatoraufgabentest (Käpnick, 1998). Alle Ergebnisse und Eindrücke werden dann in einer triangulierenden Weise interpretiert. Erste Eindrücke und Ergebnisse (z. B. Beumann & Benölken, 2022) weisen darauf hin, dass die mathematischen Beliefs der teilnehmenden begabten Kinder deutlich vielschichtiger und differenzierter sind als die Beliefs in anderen Schülerinnen- und Schülerstudien (z. B. Köller et al., 2000). Es liegt aktuell der vorsichtige Schluss nahe, dass vorteilhafte Eigenschaften mathematischer Beliefs im Sinne einer vielschichtigen Sichtweise ein wichtiger Eckpfeiler für eine verbesserte Identifikation und Förderung mathematisch begabter Kinder sein könnten. Umgekehrt könnten die bisher ausgewerteten Eindrücke der Fallstudien darauf hindeuten, dass im Gegensatz zu anderen Studien mathematisch begabte Kinder häufiger eine vielschichtige Auffassung von Mathematik und ihren Tätigkeiten besitzen.

Zusammenfassung

Die gegebenen Einblicke zeigen, wie sich Lehr-Lern-Labore im Kontext verschiedener Lehramtsstudiengänge und Facetten von Diversität Lernender exemplarisch organisieren lassen. Im Kontext von Herausforderungen inklusiver Bildung im Mathematikunterricht kann diese spezifische Organisationsform universitärer Lehramtsbildung konstruktiv genutzt werden, um angehende Lehrkräfte auf die Umsetzung einer individuellen Diagnostik und Förderung vorzubereiten und professionelle Kompetenzen zu entfalten (Benölken & Mayweg-Paus, 2018). Darüber hinaus eröffnet die Konzeption „Lehr-Lern-Labor“ Zugänge zu fachdidaktischer Forschung, wie auch zahlreiche und vielfältige Publikationen sowie die in diesem Beitrag beschriebene Begleitforschung unterstreichen. *MaKosi 2.0* und *MIKADU* stehen dabei stellvertretend für die Vielfalt mathematikdidaktischer Lehr-Lern-Labore an der Bergischen Universität Wuppertal (Auhagen et al., 2020). Auch wenn Lehr-Lern-Labore ein etabliertes und gleichfalls prägendes Element des Standorts Wuppertal zur Qualifizierung Lehramtsstudierender darstellen, handelt es sich um ein freiwilliges Angebot, das häufig im Wahlpflichtbereich der Studiencurricula verortet ist. Es darf also mit Blick auf Herausforderungen der Gestaltung eines inklusiven und auch digitalen Mathematikunterrichts offen diskutiert werden, inwiefern Lehr-Lern-Labore in Studiencurricula als verpflichtendes Element etabliert werden sollten, um bereits in der ersten Phase der Lehramtsbildung besondere Handlungskompetenzen auf Seiten angehender Lehrkräfte zu entfalten.

Literatur

Auhagen, W., Beckmann, S., Beumann, S., Dexel, T., Radünz, L., Tiedke, A., Weber, D., & Benölken, R. (2020). Lehr-Lern-Labore auf Distanz? Ein Erfahrungsbericht aus der Mathematikdidaktik. *Die Materialwerkstatt, 2*(1). 63–86.

Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), 469–520.

Benölken, R. (2017). Mathematikdidaktische Perspektiven auf inklusiven Unterricht. Potenziale von Enrichmentformaten als möglicher Baustein. In C. Fischer, C. Fischer-Ontrup, F. Käpnick, F.-J. Mönks, N. Neuber & C. Solzbacher (Hrsg.), *Potenzialentwicklung, Begabungsförderung, Bildung der Vielfalt. Beiträge aus der Begabungsforschung* (Teil II; S. 29–44). Waxmann.

Benölken, R. (2015). „MaKosi“ – Ein Förder-, Lehr- und Forschungsprojekt im Themenkomplex „Rechenprobleme“. In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 51–63). WTM.

Beumann, S., & Benölken, R. (2022, akzeptiert). Just more than numbers, facts or calculus? – Beliefs of mathematical gifted students. *Proceedings of the 12th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference.*

Benölken, R., & Mayweg-Paus, E. (2018). Kompetenzerwerb in Lehr-Lern-Laboren – Eindrücke aus dem Projekt „MaKosi“. *Die Hochschullehre, 4*, 491–504.

Benölken, R., & Veber, M. (2020). Inklusion und Begabung – von der Begabtenförderung zur Potenzialorientierung. In C. Kiso & S. Fränkel (Hrsg.), *Inklusive Begabungsförderung in den Fachdidaktiken – Diskurse, Forschungslinien und Praxisbeispiele* (S. 37–64). Klinkhardt.

Bohnsack, R. (2014). *Rekonstruktive Sozialforschung: Einführung in qualitative Methoden* (9. Aufl.). Barbara Budrich.

Brüning, A.-K. (2016). Untersuchungen zur Profilbildung und Evaluation von Lehr-Lern-Laboren im Entwicklungsverbund „Schülerlabore als Lehr-Lern-Labore“

der DTS. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1273–1276.

Brüning, A.-K., & Käpnick, F. (2020). Empirisch-konstruktive Bestimmung des Begriffs „Lehr-Lern-Labor“ und seine konzeptionelle Einordnung in vergleichbare Organisationsformen der Lehramtsausbildung in MINT-Fächern. *mathematica didactica*, 43(2020), 1.

Fuchs, M., & Käpnick, F. (2009). *Mathe für kleine Asse*. Cornelsen.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S).

Hammerstein, S., König, C., Dreisoerner, T., & Frey, A. (2021). Effects of COVID-19-Related School Closures on Student Achievement – A Systematic Review. *Frontiers in Psycholgy*, *12*, 1–14.

Helm, C., Huber, S., & Loisinger, T. (2021). Was wissen wir über schulische Lehr-Lern-Prozesse im Distanzunterricht während der Corona-Pandemie? – Evidenz aus Deutschland, Österreich und der Schweiz. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *24*, 237–311.

iPEGE (2009). *Professionelle Begabtenförderung. Empfehlungen zur Qualifizierung von Fachkräften in der Begabtenförderung*. Or ZBF.

Jütte, H., & Lüken, M. M. (2021). Mathematik inklusiv unterrichten – Ein Forschungsüberblick zum aktuellen Stand der Entwicklung einer inklusiven Didaktik für den Mathematikunterricht in der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, *14*, 31–48.

Käpnick, F. (2008). „Mathe für kleine Asse“. Das Münsteraner Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 138–148). Lit Verlag.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Peter Lang.

Käpnick, F., Auhagen, W., Benölken, R., Fuchs, M., Körkel, V., Ohmann, Y., Schreiber, L., & Sjuts, B. (2021). *Forschen und Knobeln: Mathematik. Klasse 5 und 6*. AOL-Verlag.

Käpnick, F., & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule* (2. Aufl.). Springer.

Kerres, M. (2020). Bildung in der digitalen Welt: Über Wirkungsannahmen und die soziale Konstruktion des Digitalen. *MedienPädagogik*, *17*, 1–32.

Kerres, M. (2018). *Mediendidaktik. Konzeption und Entwicklung digitaler Lernangebote* (5. Aufl.). De Gruyter Oldenbourg.

Köller, O., Baumert, J., & Neubrand, J. (2000). Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In J. Baumert, J. W. Bos & R. H. Lehmann (Hrsg.), *Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie – Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Bd. 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe* (S. 229–270). Leske + Budrich.

König, J., & Rothland, M. (2018). Das Praxissemester in der Lehrerbildung: Stand der Forschung und zentrale Ergebnisse des Projektes *Learning to Practice*. In J. König, M. Rothland & N. Schaper (Hrsg.), *Learning to Practice, Learning to Reflect? Ergebnisse aus der Längsschnittstudie LtP zur Nutzung und Wirkung des Praxissemesters in der Lehrerbildung* (S. 1–62). Springer.

Nentwig-Gesemann, I., & Gerstenberg, F. (2014). Gruppeinterviews. In A. Tillmann, S. Fleischer & K.-U. Hugger (Hrsg.), *Handbuch Kinder und Medien* (S. 273–285). Springer.

Nolte, M. (2015). Rechenschwäche – Was ist das und was können wir tun? In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 188–202). WTM.

Prediger, S. (2021). Verständnis statt nur Rechenverfahren: Mathematische Bildung in und nach der Pandemie. In K. Maaz & M. Becker-Mrotzek (Hrsg.), *Schule weiter denken: Was wir aus der Pandemie lernen* (S. 119–131). Duden.

Rakoczy, K., Buff, A., & Lipowsky, F. (2005). Befragungsinstrumente. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“* (Teil 1). GFPF/DIPF.

Schult, J., Mahler, N., Fauth, B., & Lindner, M.A. (2021). Did Students Learn Less During the COVID-19 Pandemic? Reading and Mathematics Competencies Before and After the First Pandemic Wave. *PsyArXiv*.

Sjuts, B. (2017). *Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen*. WTM.

Stalder, F. (2021). Was ist Digitalität? In U. Hauck-Thum & J. Noller (Hrsg.), *Was ist Digitalität? Philosophische und pädagogische Perspektiven* (S. 3–9). Metzler.

Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet Apps. Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Springer.

Walter, D., & Dexel, T. (2020). Heterogenität im Mathematikunterricht der Grundschule mit digitalen Medien begegnen? Eine fachdidaktische Perspektive auf Potentiale digital gestützten Mathematikunterrichts in der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, *13*, 65–80.

Weber, D., & Auhagen, W. (2021). Potenzialorientierte Förderung im Mathematikunterricht der Grundschule an der Schnittstelle von Inklusion und Digitalisierung. *Pädagogische Horizonte*, *5*(2), 75–101.

Sarah Beumann, Bergische Universität Wuppertal
E-Mail: beumann@uni-wuppertal.de

Dirk Weber, Bergische Universität Wuppertal
E-Mail: dweber@uni-wuppertal.de

Weiterentwicklung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich und die Sekundarstufe I

Bärbel Barzel, Hedwig Gasteiger, Gilbert Greefrath, Norbert Maritzen, Marcus Nührenbörger und Petra Stanat

Am 23. Juni 2022 hat die Kultusministerkonferenz (KMK) die weiterentwickelten Bildungsstandards für Mathematik für den Primarbereich, den Ersten Schulabschluss und den Mittleren Schulabschluss beschlossen. Sie ersetzen die Bildungsstandards aus den Jahren 2003 und 2004 für die Primarstufe und die Sekundarstufe I. Die Weiterentwicklung wurde vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) koordiniert und erfolgte in Fachkommissionen in Zusammenarbeit mit Expertinnen und Experten aus den Bundesländern, Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern und in enger Abstimmung mit einer von der KMK eingesetzten Steuerungsgruppe. In der Endphase der Entwicklung der Bildungsstandards wurden im Dezember 2021 auch die relevanten Fach- und Lehrkräfteverbände in einem Fachgespräch und durch Stellungnahmen in den Prozess eingebunden.

Die weiterentwickelten Bildungsstandards sollen die fast 20-jährige Erfahrung mit der Implementierung der bisherigen Bildungsstandards nutzen, sich am aktuellen Stand der fachdidaktischen Diskussion orientieren und innovative Impulse setzen. Vor der Weiterentwicklung der Bildungsstandards wurde eine Bedarfsanalyse (www.iqb.hu-berlin.de/bista/WeiterentwicklungBiSta) durchgeführt, die zunächst Art und Grad des Anpassungsbedarfs feststellen sollte. Dabei lag der Fokus darauf, so viel Kontinuität wie möglich zu gewährleisten. Insbesondere sollten weiterhin abschlussbezogene Regelstandards in Form von Könnensbeschreibungen im Sinne der Kompetenzorientierung erstellt werden. Außerdem galt der Auftrag, fachdidaktische Entwicklungen sowie Entwicklungen im Bereich der digitalen Bildung zu berücksichtigen.

Generell wurde es als wünschenswert angesehen, die Beschreibungen der inhaltsbezogenen Kompetenzen und der prozessbezogenen Kompetenzen in den Bildungsstandards für den Primarbereich, den Ersten Schulabschluss und den Mittleren Schulabschluss konsistent aufeinander zu beziehen. Auf der Ebene der inhaltsbezogenen Kompetenzen wurden daher die Leitideen (s. Tab. 1) der einzelnen Schulstufen so abgestimmt, dass die spiralförmige Umsetzung des Curriculums über die Schulstufen hinweg deutlich wird. An den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife konnten zu diesem Zeitpunkt keine Änderungen vorgenommen werden.

Es bestand außerdem in beiden Fachkommissionen Mathematik Einigkeit darüber, die Formulierungen für die prozessbezogenen Kompetenzen einheitlich zu gestalten, damit keine Fehlinterpretationen dahingehend getroffen werden, dass im Primarbereich unter den jeweiligen prozessbezogenen Kompetenzen etwas grundsätzlich anderes verstanden wird als in der Sekundarstufe. Zudem wurden Anpassungen vorgenommen, die die Struktur der prozessbezogenen Kompetenzen über die Schulstufen hinweg verdeutlichen (s. Tab. 2).

Für die stufenübergreifende Anpassung wurde die bisherige Reihenfolge der Leitideen und der prozessbezogenen Kompetenzen in allen Schulstufen verändert, um sie zu vereinheitlichen. Gleichzeitig wurde explizit noch einmal betont, dass die Reihenfolge in den Bildungsstandards keine Stufung oder Rangfolge nach Wichtigkeit darstellt, sondern alle Bereiche auf gleicher Bedeutungsebene zu sehen sind.

Beim Grad der Detaillierung und Konkretisierung der Kompetenzbeschreibungen war auf der einen Seite die Transparenz der Anforderungen erstrebenswert, auf der anderen Seite bestand die Gefahr, dass weniger Kompetenzen, sondern In-

Tabelle 1. Leitideen

Primarbereich	Sekundarstufe I	Allgemeine Hochschulreife
Zahl und Operation	*Zahl* und Operation	Algorithmus und *Zahl*
Größen und *Messen*	Größen und *Messen*	*Messen*
Muster, Strukturen und *funktionaler Zusammenhang*	Strukturen und *funktionaler Zusammenhang*	*Funktionaler Zusammenhang*
Raum und Form	*Raum und Form*	*Raum und Form*
Daten und Zufall	*Daten und Zufall*	*Daten und Zufall*

Tabelle 2. Prozessbezogene Kompetenzen

Primarbereich	Sekundarstufe I	Allgemeine Hochschulreife
Mathematisch argumentieren	*Mathematisch argumentieren*	*Mathematisch argumentieren*
Mathematisch kommunizieren	*Mathematisch kommunizieren*	*Mathematisch kommunizieren*
Probleme mathematisch lösen	*Probleme mathematisch lösen*	*Probleme mathematisch lösen*
Mathematisch modellieren	*Mathematisch modellieren*	*Mathematisch modellieren*
Mathematisch *darstellen*	Mathematisch *darstellen*	Mathematische *Darstellungen* verwenden
Mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten	Mit mathematischen Objekten umgehen	Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
	Mit Medien mathematisch arbeiten	

haltslisten aufgeführt werden und dadurch eine zu starke Kalkülorientierung entsteht. Im Detail wurden folgende Änderungen und Akzentuierungen in den jeweiligen Bildungsstandards vorgenommen.

Primarbereich

Für die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den *Primarbereich* können grundsätzlich vier Schwerpunkte der Weiterentwicklung unterschieden werden; diese betreffen

1. sprachliche Präzisierungen und Verbesserung der begrifflichen Konsistenz,
2. stufenübergreifende Kohärenz,
3. strukturelle Änderungen und Akzentuierungen sowie
4. digitale Bildung.

Die einzelnen Kompetenzbeschreibungen wurden sprachlich geprüft und unter Berücksichtigung fachlicher Anschlussfähigkeit präzisiert. Exemplarisch wird dies kurz für inhaltliche Kompetenzen der Leitidee *Größen und Messen* erläutert: Die Kompetenzen wurden ausdifferenziert, so dass neben dem Verfügen über Größenvorstellungen und dem Umgang mit Größen in Kontexten auch der Bereich „Größen messen und Maßangaben bestimmen" explizit mit drei Kompetenzen betont wird, die das Messen und den Umgang mit Maßeinheiten betreffen.

Die stufenübergreifende Kohärenz zwischen den Bildungsstandards erfolgte zum einen – wie oben näher erläutert – über eine Anpassung der Formulierung und Reihenfolge der prozessbezogenen Kompetenzen und der Leitideen. Den prozessbezogenen Kompetenzen und Leitideen wurde – analog zu den Bildungsstandards für den Ersten Schulabschluss und den Mittleren Schulabschluss – ein kurzer Vorspann vorgeschaltet, der beschreibt, was unter der jeweiligen Kompetenz bzw. Leitidee zu verstehen ist.

Zugleich wurden aber die schulstufenspezifischen Besonderheiten des Mathematiklernens in der Primarstufe berücksichtigt, indem explizit die Bedeutung der Erarbeitung von Operationen in der Leitidee *Zahl und Operation* aufgegriffen wurde ebenso wie *Muster* als wichtiges Fundament für das Erkennen von Strukturen und funktionaler Zusammenhänge. Darüber hinaus wurde die Formulierung der Anforderungsbereiche präzisiert, um eine bessere Trennschärfe zwischen den Anforderungsbereichen *Reproduzieren* (Anforderungsbereich I), *Zusammenhänge herstellen* (Anforderungsbereich II) sowie *Verallgemeinern und Reflektieren* (Anforderungsbereich III) zu erreichen. Dabei wurde angesichts der Heterogenität der Lerngruppen explizit darauf hingewiesen, dass die

> Auseinandersetzung mit Aufgabenstellungen zu allen drei Anforderungsbereichen [...] für alle Kinder – unabhängig vom Leistungsvermögen – von zentraler Bedeutung (ist), um erfolgreich und nachhaltig inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen auf- und auszubauen.

Grundsätzliche strukturelle Veränderungen betrafen insbesondere die Umbenennung der *Allgemeinen Kompetenzen* in *Prozessbezogene Kompetenzen* und eine damit einher gehende Anpassung an die Formulierung, die sich sowohl in der Fachdidaktik etabliert hat als auch in vielen Lehrplänen der einzelnen Bundesländer verwendet wird. Des Weiteren wurden im Primarbereich die prozessbezogenen Kompetenzen erweitert um die Kompetenz *mit mathematischen Objekten und Werkzeugen arbeiten*, die den fachlich sicheren, auf Regel- und Faktenwissen zielgerichtet und effizient zurückgreifenden sowie fachsprachlich angemessenen Umgang mit den im Mathematikunterricht der Primarstufe relevanten mathematischen Objekten sowie den adäquaten Einsatz mathematischer Werkzeuge umfasst.

Eine besondere Rolle nimmt im Primarbereich weiterhin die Leitidee *Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang* ein, die den Wesenskern der

Mathematik aufgreift und auf die fachlich fundierte Erkundung von mathematischen Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten zwischen Zahlen, Formen und Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften zielt. Obwohl Mustern, Strukturen und funktionalen Zusammenhängen eine übergeordnete Bedeutung für die anderen vier Leitideen zukommt, wird dieser mathematische Wesenskern nach wie vor als eine eigene Leitidee ausgewiesen. Explizit wird auf die propädeutische Bedeutung der Muster, Strukturen und funktionalen Zusammenhänge in Bezug auf z. B. das algebraische Lernen hingewiesen. Die übergreifende Rolle von Muster, Strukturen und funktionalem Zusammenhang wird in den Bildungsstandards für den Primarbereich verdeutlicht, indem einzelne inhaltsbezogene Kompetenzen mit engem Bezug zu Muster, Strukturen und funktionale Zusammenhängen ausgewählt und farblich ausgewiesen werden. Somit weisen die Bildungsstandards auf die herausgehobene Stellung dieser Leitidee für den Erwerb mathematischer Kompetenzen hin, indem sie einerseits als eigene Leitidee explizit betont wird, andererseits bei allen weiteren Leitideen akzentuiert und somit regelmäßig im Mittelpunkt der Auseinandersetzung mit den Inhalten steht.

Die Integration der digitalen Bildung erfolgte unter besonderer Berücksichtigung der Grundschulspezifität. Aufgenommen wurden prozessbezogene Kompetenzen, z. B. *mathematische Werkzeuge (z.B. Zeichenwerkzeuge, digitale Werkzeuge) sachgerecht einsetzen* und inhaltsbezogene Kompetenzen, z. B. *Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (z. B. bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten), auch unter Nutzung digitaler Werkzeuge*, die insbesondere aufzeigen, dass bei der Förderung fachlicher Kompetenzen auch digitale Elemente genutzt werden können und sollen. In der Bedarfsanalyse wurde aber explizit darauf verwiesen, dass auch Ideen aufgegriffen werden sollen, wie Kompetenzen im Bereich digitaler Bildung „unplugged“ gefördert werden können. Dazu zählen insbesondere das strukturierte Zerlegen und Lösen sowie das konstruktive und kreative Modellieren von Problemen, das Strukturieren und Darstellen von Informationen in unterschiedlichen Repräsentationen sowie das kritische Interpretieren von Informationen, das Verstehen und Anwenden von Algorithmen und von symbolischer und formaler Sprache. Diesbezüglich wurden einzelne prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen farblich ausgewiesen.

Sekundarstufe I

Für die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss sowie für den Ersten Schulabschluss wurde in verschiedenen Bereichen Überarbeitungsbedarf festgestellt. Zum einen sollten die Bildungsstandards an vielen Stellen klarer formuliert sein, untereinander klarer abgegrenzt und konsistenter aufgebaut sein. Zum anderen sollten sie besser an die Bildungsstandards für den Primarbereich sowie an die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (AHR) angeschlossen werden.

Bisher wurden die Anforderungsbereiche im Kontext der Aufgabenbeispiele erläutert. Da die Aufgabenbeispiele in eine separate Online-Publikation ausgegliedert werden, um etwa Aktualisierungen zu erleichtern, wurde die Beschreibung in die prozessbezogenen Kompetenzen einbezogen. Dazu wurden in den prozessbezogenen Kompetenzen Zwischenüberschriften eingefügt, die die Anforderungsbereiche charakterisieren: Anforderungsbereich I *Reproduzieren*, Anforderungsbereich II *Zusammenhänge herstellen*, Anforderungsbereich III *Verallgemeinern und Reflektieren*. Dies dient auch zur klareren Beschreibung der prozessbezogenen Kompetenzen und ist so bereits in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife realisiert.

Zur besseren Erläuterung der prozessbezogenen Kompetenzen wurde eine übergreifende Erklärung aufgenommen, ähnlich wie dies ebenfalls bereits in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife erfolgt ist. Hier konnte z. B. auch genauer verdeutlicht werden, was ein mathematisches Problem beinhaltet oder wie mathematisches Modellieren verstanden werden soll.

Die bisherige Kompetenz *Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* hat im Gegensatz zu den anderen Kompetenzen zwei sehr unterschiedliche Bereiche additiv verknüpft, was sich in der Aufzählung der Adjektive widerspiegelt. Es ging um den Umgang mit den originär mathematischen, symbolisch-formalen Objekten und den technischen Elementen, den Medien. Diese beiden Bereiche wurden nun getrennt. Dadurch wird auch die digitale Bildung deutlich stärker verankert und die wichtige Rolle der Mathematik dabei betont. So wurde nun die prozessbezogene Kompetenz zur Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge in einen neuen Kompetenzbereich *Mit Medien mathematisch arbeiten* ausgelagert und die bisherige Kompetenz entsprechend umbenannt in *Mit mathematischen Objekten umgehen*. Das Spektrum dieser neuen Kompetenz reicht von der Nutzung analoger Medien, der kritischen Prüfung von Informationen der digitalen Welt unter mathematischen Gesichtspunkten, der Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge (z. B. Tabellenkalkulation, Geometriesoftware, Computeralgebrasystem, Stochastiktool) und Lernumgebungen über die

Erstellung und Gestaltung allgemeiner Medien wie Videos und Präsentationen bis hin zur bewussten Verwendung, Entwicklung und Reflexion von Algorithmen mit Hilfe digitaler Medien.

Ein wichtiges Desiderat, das die Bedarfsanalyse festgestellt hat, war die Konkretisierung der in den Bildungsstandards beschriebenen inhaltlichen Kompetenzen. Daher wurden Beispiele eingefügt, die die Kompetenzbeschreibungen verdeutlichen sollen. Beispielsweise hieß es in den Bildungsstandards 2003 für den Mittleren Schulabschluss:

> Die Schülerinnen und Schüler [...] analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes.

In den aktuellen Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss steht nun konkreter:

> analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene (insbesondere Winkel, Dreiecke, Vierecke) und des Raumes (insbesondere Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel, Kugel).

Ebenso wurden bei den funktionalen Zusammenhängen die Aussagen klarer gefasst, z. B. wurde „verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen“ jetzt konkreter beschrieben:

> verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung periodischer Vorgänge mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge.

Auch die Aussagen zu Zufallserscheinungen und Zufallsexperimenten sind nun wesentlich detaillierter.

Strukturell wurden noch Vortexte für die Leitideen formuliert und die Standards für den Ersten und den Mittleren Schulabschluss in ein Dokument integriert, so dass Unterschiede und Gemeinsamkeiten auf Detailebene transparent sind. Hier gibt es im Prinzip die Möglichkeit, dass bestimmte inhaltsbezogene Kompetenzen für beide Abschlüsse gleich sind, dass sie sich in einigen Punkten unterscheiden oder dass sie nur für den Mittleren Schulabschluss formuliert sind. Zum Beispiel ist die Beschreibung

> rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf ...

für den Ersten Schulabschluss und für den Mittleren Schulabschluss gleich. Unterschiedliche Beschreibungen gibt es beispielsweise bei den Zahlbereichserweiterungen. Hier ist die Beschreibung der Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ nur für den Mittleren Schulabschluss vorgesehen. Eine Kompetenzbeschreibung für den Mittleren Schulabschluss, zu der es keine Entsprechung für den Ersten Schulabschluss gibt, ist beispielsweise das Nutzen sinntragender Vorstellungen von reellen Zahlen.

Insgesamt sind die Bildungsstandards für den Primarbereich, den Ersten Schulabschluss und den Mittleren Schulabschluss nun detaillierter und kohärenter, insbesondere die Kompetenzen zur Integration digitaler Medien konkreter. Damit ist das Ziel verbunden, dass die Lehrpläne der Länder entsprechend weiterentwickelt werden und dies positive Auswirkungen auf Unterricht und Prüfungen hat. Die Implementierung der weiterentwickelten Bildungsstandards in Mathematik ist laut Beschluss der KMK in den Ländern daran ausgerichtet, dass die Überprüfung des Erreichens der Standards im IQB-Bildungstrend in Klasse 4 erstmals 2027 und in Klasse 9 erstmals 2030 auf Basis von Testaufgaben erfolgt, die auf den weiterentwickelten Bildungsstandards basieren.

Die aktuellen Bildungsstandards sind unter www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html verfügbar.

Bärbel Barzel, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: baerbel.barzel@uni-due.de

Hedwig Gasteiger, Universität Osnabrück
E-Mail: hedwig.gasteiger@uni-osnabrueck.de

Gilbert Greefrath, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: greefrath@wwu.de

Norbert Maritzen, IQB, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: iqboffice@iqb.hu-berlin.de

Marcus Nührenbörger, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: nuehrenboerger@uni-muenster.de

Petra Stanat, IQB, Humboldt-Universität zu Berlin
E-Mail: iqboffice@iqb.hu-berlin.de

Dieser Beitrag ist zuerst in den *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 30 (2022), 208–211, erschienen.

Mathematik digital erleben – Diskussion aktueller Projekte

Frederik Dilling, Kathrin Holten, Kevin Hörnberger, Jenny Knöppel, Birgitta Marx, Gero Stoffels,
Felicitas Pielsticker und Ingo Witzke

Wichtige Basis für vielen Forschungsarbeiten und Lehrtätigkeiten der Mathematikdidaktik der Universität Siegen ist die Bedeutung von Auffassungen von Mathematik für die Entwicklung und Vermittlung mathematischen Wissens. Dabei beziehen wir uns insbesondere auf Arbeiten von Burscheid & Struve (2020), Tall (2013) und Schoenfeld (1985). Die Bedeutung mathematischer Auffassungen (= Belief system) beschreibt Schoenfeld wie folgt:

> Belief systems are one's mathematical world view, the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks. One's beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establish the context within which resources, heuristics, and control operate (Schoenfeld, 1985, S. 45).

Als Folgerung von grundlegenden empirischen Studien und theoretischen Überlegungen gehen wir von dem Ansatz aus, dass Schüler/-innen im heutigen Mathematikunterricht ein „empirical belief system" (Schoenfeld, 1985) also eine empirische Auffassung (über empirische Theorien, Burscheid & Struve, 2020) von Mathematik entwickeln. Dies ist begründet in der systematischen Anwendung von Arbeits- und Anschauungsmitteln im aktuellen Mathematikunterricht.

Nun zeigt zudem eine Reihe von Studien die Relevanz von Beliefs auch für den Umgang mit digitalen Arbeits- und Anschauungsmitteln (Medien und Werkzeuge) in schulischen Kontexten (Dilling & Pielsticker, 2021; Dilling et al., 2022). So wird beispielsweise ein Zusammenhang zwischen Lehrerbeliefs und dem TPACK-Modell untersucht (Morsink, Hagerman, Heintz, Boyer, Harris, Kereluik & Hartman, 2011; Chai, Chin, Koh & Tan, 2013; Lin, Tsai, Chai & Lee, 2013; Smith, Kim & McIntyre, 2016; Bonafini & Lee, 2021) oder auch zwischen Beliefs von Lehrkräften im Grundschulbereich (Ha & Lee, 2019) und des Sekundarbereiches (Pacurar & Abbas 2015) in Bezug auf digitale Medien und Werkzeuge differenziert. Weniger Untersuchungen in Zusammenhang mit digitalen Medien und Werkzeugen im Mathematikunterricht beschäftigen sich derzeit mit den Beliefs von angehenden Lehrkräften, Studierenden oder Schüler/-innen.

Projekte zu *Mathematik digital erleben* an der Universität Siegen nehmen diese Adressatengruppen besonders in den Blick. Diese wollen wir an dieser Stelle der Community zur Diskussion stellen und auf interessante Weiterentwicklungen aufmerksam machen. Dabei werden wir kurz auf folgende vier Projekte eingehen:

1. DigiMath4Edu (Start: 1. Februar 2021)
2. Mint-Pro^{2}Digi (Start: Oktober 2020) und Authentic STEM (Start: Februar 2022)
3. Digitale MatheWerkstatt (Start: 11. Februar 2022)
4. Diagnose-Sprechstunde (Start: 15. Februar 2022)

DigiMath4Edu

Das Regionale-Projekt DigiMath4Edu lebt davon, Bildung im Mathematikunterricht aus verschiedenen Perspektiven gemeinsam zu gestalten und Digitalisierung als Chance zu verstehen. Das Projekt „DigiMath4Edu" mit 15 Schulen in drei Jahren Implementationszeitraum ermöglicht ein ideales empirisches Forschungssetting im Bereich digitaler Transformationsprozesse an Schnittstellen von Hochschule und Schule im Bildungssektor. Das Projekt zeichnet sich dadurch aus, dass Partner aus den Bereichen Schule, Hochschule und Wirtschaft im Projekt eng verzahnt sind, wodurch ein Ökosystem Bildung aufgebaut werden kann, welches auch für zukünftige Vorhaben gemeinsam handlungsfähig ist.

Im Projekt DigiMath4Edu soll der langfristige Kompetenzaufbau im Umgang mit digitalen Medien und Werkzeugen an Schulen im Kreis Siegen-Wittgenstein und im Kreis Olpe begleitet und erforscht werden. Um im Mathematikunterricht allgemeinbildender Schulen digitale Medien und Werkzeuge systematisch und nachhaltig zu etablieren, unterstützen pro Schule je zwei „Unterrichtsassistent/-innen für digitale Medien" die Mathematiklehrer/-innen. Die Unterrichtsassistent/-innen – besonders qualifizierte Lehramtsstudierende höheren Semesters – sind pro Schule 10 h pro Woche im Einsatz und werden durch die Fachgruppe Mathematikdidaktik ausgewählt, geschult und betreut. Auf diese Weise profitieren die Lehrpersonen der Schulen, die

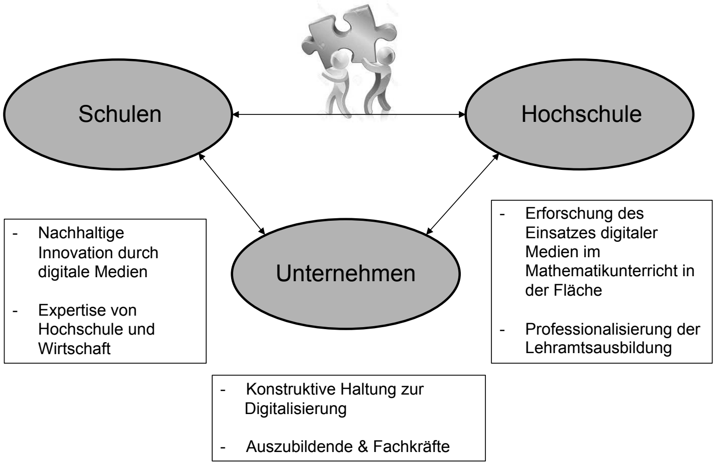


Abbildung 1. Kooperationsstruktur des Projektes DigiMath4Edu

Unterrichtsassistent/-innen als angehende Lehrkräfte und auch die Schüler/-innen von dem Projekt. Die vermittelten Kompetenzen sind anschlussfähig für die weitere (berufliche) Entwicklung aller Beteiligten und wecken bei Schüler/-innen Interesse für digital geprägte Berufe in den MINT-Fächern – und zwar bevor eine Entscheidung für eine berufsbildende Schule, eine Ausbildung oder ein Studium getroffen wird.

Zugleich liegt ein Ziel in der systematischen Erforschung von Gelingensbedingungen für einen nachhaltigen Einsatz digitaler Medien im Bildungsbereich. Dabei sind u. a. neue Erkenntnisse in den Bereichen Kooperationen zwischen Schule, Universität und Unternehmen zu erwarten. Verfolgt werden dazu im Projekt fünf übergeordnete Forschungszusammenhänge:

- DigiMath4Edu als nachhaltige Kooperations- und Fortbildungsstruktur.
- Beliefs von Lehrpersonen und Schüler/-innen zu digitalen Medien im Mathematikunterricht.
- Identifikation von Wissensdimensionen professioneller Digital-Kompetenzen von Lehrpersonen.
- Aspekte eines empirisch-gegenständlichen Mathematikunterrichts im Kontext digitaler Medien.
- Digitale Medien im Mathematikunterricht an der Schnittstelle von Schule und Wirtschaft.

MINT-Pro^{2}Digi und Authentic STEM

Im EFRE-zdi Projekt MINT-Pro^{2}Digi hat im März 2022 bereits der dritte Projektzyklus begonnen. Das Projektakronym ergibt sich dabei wie folgt: Es geht darum, im

> Bereich *MINT* angesiedelte *pro*jektorientierte *Pro*blemlöseprozesse mit Blick auf die Nutzungsweisen passender *digi*taler Medien und Werkzeuge [zu] analysieren (Stoffels & Holten, 2022, S. 47).

Ziel des Projektes ist die Ermöglichung eines authentischen projektorientierten mathematischen Problemlösens in außerunterrichtlichen digitalen Kontexten für Schüler/-innen der Klassenstufen 7 bis Q2. Dabei geht es um eine MINT-Interessenförderung von Lernenden verschiedener Schulformen. Dafür werden gehaltvolle und authentische mathematische Problemstellungen aus Unternehmen (Modellbildung, Optimierungen, Big Data, Produktdesign etc.) Jugendlichen in Projektteams (Solver-Teams) zur Aufgabe gestellt, um gemeinsam an einer Problemlösung zu arbeiten. Damit knüpft das Projektziel an Winter (2016, S. 247) an:

> Wenn man echtes Anwenden im Mathematikunterricht anstrebt, also Mathematisierungs- oder Modellbildungsprozesse entwickeln will, dann muss man sich ernsthaft auf außermathematisches Gebiet begeben.

Die mathematisch gehaltenvollen Problemstellungen werden von kleinen und mittleren Unternehmen (KMU) der Kreise Olpe und Siegen-Wittgenstein in das Projekt eingebracht und in Absprache mit dem jeweiligen Unternehmen durch die Projektmitarbeiter/-innen und beteiligten Lehrkräfte elementarisiert und für die Teilnehmer/-innen zielgruppengerecht aufbereitet. Die Jugendlichen können durch die gemeinsame Arbeit an echten Problemstellungen erleben, wie sie ihr in der Schule erworbenes Wissen in die Arbeitswelt (gezielt) einbringen können.

Neben diesem vor allem außerunterrichtlich praktischen Ziel verfolgen die beteiligten wissenschaftlichen Mitarbeitenden das Forschungs-

> interesse Umsetzungsstrategien zu identifizieren, um ‚echte' mathematikhaltige Problemstellungen aus Unternehmen zu nutzen und damit Problemlöseprozesse und projektorientiertes Arbeiten im Umgang mit digitalen Medien bei den teilnehmenden Jugendlichen zu initiieren (Stoffels & Holten, 2022, S. 47–48).

Forschungsschwerpunkt des Projektes liegt damit auf der Untersuchung langfristiger Problemlöseprozesse in außerschulischen Kontexten. Es geht um Beliefs von Schüler/-innen bei der Bearbeitung echter Probleme aus den Unternehmen.

> Mathematik wird damit nicht als „abstrakte Kunstwelt", sondern mit Hilfe digitaler Medien (3D-Druck, Programmierung, etc.) als unmittelbar relevant für berufliches Schaffen in der Region erfahren (Stoffels & Holten, 2022, S. 49).

Dazu arbeiten die beteiligten wissenschaftlichen Mitarbeiter/-innen mit einem mehrdimensionalen theoretischen Modell, welches Problemlösephasen, Phasen des projektorientierten Arbeitens und den Umgang mit digitalen Medien qualitativ mit den interagierenden Projektbeteiligten vernetzt (Stoffels & Holten, 2022).

Praktisch arbeiten die teilnehmenden Jugendlichen über mehrere Wochen an der Problemstellung des Unternehmens und stellen ihren Fortschritt wöchentlich in einem Jour-Fix den anderen Solver-Teams vor. Präsentiert werden die gemeinsamen Ergebnisse in einem abschließenden *Forum des Fortschritts* vor allen Projektbeteiligten.

Das Projekt Authentic-STEM stellt die Projektidee von MINT-Pro²Digi auf eine internationale Basis. Es handelt sich um ein *Integrated Career Orientation Program* zwischen den USA und Deutschland. Auch hier ist die Grundidee, Jugendlichen die Möglichkeit zu geben in Solver-Teams substanzielle und authentische mathematische Problemstellungen aus internationalen Unternehmen (z. B. Modellierung, Optimierung, Big Data, Produktdesign, etc.) langfristig zu bearbeiten. Ein Solver-Team besteht für dieses Projekt dann aus US-amerikanischen und deutschen Teilnehmer/-innen.

- Damit können berufsorientierende und berufsfördernde Inhalte auch langfristig etabliert werden.
- Es werden Einblicke in die problem- und prozessorientierten Arbeitsabläufe der Unternehmen ermöglicht.
- Durch eine authentische inhaltliche Verbindung zwischen Unternehmen und potenziellen Schulen können Auszubildende gewonnen werden.
- Gleichzeitig wird eine Verbesserung der Abstimmung von schulischer und beruflicher Bildung erreicht.
- Zudem schaffen internationale Kooperationen eine große inhaltliche Vielfalt, geben Einblicke in länderübergreifende Problemstellungen und erweitern das Repertoire an Problemlösungsansätzen für die Jugendlichen.

Digitale MatheWerkstatt

Das React-EU Projekt Digitale MatheWerkstatt ist angebunden an das Konzept MatheWerkstatt der Universität Siegen. Ziel ist es Schüler/-innen der Klassenstufen 1–Q2 hinsichtlich des Mathematiklernens mit digitalen Medien und Werkzeugen zu unterstützen. Die MatheWerkstatt als Ort der Begegnung (Hoffart, 2015) für Schüler/-innen aber auch für Student/-innen wird damit hinsichtlich eines Digitalisierungskonzeptes erweitert, durch digitale Medien und Werkzeuge bereichert und mit neuen digitalen Zugangsmöglichkeiten auf eine breitere Basis gestellt. Eine Teilnahme am wöchentlich buchbaren Projektangebot ist jederzeit möglich. Bei einer Anmeldung haben Lehrer/-innen mit ihren Lerngruppen (bis 36 Schüler/-innen) die Möglichkeit entlang der Lehrpläne des Landes Nordrhein-Westfalen im Fach Mathematik ein Wunschthema auszuwählen. Gemeinsam mit einem an die digitale MatheWerkstatt angebundenen Seminar werden Lernumgebungen entlang der möglichen Themen auch mit Studierenden vorbereitet, in Absprache mit den Lehrpersonen im Vorfeld angepasst und während der Projektvormittage zur Verfügung gestellt. Ermöglicht und durchgeführt wird das Projekt digitale MatheWerkstatt durch ein Team von Student/-innen und wissenschaftlichen Mitarbeiter/-innen.

Diagnose-Sprechstunde

Das Projekt Diagnose-Sprechstunde ist eingebettet in den Kooperationsverbund bc:olpe (bildungsconnector:Olpe). Ziel ist es, Kinder und Jugendliche, Erziehungsberechtigte und Lehrpersonen bei Fragen zu Rechenschwierigkeiten gezielt und ortsnah zu beraten. Aus einer mathematikdidaktischen Perspektive eröffnet sich im Rahmen der Diagnose-Sprechstunde die Möglichkeit zur Identifikation von Fallbeispielen von Schüler/-innen mit Rechenschwierigkeiten. Diese können zur Weiterentwicklung der Forschungsarbeit zum Umgang mit Rechenschwierigkeiten im schulischen sowie außerschulischen Kontext beitragen. Dabei sollen alle Schüler/-innen in den Blick genommen werden, „deren Lernfortschritte, durch welche Gründe auch immer, als unzureichend angesehen werden" (Lorenz, 2013, S. 15) und ihnen nach individueller Diagnose auch eine individuelle Förderung zu ermöglichen.

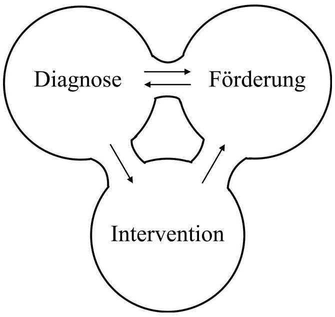


Abbildung 2. Schwerpunkte der Diagnose-Sprechstunde

Übergeordnetes Ziel des Projektes ist die Beschreibung und Analyse mathematischer Wissensentwicklungsprozesse von Kindern und Jugendlichen mit Rechenschwierigkeiten im Umgang mit digitalen Arbeits- und Anschauungsmitteln (Knöppel & Pielsticker, 2022, erscheint). Ein Fokus soll dabei auf der Nutzung digitaler Medien und Werkzeuge zur Diagnose und Förderung liegen.

Im Vordergrund des Projektes stehen vor allen zwei Forschungsfragen:

1. Wie entwickeln Kinder und Jugendliche mit Rechenschwierigkeiten ihr mathematisches Wissen im Umgang mit digitalen Medien und Werkzeugen?
2. Inwiefern lassen sich Wissensentwicklungsprozesse bei eigenständigem Herstellen und Nutzen (digitaler) empirischer Objekte bei Kindern und Jugendlichen mit Rechenschwierigkeiten beobachten und beschreiben?

Als Abschluss möchten wir an dieser Stelle noch ein Statement einer Lehrerin aus dem Projekt DigitMath4Edu aufführen, welches aus unserer Sicht das Ziel *Mathematik digital erleben* geeignet illustriert und zum Ausdruck bringt, dass eine nachhaltige Erweiterung des mathematikdidaktischen Repertoires – um Mathematiklernen authentisch, realitätsnah und modern zu gestalten – angestrebt wird (für Beispiele zum Einsatz der 3D-Druck-Technologie siehe auch Dilling et al., 2021):

> Am meisten hängen geblieben ist natürlich der Einsatz neuer Medien wie dem 3D-Druck, sowohl mit den 3D-Druckern als auch den 3D-Druck-Stiften. Viele neue Medien, die wir in den Matheunterricht einbauen konnten, aber auch viele Dinge, die uns eben die Unterrichtsassistentinnen gezeigt haben – die die neu angeregt haben. Viele neue Einblicke, wie man Unterricht kreativ mit diesen Medien gestalten kann. (Gymnasial-Lehrerin aus dem Projekt DigiMath4Edu)

Literatur

Bonafini, F.C., & Lee, Y. (2021). Investigating Prospective Teachers’ TPACK and their Use of Mathematical Action Technologies as they Create Screencast Video Lessons on iPads. *TechTrends, 65*, 303–319. DOI:10.1007/s11528-020-00578-1

Burscheid, H. J., & Struve, H. (2020). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Band 1: Grundlegung von Unterrichtsinhalten* (2. Aufl.). Springer.

Chai, C.-S., Koh, J. H.-L., & Tsai, C.-C. (2013). A Review of Technological Pedagogical Content Knowledge. Educational. *Technology & Society, 16*(2), 31–51.

Dilling, F., Pielsticker, F., & Witzke, I. (Hrsg.) (2022). *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien. Eine Auswahl grundlagenorientierter und praxisorientierter Beiträge*. Springer. DOI:10.1007/978-3-658-36764-0

Dilling, F., Marx, B., Pielsticker, F., Vogler, A., & Witzke, I. (2021). Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht. Einführung und Unterrichtsentwürfe für die Sekundarstufen I und II. Waxmann.

Dilling, F., & Pielsticker, F. (Hrsg.) (2020). *Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien. Empirische Zugänge und theoretische Perspektiven.* Springer. DOI:10.1007/978-3-658-31996-0

Ha, C., & Lee, S.-Y., (2019). Elementary teachers’ beliefs and perspectives related to smart learning in South Korea. *Smart Learning Environments, 1*, 1–15. DOI:10.1186/s40561-019-0082-5

Hoffart, E. (2015). Aus einem anderen Blickwinkel – Lehramtsstudierende reflektieren im Seminar „MatheWerkstatt‘“. In D. Schulte & B. Wanning (Hrsg.), *Die Idee dahinter … Aspekte zur Gestaltung lernreicher Lehre* (S. 47–62). UniPrint Siegen.

Lin. T.-C., Tsai, C.-C., Chai, C.S., & Lee, M.-H. (2013). Identifying Science Teachers’ Perceptions of Technological Pedagogical and Content Knowledge (TPACK). *Journal of Science Education and Technology, 22*(3), 325–336. DOI:10.1007/s10956-012-9396-6

Lorenz, J. H. (2003). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen*. Cornelsen.

Morsink, P.M., Hagerman, M.S., Heintz, A., Boyer, M., Harris, R., Kereluik, K., & Hartman, D.K. (2011). Professional Development to Support TPACK Technology Integration: The Initial Learning Trajectories of Thirteen Fifth- and Sixth-Grade Educators. *Journal of Education, 191*(2), 3–16. DOI:10.1177/002205741119100203

Pacurar, E., & Abbas, N. (2015). Analysis of French secondary school teachers’ intention to integrate digital work environments into their teaching practices. *Educ Inf Technol, 20*, 537–557. DOI:10.1007/s10639-013-9301-9

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Smith, R. C., Kim, S., & McIntyre, L. (2016). Relationships between prospective middle grades mathematics teachers’ beliefs and TPACK. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(4), 359–373. DOI:10.1080/14926156.2016.1189624

Stoffels, G., & Holten, K. (2022). MINT-Pro2Digi: Authentisches projektorientiertes mathematisches Problemlösen in außerunterrichtlichen digitalen Kontexten. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien*. MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung. Springer. DOI:10.1007/978-3-658-36764-0_3

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.

Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Springer. DOI:10.1007/978-3-658-10605-8

Frederik Dilling, Universität Siegen
E-Mail: frederik.dilling@uni-siegen.de

Kathrin Holten, Universität Siegen
E-Mail: holten@mathematik.uni-siegen.de

Kevin Hörnberger, Universität Siegen
E-Mail: hoernberger@mathematik.uni-siegen.de

Jenny Knöppel, Universität Siegen
E-Mail: knoeppel@mathematik.uni-siegen.de

Birgitta Marx, Universität Siegen
E-Mail: birgitta.marx@uni-siegen.de

Gero Stoffels, Universität Siegen
E-Mail: stoffels@mathematik.uni-siegen.de

Felicitas Pielsticker, Universität Siegen
E-Mail: felicitas.pielsticker@uni-siegen.de

Ingo Witzke, Universität Siegen
E-Mail: ingo.witzke@uni-siegen.de

Seminarlehrkräfte und ihr Blick auf einige Aspekte der Mathematikdidaktik

Ergebnisse einer Online-Befragung

Reinhard Oldenburg

Als Professionswissenschaft ist es eines der Ziele der Mathematikdidaktik auf die unterrichtliche Praxis Einfluss zu nehmen, mehr noch, sie zu verbessern. Eine prägende Phase in der Lehrkräfteausbildung stellt das Referendariat dar, und damit sind die Fachleiterinnen (Seminarlehrkräfte; künftig FL) von entscheidender Bedeutung für die Vermittlung didaktische Erkenntnisse in die Praxis. Die vorliegende kleine Untersuchung ist daher der Frage gewidmet, welche Ergebnisse der universitären Didaktik von Fachleiterinnen und Fachleitern zur Kenntnis genommen wird, wie Informationen vermittelt werden und welche Desiderate sich aus deren Praxis ergeben.

Die Befragung

Als Erhebungsinstrument diente ein online-Fragebogen (realisiert mittels SocSurvey), der auf privaten Wegen Seminarlehrkräften zugespielt wurde. Die Beantwortung war selbstverständlich freiwillig und es wurden keinerlei personenbezogene (oder schulbezogene) Daten erhoben. Eine evtl. Durchführung der Erhebung auch in einem schulischen Kontext durch Nutzung des Mailverteilers der bayerischen Seminarlehrkräfte ist genehmigungsbedürftig und wurde im Frühherbst 2021 beantragt. Im April 2022 teilte das Ministerium mit, dass keine grundlegenden Bedenken von Seiten des Datenschutzes bestehen, genehmigte die Untersuchung aber noch nicht, u. a. wegen vermeintlicher Mängel in der Auswahl der Journale, nach denen gefragt wurde und der mangelhaften Information der Schulleitungen der betroffenen Fachleiterinnen und Fachleiter. Trotzdem kann dieser Bescheid untermauern, dass die datenschutzrechtlichen Vorgaben eingehalten wurden.

Durch die rein private Bewerbung u. a. über die GDM-Rundmail konnte nur ein Teil der Zielgruppe erreicht werden. Es liegen 49 Bearbeitungen vor und man kann davon ausgehen, dass diese Stichprobe überdurchschnittlich viele sehr aktive und mathematikdidaktisch engagierte Fachleiterinnen und Fachleiter umfasst. Angaben zu Bundesland, Ausbildung, Geschlecht etc. wurden nicht erfragt, entsprechend können diesbezügliche Fragen nicht beantwortet werden.

Viele Items nutzen 7-stufige Likert-Skalen, wobei 1 für das negative Extrem, 7 für das positive Extrem steht, d. h. neutraler Mittelwert ist 4.

Die Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Items genannt und die jeweiligen Ergebnisse dargestellt. Gegebenenfalls wird auch schon eine Interpretation versucht, die jeweils durch dieses Wort gekennzeichnet ist.

Schulform, für die ausgebildet wird: Da einige Fachliterinnen und Fachleiter für mehr als eine Schulform ausbilden, waren Mehrfachantworten in diesem Item erlaubt: Gymnasium 41, Berufliche Sek II 11, Realschule 3, Hauptschule und Grundschule je 2.

Wie schätzen Sie die Universitätsabsolventinnen und Uniabsolventen ein?

Die Uniabsolventeninnen und Uniabsolventen …	Mittelwert	Standardabw
sind in der Schulmathematik souverän.	4.1	1.4
haben Spaß an Mathematik.	5.3	1.1
verfügen über solides pädagogisches Wissen.	4.4	1.3
verfügen über solides fachdidaktisches Wissen.	3.7	1.2
tendieren dazu, die Leistungsfähigkeit der SuS zu überschätzen.	4.8	1.5
verfügen über gute Kenntnisse zu Unterrichtsmethoden.	4.3	1.4
verfügen über gute Kenntnisse digitaler Werkzeuge.	4.0	1.4
tendieren zu fragend-entwickelndem Unterricht.	4.8	1.7
können Schülerinnen und Schüler gut aktivieren.	4.0	1.2

Interpretation
Bedenklich ist, dass das fachdidaktische Wissen der Absolventinnen und Absolventen relativ einheitlich als gering eingeschätzt wird. Dies ist insofern plausibel als die Fachdidaktik in den meisten Studiengängen einen sehr geringen Anteil hat. Es liegt nahe, die politische Forderung zu stellen, den Fachdidaktiken mehr Gewicht zu geben.

Gibt es weitere Eigenschaften der angehenden Referendarinnen und Referendare, die die universitäre Ausbildung stärker im Bewusstsein haben sollte?
Naturgemäß gab es bei diesem offenen Item sehr viele unterschiedliche Äußerungen. Viele Antworten haben sich auch nicht auf die eigentliche Frage beschränkt, sondern weitere Aspekte der Ausbildung thematisiert. Die meisten Punkte sind Forderungen an die Ausbildung. Das folgende ist der Versuch einer Kategorisierung.

- Mehr Theorie-Praxis Bezug (3)
  - Hospitationen und eigenes Unterrichten mit anschließenden Beratungsgesprächen
- Reflektionsvermögen und Kritikfähigkeit (4), u. a. zu eigesetzten Aufgaben
- Erstellung von kompetenzorientierten und differenzierten Aufgaben
- Bessere Kenntnis didaktischer Prinzipien
- Diagnose von fachlichen Lernschwierigkeiten
  - Fördermaßnahmen für leistungsschwache
  - Fördermaßnahmen für leistungsstarke
  - Bessere Kenntnis schon typischen Fehlern
- Bessere fachliche Kenntnisse
  - Schulmathematik (5) (z. B.: Abituraufgaben lösen können)
  - Über die Schulmathematik hinausgehendes Wissen mit Schulmathematik verknüpfen (4)
- Stoffdidaktik (3)
- Differenzierung, Individualisierung
- Kenntnis von Grundvorstellungen (2)
- Selbsteinschätzung der Referendarinnen und Referendare, was im Studium zu kurz kommt: Elementargeometrie, Sek-II-Stochastik, Sek-II-Analytische Geometrie, Mathematikgeschichte, Kontext der Philosophie der Mathematik, fachspezifische Formen der Leistungsbewertung

Welche fachdidaktischen Zeitschriften finde Sie interessant und lesen Sie? Geben Sie jeweils an, wie gut Sie die Zeitschrift kennen und wie nützlich und interessant Sie sie empfinden.
Hier wurden je vorgegebene Zeitschrift zwei Likert-Skalen angeboten. Bei der folgenden Auswertung wurde der Mittelwert der Nutzensbewertung nur über die Probanden gebildet, die ihre Kenntnis der Zeitschrift mindestens mit 2 bewerten.

Zeitschrift	Mittel kennen	Mittel nützlich	SD kennen	SD nützlich
Ml	6.3	5.7	1.5	1.1
Mathematik 5–10	4.1	3.9	2.4	2.2
MNU Journal	5.5	3.9	2.1	1.6
MU	4.8	3.5	2.3	1.6
JMD	4.2	2.8	2.5	1.5
GDM Mitteilungen	4.8	3.6	2.5	2.1
ZMFP	2.1	3.2	2.0	1.6
Math did	2.9	3.0	2.3	1.7
ZDM	2.7	1.9	2.2	1.1

Interpretation
Mathematik lehren ist sowohl bekannt als auch nützlich. Angesichts des praxisorientierten Konzepts dürfte das nicht überraschend. Am anderen Ende steht ZMFP: Es ist bisher kaum bekannt, aber diejenigen, die es kennen, bewerten die Nützlichkeit immerhin im unteren Mittelfeld. Hier besteht also offensichtlich Potential, wenn die Zeitschrift

noch bekannter gemacht werden kann. Deutlich zeigt sich, dass die stark forschungsorientierten Journale JMD und ZDM von den Praktikern als kaum nützlich empfunden werden. Didaktische Forschung per se reicht also offensichtlich nicht aus, Unterrichtspraxis evidenzbasiert zu beeinflussen, es braucht vermittelnde Medien wie ML oder potentiell ZMFP. Selbstkritisch sei an dieser Stelle angemerkt, dass der relativ kleine Stichprobenumfang die Evidenz an dieser Stelle zwar schmälert, die oben beschriebene systematische Verzerrung der Stichprobe hin zu eher fachdidaktisch interessierten Fachliterinnen und Fachleiter diese aber kompensieren dürfte.

Nutzen Sie online-Angebote zu didaktischen Fragen? Wenn ja, welche?
Die häufigsten Nennungen (die Mehrheit ohne Angaben) bei diesem Freiform-Item:

Geogebra, GeogebraBooks	4
DZLM	3
MUED	2
MALeNe	1
ML-KO-Si-MA	1
PIK AS	1
ZUM	1
Jürgen Roth	1

Welche fachdidaktischen Veranstaltungen nutzen Sie? Geben Sie an, wie intensiv Sie die Angebote nutzen und wie gewinnbringend sie für Sie sind.
Wie schon oben wurden auch hier bei der Mittelung über die Nützlichkeitsangaben nur die Fälle berücksichtig, in denen mindestens eine Kenntnis von 2 geschätzt wurde.

Veranstaltung	Mittel kennen	Mittel nützlich	SD kennen	SD nützlich
Kolloquien an Univ.	3.1	4.0	1.7	1.4
GDM Jahrestagung	2.4	4.2	1.8	2.1
GDM AKs	2.1	1.4	1.9	1.4
MNU Fachleiter	3.4	1.5	2.6	1.5
MNU Tagung	2.0	1.8	2.0	1.8
Länderfortbildungen	4.2	4.5	2.3	1.8
Schulbuchverlage	3.2	3.2	1.9	1.6

Interpretation
Bemerkenswert ist, wie positiv die Fortbildungen der Länder ankommen. Unklar bleibt aber, ob dies nur an der didaktischen Qualität der Fortbildung liegt oder auch daran, dass diese relevante Informationen, etwa Informationen zur neuen Erlassen, vermitteln. Die positive Resonanz der GDM Jahrestagung spricht dafür, eventuell gezielt darauf aufmerksam zu machen.

Nennen Sie 3–5 fachdidaktische Erkenntnisse oder Innovationen der letzten ca. 20 Jahre, die den Mathematikunterricht verbessert haben.
Diese offene Frage hat viele Antworten provoziert. Hier eine Kategorien-orientierte Zusammenstellung.

- Kompetenzorientierung (4)
  - prozessbegleitende Kompetenzen, v. a. Problemlösekompetenz und Modellierungskompetenz
- entdeckende Lernen (2) und offene Aufgaben (2)
- Einsatz digitaler Medien
  - CAS (5)
  - Geogebra (9)
  - GTR
  - Tablets
  - Dokumentenkamera
  - Flipped Classroom
  - Digitale Lernpfade
- Gender-Bewußtsein (2)
- Didaktik der Bruchrechnung nach Padberg
- Intelligentes Üben (3)
- Umgang mit Fehlern (4)
- Grundvorstellungen (3)
- Anwendungsorientierung, Kontexte, Modellierung (5)
- Rolle der kognitiven Aktivierung (5)
- Rolle und Ergebnisse der empirischen Unterrichtsforschung, PISA etc (2)
- Sprachsensibler MU (5)
- Abkehr vom Kalkül (2)
- Differenzierung (2)
- Stärkung der Stochastik
- Entschlackung des Lehrplans
- Neue Formen der Leistungsbewertung
- Bewegter MU

Interpretation
Bemerkenswert ist, dass mit Geogebra eine technische Innovation die meisten Nennungen erfahren hat. Da i. d. R. nur dieses eine Wort genannt wurde, bleibt unklar, ob als Innovation die Entwicklung von Geogebra oder der unterrichtliche Einsatz gemeint war. Die Unterscheidung mag spitzfindig erscheinen, aber angesichts des Umstands, dass ersteres in der Mehrheit unserer Community nicht als Forschung gilt, kommt der Frage doch eine gewisse Brisanz zu. Bei den weiteren Nennungen dominieren dagegen Kernthemen der Didaktik.

Zu welchen Fragen würden Sie sich wissenschaftliche Arbeiten wünschen?
Diese offene Frage hat sehr viele Antworten provoziert. Das Folgende ist ein Versuch der Verdichtung der wesentlichen Punkte, die häufiger genannt wurden:

- Prüfungsformate passend zu kompetenzorientiertem Unterricht
- Digitalisierung
    - Nutzung von Tablets
    - Wieviel Termumformung ist erforderlich?
    - Ist verbindlicher CAS-Einsatz sinnvoll?
    - Didaktische Konzepte (4)
    - Prüfungskultur mit digitalen Medien
- Sprachbildung
- Stoffdidaktik
    - Wieder mehr Stoffdidaktik und deutlich weniger empirische Lehr-Lernforschung 1
    - Stärkere Vernetzung von Schul- und Unimathematik 1
    - Es gibt zu wenig konkrete Unterstützung zu besonderen Inhalten der Schulmathematik (Bsp.: Schätzen und Testen in der Stochastik)
    - Gesamtkonzept Stochastik Sek II
    - pfiffige stoffdidaktische Ideen, die in der Praxis erprobt wurden
    - mehr Veröffentlichungen zur Sachstruktur … wir gegenwärtig Analytische Geometrie, Trigonometrie, Terme und Gleichungen, rationale Funktionen unterrichten … wie Begriffe und Regeln einführen
    - Stoffdidaktische (was in welcher Weise und warum) im Zeitalter der Digitalisierung
    - Wie viel Syntax (Termumformungen) notwendig für Semantik und Pragmatik mit Algebra?
    - Integration neuer Entwicklungen (wie künstliche Intelligenz, Data Science, …)
    - Viele empirische Dissertationen bringen für die Praxis zu wenig (Ergebnisse zu speziell oder zu banal).
- Wie fördert man Diskursanregung und -moderation?
- Lehrerprofessionalität
    - Rolle der fachmathematischen Ausbildung für den Lehrerfolg
    - Konzepte für Quereinsteiger (2)
    - Diagnosekompetenz
- Genderfrage
- Förderung Lernender mit besonderen Bedürfnissen
    - Förderung von Schülerinnen und Schülermit großen Lücken im Grundlagenwissen
    - Dyskalkulie
    - Begabtenförderung

Interpretation
Bemerkenswert ist der große Umfang stoffdidaktischer Fragen. Wie genau die universitäre Didaktik dazu beitragen kann, variiert aber zwischen den Punkten. Immerhin zeigt sich deutlich eine starke Wertschätzung stoffdidaktischer Fragen.

Haben Sie Anregungen/Kommentare für die universitäre Lehre in Mathematikdidaktik?

- Grundschulmathematik sollte auch im Bereich der höheren Mathematik mehr Aufmerksamkeit bekommen
    - Vernetzung von gymnasialer Fachdidaktik mit der Fachdidaktik der Primarstufe. Die Studenten sollten (grob) informiert sein, wie an der Grundschule Mathematik betrieben wird (oder werden sollte)
- langfristige Planung von Unterrichtsreihen üben, bessere Kenntnisse des Lehrplans
- Digitalisierung (3)
    - Einsatz von digitalen Werkzeugen
    - Vor- und Nachteile
- Schulmathematik/Elementarmathematik sollte Thema sein (2)
    - eigene Fachmathematik-Veranstaltungen für die Lehramtsstudierenden
- Bodenständigkeit betonen, weniger Luftschlösser
- Didaktischer Wissensschatz, unabhängig von persönlichen Vorlieben der Dozenten
- Keine Verflachung der fachlichen Inhalte an der Universität; eine gute Mathematik-Lehrkraft braucht fundiertes universitäres Mathematikwissen, um Mathematik verstehend Schülerinnen und Schülern zu lehren.
- Veranstaltungen zur Elementargeometrie und ihrer Didaktik
- Jeder Didaktik-Prof sollte durchgängig eine normale Schulklasse unterrichten
- Kritik an Elfenbeinturm-Didaktik, z. B. „Fließbandproduktition von belanglosen Texten … für selbstreferenziellen Zirkel“.
- Mehr stoffdidaktische Explorationen, z. B. Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen, ein tragfähiges Konzept von Kompetenzorientierung
- Wie gelingt es Mathematik Lehrkräften, am Puls der Zeit zu unterrichten? Konzeption von motivierenden Lernsituationen vor dem Hintergrund aktueller (technischer) Entwicklungen
- Umgang und Lehre in heterogenen Lerngruppen, insbesondere Leistungsbewertung

Zusammenfassung und Konsequenzen

Die Erhebung zeigt, dass die universitäre Mathematikdidaktik von Fachleiterinnen und Fachleitern differenziert wahrgenommen wird. So werden einige Entwicklungen der letzten Zeit durchaus positiv wahrgenommen, insbesondere die Kompetenzorientierung wird verhältnismäßig positiv kommentiert. Andererseits wird eine Reihe von Defiziten benannt. Dass eine stärkere Beachtung der Unterrichtspraxis eingefordert wird, wird nicht überraschen. Bedenkenswert ist allerdings, dass in Bezug auf die Kompetenzen der Uni-Absolventinnen und Uni-Absolventen häufig sowohl eine mangelhafte Kenntnis der Schulmathematik als auch stoffdidaktischer Grundlagen beklagt wird. Dies ist ein klarer Auftrag an die Lehre an den Universitäten. Das Gleiche gilt für die vielfach angesprochene Digitalisierung. Insgesamt wurde eine Vielzahl an Fragen genannt, die fachdidaktisch bearbeitet werden sollten. Bemerkenswert ist aber, dass eine Reihe der genannten Desiderate zu aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsschwerpunkten passen, etwa der Umgang mit Heterogenität oder sprachsensibler Mathematikunterricht. In anderen Bereichen sind die kurzen Nennungen in einem Fragebogen zu unkonkret, um direkt in Forschungsziele übersetzt werden zu können – hier sollte eine Präzisierung im Dialog versucht werden. Auch ein Blick auf die Kommunikationswege, also die Journale und Tagungen, zeigt, dass es Verbesserungsbedarf gibt. Offensichtlich werden Teile der mathematikdidaktischen Forschung als für die Praxis nicht relevant eingeschätzt. Dies ist auch zu erwarten – wie bei jeder anderen Wissenschaft auch definiert sich die Güte mathematikdidaktischer Forschung nicht allein aus ihrer Nützlichkeit. Trotzdem können die obigen Ergebnisse Anlass für einen selbstkritische Prüfung sein. Vieles spricht dafür, dass ein vertiefter Dialog für beide Seiten gewinnbringend sein könnte.

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
E-Mail: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Konzept eines hybriden Lehr-Lern-Praktikums mit Schülerförderkursen

Henrik Ossadnik, Susanne Digel, Alex Engelhardt und Jürgen Roth

Die Projekte MatheLift („Mathematik im Lehr-Lern-Labor intensiv fördern und trainieren“) sowie MatheLead („Mathematik Lehren eigenverantwortlich authentisch digital“) bilden Erweiterungen des Angebots des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ am Campus Landau der Universität Koblenz-Landau. Mit Schülerförderkursen (MatheLift), in denen Lehramtsstudierende die Lernenden im Rahmen eines hybriden Lehr-Lern-Praktikums (MatheLead) als Coaches individuell begleiten, begegnen beide Projekte zwei drängenden, pandemiebedingten Problemen: fehlende Möglichkeiten für Unterrichtspraxis im Lehramtsstudium und individuelle Lernrückstände bei Schülerinnen und Schülern.

Individualisierung durch Grundvorstellungen und Motivationsförderung

Die Schülerinnen und Schüler erforschen in den Kursen gegenständliche sowie digitale Materialien und erarbeiten sich Grundvorstellungen zu zentralen mathematischen Konzepten. Grundvorstellungen sind Träger der Bedeutung von mathematischen Begriffen und beschreiben die Verknüpfung zwischen dem mathematischen Inhalt, der Realität und den individuellen mentalen Konzepten (vom Hofe 1995). Da sie für die Lernenden den Kern des mathematischen Inhalts repräsentieren, ist das Denken und Handeln auf jedem Niveau mit inhaltlichen Vorstellungen verbunden (Siller & Roth 2016). Beim individualisierten Lernen fungieren Grundvorstellungen dementsprechend sowohl als Basis, als auch als Bezugsnorm (ebd.). Sie ermöglichen als Grundlage des Wissensspeichers die Diagnose von Grundwissen sowie Grundfertigkeiten und bieten Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichen Ausgangsvoraussetzungen wie Lernmotivation, Vorstellungen zur Mathematik sowie Vorerfahrungen, Gelegenheiten zur individuellen, mathematischen Kompetenzentwicklung.

Neben kognitiven Fähigkeiten von Lernenden (z. B. Vorwissen, Lerntempo, Lernhürden etc.) beeinflussen ihr akademisches Selbstkonzept und (fehlende) Überzeugungen in die eigenen Fähigkeiten erheblich die schulischen Leistungen (Hanses & Rost 1998, Hattie et al. 2013). Dementsprechend empfehlen Hettmann und Kollegen (2019) eine integrierte Förderung von (mathematischer) Fachkompetenz und Selbstwirksamkeit zur Motivationssteigerung. Analog zum 4-Schritt-Schema zur individuellen Kompetenz- und Selbstwirksamkeitsförderung (ebd.) nutzen die Coaches in den Förderkursen eine Eingangsdiagnose zu Grundvorstellungen zusammen mit der individuellen Bezugsnormorientierung der adaptiven, verständnisorientierten Laborstationen, um den Lernenden mathematikbezogenes Kompetenzerleben zu ermöglichen. Sie unterstützen die Lernenden dabei, sich Erfolge bewusst zu machen und insbesondere diese auf die eigenen Fähigkeiten zurückführen, um so die eigene Kompetenz als Ursache zu erkennen.

Förderung professioneller Handlungskompetenz der Lehramtsstudierenden

Das hybride Lehr-Lern-Praktikum fokussiert beim Erwerb professioneller Handlungskompetenz durch begleitete und reflektierte Lehrtätigkeit in den Förderkursen auf die von Hettmann und Kollegen (2019) im Kompetenzmodell von Baumert und Kunter (2006, 2011) identifizierten motivationsfördernden Kompetenzfacetten: (1) *motivationale Orientierung* (Bandura 1977) mit den Kompetenzfacetten *Lehrerselbstwirksamkeit* und *intrinsischer Motivation (Enthusiasmus)*, (2) *Überzeugungen zum Lehren und Lernen* mit *Bezugsnormorientierung* (Rheinberg & Fries 2018) und *Attribution schlechter Schülerleistungen* (Hettmann 2022) sowie (3) *Professionswissen- und können* mit *Fachwissen, fachdidaktischem Wissen* und *pädagogisch-psychologischem Wissen* (ebd.).

Die dazu notwendige Wissensbasis, bestehend aus fachdidaktischen und bildungswissenschaftlichen Grundlagen zu Heterogenität, Grundvorstellungen, Interventionstheorien, Reflexion des (eigenen) Lehrerhandelns, individueller Motivationsförderung und Mediendidaktik wird in einem Blockseminar zu Beginn des Praktikums, sowie kursbegleitend in Form von digitalen Selbstlernumgebungen zur Vertiefung etabliert. Diese theoretischen Grundlagen wenden die Studierenden als Coaches bei der individuellen Förderung in den Förderkursen und deren digitalem Zusatzangebot praktisch an. Unterstützt wird der Aufbau dieser Kompetenzdimensionen durch die angegliederte, gemeinsame Reflexion anhand des ALACT-Modells (Korthagen et al. 2002) nach jedem Kurstermin mit peer-feedback und gemeinsamer Identifizierung weiterer Handlungsoptionen.

Motivierendes Lernen bei Schülerinnen und Schülern durch motivationsfördernde Kompetenzfacetten auf Seiten der Coaches zu initiieren ist somit vorrangiges Ziel des Praktikums, so dass ausreichend Möglichkeiten geboten werden, die zuvor genannten Aspekte auszubilden und so selbstwirksames Lernen zu begünstigen.

Im Sinne eines pädagogischen Doppeldeckers werden auf Seiten der Coaches selbst vorteilhafte Selbstwirksamkeitserwartungen und Motivation über wohldosierte *Erfolgserfahrungen* (Schwarzer & Jerusalem 2002) innerhalb des Hybridseminars angestrebt. Solche selbstwirksamkeitsförderlichen Praxiserfahrungen in Form von adäquaten Interventionen werden im Praktikum durch die Unterstützung auf verschiedenen Ebenen möglich. Zum einen arbeiten die Schülerinnen und Schüler an bereits erprobten Laborstationen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“, wodurch das generelle Setting und die mathematischen Inhalte festgelegt sind und die Coaches sich vollständig auf ihre diagnostische, unterstützende Tätigkeit konzentrieren können. Durch das eigene Kompetenzerleben im Zuge der Verbesserung der Diagnoseprozesse werden positive Effekte auf die *Lehrerselbstwirksamkeit* und den *Enthusiasmus* erreicht (Schwarzer & Jerusalem 2002). *Enthusiasmus* wird gleichzeitig auch durch die Freude am Coachen, der Feststellung, dass sich das eigene Engagement auszahlt und sich die Schülerinnen und Schüler fachlich weiterentwickeln, gefördert. Zum anderen bietet das Praktikum genügend Raum, sich mit den eigenen *Überzeugungen zum Lehren und Lernen* auseinanderzusetzen. Die Konfrontation mit eher leistungsschwächeren Lernenden initiiert eine Sensibilisierung bzgl. möglicher Attributionen von schlechten Leistungen zusammen mit einem Fokus auf der Entwicklung des einzelnen Lernenden und dessen individueller Unterstützungen. Damit werden Gelegenheiten geschaffen, die Kompetenzfacetten *Bezugsnormorientierung* und *Attributionen schlechter Schülerleistungen* zu reflektieren und weiterzuentwickeln.

Die Ausbildung des *Professionswissens und -könnens* in den drei genannten Facetten, wird den Studierenden durch die enge Theorie-Praxis-Verzahnung von Block- und Begleitseminar sowie Förderkursen ermöglicht. Der Kurszeitraum von 12–15 Wochen ermöglicht die längerfristige Entwicklung motivationaler Komponenten (Baumert & Kunter 2006).

Weitere geförderte Kompetenzen

Neben diesen Aspekten, die motivationsfördernde Facetten der professionellen Kompetenz ausbilden wollen, werden im Rahmen des Projekts auch allgemeine und fachspezifische digitale Kompetenzen gefördert. Erneut arbeiten die Studierenden im Sinne des pädagogischen Doppeldeckers: Sie bearbeiten einerseits als Lernende im Begleitseminar digitale Lernumgebungen auf Basis eines Learning Management Systems (LMS), hier Moodle, und gestalten andererseits eigene digitale Lernumgebungen für ihre Gruppe als Coaches im Begleitangebot des Förderkurses. Dort und in den Präsenzterminen der Förderkurse gestalten die Studierenden digitale Materialien wie interaktive Arbeitsblätter, H5P Inhalte, Erklärvideos sowie LearningApps und unterrichten damit, so dass wichtige fachspezifische digitale Kompetenzen gefördert werden (vgl. Engelhardt et al. im Druck).

Forschungsperspektive
Um die Wirksamkeit des Lehr-Lern-Praktikums zu überprüfen, wird in einem Mixed-Methods-Ansatz untersucht, wie sich die motivationsfördernden Facetten der professionellen Handlungskompetenz der Coaches durch ihre praktische Tätigkeit verändert. Dazu werden im Pre-Post-Interventionsdesign angepasste Selbstauskunftsskalen zur Lehrerselbstwirksamkeit (Schwarzer & Schmitz, 1999), zur Selbstwirksamkeit motiviertes Lernen zu fördern (Jerusalem & Röder, 2007) und zu Enthusiasmus für Mathematik (Pekrun et al., 2002) genutzt. Darüber hinaus werden die wöchentlichen Reflexionen mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018) ausgewertet, um so einen detaillierteren Einblick in die Veränderung der motivationalen Orientierung erhalten zu können.

Literatur

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*(2), 191–215. DOI:10.1037/0033-295X.84.2.191

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *ZfE, 9*(4), 469–520. DOI:10.1007/s11618-006-0165-2

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–54). Waxmann.

Engelhardt, A., Ossadnik, H., Digel, S. & Roth, J. (im Druck). Hybrides Lehr-Lern-Praktikum – Individualisierung mit Grundvorstellungen. In M. Meier, K. Ziepprecht, M. Hammann, R. Wodzinski & G. Greefrath (Hrsg.), *Lehr-Lern-Labore und Digitalisierung*. Springer.

Hanses, P. & Rost, D. H. (1998). Das „Drama“ der hochbegabten Underachiever – „Gewöhnliche“ oder „außergewöhnliche“ Underachiever? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 12*, 53–71.

Hattie, J., Beywl, W. & Zierer, K. (2013). Lernen sichtbar machen. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Hettmann, M., Nahrgang, R., Grund, A., Salle, A., Fries, S. & vom Hofe, R. (2019). »Kein Bock auf Mathe!« Motivationssteigerung durch individuelle mathematische Förderung. *Herausforderung Lehrer*innenbildung Zeitschrift zur Konzeption, Gestaltung und Diskussion*, 2(3), Artikel 10, 165–192. DOI:10.4119/hlz-2480

Hettmann, M. (2022). *Motivationale Aspekte mathematischer Lernprozesse. Eine Untersuchung zu professionellen Kompetenzen der Motivationsförderung im Mathematikunterricht*. Springer Spektrum.

Jerusalem, M. & Röder, B. (2007). Skala Selbstwirksamkeitserwartung „Motiviertes Lernen fördern“ (SWML). In R. Schwarzer & M. Jerusalem (Hrsg.), *Förderung von Selbstwirksamkeit und Selbstbestimmung im Unterricht. Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen* (S. 80–81). Humboldt-Universität zu Berlin.

Korthagen, F. A. J., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. & Wubbels, T. (2002). Schulwirklichkeit und Lehrerbildung. Reflexion der Lehrertätigkeit. Hamburg: EB.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* Beltz.

Kunter, M. (2011). Motivation als Teil der professionellen Kompetenz. Forschungsbefunde zum Enthusiasmus von Lehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 259–275). Waxmann.

Pekrun, R., Götz, T., Jullien, S., Zirngibl, A., vom Hofe, R. & Blum, W. (2002). *Skalenhandbuch PALMA 1. Messzeitpunkt (5. Jahrgangsstufe)*. Universität München: Department Psychologie.

Rheinberg, F., & Fries, S. (2018). Bezugsnormorientierung. In D. H. Rost, J. R. Sparfeldt & S. R. Buch (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5., überarb. u. erw. Aufl.) (S. 56–63). Beltz.

Siller, H.-S. & Roth, J. (2016). Herausforderung Heterogenität: Grundvorstellungen als Basis und Bezugsnorm – das Beispiel Terme. *Praxis der Mathematik in der Schule, 70*, 2–8.

Schwarzer, R. & Schmitz, G. S. (1999). Skala zur Lehrerselbstwirksamkeitserwartung (WIRKLEHR). In R. Schwarzer (Hrsg.), *Skalen zur Erfassung von Lehrer und Schülermerkmalen. Dokumentation der psychometrischen Verfahren im Rahmen der wissenschaftlichen Begleitung des Modellversuchs Selbstwirksame Schulen* (S. 60–61). Freie Universität Berlin.

Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (2002). Das Konzept der Selbstwirksamkeit. *Zeitschrift für Pädagogik* 44, 28–53.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

Henrik Ossadnik, Universität Landau
E-Mail: ossadnik@uni-landau.de

Susanne Digel, Universität Landau
E-Mail: digel@uni-landau.de

Alex Engelhardt, Universität Landau
E-Mail: engelhardt@uni-landau.de

Jürgen Roth, Universität Landau
E-Mail: roth@uni-landau.de

Visual Mathematical Dictionary

A didactical-humanitarian project

Antonella Perucca

The Visual Mathematical Dictionary is an ongoing collaborative didactical project aimed at breaking language barriers. Mathematical words are thematically sorted and illustrated. The material (including the source files) is provided on the website https://math.uni.lu/dictionary/.

Why?

Many people work or study in a language which is not their mother tongue. Several combinations are possible (e.g., a French person studying Finnish). Today, in Europe, the focus is Ukrainian, and the language support is obviously urgent. This project aims (in principle) to help millions of Ukrainian refugees and "shows that we care". It also aims at helping all pupils, who can profit of the material in their own language as a colorful didactical support. You (the reader) could use the dictionary to learn languages: for example, do you know how to say in English "überstumpfer Winkel"?

Who are we?

I am the initiator and (so far) the chief person responsible for the project, namely I am the lucky person who turned the "somebody should do it" into "let's do it NOW" and is working day and night since then. It's not a coincidence that I am in Luxembourg, as here multilinguism is every-day life.

There are many translators backing up the project (more than 20, mostly mathematicians). Many people are happy to help because this collaborative project is meaningful, and the translations are clearly only possible as a joint effort.

There are occasional contributions of people producing pictures, sharing ideas, providing valuable feedback, putting me in contact with other people. As I like to say, also "epsilon-contributions" are very welcome. As I cannot mention everyone, I refer to the webpage where all contributions are listed.

People who would like the project to be better or faster may help in various ways. Even just pointing out the existence of the material to some other person who might be interested (to use it or to contribute to it) is already helpful. In general, I am looking forward to thanking you in the contributor's page, whatever your contribution may be.

Intermezzo

How do you say „square" in Ukrainian? If you Google-translate „square" from English, are you sure that Google understands „Quadrat" and not „Platz"? As reading a Cyrillic alphabet is not that difficult, you can be fine with the translation „квадрат". But what about the same word in Chinese? It is „正方形": to find it you could open the Wikipedia page for „square" and change the language to Chinese (for an additional check you could copy-paste 正方形 into Google-translator, also getting the pinyin Zhèngfāngxíng).

In general, beware of false friends (namely, the words seemingly easy to translate). My favorite mathematical false friend is the German number "Billion" which you would tend to translate into American English as "billion", making a mistake of a factor 1000 (oops!).

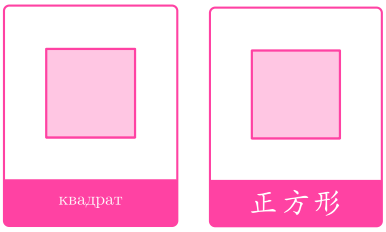


Figure 1. The word "square" in Ukrainian and Chinese

The material

The material so far consists of monolingual posters (where the words are illustrated by pictures) and bilingual word lists (one of the two languages being American English). The words are subdivided thematically into chapters, and there is a regular structure (the current choice is 12 words per chapter). The goal of the project is to produce approximately 500 pictures and up to 600 words (sometimes, to spare on space, a picture represents more than one mathematical object). Notice that the subdivision into chapters is very easy to be changed in the future.

The posters and the word lists are pdf files compiled by relying on LaTeX, a very flexible program known to every mathematician that easily supports all languages with additional packages.

The pictures are pdf files produced with TikZ and they can be considered as public domain. In fact, some words are planned, like "compass", that cannot be easily drawn by mathematicians. In this case, there will be an artist/designer either working on a voluntary basis, or paid to produce the images (with the unusual contract clause that the work is in the public domain). This can be practical also for other purposes: anyone needing the image of a compass can freely use, without attribution, the one that we provide. To be precise, the material is currently available under a Creative Common Licence (but only to avoid commercial use).

The main challenge about the pictures is that they are the same in all languages, so they may only contain international mathematical symbols that have no ambiguity. For example, an open debate is whether writing 1/2 as 0.5 or 0,5 or both (or opting for an alternative LaTeX symbol which is the mixture of a dot and a comma). Notice that the bottom of the posters has space for comments, in case clarifications are needed. And, in the end, we may resolve to alternative versions of selected pictures in exceptional cases. For sure there will be different versions of some pictures for the (oncoming) version aimed at children.

Notice that fine-tuning is postponed to better times. However, didacticians, educators, and language experts are already welcome to send us their comments.

Lost (and found) in translation

If you have some experience with mathematical terms in other languages, there is more than meets the eye. The translation is not a bijective function. I briefly explain some conventions adopted in the visual dictionary. Some words may not exist, so *"you write a substitute sentence"*. Or there could be two synonyms, both widely used, and then you write : *first synonym (second synonym)*. Or you may need a comment to illustrate a picture, which in the end is only an example: *object [comment to clarify]*.

Beyond the obvious aim of teaching and learning mathematical terms, the visual dictionary easily allows one to compare languages. For example, one may wonder why some mathematical terms do not exist in other languages. On a more active level, one could take inspiration for a better (e.g., more informative or more coherent) terminology, and possibly go as far as changing the terminology in use. Languages, although based on tradition, do evolve, and carefully motivated changes could be meaningful at some point.

Antonella Perucca, University of Luxembourg
E-Mail: antonella.perucca@uni.lu

Einladung: IntroMathEDigi gemeinsam gestalten

Fragen der Community zu Spektren im mathematikdidaktischen Diskurs

Felicitas Pielsticker und Gero Stoffels

Liebe Mathematikdidaktiker/-innen und Didaktiker/-innen der Mathematik,
in den vergangenen GDM-Mitteilungen (Nr. 112, 2022, S. 46–49) haben wir unsere Projektidee „IntroMathEDigi – Perspektiven auf Mathematikdidaktik digital erleben" vorgestellt. Das Projekt IntroMathEDigi (**Intro**duction in **Math**ematics **E**ducation **Digi**tal) vereint eine strukturell-inhaltliche Neugestaltung mit digitaler Innovation und wurde im Rahmen der Initiative Freiraum 2022 zur Förderung ausgewählt. Die Kernidee des Projektes ist es, eine Veranstaltung zur „Einführung in die Mathematikdidaktik" so zu gestalten, dass die Auseinandersetzung der Studierenden mit den mathematikdidaktischen Inhalten an Spektren im mathematikdidaktischen Diskurs ausgerichtet ist. Als Impulsgeber dienen Expert/-innenvodcasts (ca. 15 min. Clips) mit Mitgliedern unserer Community, die frei auf YouTube verfügbar gemacht werden sollen. So werden einerseits zentrale Arbeiten der Mathematikdidaktik und deren Entwicklung videographisch dokumentiert, zum anderen werden Positionen in der mathematikdidaktischen Forschung durch mathematikdidakti-

Geplante Spektren für die ersten Aufnahmen des Expert/-innenvodcasts im Rahmen von IntroMathEDigi

Spektrum in der Mathematikdidaktik	Gast im Expertenvodcast
Mathematikdidaktische Forschung vs. Mathematikdidaktische Praxis Bereichsspezifisches Lernen vs. normiertes Unterrichtsziel Mathematische Individualität vs. Interaktion	Prof. Dr. em. Horst Struve
Mathematische Produkte vs. Prozesse: Argumentieren	Prof. Dr. Michael Meyer
Mathematische Produkte vs. Prozesse: Begriffsbildung	Prof. Dr. Ingo Witzke
Mathematische Produkte vs. Prozesse: Modellieren	Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Mathematische Produkte vs. Prozesse: Problemlösen	Prof. Dr. Benjamin Rott
Diagnostizieren und Fördern	Prof. Dr. Susanne Prediger
Allgemeinbildung vs. Wissenschaftspropädeutik	Prof. Dr. David Kollosche
Analog vs. Digital	Prof. Dr. Silke Ladel

sche Forscher/-innen eingeordnet und erlebbar gemacht.

Die Spektren, die zunächst für den ersten Durchgang mit Expert/-innenvodcasts ausgewählt wurden, sind in der Tabelle angegeben und wurden bereits im Wintersemester 2021/2022 ohne die Ergänzung durch Expert/-innenvodcasts in der Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“ an der Universität Siegen erprobt. Zugleich ist ein Lehrbuch geplant, das die Spektren inhaltlich aufbereitet und den Einsatz dieser Expert/-innenvodcasts und weiterer Materialien, wie wissenschaftliche Artikel, Lehrbücher und Anschauungsmaterialien darstellt. Durch diesen modularen Aufbau der Veranstaltung entsprechend identifizierter Spektren kann die Veranstaltung immer neue Impulse aus der Community aufnehmen und so Ideenentwicklungen in der Mathematikdidaktik dokumentieren, aber auch kommentieren und einordnen.

Wir freuen uns, dass sich Expert/-innen unserer Community bereit erklärt haben mit uns diese Vodcasts zu gestalten. Wir würden aber gerne noch weitere Impulse aus aktueller mathematikdidaktischer Diskussion mit aufnehmen. Dazu laden wir Sie ein, Fragen zu den Spektren an die Expert/-innen zu adressieren und uns diese mitzuteilen, sodass wir die Fragen nach redaktioneller Aufbereitung in den Expert/-innenvodcasts in der Rubrik „Fragen aus der Community“ an die Experten stellen können.

Senden Sie dazu bitte Ihre Fragen nach Erhalt des Heftes an gero.stoffels@uni-siegen.de.

Wir freuen uns auf Ihre Anregungen!

Felicitas Pielsticker, Universität Siegen
E-Mail: felicitas.pielsticker@uni-siegen.de

Gero Stoffels, Universität Siegen
E-Mail: gero.stoffels@uni-siegen.de

MaCo – Mathematik aufholen nach Corona

Ein Unterstützungs- und Fortbildungsprogramm des Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM)

Susanne Prediger, Kim-Alexandra Rösike und Svea Hallemann

Fast alle Kinder und Jugendliche waren im Zuge der Covid-19-Pandemie von institutionellen Kita- und Schulschließungen oder individuellen Ausfalltagen durch Ansteckungsgefahr oder Krankheit betroffen. Während sich die Erreichbarkeit und somit die Beschulungsfrequenz im zweiten Lockdown durch die Digitalisierung der Schulen insgesamt erhöht hat (Wößmann et al., 2021), haben gerade Kinder und Jugendliche aus bildungsfernen Familien durch den institutionellen oder individuellen Schulausfall erhebliche Leistungsrückstände (Engzell et al., 2021). 80 % der Lehrkräfte nehmen an, dass die Schulschließungen die sozialen Ungleichheiten zwischen den Lernenden im Hinblick auf die Lernziele verstärkt haben, 71 % gehen davon aus, dass insgesamt deutlich weniger Lernende ihre Lernziele erreicht haben (Deutsches Schulportal, 2021). Diese Wahrnehmung der Lehrkräfte deckt sich mit empirischen Befunden aus Leistungsstudien (LIfBi, 2021; Engzell et al., 2021).

Fehlende Bildungsgerechtigkeit war bereits vor der Pandemie eine zentrale schulische Herausforderung, wie viele Bildungsvergleichsstudien aufzeigen (z. B. Stanat et al., 2017; 2019). Gleichwohl wurde im Zuge des Distanzlernens die Schere zwischen leistungsstarken und leistungsschwachen Lernenden insbesondere dadurch verstärkt, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler schlechter erreicht wurden (Engzell et al., 2021). Lernzeiten waren zwar für alle im Distanzlernen im Mittel reduziert (von 7,4 Stunden im Mittel auf 3,6 im ersten und 4,1 Stunden im zweiten Lockdown; Wößmann et al., 2021), aber sehr unterschiedlich verteilt und durch heterogene häusliche und schulische Unterstützung erheblich unterschiedlich gut genutzt (Hofer et al., 2022).

Gerade die schwächeren Lernenden müssen nun prioritär im Lernen unterstützt werden, um bereits vorhandene oder neu entstandene Defizite abzubauen. Denn ohne gezielte Maßnahmen – so zeigen ältere Untersuchungen zu temporären Schulschließungen – setzen sich die Lücken in der Bildungsbiographie weiter fort (Kaffenberger, 2021). Schon vor der Pandemie gehörten bundesweit mehr als 20 Prozent der Kinder und Jugendlichen zur sogenannten „Risikogruppe“, die die Mindeststandards am Ende der Jahrgangsstufen 4 und 9 nicht erreicht (Stanat et al. 2017, 2019). Für diese sind die Folgen nicht anschlussfähigen Wissens schon lange untersucht (Moser Opitz, 2009; Gaidoschik et al., 2021). Daher fordert die Ständige Wissenschaftliche Kommission der KMK (SWK 2021) eine Fokussierung der Förderangebote auf schwache Lernende, um ihnen anschlussfähiges Wissen zu verschaffen.

Lernrückstände aufholen – aber wie?

Das Aufholen der schulbiographisch oder pandemiebedingten Lernrückstände ist nun Aufgabe der Schulen und deren Lehrkräfte. Dabei ergreifen die Schulen unterschiedliche Maßnahmen zum Ausgleich, angefangen von der üblichen Differenzierung im Regelunterricht (74 %), der Schaffung zusätzlicher Angebote neben den Beschulungszeiten (47 %), sowie zusätzlicher Lernangebote speziell für Lernende mit großen Lernrückständen (40 %) oder der temporären Anpassung der Stundenpläne, um die Kernfächer Deutsch und Mathe zu stärken (18 %) (Deutsches Schulportal, 2021). Mithilfe von einer Milliarde Zuschuss vom Bund für Förderprogramme haben viele Schulen zusätzliches Personal zur Bewältigung der Lernrückstände eingestellt oder andere schulorganisatorische Anpassungen und Zusatzangebote vorgenommen. Zudem muss aber auch der reguläre Unterricht auf die Situation reagieren.

Ein Aufholen der Lernrückstände ist von Bildungspolitik und Öffentlichkeit leicht zu fordern, viele Mathematiklehrkräfte stellen sich jedoch schwierige Fragen: Welche Inhalte sind wirklich essenziell? Und wie soll man mit Zeitproblemen umgehen, denn schon vor den Schulschließungen war der Lehrplan voll und die Lernzeit häufig zu knapp bemessen?

Gerade für den Mathematikunterricht ist das Aufarbeiten der Lernlücken maßgeblich, da das Mathematiklernen besonders stark kumulativ strukturiert ist. Es ist empirisch nachgewiesen, dass es im Mathematikunterricht essenzielle Inhalte gibt, ohne die ein Weiterlernen in der Mittel- und Oberstufe nicht möglich ist (Moser Opitz, 2007; Gaidoschik et al., 2021). Diese Inhalte müssen also im Fokus der Förderungen zum Abbau der Lernrückstände stehen, um tatsächlich nicht nur unmittelbare Lücken zu schließen, die sich im aktuellen Regelunterricht zeigen, sondern auch um langfristig im weiteren Verlauf der Schullaufbahn das Weiterlernen im Mathematikunterricht zu ermöglichen.

Notwendiger Fokus von gezielten Unterstützungs- und Fortbildungsangeboten

Förderprogramme für die Aufarbeitung dieser unverzichtbaren Verstehensgrundlagen wurden bereits vor der Pandemie entwickelt (Gaidoschik et al., 2021; Selter et al. 2014; Prediger et al., 2013). Nach den Schulschließungen ist allerdings eine fokussierte und bedachte Verwendung der knappen zeitlichen und personellen Ressourcen auf die richtigen und wichtigen Inhalte wichtiger denn je. Mathematiklehrkräfte brauchen Unterstützungs- und Fortbildungsangebote für ihre Fragen: Worauf kommt es im Mathematikunterricht wirklich an? Was sind die essenziellen Inhalte, ohne die ein Weiterlernen schlicht nicht möglich ist? Worauf sollten Lehrkräfte ihre knapp bemessene Zeit verwenden, um insbesondere die leistungsschwächeren Lernenden, die besonders von den Schulschließungen beeinträchtigt wurden, zu unterstützen? Dies wird zunächst an einem Beispiel (aus Prediger et al., 2022) erläutert:

Am Beispiel des Multiplizierens mit 10 lässt sich verdeutlichen, welche Inhalte essenziell für das Weiterlernen sind: Förderunterricht, der auf schnelles Aufarbeiten unter Zeitdruck setzt, wird zum Multiplizieren mit 10 folgende Rechenregel vermitteln: „Beim Multiplizieren mit 10 hängen wir einfach eine 0 hinten an die Zahl dran.“ So gesicherte Rechenfertigkeiten erweisen sich als Kurzschluss, spätestens wenn ein Jahr später bei $1,32 \cdot 10$ damit 1,320 herauskommt. Viele gut gemeinte Hilfestellungen durch Rechenrezepte oder Trainingsprogramme mit vielfacher Wiederholung des gleichen Aufgabentyps bieten solche nicht nachhaltigen Reparaturen. Sie stärken jedoch die Tendenz zum oberflächlichen Lernen und verbauen das Weiterlernen.

Nachhaltiges Lernen muss dagegen berücksichtigen, was langfristig gelernt und von den Lernenden behalten werden soll: Die Rechenregel wird besser so formuliert: „Beim Multiplizieren mit 10 verschieben wir alle Stellen eins nach links". Und damit sie auch langfristig behalten wird, ist sie an der Stellentafel (in Abb. 1) zu begründen: Alle Stellen verschieben sich, weil aus Einern Zehner werden, denn 10 Einer passen in 1 Zehner; aus den Zehnteln werden Einer, denn 10 Zehntel passen in 1 Einer und aus den Hundertsteln werden Zehntel, denn 10 Hundertstel passen in 1 Zehntel. Die Rechenregel nutzt also die Bündelungseigenschaft des Stellenwertsystems: Nur wer Stellenwertverständnis aufgebaut hat und weiß, dass immer 10 Einheiten einer Stelle zur nächstgrößeren Einheit gebündelt werden, der kann die Rechenregel verstehen. Alle anderen müssen sie als unverstandenes Rezept versuchen zu behalten und werden sie schnell wieder vergessen. Ohne Stellenwertverständnis kann die Rechenregel nicht nachhaltig gelernt werden. Daher muss die Förderung daran ansetzen. Gerade wenn die Zeit knapp ist, muss die Auswahl der Inhalte klug getroffen werden.

Ebenso wie in diesem Beispiel brauchen Mathematik-Lehrkräfte und semiprofessionelle Förderkräfte (Studierende, Freiwillige, Integrationskräfte etc.) substanzielle Unterstützungs- und Fortbildungsangebote, um tatsächlich Ansätze für nachhaltiges Lernen zu realisieren, die auf langfristige Lernerfolge und den Aufbau der essenziellen Verstehensgrundlagen ausgerichtet sind. Verstehensorientierung beinhaltet, dass sich die Förderung nicht auf unverstandene Rechenrezepte fokussiert, mit denen Lernende die Aufgabe kurzfristig lösen können. Sie orientiert sich stattdessen daran, die fehlenden Verstehensgrundlagen zu ermitteln und sukzessive aufzubauen (Gaidoschik et al., 2021; Prediger et al., 2013). So erhalten Lernende die Chance wichtige Elemente zu verstehen und auch in weiterführenden Klassenstufen auf dieses Wissen zurückzugreifen um aufbauend auf diesen Grundlagen voranzuschreiten.

Im Vergleich zum kurzfristigen Vermitteln von Rezeptwissen ist die Förderung von Verstehensgrundlagen wie dem Stellenwertverständnis im ersten Moment deutlich aufwendiger, sowohl zeitlich als auch personell. Denn der sukzessive Aufbau bzw. Wiederaufbau der Verstehensgrundlagen erfordert eine intensive Kommunikation in der Klasse. Viele Schulen arbeiten dazu mit dem Diagnose- und Förderkonzept *Mathe sicher können*. Es wurde für Klasse 3–7 entwickelt (Selter et al., 2014), um Lehrkräften zu ermöglichen, mit ihren Förderaktivitäten ganz genau an denjenigen Inhalten anzusetzen, die wirklich grundlegend für den Aufbau anschlussfähigen Wissens sind. In drei Themenbereichen, nämlich den natürlichen Zahlen, den Brüchen und Dezimalzahlen sowie Bereichen des Sachrechnens wurden kurze Diagnosetests entwickelt, die die Verstehenslücken der Lernenden treffsicher auffinden. Darauf genau abgestimmt sind Fördermaterialien, die den Aufbau der Verstehensgrundlagen unterstützen. Dabei setzt die Förderung ganz klar am Verstehen der Lernenden an und nicht an kurzfristigem Üben von Rezeptwissen, das nicht nachhaltig auch das Weiterlernen der Schülerinnen und Schüler ermöglicht. Die Diagnose- und Fördermaterialien für die Lernenden und die Handreichungen für Lehrkräfte stehen online frei verfügbar unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de.

DZLM-Programm MaCo – Mathematik aufholen nach Corona

Das DZLM-Programm „MaCo – Mathematik aufholen nach Corona" wird von einem großen Netzwerk (insgesamt 14 Kooperationshochschulen aus ganz Deutschland) des Deutschen Zentrums Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) durchgeführt, die Namen der Modulverantwortlichen sind in Abb. 1 aufgeführt.

In 14 Modulen von Klasse 1–10 wird das Förderkonzept über Mathe sicher können hinaus ausgeweitet mithilfe von einschlägigen Expertinnen und Experten für andere Bereiche (vgl. Abb. 1). Hinzukommen weitere Themen und Jahrgänge sowie Materialien auch für die integrierte Wiederholung im Regelunterricht. Das MaCo-Programm zielt auf die Unterstützung und Fortbildung von Mathematik-Lehrkräften und Förderkräften, damit sie Lernrückstände in den mathematischen Verstehensgrundlagen und Basiskompetenzen in Klasse 1–10 nachhaltig aufarbeiten können. Als materiale Unterstützungsangebote werden neben frei verfügbaren Unterrichtsmaterialien bis Juni 2023 auch digitale Diagnose-Angebote, virtuelle Arbeitsmittel, Erklär- und Handreichungsvideos sowie didaktische Hintergrundmaterialien erstellt.

Auf der Fortbildungsebene werden Fortbildungen entwickelt und in synchronen Online-Modulen erprobt und in Fortbildungsmaterialien für Aus- und Fortbildende synthetisiert, um Lehrkräfte zu professionalisieren, und wichtige Verstehensgrundlagen in 13 Themenfeldern (vgl. Abb. 1) zu identifizieren, zu diagnostizieren und zu fördern. Für die essenziellen Lerninhalte können Lehrkräfte (und ggf. auch fachfremde Förderkräfte) dadurch ihre

Diagnose und Förderung von Verstehensgrundlagen im Programm Mathematik aufholen nach Corona: 14 Module

Verstehensgrundlagen im Fokus: Durchgängig, verstehensorientiert, diagnosegeleitet und kommunikationsfördernd (Einstiegsmodul)
Susanne Prediger

Basisfähigkeiten und tragfähiges Zahlenverständnis
(Jhg. 1)
Hedwig Gasteiger & Julia Bruns

Verständig und sicher im Einspluseins und Einsminuseins
(Jhg. 1)
Marcus Nührenbörger, Uta Häsel-Weide & Karina Höveler

Ablösung vom zählenden Rechnen
(Jhg. 2–3)
Karina Höveler, Uta Häsel-Weide & Marcus Nührenbörger

Verständig und sicher im Einmaleins und Einsdurcheins
(Jhg. 2–3)
Daniela Götze

Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen
(Jhg. 2–4)
Petra Scherer & Katrin Rolka

Halbschriftliches und schriftliches Rechnen
(Jhg. 3–4)
Christoph Selter

Stellenwertverständnis
(Jhg. 4–6)
Susanne Prediger & Kim Rösike

Multiplikations- und Divisionsverständnis
(Jhg. 5–6)
Susanne Prediger & Kim Rösike

Brüche: Zahl- und Operationsverständnis
(Jhg. 6–7)
Lena Wessel & Susanne Prediger

Dezimalzahlen: Zahl- und Operationsverständnis (Jhg. 5–7)
Stephan Hußmann, Florian Schacht & Lara Sprenger

Prozentverständnis
(Jhg. 7–8)
Birte Friedrich-Pöhler & Susanne Prediger

Variable, Terme, Gleichungen (Jhg. 7–10)
Bärbel Barzel, Annika Dreher, Marita Friesen & Lars Holzäpfel

Funktionen
(Jhg. 7–11)
Leander Kempen & Carina Zindel

Abbildung 1. 14 Module des Unterstützungs- und Fortbildungsprogramm MaCo – Mathematik aufholen nach Corona und ihre Modulverantwortlichen

gegenstandsbezogene Expertise erweitern und für ihren Regel- und Förderunterricht eine treffsichere Auswahl der wichtigen Lerngegenstände vornehmen, diese prozessbezogen oder materialgestützt diagnostizieren und ihre Förderungen verstehensorientiert anlegen.

Die Beforschung der Professionalisierungsbedarfe und -prozesse durch das DZLM-Netzwerk dient dazu, die Fortbildungs- und Unterstützungsangebote zunehmend treffsicher auszugestalten. Die Ansätze und Forschungsbefunde der Fortbildungsebene werden auch in die Unterstützungs- und Qualifizierungsangebote für Multiplikatorinnen und Multiplikatoren eingespeist und reflektiert.

Die MaCo-Fortbildungsreihe wurde bereits zweimal online durchgeführt (September/Oktober 2021 und Mai/Juni 2022). Der dritte und gleichsam letzte Durchlauf findet online im September/Oktober 2022 statt. Die Unterrichts- und Fortbildungsmaterialien zu den 14 Modulen werden sukzessive auf der DZLM-Webseite von MaCo (maco.dzlm.de) eingestellt und sind nach Registrierung kostenfrei zugänglich. Sie können gerne auch in der Aus- und Fortbildung eingesetzt werden, und zwar auch nach der Pandemie, die nur im Einstiegsmodul explizit thematisiert wird.

Darüber hinaus macht das MaCo-Programm auch Angebote für die Zielgruppe der Multiplikatorinnen und Multiplikatoren in Aus- und Fortbildung. So fand von Dezember 2021 bis Anfang Mai 2022 die Qualifizierungsreihe statt. In stufenbezogenen Einführungsseminaren und darauffolgenden Werkstätten wurden Hintergründe und Handhabung der disseminierbaren Fortbildungsmaterialien zur Diagnose und Förderung diskutiert. Zudem wurde erarbeitet, wie Multiplikatorinnen und

Multiplikatoren die Materialien in eigenen Veranstaltungen sinnvoll für Lehrkräfte integrieren and adaptieren können.

Erste Zwischenbilanz

Der erste Durchlauf der Fortbildungsreihe für Lehrkräfte im Rahmen des Projekts fand im Herbst des letzten Jahres statt. Die Anmeldezahlen waren beeindruckend, mit über 1000 Anmeldungen für einzelne Online-Veranstaltungen. Direkt im Anschluss eines jeden Seminars wurden die Teilnehmenden in Form einer Blitzumfrage gebeten, ihre Eindrücke schriftlich zu schildern. Die erste Sichtung des Feedbacks in Form offener Antworten fällt äußerst positiv aus. Exemplarisch werden hier vier Rückmeldungen aus unterschiedlichen Modulen herausgegriffen, die den Reflektionsprozess der Lehrkräfte verdeutlichen:

- „Ich mache den Job nun schon über 25 Jahre, habe auch Mathe an der Uni studiert. Aber heute habe ich begriffen, dass ich es immer wieder falsch angepackt habe. Meine Schüler an der Mittelschule 5./6. Klasse können in den wenigsten Fällen das Einmaleins sicher. Ihnen einfach zu sagen ‚lerne es auswendig' hat nur bei einigen Schülern funktioniert. Jetzt plane ich anders!" (Lehrkraft nach dem Online-Seminar zum Multiplikations- und Divisionsverständnis)
- „Ich war ganz begeistert, dass die Probleme nicht nur aufgeworfen wurden, sondern auch gleich Hilfen und Beispiele für eine Lösung diskutiert wurden und sogar mit Material und Videos unterfüttert wurden." (Lehrkraft nach dem Online-Seminar zum Einmaleins)
- „Gerade schwächere Schülerinnen und Schüler mit Problemen im Rechnen nicht alleine lassen, sondern sie in kommunikative Prozesse einbinden. Lücken lassen sich nicht durch zusätzliche Arbeitsblätter beheben, sondern es braucht Zeit, Geduld und eine sachgerechte Förderung. Notfalls auch ein bis zwei Schuljahre zurückgehen." (Lehrkraft nach dem Online-Seminar Halbschriftliches und schriftliches Rechnen)
- „Ich habe die meisten Vorträge bereits in der ersten Runde gehört und ergänze dieses Mal nur noch [...] eine großartige Vorlesungsreihe. Ich habe viel viel mehr gelernt als in meinem gesamten Lehramtsstudiengang im Didaktikfach Mathematik. Ich empfehle sie immer wieder gerne an Kollegen weiter." (Lehrkraft nach dem Einstiegs-Modul)

Darüber hinaus können Lehrkräfte, die Seminare verpasst haben, die Mitschnitte der einzelnen Seminare online anschauen, genauso wie die Materialien sichten, downloaden und für ihren Unterricht adaptieren und nutzen. Die erfreulich hohen Zugriffzahlen für die Sichtung der Mitschnitte, der Materialdownloads und allgemein die stetig steigende Anzahl an Benutzenden der Website maco.dzlm.de verdeutlichen den Bedarf der Lehrkräfte.

Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Zielgruppe der Multiplikatorinnen und Multiplikatoren: Auch hier waren die Anmeldezahlen im Rahmen der Qualifizierungsreihe beindruckend, bis zu 300 Teilnehmende diskutierten die Fortbildungsinhalte und gegenstandsspezifischen fortbildungsdidaktischen Hintergründe. Die Zugriffe auf die Fortbildungsmaterialien übersteigen bei Weitem die Anmelde- und Teilnahmezahlen. So zählen wir für einzelne Bausteine bereits jetzt dreimal so viele Materialdownloads als Anmeldungen für die entsprechende Werkstatt vorlagen. Dies deutet auch für die Zielgruppe der Aus- und Fortbildenden auf einen hohen Bedarf an gut ausgearbeiteten Materialien hin. Auch aus den Universitäten erhalten wir zunehmend Zugriffe auf die Materialien, so dass sie sich auch in der ersten Phase der Lehrkräftebildung verbreiten können. Gerade die videobasierten Fallbeispiele und interaktiv gestalteten Aktivitäten werden dabei gerne eingesetzt.

Fazit und Ausblick

Ansätze für nachhaltiges Lernen müssen auf langfristige Lernerfolge und den Aufbau der essenziellen Verstehensgrundlagen ausgerichtet sein. Das treffsichere Identifizieren, Diagnostizieren und Fördern von Verstehensgrundlagen ist im Zuge der Covid-19 Pandemie sicherlich akuter denn je geworden. Der Zeitmangel, auch und besonders im Mathematikunterricht, zwingt Lehrkräfte zur Selektion von Inhalten und den richtigen Förderschwerpunkten. Das MaCo-Projekt setzt an diesen Punkten an, um Lehrkräfte bei der großen Verantwortung und Aufgabe zu unterstützen, leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern Verstehensgrundlagen zu vermitteln. In Anbetracht der herausfordernden Ausgangssituation werden die Lehrkräfte bei der Priorisierung der Themen, essentieller Grundlagen- und Materialauswahl begleitet.

Ab 2024 werden wir die erstellten Unterstützungs- und Fortbildungsangebote in das große KMK-Programm „QuaMath: Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln" (2023–2033) integrieren, auch wenn die Pandemie hoffentlich dann vergessen ist.

Förderhinweis und Dank
Das DZLM ist ein Projekt der 2021 neu gegründeten Abteilung für Fachbezogenen Erkenntnistransfer am IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der

Naturwissenschaften und Mathematik. Das DZLM-Unterstützungs- und Fortbildungsprogramm *MaCo – Mathematik aufholen nach Corona* wird in einer informell ländergemeinsamen Finanzierung aus dem Aktionsprogramms „Aufholen nach Corona für Kinder und Jugendliche" des Bundes mit insgesamt 4,4 Mio. Euro durch 14 Bundesländer finanziert (in umgekehrt alphabetischer Reihenfolge): Schleswig-Holstein, Sachsen-Anhalt, Sachsen, Rheinland-Pfalz, Nordrhein-Westfalen, Niedersachsen, Mecklenburg-Vorpommern, Hessen, Hamburg, Bremen, Brandenburg, Berlin, Bayern, Baden-Württemberg. Wir danken allen beteiligten Bundesländern und den DZLM-Netzwerkpartnerinnen und -partnern, ohne die so kurzfristig keinesfalls so viel Substanz zusammengekommen wäre.

Literatur

Deutsches Schulportal (2021). Das Deutsche Schulbarometer Spezial – eine repräsentative Umfrage von Forsa im Auftrag der Robert Bosch Stiftung in Kooperation mit der ZEIT. tinyurl.com/2de4a5qm. Zugegriffen: 13.05.2022.

Engzell, P., Frey, A., & Verhagen, M. (2021). Learning loss due to school closures during the COVID-19 pandemic. PNAS. 118(17), e2022376118. DOI:10.1073/pnas.2022376118. Zugegriffen: 13.05.2022.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S). Verfügbar unter: ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46

Hofer, S. I., Reinhold, F., & Koch, M. (2022, online first). Students home alone – profiles of internal and external conditions associated with mathematics learning from home. *European Journal of Psychology of Education*. DOI:10.1007/s10212-021-00590-w

Kaffenberger, M. (2021). Modelling the long-run learning impact of the Covid-19 learning shock: Actions to (more than) mitigate loss. *International Journal of Educational Development*, 81,102326. DOI:10.1016/j.edudev.2020.102326.

Leibniz-Institut für Bildungsverläufe – LIfBi (2021). Lernen im Lockdown: Welche Voraussetzungen helfen Schülerinnen und Schülern? *NEPS Corona & Bildung*, Bericht Nr. 5. Bamberg: LIfBi

Moser Opitz, E. (2007). Rechenschwäche – Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Haupt.

Prediger, S., Freesemann, O., Moser Opitz, E., & Hußmann, S. (2013). Unverzichtbare Verstehensgrundlagen statt kurzfristige Reparatur – Förderung bei mathematischen Lernschwierigkeiten in Klasse 5. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *55*(51), 12–17.

Prediger, S., Rösike, K.-A., & Hallemann, S. (2022). Schnell alles reparieren? Nachhaltige Förderung nach Corona. *Mathematik 5–10*, 16(59), 42–43.

Stanat, P., Schipolowski, S., Mahler, N., Weirich, S., & Henschel, S. (Hrsg.). (2019). IQB Bildungstrend 2017: Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich. Waxmann.

Stanat, P., Schipolowski, S., Rjosk, C., Weirich, S., & Haag, N. (Hrsg.). (2017). *IQB-Bildungstrend 2016: Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im zweiten Ländervergleich*. Waxmann.

SWK – Ständige wissenschaftliche Kommission der KMK (2021). Pandemiebedingte Lernrückstände aufholen – Unterstützungsmaßnahmen fokussieren, verknüpfen und evaluieren. tinyurl.com/250azqte. Zugegriffen: 13.05.2022.

Wößmann, L., Freundl, V., Grewenig, E., Lergetporer, P., Werner, K., & Zierow, L. (2021). Bildung erneut im Lockdown. Wie verbrachten Schulkinder die Schulschließungen Anfang 2021? *ifo Schnelldienst, 5, 21*.

Susanne Prediger, TU Dortmund, Leiterin des
Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik
am IPN Berlin/Kiel
E-Mail: prediger@math.tu-dortmund.de

Kim-Alexandra Rösike, TU Dortmund
und IPN Berlin/Kiel
E-Mail: kim.roesike@tu-dortmund.de

Svea Hallemann, IPN Berlin/Kiel
E-Mail: hallemann@leibniz-ipn.de

A Model of a Finite Projective Plane with 7 Points plus the Associated Affine Plane with 4 Points ('Shoebox Geometry')

Hans Wolfgang Valet

Erläuterungen zum didaktischen Projekt

Das folgende Projekt wird für mathematische Arbeitskreise vorgeschlagen. Ich hatte in meiner aktiven Zeit als Fachlehrer für Mathematik und Physik am Kolleg der Schulbrüder in Illertissen (bayerisches Gymnasium) einen AK ‚Mathematische Modelle'. Dafür wäre das Projekt geeignet gewesen. In diesem AK hatte ich auch Reiner Knizia, den späteren Spiele-Erfinder, als Schüler. Es ist mir eine Ehre, ihm diesen Text zu widmen. Das Projekt ist in englischer Sprache verfasst. Es war angeregt worden durch das internationale Symposium ‚Problem Posing for mathematically gifted children', das online am 22. und 23. Januar 2021 vom AK Problemlösen der GDM veranstaltet wurde. (problem-posing.weebly.com)

‚In einfachem Spielmaterial Grundlegendes entdecken'
Dieses Motto soll das didaktische Konzept des Projektes zum Ausdruck bringen. Zweidimensionale Figuren dreidimensional zu sehen, kann ein Krimi sein. Der Vorteil der dreidimensionalen Sichtweise besteht in einem neuen und tieferen Verständnis der Figuren.

Das Projekt versteht sich nicht als abgeschlossen, sondern soll dazu anregen, selbst auf Entdeckungsreisen zu gehen.

In einem Sechseck (Figur 2 des Projekts) einen Würfel zu sehen, ist ein Klassiker. Die durchgezogenen farbigen Linienteile in Figur 4 kann man alle in der rautenförmigen unteren Würfelflächenprojektion der Figur 5 verorten. Stellt man dieses Bild auf den Kopf, sieht man den Würfel im $x'y'z'$-System in isometrischer Ansicht in Normallage (z'-Achse nach oben). Die betrachtete Würfelfläche ($z' = 1$) gibt Anlass zu Figur 6 und damit zur kleinsten möglichen kartesischen affinen Geometrie.

‚Die kleinste Geometrie der Welt'
Dabei denkt man üblicherweise an die Fano-Ebene (Wikipedia, 2022). Ein gleichseitiges Dreieck mit eingetragenen Höhen samt Inkreis. Es handelt sich hierbei wie auch bei der Projektgeometrie um eine synthetische endliche projektive Geometrie mit 7 Punkten und 7 Geraden. Diese endlichen Geometrien werden mit dem Kürzel $PG(2,2)$ benannt. Hier bedeutet die erste ‚2' die Dimension, die zweite ‚2' die Ordnung n. Aus der Ordnung kann man die Anzahl $n+1$ der Punkte (Punktreihe) auf einer Geraden errechnen, also 3, sowie die Anzahl $n+1$ der Geraden durch einen Punkt (Geradenbüschel), ebenfalls 3. Weiterhin die Anzahl n^2+n+1 der jeweiligen Punkte und Geraden in der gesamten Geometrie, hier also 7 (Hall, 1973). Beim Aufstellen der Inzidenzmatrix (siehe Task 1 im Projekt) könnte man feststellen, dass sich nicht bei jeder beliebigen Beschriftung der Punkte $(A, B, \ldots, G)$ und Geraden $(a, b, \ldots, g)$ eine symmetrische Inzidenzmatrix ergibt. Dies ist zwar grundsätzlich für die Arbeit mit endlichen projektiven Geometrien unnötig, didaktisch aber vorteilhaft. Es wird dann nämlich die sogenannte Dualität besser sichtbar: Wenn z. B. die Punkte A und D die Gerade b bestimmen, dann schneiden sich die zu A und D dualen Geraden a und d im zu der Geraden b dualen Punkt B. Beim Schnitt zweier Geraden gilt Entsprechendes.

Da alle Geometrien $PG(2,2)$ zueinander isomorph sind, kann man die Symmetrie der Matrix allerdings jederzeit mit etwas Geduld durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen erreichen und anschließend die Punkte und/oder Geraden umbenennen.

Einführung von Koordinaten
In der Fano-Ebene lassen sich Koordinaten einführen, die allerdings an Dreieckskoordinaten erinnern. Doch in der Schule sind zunächst einmal kartesische Koordinaten eingängiger, mit denen man gefühlt in herkömmlicher Weise analytische Geometrie betreiben kann. Hier zeigt sich nun der Vorteil des hexagonalen Ansatzes, wie man ihn nennen könnte und wie er im folgenden Projekt vorgestellt wird. Er beruht darauf, dass im Hintergrund eines Sechsecks ein Würfel gedacht werden kann, der mit dreidimensionalen kartesischen Koordinaten x', y', z' ausgestattet ist. Aus diesen können dann, wenn man sie als homogene Koordinaten betrachtet, zweidimensionale Koordinaten x, y abgeleitet werden, die dann in der Ebene $z' = 1$ als affine Koordinaten gelten können (siehe Figur 6).

$$x = \frac{x'}{z'}, \quad y = \frac{y'}{z'}, \quad z' \neq 0$$

Die Koordinaten werden dem Restklassenkörper $K = GF(2) = \{0, 1\}$ entnommen. Bei dieser Betrachtung identifiziert man analog wie im Falle $K = \mathbb{R}$ die Ursprungsgeraden aus dem K^3 mit den Punkten der projektiven Ebene. Die Schnittpunkte der Ursprungsgeraden mit der Ebene $z' = 1$ stellen die affinen Punkte A, E, P und F dar, wohingegen die drei Ursprungsgeraden, die parallel zur Ebene $z' = 1$ verlaufen, mit $z' = 0$ den Inbegriff der unendlich fernen Punkte B, C und D bilden. Sie geben gewissermaßen bloße Richtungen an.

Die Ebene $z' = 0$, die ja parallel zur Ebene $z' = 1$ verläuft, wird als unendlich ferne Gerade d der projektiven Ebene interpretiert. Die anderen Ursprungsebenen im K^3 schneiden die affine Ebene $z' = 1$ in den sechs affinen Geraden, a, f, p, e, b und c. Die Dreiecke von Figur 3 stellen einerseits als Projektionsbilder mit Blick von oben auf den Rumpfwürfel aus Fig. 1 die Ursprungsebenen aus dem Vektorraum K^3 dar, andererseits als Punktreihen von jeweils drei Punkten die Geraden in der endlichen projektiven Ebene. In der Figur 4, die oben schon angesprochen wurde, sind die durchgezogenen Linien sozusagen die affinen Anteile der K^3-Ebenen und die unterbrochenen die projektiven Anteile auf dem Weg zum Unendlichen. (;-). Wiederum erhöht sich die dreidimensionale Anschaulichkeit, wenn man das Blatt mit Figur 4 auf den Kopf stellt.

Analytische Geometrie in der projektiven Ebene
Die Ebenen aus dem K³ haben Normalenvektoren, deren Koordinaten in der projektiven Ebene als homogene Geradenkoordinaten $[n_1, n_2, n_3]$ betrachtet werden können. Wenn der Punkt $P(x', y', z')$ auf der Geraden $g[n_1, n_2, n_3]$ liegt, gilt also die Inzidenzrelation:

$$x'n_1 + y'n_2 + z'n_3 = 0 \quad (\text{weil } P \perp g) \qquad \text{(I)}$$

P und g werden hier als Vektoren aufgefasst. Das Skalarprodukt in (I) zeigt also (mod2 berechnet) die zu den Eintragungen in der Inzidenztabelle komplementären Werte.

Man kann sich nun auf einige spannende Unternehmungen einlassen: Schnitte von Geraden*, Berechnung der Verbindungsgerade**, lineare Abbildungen mit Matrizen, Gruppentafeln für diese Abbildungen, Permutationen als Automorphismen u. a. m.

$$\text{z. B.} \quad p \times a = [101] \times [100] = (x'y'z') = (010) \quad (*)$$
$$= B$$

Hinweis: Das Kreuzprodukt führt zum Ziel, weil $B \perp p, a$.

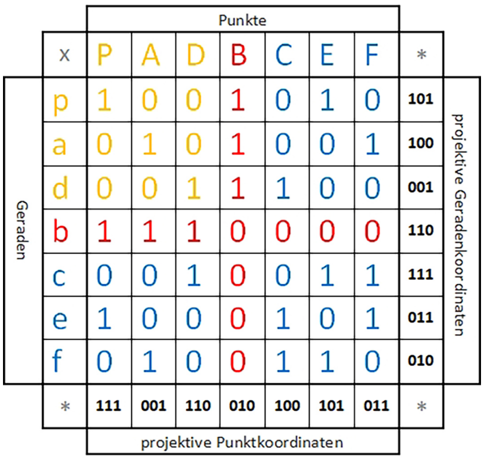
$$\text{z. B. } PA = (111) \times (001) = [n_1, n_2, n_3] = [110] \quad (**)$$
$$= b$$

Hinweis: Das Kreuzprodukt führt zum Ziel, weil $P, A \perp b$.

Die erweiterte Inzidenztabelle
Als Hilfe für diese Untersuchungen sei in Tabelle 1 die im Projekt in Task 1 gefragte Inzidenzmatrix angegeben. Als Erweiterung sind unten die projektiven Koordinatentripel $(x'y'z')$ der Punkte angegeben und rechts die projektiven Tripel $[n_1, n_2, n_3]$ der Geraden.

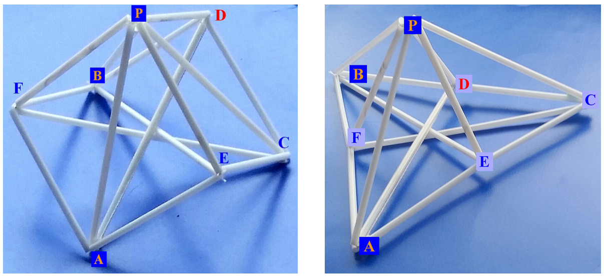
Die in Orange geschriebenen Elemente P, A, D, p, a und d inzidieren mit ihren jeweiligen dualen Partnern (z. B. P mit p), können also als ‚dualinzident' bezeichnet werden. Auf b (rot) liegen alle dualinzidenten Punkte, durch B (rot) gehen alle dualinzidenten Geraden.

Tabelle 1



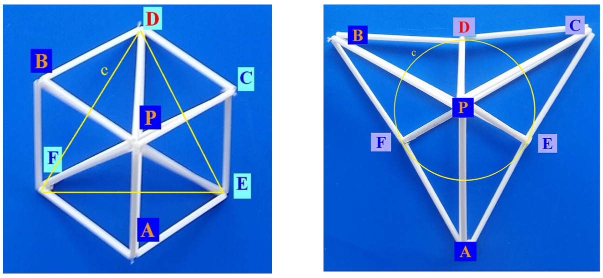
		Punkte								
	x	P	A	D	B	C	E	F	*	
Geraden	p	1	0	0	1	0	1	0	101	projektive Geradenkoordinaten
	a	0	1	0	1	0	0	1	100	
	d	0	0	1	1	1	0	0	001	
	b	1	1	1	0	0	0	0	110	
	c	0	0	1	0	0	1	1	111	
	e	1	0	0	0	1	0	1	011	
	f	0	1	0	0	1	1	0	010	
	*	111	001	110	010	100	101	011	*	
		projektive Punktkoordinaten								

Anmerkung zur folgenden Visualisierung. Durch eine stereometrische Metamorphose (Verwandlung des Rumpfwürfels von Figur 1 in eine Pyramide) wird eine unmittelbar anschauliche Isomorphie zwischen dem im Projekt betrachteten hexagonalen Ansatz und der Fano-Geometrie möglich:



Figur 1. Würfel (Kantenlänge 1) ohne die untere Ecke und Würfelecke (Kantenlänge $\sqrt{2}$) als Pyramide

Anmerkung. Beide Körper bestehen aus: 9 Stäben mit Länge 1 und 3 Stäben der Länge $\sqrt{2}$ und 3 Stäben der Länge $\sqrt{3}$.



Figur 2. Blick auf die Körper von oben: Links die hexagonale und rechts die Fano-Geometrie

Anmerkung. Diese überraschende Körperverwandlung konnte ich bei der letzten Online-Herbsttagung 2021 des GMD-Arbeitskreises Problemlösen vorstellen (Sturm et al., 2022).

Zusammenfassung

Ausgehend von der isometrischen Projektion eines Würfels wird eine Alternative zur projektiven Fano-Ebene samt abgeleiteter Affingeometrie vorgestellt. Punkte und Geraden der projektiven Ebene werden nach dem üblichen Verfahren mit Nullpunktsgeraden und Nullpunktsebenen des dreidimensionalen Raumes identifiziert. Das Koordinatensystem in der affinen Ebene ergibt sich in natürlicher Weise kartesisch. Das Projekt ermöglicht eine Begegnung von synthetischer und analytischer Geometrie auf kleinstem Raum und geht dabei klassisch vor: Vom synthetischen Einstieg bis zu der Einführung von Koordinaten und der experimentellen Auslotung der analytischen Möglichkeiten. Es ermöglicht einen Blick in den Reichtum, der in den Anfängen steckt und regt dazu an, ihn selbst zu erforschen.

The didactic project

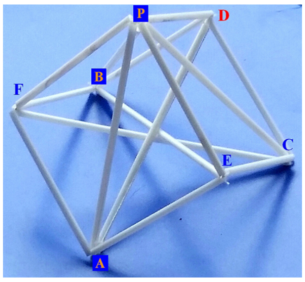


Figure 1. The beginning is a 3-dimensional body

You see an incomplete edge cube model with three spatially diagonals and three surface diagonals. Remark, that one corner of the cube is missing. There are therefore only seven corners left, named A, B, C, D, E, F and P. This whole body rests with three legs A, B, C on its base. Let's try to create a nice little 'shoe box geometry' from this pool of points.

Some information. In a projective geometry any two straight lines intersect at exactly one point and through any two points there goes exactly one straight line. So there exist no parallels in the sense of straight lines that do not intersect.

If you look from above on this body, you will see the following:

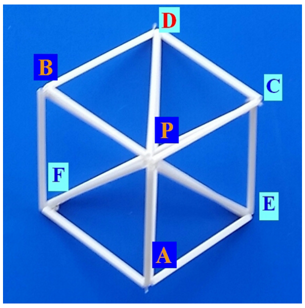


Figure 2. The 2-dimensional model of a finite projective plane with 7 points

Remark. In contrast to the famous Fano model for a 2-dimensional projective 7-point geometry, in which a circle is used as seventh straight line, we want to build a model that ties in better with the familiar cartesian coordinate geometry and therefore seems more suitable for applications. In this model the straight lines are represented by triangles. In order to simplify the way of speaking, in the following we will simply call straight lines 'lines'. It should be noted that all projective 7-point geometries are isomorphic to each other (Wikipedia, 2022).

The next pictures are supposed to define our seven lines. We do this by showing off which points lie on the respective straight-line a, b, c, d, e, f and p. Note that the colors don't matter at the beginning. The lines b, p and e are also to be regarded as triangles!

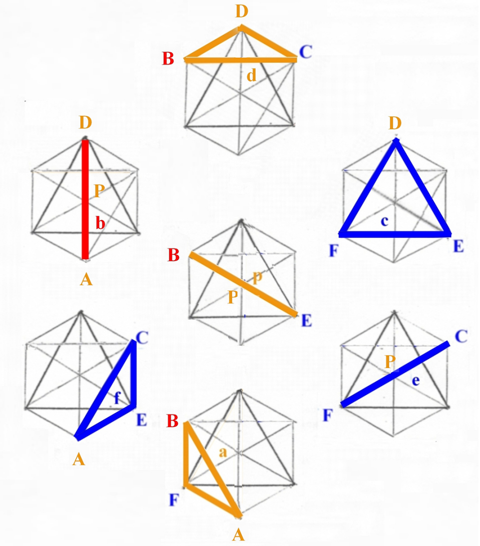


Figure 3. Lines of the finite projective plane

For example. The points A, P and D (and only those) lie on the line b and the points F, P and C (and only those) lie on the line e. The lines b and e intersect therefore only at the point P. To see this, you have to mentally superimpose the images that belong to the lines b and e and search the common point.

Furthermore, we see for example that through the points A and C only the line f goes. You can recognize this by looking out of all seven images for the one where both points A and C lie on the selected line. This applies only to the picture on the lower left.

1. Now the first task: Create a 7×7 table with the points in the header in the following order: P, A, D, B, C, E, F. In the header column, set all seven lines in the appropriate order: p, a, d, b, c, e, f. In each table field write a 1 or a 0, depending on whether the corresponding point lies on the corresponding straight line or not. This table is called 'incidence matrix'.
2. What do you notice about the finished table?
3. How many ones are in each row and in each column of the table?
4. The large picture from above (Fig. 3) with the seven little images with colored lines has one thing in common with every of these images: All are Hexagons!

Now compare and show that the same configuration that makes up the three points on a particular colored line, for example D, F and E on line c in blue within the small hexagon at the top right of the large picture, can also be found as the configuration of lines d, f and e in the large picture on a larger scale. In the sense that the configuration of the lines d, e, f consists of three-line images that have a common point (here C in blue) with the same color as the line (here c in blue) whose point configuration we started with. This correspondence between points and lines is called duality and has its cause in the special symmetry of the incidence matrix shown in the second task.

5. What meaning can you see for the colors with which the names of the points and the lines are printed? Can you draw a large Hexagon picture like Fig. 2 where all colored points are represented and connected with all lines in the correct colors? Hint: All connections which run over P have two parallel lines. Think of the 3-dimensional body in Fig. 1, from which Fig. 2 was created. In every point must end three corners of triangles, that means six normal lines.

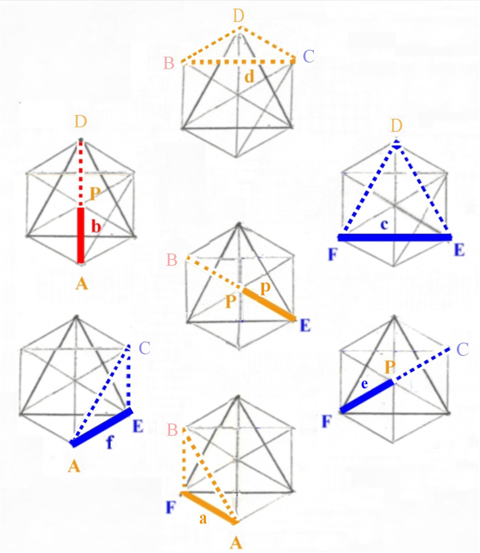


Figure 4. The finite affine plane: The elements of infinity are printed in a weakened manner.

Further information. In projective geometry, all points and lines are equal to each other with regard to the incidence. The normal Euclidean geometry is affine: Here are parallel lines that do not intersect. To get an affine geometry from a projective geometry you had to choose any straight line as a 'line of infinity' with 'points of infinity' on it, each responsible for a family of parallel lines that go in the same direction. Let without loss of generality d be the line and B, C, D on it the points of infinity. Then we get the overview of the finite affine geometry determined thereby (Fig. 4). That is an affine plane with four points A, E, P, F and six lines a, f, p, e, b and c where respectively (f, e), (a, p) and (b, c) are parallel. You can see this confirmed by the fact that for example f and e go through the same point of infinity C.

The next topic is whether we can introduce coordinates into such a small 'shoebox-geometry'. The Answer is *yes*: Both in the projective and in the affine case:

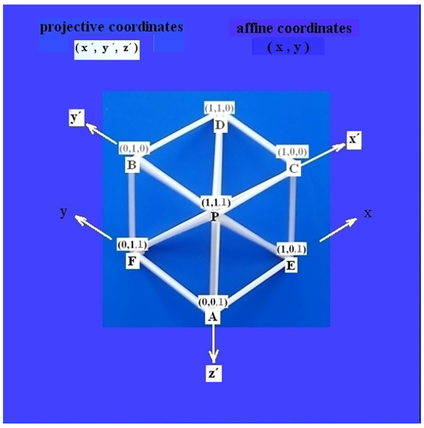


Figure 5. Projective and affine coordinates

The cube surface square $AEPF$ inspires us to the following representation of the affine plane:

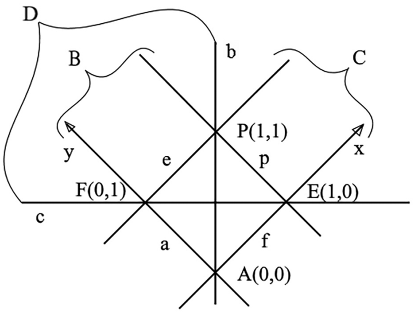


Figure 6. Four points and six lines of the smallest cartesian affine geometry

6. The Coordinates come from the field of the residual classes modulo 2. You can try to use now the methods of analytical geometry. First, we consider equations for straight lines. Let's have the analytically parallels $b : y = x$ and $c : y = x + 1$ as examples. The line c appears here as line b shifted up by 1. On the other hand, according to Fig. 6 c may have the equation $y = -x + 1$, because c is perpendicular to b.

Can you prove that $1 = -1$ in this little field of numbers called $GF(2)$? Hint: Create the addition and multiplication tables with the elements 0 and 1 computing in the binary system, just like a computer calculates.

Welcome to the 'smallest non-trivial geometry of the world' with unlimited possibilities! ;-). What do you think is it possible to define vectors and matrices?

7. As the last task try therefore to specify the mirroring on line b as point vector mapping. But this end is not really the end …

Literatur

Hall, M. Jr. (1973). *The Theory of Groups.* The Macmillan Company.

Sturm, N., Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Arbeitskreis: Problemlösen. *Mitteilungen der GDM*, 112, 72–73.

Wikipedia. *Fano-Ebene*. de.m.wikipedia.org/wiki/Fano-Ebene (20. 5. 2022)

Hans Wolfgang Valet, Blaustein
E-Mail: h.w.valet@gmx.de

Zur Rolle historischer Aspekte in der Didaktik, erläutert am Beispiel der Paradoxie von Achilles und der Schildkröte

Horst Hischer

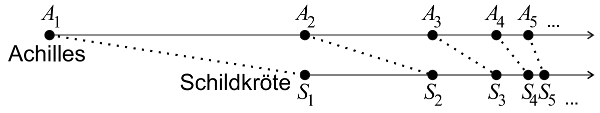
Buchtitel wie *3000 Jahre Analysis* (Sonar, 2011), *4000 Jahre Algebra* (Alten et al., 2014), *5000 Jahre Geometrie* (Scriba et al., 2005) und *6000 Jahre Mathematik* (Wußing, 2008) suggerieren zeitlich weit zurückreichende Anfänge der Mathematik. So appellierte Otto Toeplitz während der DMV-Tagung 1927 in einem Vortrag mit dem Titel „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen" dafür, der Bedeutung der Mathematikgeschichte für das Vermitteln und Lernen von Mathematik gerecht zu werden, indem man an die „Wurzeln der Begriffe" zurückgehen solle, damit „der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen" und sie „wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen" (Toeplitz, 1927, S. 92). Diese Haltung ist auch für den Mathematik-Unterricht bedenkenswert, wie es schon weiland Günter Steinberg in vielen Vorträgen angemahnt hatte, konkretisiert durch entsprechend aufbereitete Beispiele (z. B. durch „historische Verankerung", vgl. Hischer 2021, S. 26 ff.).

Jedoch ist ein didaktischer Einbezug historischer Aspekte keineswegs per se trivial, wie es hier beispielhaft für die sog. „Paradoxien des Zenon von Elea" aufgezeigt werden soll, und zwar ausführlich für den „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte", ferner angedeutet auch für den „Läufer im Stadion". Denn das Besondere bei der hier dargestellten Behandlung des vorliegenden Themas besteht darin, dass nicht nur der rein mathematische Gehalt eine Rolle spielt, sondern vor allem auch der geistige Hintergrund, der zur damaligen Entstehung der überlieferten Probleme führte.

Ich danke Herrn Ulrich Felgner (Universität Tübingen) für eine anregende, vertiefende Diskussion während der Entstehung dieses Essays, ferner Herrn Wilfried Herget (Universität Halle-Wittenberg) für wertvolle Hinweise.

„Achilles und die Schildkröte" – zur Situation

Vor allem der „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte" ist als eine der Paradoxien des Zenon bekannt – einem recht merkwürdigen Beispiel aus der griechischen Antike. Die Situation sei nachfolgend insofern entzerrt dargestellt, als dass hier nun beide auf parallelen Bahnen laufen, obwohl Achilles eigentlich hinter ihr läuft:



Achilles, der berühmte Held aus der Ilias von Homer, und eine Schildkröte starten also auf parallelen Rennbahnen *gleichzeitig* zu einem Wettlauf. Da Achilles viel schneller ist, erhält die Schildkröte *bei zeitgleichem Start* einen örtlichen Vorsprung. Die punktierten Linien zeigen für einige Zeitpunkte die Blickrichtung von Achilles auf die Schildkröte.

Sobald Achilles hier die Startposition S_1 der Schildkröte erreicht hat, bei ihm also A_2, ist die Schildkröte schon etwas weiter, nämlich in der Position S_2. Und wenn Achilles die neue Position der Schildkröte erreicht hat, zunächst also A_3, so ist die Schildkröte wiederum ein Stück weiter als er, nämlich in Position S_3. Setzt man diesen Prozess gedanklich (!) iterierend fort, so kann Achilles die Schildkröte anscheinend „niemals" erreichen, denn man kann argumentieren:

> Wann immer Achilles *eine Position der Schildkröte erreicht* hat, ist diese schon etwas weiter.

Dieser *letzten Feststellung* ist *in dieser Form* (!) offenbar argumentativ *nicht zu widersprechen*! Und gleichwohl ist andererseits klar, dass *Achilles die Schildkröte selbstverständlich irgendwann überholen* kann!

Aber warum wird diese *erkennbar irreale Situation* seit der Antike noch heute zitiert? Und wenn sie jemals eine Botschaft transportieren sollte, dann welche? – Die „Erfindung" dieses fiktiven Wettlaufs, den u. a. Aristoteles der Nachwelt überliefert hat (s. o.), wird dem ein Jahrhundert zuvor gelebten Zenon von Elea zugeschrieben; doch wer war dieser Zenon, und mit welcher Absicht hatte er dieses unsinnig und realitätsfremd wirkende Beispiel konstruiert?

Zenon von Elea

Die vorsokratische Philosophenschule der „Eleaten" war nach dem Küstenort Elea in Unteritalien benannt, etwa 80 km südlich des heutigen Salerno gelegen. Ein bedeutender Vertreter dieser Eleaten war Parmenides, geboren etwa 515 v. u. Z., und der etwa 490 v. u. Z. in Elea geborene Zenon war sein berühmter Schüler (vgl. z. B. Kirk et al. 2001, S. 264). Bezüglich der philosophischen Grundhaltung von Parmenides schreibt Felgner (2020, S. 80):

> *Parmenidês* [. . .] meinte, daß das wahrhaft Seiende nicht durch Sinne, sondern nur durch das Denken gefunden werden könne. Nur das Denken kann das, was wahrhaft ist, erkennen; die Sinne vermitteln nur scheinbare Einsicht. Das Entstehen und Vergehen der Dinge ist seiner Meinung nach nur Blendwerk der Sinne. Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Die Tragweite dieser angeblichen Haltung von Parmenides in Bezug auf „Bewegungen" ist kaum ad hoc zu erfassen. Wesentlich für die Betrachtungen im hier vorliegenden Essay ist dann, was Felgner anschließend feststellt (a. a. O.):

> Sein Schüler *Zênôn* [. . .] hat das zu beweisen versucht. [. . .] *Zenon* will zeigen, daß man sich in Aporien verstrickt, wenn man annimmt, daß Bewegung dem reinen Denken zugänglich wäre.

Eine *Aporie* steht für eine „Ausweglosigkeit im Denken". Hier kennen wir einerseits die *Paradoxie* (gleichwertig: das Paradoxon) und andererseits die *Antinomie*. Während eine Antinomie für einen *logischen Widerspruch* zweier Aussagen steht, wird eine Paradoxie (von griechisch „para" für „gegen, neben" und griech. „doxa" für „Meinung") in der Mathematik so verstanden, dass bei zwei zu vergleichenden Behauptungen nur ein *scheinbarer Widerspruch* vorliegt, gegen den der Verstand sich zwar auflehnt, der jedoch gleichwohl auflösbar ist. (Für modizierte bzw. umfassendere Auffassungen bezüglich „Antinomie" und „Paradoxie" siehe z. B. Vollmer 1993, S. 31 ff.).

Wir kommen nun zur Analyse dieses „Wettlaufs", und dazu sei zunächst die eingangs skizzierte merkwürdige Situation etwas genauer betrachtet. *Aristoteles* (384–322 v. u. Z.) beschreibt diese 347, also ein Jahrhundert nach Zenon, in seiner „Physik-Vorlesung" verallgemeinert wie folgt *für zwei beliebige Läufer* (gemäß Felgner 2020, S. 81, in Übersetzung des griechischen Originaltexts aus Diels 1951, S. 253, Nr. 26).

> Der langsamste Läufer wird niemals vom schnellsten eingeholt werden. Zuerst einmal muß der Verfolger nämlich den Punkt erreichen, von dem der Verfolgte gestartet ist, so daß der langsamere immer etwas Vorsprung hat.

Einerseits scheint diese Betrachtung argumentativ korrekt zu sein, sofern man das „niemals" und das „immer" im Sinne obiger Kommentierung der Abbildung interpretiert, und *andererseits* ist jenseits dieser Interpretation *für uns* sofort klar, dass der schnellere Läufer (speziell: Achilles) auch hier den langsameren Läufer (speziell: die Schildkröte) gewiss *irgendwann* tatsächlich überholen wird, so dass also *in dieser Sichtweise* das *„immer" nicht stimmen* kann: Beide Überlegungen sind somit *ad hoc nicht vereinbar*, sie sind widersprüchlich, und das führt zu einer *Aporie* – also zu einer „Ausweglosigkeit im Denken".

Hier wird man einwenden, dass in dieser fiktiven Situation aufgrund unserer „Lebenserfahrung" wohl nur ein *scheinbarer* Widerspruch vorliegen muss, der also auflösbar ist, sodass damit eine Paradoxie vorliegen würde. Jedoch könnte diese somit vorliegende innere Widersprüchlichkeit wohl nur dann aufgehoben werden, wenn jeder der *beiden* kontrastierenden Befunde – nämlich: „Achilles überholt die Schildkröte" vs. „Achilles kann die Schildkröte nicht überholen" – für sich einen irgendwie gearteten *argumentativen Bestand* hat. Aber wie kann ein solcher aussehen?

Dazu werden wir der Frage nachspüren, *warum und mit welchem Ziel* Zenon diese fiktive Situation damals, vor rund 2500 Jahren, vermutlich erdacht und vorgestellt hat! Da sich später zeigen wird, dass sich der hier also vorliegende innere Widerspruch auflösen lässt, werden wir bereits jetzt wie üblich davon sprechen, dass es sich bei dieser Aporie um eine *Paradoxie* handelt.

Die Zenonsche Paradoxie in der mathematischen Literatur

Woher wissen *wir* etwas über diese Zenon zugeschriebene Paradoxie, über ihre Entstehung und vor allem über ihren (ursprünglichen!) Sinn? Damit stehen wir vor der Frage: *Was wollte Zenon mit dieser Paradoxie (vermutlich, „eigentlich") zum Ausdruck bringen?*

Zunächst seien hier exemplarisch drei mathematische Publikationen herangezogen, die übereinstimmend Zenon eine philosophische Grundhaltung seines Lehrmeisters Parmenides unterstellen, die als „Leugnung der Möglichkeit von Bewegung" gekennzeichnet werden kann:

> *van der Waerden* (1940, S. 141):
> Was war der Zweck der berühmten Antinomiendes Zenon? Nach der landläufigen Meinung [. . .] wollte Zenon die *Möglichkeit der Bewegung widerlegen*.

(Dabei sprechen wir hier stattdessen im zuvor erörterten Verständnis von „Paradoxien"). Diese unverständlich erscheinende Auffassung einer

„Nicht*möglichkeit* von Bewegung" irritiert im Vergleich mit der zitierten Darstellung von Felgner, gemäß der Zenon diejenige Sicht seines Lehrers Parmenides stützen wollte, dass *„Bewegung nicht denkbar"* sei: denn diese *beiden Aspekte*, nämlich einerseits die „Nicht*möglichkeit* von Bewegung" und andererseits die „Nicht*denkbarkeit* von Bewegung" können ja wohl nicht dasselbe bedeuten! Oder etwa doch?

An späterer Stelle (auf S. 143 f.) vertieft van der Waerden diese o. g. „landläufige" Meinung (kursiv nicht im Original):

> Zenon kann *nicht von der Realität der Bewegung als feststehender Tatsache* ausgegangen sein, da er als Eleat diese Realität unmöglich anerkennen konnte! Zenon ist doch (nach dem Zeugnis Platons im Dialog Parmenides) ein treuer Schüler des Parmenides, und Parmenides behauptet in seinem authentischen Lehrgedicht ausdrücklich, daß *das Seiende sich nicht bewegt*, oder an anderer Stelle noch deutlicher, daß jede Veränderung des Ortes ein leerer Name, eine bloße Einbildung der Sterblichen sei.

Hier stoßen wir auf ein für Parmenides wesentliches philosophisches Konzept: nämlich das „Seiende" (damit zusammenhängend auch das SEIN), also schlicht formuliert *„dasjenige, was ist"* (womit aber gewiss noch keine Klarheit geschaffen wurde, was jedoch hier im Rahmen dieses Essays auch gar nicht geleistet werden kann).

In zwei aktuellen Werken zur Geschichte der Mathematik wird ebenfalls die *„Leugnung der realen Existenz von Bewegung"* als eine Auffassung von Parmenides betont, die dann Zenon mit seinen Paradoxien bestätigen wollte (die kursiven Hervorhebungen in den Zitaten finden sich nicht in den Originalen):

> *Wußing* 2008, S. 163:
> Ganz extrem und schon in der Antike umstritten ist die um 540 gegründete Schule der Eleaten, benannt nach der Stadt Elea in Unteritalien. Hervorragende Vertreter waren Parmenides [. . .] und Zenon von Elea [. . .]. Sie *leugneten die reale Existenz von Bewegung*, Veränderung, Raum und Vielfalt. Berühmt wurden die scharfsinnig vorgebrachten Paradoxien des Zenon, z. B. der „Beweis", dass beim Wettlauf des schnellen Achilles mit der langsamen Schildkröte, die einen Vorsprung hat, Achilles niemals die Schildkröte einholen kann: Achilles kann immer nur dorthin gelangen, wo die Schildkröte schon war.
>
> *Sonar* 2011, S. 48:
> „Das Seiende" wird zu einem zentralen Punkt der Parmenides'schen Philosophie und das Sein (oder der Logos, das Eine oder Gott [. . .]) ist etwas Einziges, Ganzes, Unbewegliches. Es gibt keine Leere und kein „Werden"; „Nichtseiendes" ist undenkbar. Da *das Seiende unbeweglich* ist, *zweifelt Parmenides offenbar an der Möglichkeit von Bewegung* überhaupt – wir sehen nur scheinbare Bewegungen von Menschen, das *eigentliche Sein ist hingegen statisch* – und das wird trefflich bestätigt durch seinen berühmtesten Schüler, Zenon von Elea [. . .].

Diese von *van der Waerden* so genannte „landläufige Meinung" bezüglich der ursprünglichen Bedeutung dieser und weiterer Paradoxien des Zenon (wie z. B. die Paradoxie vom „fliegenden Pfeil im Stadion") wird also mit der merkwürdig anmutenden, angeblich damaligen philosophischen Auffassung der „Nichtexistenz von Bewegung" begründet, was bedeuten mag, dass es Bewegung realiter gar nicht gibt (s. o.). Und so kommt es zu Deutungen und Sinnbelegungen dieser Paradoxien, wie sie bisher in der mathematischen Literatur zu finden sind.

Zenon und „Bewegung" in philosophischer Sicht

Hier ist nun auf eine Kennzeichnung des philosophischen Weltbilds von Parmenides zu verweisen, wie sie Felgner im ersten oben aufgeführten Zitat darstellt, deren wesentlicher Aspekt hier wiederholt sei:

> Nur das Denken kann das, was wahrhaft ist, erkennen; die Sinne vermitteln nur scheinbare Einsicht. Das Entstehen und Vergehen der Dinge ist seiner Meinung nach nur Blendwerk der Sinne. Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Allerdings ist es wohl ein wesentlicher Unterschied, ob man die „Existenz von Bewegung leugnet", wie es etwa die Formulierungen bei van der Waerden, Wußing und Sonar sinngemäß suggerieren, oder ob man der Auffassung ist, dass das Phänomen „Bewegung" *nur sinnlich feststellbar* sei und dass also damit „Bewegung" *nicht gedacht* werden kann.

Grundlegende Quelle für eine entsprechende Analyse ist hier das berühmte sog. „Lehrgedicht" von Parmenides, das von ihm in Hexametern verfasst wurde, das aber großenteils nur noch fragmentarisch bekannt ist und erst viel später insbesondere durch Simplikios (480–560) kommentierend überliefert wurde. Dieses Lehrgedicht wird in Kapitel 28 der „Fragmente der Vorsokratiker" von Diels (1951; erste Auflage 1903) behandelt, dann sehr ausführlich von Riezler (1970; erste Auflage 1933) interpretierend vorgestellt, und schließlich widmen Kirk et al. diesem Gedicht ein eigenes Kapitel in ihrem Werk über die „vorsokratischen Philosophen" (2001, S. 265 ff.).

Eine grundlegende Schwierigkeit besteht bei alten historischen Texten darin, sie „getreulich“ zu deuten und in unsere heutige Sprache zu übersetzen, was zu Verzerrungen und Fehldeutungen führen kann. Zwar ist eine solche getreuliche Übersetzung für manche damit befasste Forscher zum Lebenswerk geworden, jedoch ist es in diesem Essay weder möglich noch nötig, auf die Gesamtessenz dieses Lehrgedichts einzugehen. Und so soll im vorliegenden, Zenon betreffenden Kontext des „Wettlaufs“ versucht werden, Parmenides' Auffassung bezüglich „Bewegung“ zu skizzieren.

Grundlage hierfür ist das Fragment Nr. IV aus dem o. g. Lehrgedicht (hier als Faksimile aus Riezler 1970, S. 26):

. . . τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστίν τε καὶ εἶναι.

Transkribiert lautet das: „*. . . to gar auto noein estin te kai einai.*“ Dafür seien folgende Übersetzungen in chronologischer Entstehung zitiert, die wir auf die Deutung der Aporie des Zenon übertragen werden:

(1) *Denn dasselbe ist Denken und Sein.*
(2) *Denn Eines und Dasselbe ist „Erkennen“ und Sein.*
(3) *Denn daß man es denkt, ist dasselbe, wie daß es ist.*
(4) *Denn dasselbe ist, in Gedanken zu erfassen, was es ist, und zu existieren.*

Legende zu diesen Zitaten: (1) findet sich bei Diels 1951, S. 231 als Nr. 3 (erste Auflage 1903) und Kirk et al. 2001, S. 271; (2) formulierte Riezler 1970, S. 27 (erste Auflage 1933); (3) stammt von Kirk et al. 2001, S. 271 (erste Auflage Englisch 1957). (4) war eine Mitteilung von Ulrich Felgner am 21. 5. 2022 an mich.

Hier geht es einerseits um das SEIN (und damit um die „Seinsfrage“), wozu in den letzten beiden Zitaten das „ist“ gehört, und andererseits wird diesem SEIN das „Denken“ gegenübergestellt, das auch in den „Gedanken“ und dem „Erkennen“ zum Ausdruck kommt. Das lässt sich so zusammenfassen, dass „man“ dieses SEIN und damit auch das „Seiende“ (was nicht dasselbe ist) nur durch „Denken“ und damit „in Gedanken erfassen“ kann. Das SEIN – als hier wesentlicher philosophischer Terminus (siehe auch obige Zitate zu van der Waerden und Sonar) – lässt sich also in dieser Auffassung nur „durch Denken erkennen“ (hier sind wir möglicherweise unserem Sprachgebrauch folgend geneigt, „erfassen“ oder „erfühlen“ zu sagen, was aber gerade nicht gemeint ist). Vice versa bedeutet das nun, dass dasjenige, was wir mit unseren „Sinnen“ wahrnehmen (man zerlege dieses letzte Wort in „für etwas Wahres nehmen“) – also mit Sehen, Hören, Fühlen, Schmecken, Riechen – *nicht* zum SEIN gehört.

Felgner stellt das alles knapp und treffend wie folgt dar (siehe obiges Zitat):

> Insbesondere sind Bewegungen nur sinnlich feststellbar und für das reine Denken inexistent.

Das mag für uns heutzutage eine ungeheuerliche, zumindest aber kuriose Weltsicht sein, führt aber zu einer Erschließung dessen, was Zenon mit dieser Wettlauf-Paradoxie wohl zum Ausdruck bringen wollte:

Hier geht es um die fiktive *Bewegung* von zwei Subjekten, „personalisiert“ durch Achilles und die Schildkröte. Die Zenon zugeschriebene Überlegung, die mit der eingangs dargestellten Abbildung veranschaulicht wurde, führt zu dem absurden Ergebnis, *dass Achilles die Schildkröte nicht überholen kann*. Doch nun kommt eine überraschende Deutung:

> Zenon wird glücklich gewesen sein, dieses Resultat erhalten zu haben, konnte er doch damit die These seines Meisters untermauern – ja gar „beweisen“? – dass „Bewegung für das reine Denken inexistent ist“, dass also „Bewegung *nicht gedacht* werden kann“: Und so können wir damit nachvollziehen, dass für Zenon anscheinend „Bewegung *nur sinnlich feststellbar*“ ist.

Wenn wir jetzt die o. g. Formulierungen von Fragment Nr. IV aus dem Lehrgedicht hinzunehmen, wird klar, dass in diesem philosophischen Weltbild des Parmenides „Bewegung“ nicht zum SEIN gehört. Und das macht dann plausibel, weshalb van der Waerden, Wußing und Sonar schreiben, dass Parmenides die „Existenz von Bewegung geleugnet“ hätte: Denn wenn etwas nicht zum SEIN gehört, dann *existiert es in diesem Weltbild nicht*!

Gewiss wird auch Zenon gewusst haben, dass es „Bewegung gibt“, aber für ihn war Bewegung mit dem Denken nicht beschreibbar, weil sich eine Paradoxie ergab – denn selbstverständlich wird er erkannt haben, dass Achilles die Schildkröte irgendwann überholen muss! Für ihn war also einerseits dieser *Widerspruch nicht auflösbar*, und andererseits bestätigte er damit zugleich das Weltbild seines Meisters: *Denn dasselbe ist Denken und Sein* – für ihn blieb es eine Paradoxie!

Erst jetzt wird deutlich, dass die Parmenides und Zenon unterstellte philosophische Auffassung einer *Leugnung der „Existenz von Bewegung“*, wie es van der Waerden und andere schreiben, *zwar nicht falsch, jedoch missverstehbar* ist, wenn der Kontext nicht näher erläutert wird. Klarheit erhält man jedoch mit der zitierten Formulierung von Felgner, gemäß der (für Parmenides und Zenon!) Bewegungen *nur sinnlich feststellbar* und *für das reine Denken inexistent* sind. Das können wir wie folgt betonen:

> Es lag eigentlich nur am *Weltbild der Eleaten*, dass es zu der für uns heute sowohl merkwürdigen als auch unannehmbaren und in der Literatur anzutreffenden verkürzenden Kennzeichnung

> einer „*Nichtexistenz* von Bewegung“ kam, wohingegen es Parmenides doch um die „*Nichtdenkbarkeit* von Bewegung“ ging.

Zusammenfassende Analyse

Die Paradoxie des Wettlaufs von Achilles und der Schildkröte hat ihren *Ursprung in der Philosophie* von Parmenides und *nicht in der Mathematik*! Denn Parmenides und Zenon waren aus ihrer Haltung heraus Philosophen, jedoch keine Mathematiker. So ist das „Wettlauf-Paradoxon“ *im Ursprung* nur *ein philosophisches Problem*, beruhend auf der Grundauffassung von Parmenides, dass *Bewegung nicht denkbar* sei – obwohl jedoch *Bewegung mit den Sinnen wahrnehmbar* ist.

In *diesem Sinn* könnte man nun (wie z. B. van der Waerden und andere) zwar sagen, dass es für Parmenides und Zenon *keine Bewegung gibt*, weil „Bewegung“ gemäß Parmenides nicht zum SEIN gehört: denn das SEIN hat in dessen Philosophie keinen Anfang und kein Ende, es gibt also für ihn im SEIN kein Werden und kein Vergehen (im Gegensatz zur sinnlich wahrnehmbarem „Bewegung“). Jedoch ohne Erläuterung dieses philosophischen Hintergrunds ist jene Formulierung der „Nichtexistenz von Bewegung“ missverständlich, während Felgners Formulierung der „*Nichtdenkbarkeit von Bewegung*“ die Auffassungen von Parmenides und Zenon prägnant trifft.

Und so hat *Zenon* – wie schon angemerkt – mit dem „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ eine *Aporie* erdacht und beschrieben: Denn einerseits zeigt seine Betrachtung dieses fiktiven Wettlaufs, basierend auf der „Nichtdenkbarkeit von Bewegung“, dass Achilles die Schildkröte nicht wird einholen können, und andererseits wird er selbst gewusst haben müssen, dass eine solche Situation nicht mit der visuellen Wahrnehmung übereinstimmen kann.

> Wenn man also das *Weltbild von Parmenides* zugrunde legt, demgemäß *Bewegung* (als nicht zum SEIN gehörig) *nicht gedacht* werden kann, dann hat Zenon mit dieser Paradoxie dafür eine überzeugende Bestätigung gefunden.

Erst ein Jahrhundert später wurde diese Wettlauf-Paradoxie durch Aristoteles in die Mathematik geholt, und in der Folge kam es zu neuen Sichtweisen. Im Ergebnis erweist sich nun die Behauptung, dass Achilles die Schildkröte nicht einholen kann, argumentativ als falsch, und zwar dieses nicht nur deshalb, weil sich das (in nunmehr „zugelassener“ Weise) *empirisch beobachten* lässt (und also *nicht nur gedacht* werden kann!), sondern weil es zu unserem in der Neuzeit seit Descartes und Newton entstandenen physikalisch-mathematischen Weltbild mit einem „absoluten Raum“ passt: Wir können jetzt nämlich auf dieser Grundlage formal beweisen, dass Achilles die Schildkröte überholen wird und wann und wo das bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen eintreten wird!

Wesentlich ist hierbei, dass in dieser neuen Sichtweise neben dem Ort als zweitem wichtigen Parameter die *Zeit* explizit hinzugekommen ist, die bei Zenon jedoch – dem Weltbild Parmenides’ folgend – überhaupt nicht betrachtet wird.

> So war aus heutiger Sicht die Nichtberücksichtigung der Zeit – dem Weltbilde von Parmenides folgend – der „Fehler“ in Zenons Betrachtung. Und gleichwohl hat Zenon jedoch gemäß dem Weltbild von Parmenides richtig argumentiert!

Nach Mathematisierung der Situation werden etliche mathematische Aspekte erkennbar bzw. hierhin projizierbar, z. B. Zeit-Weg-Funktion, Folgen, Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz, Dichtheit, Kontinuum, Unendlichkeit, … (die aber allesamt bei Zenon noch gar nicht auftraten).

Wir halten fest, dass man bei diesem fiktiven Wettlauf wohl erst dann von einer „Paradoxie“ sprechen sollte, wenn das *philosophische Weltbild von Parmenides* (zumindest kurz) erklärt und zugrunde gelegt wird, dessen wesentlicher Aspekt nämlich hier greift:

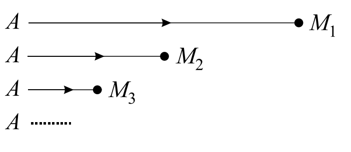
> „Bewegung“ gehört für Parmenides nicht zum SEIN, weil für ihn *Denken und Sein dasselbe* ist.

Und Zenon hat darauf aufbauend mit diesem Paradoxon demonstriert, dass *Bewegung nicht gedacht* werden kann!

Es sei noch ein *weiteres Bewegungsparadoxon* von Zenon angedeutet:

„Der Läufer im Stadion“ – zur Situation

Der Läufer will im Stadion vom Punkt A aus startend das Ziel B erreichen.



Dazu muss er aber zuvor z. B. die Hälfte der Strecke von A bis B zurückgelegt haben (ebenso z. B. ein Drittel oder …), er muss also zunächst den Punkt M_1 erreicht haben, dazu aber zuvor den Mittelpunkt M_2 der Strecke von A bis M_1, usw. – Es gibt somit in dieser merkwürdigen fiktiven Situation keinen „ersten Startpunkt“ für den Läufer, so dass dieser also *gar nicht starten* kann – und damit sogar *niemals starten* kann!

So ist auch hier der letzten Feststellung *in dieser Form* (und also aus der Sicht von Parmenides) einerseits argumentativ nicht zu widersprechen, auch wenn andererseits aus empirischer Sicht für uns klar ist, dass der Läufer selbstverständlich starten und das Stadion in endlicher Zeit von A nach B durchlaufen kann! Wiederum wurde hier von Zenon in seiner Argumentation die „Zeit“ nicht berücksichtigt, und zwar konsequent gemäß dem Weltbild des Parmenides. Und so konnte es auch hier zu einer zwar sorgfältig durchdachten und in sich schlüssigen fiktiven Situationsbeschreibung kommen, deren Konsequenz *wir* jedoch wie beim Wettlauf des Achilles ebenfalls als falsch ansehen.

Auch diese Aporie erweist sich damit für uns *aus damaliger Sicht* (!) als Paradoxie.

Fazit

Die Merkwürdigkeiten der beiden vorgestellten Aporien, die sich in historischer Sicht gemäß Parmenides als Paradoxien erweisen, sind wie folgt beschreibbar:

> Beim „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ kommen beide *niemals* zum Ziel,
> und beim „Läufer im Stadion“ kann der Läufer *niemals* starten.

Das „niemals“ bezieht sich auf den *Aspekt der Zeit*, und genau dieser wird von Zenon ausgeblendet, weil er die Zeit hier nicht betrachtet, denn sie gehört für Zenon und Parmenides nicht zum SEIN, genauer: WIR kennen und verwenden spätestens seit Newton bezüglich des Phänomens „Bewegung“ den funktionalen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit, nämlich $s_1 = v_1 \cdot t$ für Achilles und $s_2 = v_2 \cdot t + a$ für die Schildkröte, und WIR können damit sofort berechnen, wann und wo Achilles die Schildkröte einholt. Aber Zenon betrachtete einen derartigen Zusammenhang nicht – denn die Zeit gehörte nicht zu seinem Weltbild und dem der Eleaten, dem die Auffassung zugrunde lag, dass das SEIN der Ursprung der Welt ist: Das SEIN war für die Eleaten ohne „Werden“ und ohne „Vergehen“, ohne Anfang und ohne Ende. Dieses Weltbild ist heute für uns so apodiktisch nicht mehr gültig (wobei auch unsere heute denkbaren Weltbilder keinen Anspruch auf unerschütterliche Wahrheit haben).

Zenons Argumentation zu den Paradoxien war aus der Sicht unseres naturwissenschaftlich geprägten Weltbildes ohne die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit des Phänomens „Bewegung“ zwar unvollständig und damit also per saldo falsch, doch gleichwohl war sie *innerhalb des Weltbildes von Parmenides durchaus korrekt* und hat dieses also bestätigt!

Ausblick

Der „Wettlauf von Achilles und der Schildkröte“ bietet *aus heutiger Sicht* weitere Betrachtungsmöglichkeiten, die jedoch *mathematikhistorisch* nicht per se relevant sind, wenn oder weil sie nämlich ursprünglich gar nicht im Fokus standen. Und das ist grundsätzlich für die Einbeziehung jedweder historischer Aspekte und Beispiele mathematisch anmutender Bereiche in den Unterricht zu bedenken. So können WIR von unserem heutigen Kenntnisstand aus beispielsweise in die Zenonsche Aporie von Achilles und der Schildkröte manche Aspekte der Analysis hineindenken, obwohl diese damals, wie bereits angedeutet, noch nicht Gegenstand der Betrachtungen waren. Insbesondere waren Parmenides und Zenon ja „nur“ Philosophen und nicht Mathematiker.

Jedoch können und sollten historische Aspekte und Beispiele *nicht nur* im damaligen Kontext betrachtet werden (sofern dieser denn geklärt ist), sondern auch in Bezug auf Implikationen für heutige Sichtweisen und Begriffsbildungen, wenn denn klargestellt wird, dass diese damals nicht notwendig oder ganz und gar nicht Gegenstand des Interesses waren. So bietet die hier angesprochene Aporie des Wettlaufs von Achilles und der Schildkröte eine Vielfalt an Vertiefungs- und Untersuchungsmöglichkeiten, die zwar nicht der historischen Bedeutung entsprechen, die jedoch gleichwohl mathematisch sind und im Rahmen einer „historischen Verankerung“ und mit Bezug auf Otto Toeplitz (s. o.) zu den „Wurzeln der Begriffe“ *hinführen* (!) können. Die Literatur bietet z. B. für diesen „Wettlauf“ viele Beispiele, die kritisch-konstruktiv untersucht werden können bzw. sollten – was aber nicht Anliegen dieses Essays ist.

Die Einbeziehung historischer Aspekte und Beispiele in den Mathematikunterricht kann diesen beleben, bereichern und attraktiv machen – was genutzt werden sollte! Doch grundsätzlich ist dabei zu beachten, dass WIR aus heutiger Sicht in ihnen u. a. wichtige Stationen zur Begriffsbildung sehen und präsentieren können, was allerdings nicht zu der Schlussfolgerung führen sollte, dass eine solche Sichtweise auch damals schon zu Grunde gelegen hat.

Literatur

Diels, H. (1951). *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Band 1 (6., verbesserte Auflage). Weidmannsche Verlagsbuchhandlung.

Felgner, U. (2020). *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*. Birkhäuser.

Hischer, H. (2021). *Grundlegende Begriffe der Mathematik. Entstehung und Entwicklung: Struktur – Funktion – Zahl*. Springer Spektrum.

Kirk, G. S., Raven, J. E., & Schofield, M. (2001). *Die Vorsokratischen Philosophen*. Metzler.

Riezler, K. (1970). *Parmenides* (zweite, ergänzte Auflage). Vittorio Klostermann.

Sonar, Th. (2011). *3000 Jahre Analysis*. Springer.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36*, 88–100.

van der Waerden, B. L. (1940). Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Mathematische* Annalen, 117(2), 141–161.

Vollmer, G. (1993). *Wissenschaftstheorie im Einsatz*. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft.

Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik. I: Von den Anfängen bis Leibniz*. Springer.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

Publikationsbasierte Dissertation?!

Argumente – Aktueller Stand – Offene Fragen

Julia Joklitschke, Sebastian Geisler, Silke Ruwisch, Bärbel Barzel und Torsten Fritzlar

Die Frage „Dissertation als Monographie oder als kumulative Dissertation?“ wird aktuell an vielen Standorten und im Rahmen der GDM-Nachwuchsvertretung kontrovers und oft auch leidenschaftlich diskutiert.

Auslösende Faktoren dieser Diskussion sind Anforderungen an Promovierende, bereits während der Promotionszeit wissenschaftlich zu publizieren, um die Sichtbarkeit der eigenen Forschung zu erhöhen, eventuelle Ansprüche von Drittmittelgebern zu erfüllen oder gut vorbereitet zu sein für die aktuelle wissenschaftliche Praxis.

Angeregt durch konkrete Anfragen an den GDM-Beirat haben wir uns als Kleingruppe zusammengefunden. Uns vereint, dass wir die Möglichkeit einer publikationsbasierten Dissertation befürworten, ohne dass diese die monographische Form ersetzen sollte.

Mit diesem Artikel möchten wir die bisherigen Diskussionen öffnen und transparent machen. Deshalb beginnen wir mit einer Sammlung von Argumenten aus dem aktuellen Diskurs. Im Anschluss stellen wir die Ergebnisse einer informellen Abfrage vor, die Silke Ruwisch bei Kolleg/-innen verschiedener mathematikdidaktischer Standorte durchgeführt hat und mit der sich ein grober Überblick über gängige, einschlägige Praxen gewinnen ließ. Wir schließen mit offenen Fragen zur Thematik, die zur gemeinsamen Diskussion anregen sollen.

Deshalb laden wir herzlich ein zum gemeinsamen Austausch im Rahmen des Diskussionsforums „Publikationsbasierte Dissertation?!“ auf der GDM-Jahrestagung in Frankfurt. Weitere Informationen dazu entnehmen Sie bitte der Tagungsseite www.gdm-tagung.de.

Argumente

Die Kommunikation mathematikdidaktischer Forschung läuft seit jeher über unterschiedliche Medien. Neben der Diskussion von Vorträgen auf Konferenzen findet diese zum großen Teil über nationale und internationale Zeitschriftenartikel statt, bei denen zumeist durch intensive Reviewverfahren eine gewisse inhaltliche Qualität sichergestellt wird. Ähnliches gilt auch für Beiträge in Sammelbänden. Beides eignet sich in besonderer Weise dazu, Forschungsergebnisse (auch international) sichtbar zu machen. Zugleich können internationale Forschende an die veröffentlichten Erkenntnisse anschließen, Netzwerke können entstehen oder erweitert werden. Dementsprechend haben derartige Publikationen eine besondere Bedeutung für die Weiterentwicklung unserer Disziplin.

Darüber hinaus ergeben sich Mehrwerte auf personenbezogener Ebene. Bei Promotionen auf der Grundlage von Publikationen in internationalen Zeitschriften und Sammelbänden werden Doktorand/-innen unterstützend an diesen wichtigen Bestandteil wissenschaftlichen Arbeitens herangeführt und können bereits früh nicht nur rezeptiv, sondern auch produktiv am wissenschaftlichen

Austausch teilnehmen. Da das Schreiben wissenschaftlicher Artikel durchaus herausfordernd ist und einer Menge an Übung und Erfahrung bedarf, scheint es günstig, wenn der dahinterstehende langfristige Lernprozess bereits während der Promotionszeit beginnen kann, in der die Betreuung noch recht eng ist. Auf den hohen Anspruch dieser Art des Publizierens weisen übrigens auch die stets gut besuchten Workshops des GDM-Nachwuchses zum wissenschaftlichen Schreiben hin – das Interesse, hilfreiche Tipps und Expertisewissen zu bekommen, ist sehr hoch.

Außerdem kann bei Beiträgen für Zeitschriften und Sammelbänden durch gemeinsame Autor:innenschaft die intensive und oft auch aufwändige Zusammenarbeit an einem aktuellen Forschungsthema dokumentiert werden. Dies kann auch eine hohe Bedeutung für den weiteren Karriereweg haben, da beispielsweise in Berufungsverfahren die Anzahl der in Zeitschriften mit Qualitätssicherungsverfahren publizierten Artikel oft ein wichtiger Faktor zur Beurteilung der Bewerbung ist. Auch für Betreuende kann eine Ko-Autorenschaft natürlich wichtig sein, beispielsweise mit Blick auf die internationale Sichtbarkeit oder zukünftige Drittmittelanträge.

Damit sind zugleich mögliche Mehrwerte publikationsbasierter Promotionen auf institutioneller Ebene angesprochen, denn selbstverständlich sind auch für die Hochschulen Publikationsleistungen und Drittmitteleinnahmen von erheblicher Bedeutung.

Allerdings kann aus kritischer Perspektive das frühe (gemeinsame) Publizieren auch als Reaktion auf den immer stärker wachsenden Publikationsdruck gedeutet werden.

Ein weiteres, recht pragmatisches Argument liegt in den Qualitätssicherungsbedingungen vieler Projektgeber. In vielen geförderten Projekten sind Publikationen zu den gewonnenen Forschungsergebnissen obligatorisch – schließlich soll das neu generierte Wissen anschlussfähig gemacht werden. Hierdurch ist für Promovierende in Drittmittelprojekten die Mitarbeit und auch das Mitschreiben an entsprechenden Artikeln schon vorgegeben. Monographisch Promovierende sind hierdurch einer Doppelbelastung ausgesetzt. Es wäre also gewinnbringend, wenn Doktorand/-innen diese Veröffentlichungen auch für ihr eigenes Qualifizierungsvorhaben nutzen könnten.

Aktueller Stand – ein grober Überblick über Verfahrensweisen an deutschen Hochschulen

Eine informelle, deutschlandweite Anfrage bei 65 Standorten hat ergeben, dass an 18 Hochschulen neben der monographischen auch eine kumulative Dissertation in der Mathematikdidaktik angefertigt werden darf. Von neun Kolleg/-innen erhielt Silke Ruwisch die Rückmeldung, dass an ihren Hochschulen keine publikationsbasierte Promotion möglich sei. 13 weitere Standorte gaben an, dass zwar prinzipiell kumulative Dissertationen möglich seien, diese jedoch im Fach – d. h. in der Mathematikdidaktik – bisher nicht üblich bzw. Anforderungen an eine derartige Arbeit noch nicht konkretisiert seien. Insbesondere Kolleg/-innen dieser Hochschulen äußerten großes Interesse an einem genaueren Überblick entsprechender Promotionsordnungen oder präzisierender Ausführungsbestimmungen bzw. an standortübergreifenden Empfehlungen der Community.

An einigen Standorten wird laut Promotionsordnung und auch der entsprechenden Promotionskommission zwar die Einreichung einer Monographie gefordert, diese kann jedoch auch publikationsbasiert angelegt sein. Die Auslegung dieses Begriffes reicht von „es dürfen vorab Teilergebnisse der Dissertation auf Tagungen präsentiert und somit in Tagungsbänden veröffentlicht werden“ bis hin zu „zwei bis drei bereits veröffentlichte Artikel werden noch einmal in einer Gesamtschrift zusammengefasst als Dissertation eingereicht“. Letzteres wurde jedoch eher über mathematische Dissertationen berichtet und nicht von mathematikdidaktischen.

Ist die Möglichkeit einer publikationsbasierten Dissertation ausdrücklich in den entsprechenden Promotionsordnungen verankert, wird diese immer als kumulative Dissertation bezeichnet. Insbesondere für diejenigen Standorte, die derzeit entsprechende Promotionsordnungen entwickeln, erscheint es hilfreich, sich die verschiedenen Kriterien der Ausgestaltung an den 18 Standorten genauer anzuschauen.

Anzahl und Veröffentlichungsstatus der Artikel

In der Regel werden mindestens drei Artikel für eine kumulative Dissertation erwartet – lediglich einmal wird explizit von mindestens vier gesprochen. Vielfältiger gestalten sich die Aussagen zur Frage des Veröffentlichungsstatus der Beiträge bei Einreichung der Dissertation bzw. zum Abschluss des Promotionsverfahrens. In der Regel findet sich der Passus „veröffentlicht oder zur Veröffentlichung angenommen“. Es gibt allerdings auch Standorte, die bezüglich des Status zwischen den Beiträgen differenzieren, z. B.: Einer der Artikel sollte bereits angenommen, ein zweiter mit Überarbeitungen angenommen und ein dritter Artikel zumindest eingereicht sein. Bei anderen Standorten findet sich der Passus, dass bis zum Abschluss des Verfahrens alle Beiträge veröffentlicht sein müssen.

Veröffentlichungsorgane
Je nach Einbindung der Mathematikdidaktik in der jeweiligen Hochschule und den Usus der verschiedenen Fachkulturen aufgreifend, werden bezogen auf die Mindestanzahl an Publikationen ausschließlich Artikel in Zeitschriften mit Qualitätssicherungsverfahren erwartet oder auch Beiträge in Sammelbänden – ebenfalls mit Peer-Review – zugelassen. Offen bleibt an den meisten Standorten, in welcher Sprache die Beiträge zu verfassen sind und damit einhergehend die Frage der Verbreitung des jeweiligen Publikationsorgans. Lediglich bei drei Standorten finden sich Aussagen zur Ausrichtung der jeweiligen Zeitschriften und es wird von mindestens einem oder mindestens zwei Artikeln in internationalen Journalen gesprochen, womit höchstwahrscheinlich englischsprachige Beiträge gemeint sein werden.

Zwar sind in mehreren Promotionsordnungen Aussagen zur Qualität des Publikationsorgans zu finden, doch zeigen die Formulierungen deutlich, wie schwierig ein derartiger Versuch in einer entsprechenden Ordnung ist: So wird von „international anerkannt“, von „in der Fachgesellschaft anerkannt“ oder von „in der relevanten Wissenschaftsgemeinde anerkannt“ gesprochen.

Autor/-innenschaft
Ebenfalls unterschiedlich wird die Frage zur Autor/-innenschaft beantwortet. Nach allen Ordnungen müssen die Promovierenden den Eigenanteil an den jeweiligen Beiträgen genauer darlegen. Üblicherweise finden sich darüber hinaus genauere Regelungen, ob und in wie vielen Fällen Beiträge in Allein- und/oder Erstautor/-innenschaft verfasst sein müssen und ob und in wie vielen Fällen Gutachtende im Promotionsverfahren – insbesondere die Betreuenden der Doktorand/-innen – Mitautor/-innen der Beiträge sein dürfen.

Nachweis der geschlossenen Gesamtleistung
An allen Standorten wird formuliert, dass die einzelnen Beiträge einer kumulativen Dissertation eine geschlossene Gesamtleistung darstellen sollen und somit nicht lediglich eine additive Reihung sein dürfen. Zur Darlegung dieser Geschlossenheit gehört an allen Standorten ein unterschiedlich bezeichneter Text – Rahmenpapier, Rahmentext, Manteltext –, den die Promovierenden mit den entsprechenden Artikeln einzureichen haben. In diesem Text ist in der Regel der Zusammenhang der vorgelegten Beiträge ebenso darzulegen wie weitergehende methodische Ausführungen und eine vertiefte Diskussion und Einordnung der Ergebnisse. Bei zwei Dritteln der Standorte werden Aussagen zum Umfang dieses Textes gemacht. Diese reichen von „ca. 20 Seiten“ bis zu „mind. 40 Seiten“.

Offene Fragen

Bereits die Spannbreite an konkreten Ausgestaltungen in bestehenden Promotionsordnungen zeigt, dass mit der grundsätzlichen Entscheidung, publikationsbasierte Promotionen zu ermöglichen, eine Vielzahl weiterer Entscheidungen verbunden ist. Dabei ergeben sich sowohl eher institutionell-organisatorische Fragen, die für die Ausgestaltung einer entsprechenden Promotionsordnung relevant sind, als auch eher individuelle Fragen, die zwischen Promovierenden und Betreuenden geklärt werden sollten.

Institutionell-organisatorische Rahmenbedingungen
Besondere Relevanz unter den institutionell-organisatorischen Fragen besitzt sicherlich jene nach Art und Anzahl der Publikationen. Welche Publikationsorgane werden akzeptiert? Müssen alle Beiträge mit Qualitätssicherungsverfahren veröffentlicht sein? Wie viele Beiträge welcher Publikationsart sind mindestens notwendig? Diese Fragen sind unmittelbar miteinander verbunden, da Zeitschriftenartikel üblicherweise (zeitlich) aufwändiger sind als Beiträge in Sammel- oder Konferenzbänden. Insbesondere hinsichtlich der Anzahl veröffentlichter Zeitschriftenbeiträge sollte man sich die Frage stellen, wie viel von Promovierenden in drei bis vier Jahren überhaupt erwartet werden kann. Um zeitliche Probleme bei langen Peer-Review-Prozessen abzufedern, rückt auch die Frage in den Blick, ob alle Artikel bereits veröffentlicht sein müssen oder ob ein „accepted“ (ggf. „with revisions“) bereits ausreichend sein könnte.

Auch die Frage, welche Art der Autor/-innenschaft festgeschrieben werden sollte, scheint uns nicht leicht beantwortbar. Dürfen beispielsweise Betreuende auch Koautor/-innen sein? Bei wie vielen Beiträgen dürfen sie es sein oder sollte in diesen Fällen die oder der Betreuende von der Begutachtung der Dissertation ausgeschlossen werden? Muss der oder die Promovierende Erstautor/-in bei allen Beiträgen sein? Diese Frage mag bei Individualpromotionen eher rhetorisch erscheinen, ist aber bei Promotionen in größeren Projekten, in denen mehrere Promovierende tätig sein und in verschiedenen Konstellationen an Publikationen mitwirken können, nicht kanonisch.

Werden möglichst viele dieser Fragen in einer Promotionsordnung fest geregelt, schafft dies für Betreuende und Promovierende klare Rahmenbedingungen von Beginn an. Dieser Klarheit und Sicherheit stehen allerdings eine große Einengung und womöglich eine deutliche Erschwernis der Möglichkeit einer kumulativen Promotion gegenüber.

Es gilt auszuloten: Wie viele Festlegungen in Empfehlungen und Promotionsordnungen sind notwendig? Wieviel Ermessensspielraum sollte in der Ausgestaltung publikationsbasierter Promotionen den Betreuenden, der Promotionskommission bzw. in der gemeinsamen Entscheidung von Promovierenden und Betreuenden verbleiben, um kumulativ Promovierenden keine Steine in den Weg zu legen? In entsprechende Überlegungen sollte unseres Erachtens auch einbezogen werden, dass kumulative Dissertationen einem mindestens ebenso umfangreichen Begutachtungsprozess unterliegen wie monografische Arbeiten.

Individuell-situative Entscheidungen

Steht grundsätzlich die Möglichkeit einer publikationsbasierten Promotion zur Verfügung, stellen sich weitere Fragen für Betreuende und Promovierende vor der individuellen Entscheidung für eine Monografie oder eine kumulative Dissertation. Eignet sich das angedachte Promotionsprojekt überhaupt für die Veröffentlichung in mehreren (kürzeren) Publikationen oder passt eine Monografie eher zu Art und Struktur des Themas? Inwieweit müssen die Publikationen direkt zu Beginn der Promotion bereits vorstrukturiert und geplant sein bzw. wie viel Freiraum bleibt für die/den Promovierenden noch? Reichen Stellenfinanzierung und Vertragslänge, um auch bei längeren Review-Prozessen die Promotion abschließen zu können?

Nicht zuletzt stellt eine kumulative Promotion vermutlich auch andere Anforderungen an die Betreuung, so dass sich für die Betreuenden auch die Frage stellt, inwiefern sie selbst über ausreichend Publikationserfahrung – besonders in (internationalen) Zeitschriften – verfügen und die Promovierenden daher gut betreuen können.

Damit Promovierende und Betreuende zu Beginn eines Promotionsprojektes gemeinsam diese Fragen diskutieren und zu entsprechenden Entscheidungen kommen können, bedarf es darüber hinaus bereits einer entsprechenden Einarbeitung der/des Promovierenden in das Thema sowie ggf. ein regelmäßiges Überprüfen des geplanten Vorgehens.

Ausblick: Einladung zum Diskussionsforum auf der GDM-Tagung

Wir laden herzlich ein, die vorstehenden Ausführungen und weitere Ideen, Meinungen und Vorschläge zum Thema im Rahmen des Diskussionsforums „Publikationsbasierte Dissertation?!“ auf der GDM-Jahrestagung in Frankfurt mit uns zu diskutieren. Auch, wenn eine Entscheidung über die Ermöglichung publikationsbasierter Promotionen letztlich vor Ort getroffen werden kann, könnte der Austausch über Standorte hinweg aus Sicht mathematikdidaktischer Traditionen und Visionen wertvoll und hilfreich sein. Dabei kann vielleicht auch der Blick über den Tellerrand Denkanstöße geben. So hat beispielsweise die DGfE (Deutsche Gesellschaft für Erziehungswissenschaften) eine Stellungnahme zum Thema (tinyurl.com/2bn2sgkq) verfasst und Petra Stanat für die AEPF (Arbeitsgruppe für Empirische Pädagogische Forschung) eine kritische Würdigung (tinyurl.com/2lhtcexh) ergänzt.

Wir freuen uns darauf, mit möglichst Vielen dieses wichtige Thema weiter zu durchdringen und gegebenenfalls eine Stellungnahme der GDM anzudenken.

Julia Joklitschke, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: julia.joklitschke@uni-due.de

Sebastian Geisler, Universität Hildesheim
E-Mail: geisler@imai.uni-hildesheim.de

Silke Ruwisch, Leuphana Universität Lüneburg
E-Mail: ruwisch@leuphana.de

Bärbel Barzel, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: baerbel.barzel@uni-due.de

Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
E-Mail: torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de

Zur Diskrepanz zwischen der Didaktik als Wissenschaft und der Praxis

Jens Weitendorf

Im Folgenden werden einige Beobachtungen bzgl. einiger Aktivitäten der GDM aus der Sicht eines ehemaligen Lehrers und Ausbilders der 2. Phase gemacht. Der Autor möchte mit den Anmerkungen eine Diskussion auslösen und den Ansatz, Bedürfnisse der direkten Schulmathematik zu erfragen, bestärken. Meine Anmerkungen möchte ich als Wunsch aus der Praxis verstanden wissen. Die sich daraus ergebende Unterstützung wäre sehr hilfreich, da die Referendarausbildung im Laufe der Zeit in vielen Bundesländern verkürzt wurde und der Praxisbereich nur unzureichend abgedeckt werden kann. Bzgl. meiner Bemerkungen beziehe ich mich auf zwei Arbeitskreise und Artikel im Journal.

Erfahrungen aus Arbeitskreisen

Seit über 20 Jahren bin ich Mitglied in der Istron Gruppe und im Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge. In beiden Arbeitskreisen waren vor einiger Zeit sowohl Hochschulangehörige als auch Unterrichtende in Schulen Mitglied. Dies hat sich grundlegend geändert. Die Treffen der Istron Gruppe sind so strukturiert, dass es ein internes Treffen und einen Fortbildungstag für Lehrerinnen und Lehrer gibt. Die beiden letzten Lehrertage 2019 in Berlin und 2021 in Darmstadt online waren nur sehr mäßig besucht, was tlw. an einer mangeln Information durch die Behörden bzw. wohl am Format gelegen hat. Die interne Sitzung bietet vor allem Doktorandinnen und Doktoranden die Möglichkeit ihr Dissertationsprojekt vorzutragen. Aus wissenschaftlicher Sicht ist das sicher eine gute Struktur. Aus schulischer Sicht wäre es wünschenswert, Strukturen zu entwickeln, wie das Modellieren im Unterricht eine größere Bedeutung bekommt, denn das ist ja das Hauptanliegen der Istron Gruppe.

Die Treffen des AKMDW bieten Mitgliedern die Möglichkeit, ihre Ideen vorzutragen. Auch hier sind es in letzter Zeit im wesentlichen Dissertationsprojekte. Ein allgemeines Konzept für den Einsatz digitaler Medien im Schulunterricht gibt es bisher nicht. Es gab im Jahr 2001 einen Ansatz von Herget, Heugl, Kutzler und Lehmann der sich auf die noch nötigen manuellen Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler bezog und heftig diskutiert aber nicht weiter verfolgt wurde. Hilfreich aus schulischer Sicht wäre es, einen Arbeitskreis aus Didaktikern und Unterrichtenden einzurichten, der ausgehend von dem obigen Ansatz Vorschläge für den Einsatz und die damit verbundenen Konsequenzen für den Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht erarbeitet.

Bemerkungen zu Artikeln im Journal

Allgemein lässt sich aus Lehrersicht sagen, dass viele Beiträge für die direkte Unterrichtsplanung nicht von großem Interesse sind. Dies wird vor allem durch die sehr umfangreichen Literaturhinweise deutlich. Für jemand, der in der Schule unterrichtet, sind diese in der Regel nicht nachvollziehbar, wobei mir natürlich bewusst ist, dass das Journal nicht praxis- sondern wissenschaftsorientiert ist. Im Folgenden möchte ich ein paar Bemerkungen zu einzelnen Beiträgen in den letzten Heften machen, die mein Interesse geweckt haben. Diese Bemerkungen sind rein subjektiver Natur aus der Sicht eines Lehrers, der fast 40 Jahre unterrichtet hat und in der Referendarausbildung tätig war.

Bemerkungen JMD Band 43, Heft 1

Dieser Band ist ein Themenband, der das diagnostische Denken und Handeln von Mathematiklehrkräften thematisiert. Auch aus der praktischen Sicht ist das Thema äußerst wichtig. Als Lehrender würde man sich Hinweise hinsichtlich der Diagnose wünschen. In den Aufsätzen finden sich aber nur sehr vereinzelt Beispiele. Für angehende Lehrkräfte wäre eine breite Palette von möglichen Fehlern Lernender hilfreich. Beispiele wären:

Verwechslung von Gesetzen der Addition und Multiplikation. Dies zeigt folgendes Beispiel:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dies wird übertragen auf die Multiplikation, was $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$ zur Folge hat. Ebenfalls kommt es aus dem Grund zu einer Verwechslung der neutralen Elemente.

Begriffliche Probleme: Der Begriff der Ableitung hat neben seiner eindeutigen Definition in der Analysis auch eine logische Bedeutung. Dies wird im

Begriffspaar *Geschwindigkeit – Beschleunigung* deutlich. Im logischen Sinne muss ein Körper zunächst beschleunigt werden, um eine Geschwindigkeit zu erhalten. In diesem Sinne leitet sich die Geschwindigkeit aus der Beschleunigung ab (diese Fehlinterpretation wird ausführlich in Weitendorf (2007) diskutiert).

In einem weiteren Schritt müsste dann diskutiert werden, wie diese auftretenden Fehler Studierenden bzw. angehenden Lehrenden nahegebracht werden können.

Ein Ergebnis der diskutierten Studien in dem Band ist, dass Diagnose Kompetenzen von der Erfahrung der untersuchten Lehrenden abhängig sind. Daraus ergibt sich die Frage, wie es gelingen kann, junge Unterrichtende möglichst schnell in ihrer Diagnosefähigkeit zu unterstützen.

Bemerkungen JMD Band 42, Heft 2

Zu „First Year Students' Resilience to Cope with Mathematics Exercises in the University Mathematics Studies"

Dieser Artikel befasst sich mit den Problemen, die Studierende der Mathematik in den ersten Semestern haben. Aus eigener Sichtweise ist es sehr verständlich, dass die Ursache dafür die wöchentlich zu bearbeitenden Aufgaben sind. Bezogen auf die Schulpraxis ergibt sich daraus doch die Frage, in wie fern es möglich ist, Schülerinnen und Schüler aus den Abschlussklassen darauf vorzubereiten. Dies wird sicher durch gemeinsame Mathematikkurse für alle Lernenden erschwert, auch wenn diese ein erhöhtes Niveau haben. Um diese Frage zu klären, wäre ein Vergleich verschiedener Kursniveaus hilfreich. Des Weiteren wäre zu klären, in wie weit die Inhalte des Mathematikunterrichts auf ein Studium vorbereiten oder auch nicht.

Bzgl. der letzten Frage gibt der Artikel einige Auskünfte. Der praktisch orientierte Lesende hätte sich gewünscht, dass der Fragebogen vollständig angegeben wäre. Zumindest sind einige Items dokumentiert. Aus diesen wird deutlich, dass die Schulmathematik schon aus einem übergeordneten Ansatz abgefragt wird. In Klassenarbeiten würde man solche Aufgaben sicher dem Niveau III zuordnen.

Zu „Mathematische Modellierungskompetenz fördern durch Lösungsplan oder Dynamische Geometrie-Software"

In dem Artikel wird ein allgemeiner Lösungsplan angegeben; interessant für die Praxis wäre es, wie ein solcher für konkrete Modellierungsaufgaben übertragen werden kann. Ähnliches gilt für den Einsatz von Geogebra.

Bemerkungen zu JMD Band 42, Heft 1

Zu „Auswirkungen verschachtelten Lernens auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen von Lernenden über Zuordnungen"

In dem Artikel werden zwei verschiedene Vorgehensweisen bei der Einführung proportionaler Zuordnungen untersucht. In der ersten Version wird zunächst die Proportionalität und danach die Antiproportionalität, wie es in Schulbüchern üblich ist, eingeführt. Im zweiten Fall werden proportionale, antiproportionale und Zuordnungen, die weder noch sind, eingeführt. Die letztere Methode zählt als Verschachtelung. Untersucht wird anhand von entsprechenden Aufgaben, inwieweit Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Zuordnungen entsprechend zuzuordnen. Das Ergebnis entspricht meinen praktischen Erfahrungen. So hat man vor einiger Zeit auch den Oberstufenunterricht verschachtelt. Früher war es üblich, ein halbes Jahr Analysis zu unterrichten, dann ein halbes Jahr Lineare Algebra usw. Nach meinem Kenntnisstand gibt es keine Untersuchung hinsichtlich der Vor- und Nachteile dieser Verschachtelung. Solche Untersuchungen, die sich auch auf andere Gebiete in der Sek. I beziehen, sind sehr interessant im Hinblick auf die Nachhaltigkeit der unterrichteten Inhalte.

Zu „Erfassung der fachspezifischen Qualität von Mathematikunterricht: Faktorenstruktur und Zusammenhänge zur professionellen Kompetenz von Mathematiklehrpersonen"

Der Titel weckt das Interesse, dass man etwas über die Kriterien für einen erfolgreichen Mathematikunterricht erfährt. Im Wesentlichen wird die Methode diskutiert, wie die Qualität gemessen wurde. Dies ist aus wissenschaftlicher Sicht bedeutsam. Für die Ausbildung im Referendariat wären vor allem auch die Inhalte interessant. Das heißt, was fand in einer beobachteten Stunde statt und wie wurde das interpretiert. Im Anhang finden sich drei Items, wobei sich das erste auf mathematisches und das zweite auf mathematikdidaktisches Wissen bezieht. Das erste Item bezieht sich auf den Sachverhalt, dass der Umfang eines Quadrats mit der Kantenlänge a größer ist als der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser a. Die Frage ließe sich auch rein praktisch beantworten. Das zweite Item bezieht sich auf quadratische Gleichungen und geht davon aus, dass für die Lösung die quadratische Ergänzung erforderlich ist; es gibt aber auch einen Lösungsweg über die Scheitelpunktsform, der ohne die quadratische Ergänzung auskommt (vgl. hierzu Weitendorf, 2017). Vor allem bzgl. des zweiten Items ergibt sich für mich die Frage, ob mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen scharf trennbar ist. Die Antwort hängt davon ab, wie man den zweiten Lösungsweg zuordnet. Bzgl. der Unterrichtsentwürfe im Referendariat haben wir eine solche Unterscheidung nicht getroffen. Im Rahmen der didaktischen Analyse ging es im Wesentlichen um die didaktische Reduktion der zu behandelnden Inhalte.

Fazit

Die genannten Beispiele zeigen eine gewisse Diskrepanz zwischen der wissenschaftlichen Didaktik und der Praxis in der Schule. Ich möchte meinen Beitrag überhaupt nicht als Kritik an der wissenschaftlichen Praxis verstanden wissen; denn diese stünde mir auch nicht zu. Es geht mir eher darum, den Wunsch zu äußern, dass die Praxis mehr Unterstützung von der Didaktik erhält, da, wie oben erwähnt, die Möglichkeiten der Referendarausbildung schon aus zeitlichen Gründen begrenzt sind. In wie weit eine solche Unterstützung überhaupt möglich ist, könnte eventuell in einem Arbeitskreis, der von Didaktikern und in der Referendarausbildung tätigen erörtert werden. Ein erster Schritt in dieser Richtung ist durch den Fragebogen an die Verantwortlichen der zweiten Phase der Lehrerausbildung, der von Reinhard Oldenburg verschickt wurde, schon getan. Aus Hausarbeiten, die ich im Rahmen von Seminaren an der Uni Hamburg zu korrigieren hatte, konnte ich feststellen, dass Masterstudierende sehr große Probleme hatten, wenn sie konkret (z. B. für eine Unterrichtsplanung) werden mussten.

Literatur

Borreomeo-Ferri, R., Pede, S., & Lipowski, F. (2021). Auswirkungen verschachtelten Lernens auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen von Lernenden über Zuordnungen. *Journal für Mathematikdidaktik, 42*(1), 1–24.

Hankeln, C., & Greefrath, G., (2021). Mathematische Modellierungskompetenz fördern durch Lösungsplan oder Dynamische Geometrie Software? Empirische Ergebnisse aus dem LIMo-Projekt. *Journal für Mathematikdidaktik, 42*(2), 367–394.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., & Lehmann, E. (2001). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar. *Mitteilungen der MNU, 54*(8), 458–464.

Jentsch, A., Schlesinger, L., Heinrichs, H., Kaiser, G., König, J., & Blömeke, S. (2021). Erfassung der fachspezifischen Qualität von Mathematikunterricht: Faktorenstruktur und Zusammenhänge zur professionellen Kompetenz von Mathematiklehrpersonen, *Journal für Mathematikdidaktik, 42*(1), 97–122.

Neumann, I., Jeschke, C., & Heinze, A. (2021). First year students´ resilience to cope with exercises in the university mathematics studies. *Journal für Mathematikdidaktik, 42*(2), 307–334.

Weitendorf, J. (2007). *Realitätsbezüge im Analysisunterricht. Unterrichtliche Vorschläge und ihre Evaluation*. Franzbecker.

Weitendorf, J. (2017). Quadratische Gleichungen. *Vorschläge für den Unterricht der SEK I mit dem ClassPad II* (S. 43–45), Casio.

Jens Weitendorf, ehemals Gymnasium Harksheide, IQSH
E-Mail: jweitendorf@t-online.de

Einladung zur Mitgliederversammlung im Rahmen der GDM-Tagung 2022 in Frankfurt am Main

1. 9. 2022

Ort	Audimax
Beginn:	14.30 Uhr

Tagesordnung

Top 1. Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung
Top 2. Bericht des Vorstands
Top 3. Bericht des Kassenführers und der Kassenprüferin
Top 4. Entlastung des Vorstands
Top 5. Wahlen: 2. Vorsitzende/r, Schriftführer/in, Kassenprüfer/in, Beirat
Top 6. GDM-Jahrestagung 2024 in Duisburg/Essen
Top 7. Zeitschriften
Top 8. Verschiedenes

Daniela Götze, Schriftführerin der GDM
E-Mail: daniela.goetze@uni-muenster.de

Jahrestagung der GDM 2022 „Mathematikdidaktiker*innen im Dialog“

Frankfurt am Main, 29. 8.–2. 9. 2022

Die 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) steht kurz bevor: Sie findet vom 29. 8.–2. 9. 2022 am Campus Westend der Goethe-Universität Frankfurt statt.

Hier möchten wir aktuellen Fragen der mathematikdidaktischen Forschung nachgehen und mit Ihnen unter dem Motto: „Mathematikdidaktiker*innen im Dialog“ in einen gemeinsamen Austausch kommen.

Freuen Sie sich auf über 200 spannende Einzelvorträge, über 50 Kurzvorträge und interessante Vorträge im Rahmen der 20 Minisymposien, die Einblicke in die Vielfalt der Erforschung mathematischen Lehrens und Lernens geben. Auf ca. 50 Postern werden aktuell laufende Forschungsprojekte vorgestellt. An der Postersession am Donnerstag können Sie mit den Akteur*innen ins Gespräch kommen.

Über die Woche verteilt finden Fokus- und Hauptvorträge statt, in denen sechs Wissenschaft-

Campus Westend der Universität Frankfurt, Tagungsort der GDM 2022 (Foto: Uwe Dettmar) ler*innen einen Überblick über verschiedene Forschungsfelder der Mathematikdidaktik und den Bildungswissenschaften geben, die die Arbeit in Kindertagesstätten, Schulen und Hochschulen aktuell prägen. Hier wollen wir auf eine Änderung hinweisen. Den internationalen Hauptvortrag wird Tamsin Jillian Meaney zu „Learning possibilities when multilingual preservice teachers evaluate multilingual mathematical argumentations“ halten.

Ein besonderes Augenmerk möchten wir auf die am Montag und Donnerstag stattfindenden Diskussionsforen legen. Hier werden besonders aktuelle Themen der Mathematikdidaktik aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet. Wie bereits in der langjährigen Tradition der GDM-Tagungen verankert, laden verschiedene Arbeitskreise am Montag oder Donnerstag zum gemeinsamen Arbeiten ein und informieren über vergangene bzw. zukünftige Schwerpunktsetzungen.

Neben dem inhaltlichen Tagungsprogramm gibt es ein Rahmenprogramm, das mit dem Eröffnungsabend am Montag, den 29. 8. 2022 beginnt. Hier können wir zwei besondere Ereignisse ankündigen: Es werden die GDM-Ehrenmitgliedschaft für besondere Verdienste um die Mathematikdidaktik sowie der GDM-Förderpreis für herausragende Dissertationen an junge Mathematikdidaktiker*innen übergeben.

Am Mittwoch haben Sie die Gelegenheit im Rahmen unseres vielfältigen Ausflugsprogramms oder in eigener Regie, die Stadt Frankfurt zu erkunden. Frankfurt hält neben Börse, Skyline und Messe zahlreiche Überraschungen bereit. Erleben Sie kulinarische Köstlichkeiten, wie die Frankfurter „Grie Soß“ oder „en Stöffche ausm Gerippte“ in Sachsenhausen, die unverkennbare Skyline des Bankenviertels im Zentrum oder den großen Grüneburgpark mit Botanischem Garten direkt neben dem Campus im Westend.

Am Donnerstag, den 1. 9. 2022 findet im Casino-Gebäude des Campus Westend der Gesellschaftsabend statt. Für das leibliche Wohl sowie für Musik und Tanz ist bestens gesorgt.

Auf der Tagungshomepage erhalten Sie weitere Informationen zu Anreise und Ablauf der Tagung: www.gdm-tagung.de

Wir freuen uns, Sie schon bald bei uns in Frankfurt begrüßen zu können!

Das lokale Organisations-Team der GDM 2022
in Frankfurt am Main
E-Mail: gdm2022@uni-frankfurt.de

Arbeitskreis: Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik

Online, Frühjahrstagung, 29. 4. 2022

Gabriele Kaiser und Timo Leuders

Die Tagung fand am Freitag, den 29.4.2022 per Zoom statt. Wie bereits die letzten Treffen war auch diese Tagung gut besucht. Im Folgenden werden die Vorträge dargestellt, wobei die meisten Foliensätze bei der Arbeitskreisleitung angefordert werden können. Es gab zu allen Vorträgen rege Diskussionen. Die nächste Sitzung des Arbeitskreises findet auf der GDM-Tagung in Frankfurt statt.

Erster Vortrag: Johannes König (Universität zu Köln)
Kompetenz von Mathematiklehrkräften, Unterrichtsqualität und Leistungsfortschritte von Schüler*innen – neuere Analysen ihrer Zusammenhänge

Es wird weithin davon ausgegangen, dass Lehrkräfte eine Schlüsselrolle bei der Bereitstellung qualitativ hochwertiger Lernangebote für Schüler*innen und bei der Förderung des Lernens der Schüler*innen spielen. Dennoch ist immer noch unklar, wie spezifische Wissensfacetten von Lehrkräften als Teil ihrer beruflichen Kompetenz zu Unterrichtsprozessen und Lernergebnissen beitragen, wobei aktuelle Forschungsergebnisse auf eher uneinheitliche oder bestenfalls schwache Vorhersageeffekte des Wissens von Lehrkräften auf die Leistungen von Schüler*innen hinweisen. Die im Vortrag dargestellten zwei Studien, die im Rahmen des TEDS-Forschungsprogramms durchgeführt wurden, konzentrieren sich auf den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe. In der ersten Studie wurden die Zusammenhänge zwischen der pädagogischen Kompetenz der Lehrkräfte (d. h. den kognitiv-pädagogischen Aspekten ihrer beruflichen Kompetenz), der Unterrichtsqualität und den mathematischen Leistungen der Schüler*innen untersucht. Die Stichprobe umfasst Daten von Mathematiklehrern und -schülern aus 59 Klassenzimmern in Deutschland. Die mathematischen Leistungen der Schüler*innen wurden zu zwei Zeitpunkten (Klasse 7 und 8) gemessen. Die pädagogische Kompetenz der Lehrkräfte wurde anhand von zwei Tests zum allgemeinen pädagogischen Wissen (GPK) und zur situationsspezifischen Kompetenz beim Classroom Management (CME) untersucht. Die Unterrichtsqualität wurde anhand von Beobachtungsdaten aus In-vivo-Ratings im Mathematikunterricht gemessen. Die Forschungsfragen zum Zusammenhang zwischen der Kompetenz der Lehrkräfte und den Leistungen der Schüler*innen in Mathematik wurden mit Hilfe von Mehrebenenmodellen beantwortet. Die Ergebnisse der mehrstufigen Regressionsanalysen zeigen, dass sowohl GPK als auch CME die Unterrichtsqualität vorhersagen. Es wurden direkte statistische Effekte auf den mathematischen Fortschritt der Schüler*innen festgestellt, während keine indirekten statistischen Effekte über die Unterrichtsqualität identifiziert werden konnten. Obwohl die gemessene pädagogische Kompetenz der Lehrkräfte nicht fachspezifisch ist, dient sie als signifikanter Prädiktor für die kognitive Aktivierung als unverzichtbarer Bestandteil qualitätsorientierter mathematischer Lehr- und Lernprozesse im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und trägt zu den mathematischen Fortschritten der Schüler*innen bei.

In der zweiten Studie wurde der Zusammenhang zwischen dem mathematischen und mathematikdidaktischen Wissen der Lehrkräfte, ihren Wahrnehmungs-, Interpretations- und Entscheidungsfähigkeiten (dem sog. Noticing), der im Unterricht umgesetzten Unterrichtsqualität und den mathematischen Lernfortschritten der Schüler*innen untersucht. Anstelle von direkten Effekten des Wissens von Lehrkräften auf die Schüler*innen wurde eine Wirkungskette mit mehreren Vermittlungsprozessen angenommen, wobei die Schulform und der soziodemographische Hintergrund der Schüler*innen kontrolliert wurde. Eine mehrstufige Modellierung mit 3496 Schüler*innen aus 154 Klassenzimmern ergab eine vermittelnde Rolle der Fähigkeiten der Lehrkräfte und der von ihnen implementieren Unterrichtsqualität für den Zusammenhang zwischen Lehrkräftewissen und Lernfortschritt der Schüler*innen. Die Effektstärken waren mittel bis stark, und das Modell erklärte einen großen Anteil der Varianz. Es konnten keine direkten Auswirkungen des Lehrkräftewissens auf den Lernfortschritt der Schüler*innen festgestellt werden.

Insgesamt machen diese Ergebnisse deutlich, dass die Zusammenhänge zwischen der Kompetenz der Lehrkräfte und den Leistungsfortschritten der Schüler*innen komplexer sind als häufig angenommen und bestätigen die im Modell von Blömeke, Gustafsson und Shavelson entwickelte Auffassung von Kompetenz als Kontinuum.

Zweiter Vortrag: Stefan Krauss (Universität Regensburg)
Diskussionsbeitrag zu den vorgetragenen Analysen

In diesem Diskussionsbeitrag wurden eine Zusammenschau und Vergleich der im Rahmen des TEDS-Forschungsprogramms erzielten Ergebnisse mit den Ergebnissen aus der COACTIV-Studie vorgenommen. Es wurde deutlich, dass in COACTIV basierend auf dem Kaskaden-Modell ein ähnlicher Theorierahmen entwickelt wurde mit vergleichbaren Operationalisierungen, die zu vergleichbaren Ergebnissen führten. Allerdings ist die im Rahmen des TEDS-Forschungsprogramms analysierte Wirkungskette die bislang längste empirische verifizierte Wirkungskette. Aufgrund des hohen Aufwandes solcher Studien stellte sich die Frage nach gemeinsamen Sekundäranalysen der Studien aus COACTIV und Folgestudien sowie den Studien aus dem TEDS-Forschungsprogramm.

Dritter Vortrag: Janina Krawitz (Universität Münster)
Mathematisches Modellieren mit Problem Posing – Theoretischer Hintergrund und Konzeption eines DfG-Projekts

Problem Posing – das Stellen eigener Probleme – ist ein zunehmend relevantes Thema im mathematikdidaktischen Diskurs. Im Vortrag wurde das Problem Posing aus der Perspektive des mathematischen Modellierens betrachtet. Vorgestellt wurden der theoretische Hintergrund und die Konzeption eines bewilligten DfG-Projekts sowie erste Ergebnisse aus Vorarbeiten. Zentrale Ziele des Projekts sind, aufbauend auf die Forschung zum Problem Posing und mathematischen Modellieren zu untersuchen, (1) welche Effekte der Unterricht mit Problem Posing auf Modellierungskompetenzen, Problem Posing Kompetenzen und die Motivation der Lernenden hat, (2) ob diese Effekte durch kognitive, metakognitiven und affektiv-motivationale Faktoren erklärt werden können. Kern des Projekts bildet eine experimentelle Interventionsstudie, in der Unterricht zum Entwickeln und Lösen von Modellierungsaufgaben mit Unterricht zum alleinigen Lösen von gegebenen Modellierungsaufgaben verglichen wird. Im Vortrag wurden Einblicke in die Planung der Unterrichtsintervention gegeben und es wurde diskutiert, inwiefern Problem Posing für die gezielte Förderung von Modellierungskompetenzen und die Steigerung von Motivation der Lernenden genutzt werden könnte.

Vierter Vortrag: Reinhard Oldenburg (Universität Augsburg)
Welchen Nutzen haben nichtlineare Strukturmodelle für die Kompetenzmodellierung? Analysen am Beispiel von Algebratests

Für statistische Analysen in der empirischen Didaktik werden zum Großteil Methoden eingesetzt, die lineare Beziehungen und/oder normalverteilte Variablen voraussetzen. Neue, flexible Schätzverfahren erlauben es, diese Einschränkung zu überwinden und damit Modelle zu schätzen, die reichhaltige Beziehungen zwischen den Variablen modellieren. Im Vortrag wurde erläutert, wie solche Schätzmethoden arbeiten und es wurde am Beispiel empirischer Studien zum algebraischen Lernen exemplarisch aufgezeigt, welche Schlussfolgerungen gezogen werden können. Der aktuelle Stand der Forschung lässt noch viele Fragen offen, und einige Desiderate wurden formuliert.

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg
E-Mail: gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Timo Leuders, PH Freiburg
E-Mail: leuders@ph-freiburg.de

Arbeitskreis: Frauen und Mathematik

Einladung zur Herbsttagung am 6. und 7. 10. 2022 (oder 7. und 8. 10. 2022)

Renate Motzer

Die 34. Herbsttagung des Arbeitskreises „Frauen und Mathematik" der GDM findet in diesem Jahr wieder Anfang Oktober statt. Wir freuen uns auf Beiträge zu Themenfeldern wie Geschichte von Frauen in der Mathematik, Frauen in der Mathematik heute oder gendergerechter Mathematikunterricht. Darüber hinaus können auch aktuelle Lehr- oder Forschungsprojekte vorgestellt werden.

Das Tagungsprogramm und die Anmeldemodalitäten werden veröffentlicht unter tinyurl.com/2xmv44yx.

Die Tagung beginnt für den Fall, dass sie digital veranstaltet wird, am Donnerstag, den 6. 10. nachmittags und wird Freitag, den 7. 10. vormittags fortgesetzt. Sollte eine Präsenztagung möglich sein, verschiebt sich das Programm um einen Tag.

Für Rückfragen wenden Sie sich bitte an die Arbeitskreissprecherin Renate Motzer.

Renate Motzer, Universität Augsburg
Email: renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore

Online, 24. 3. 2022

Katja Lengnink, Tim Lutz und Franziska Strübbe

Seit Bestehen des Arbeitskreises Lehr-Lern-Labore fand am 24.03.2022 zum ersten Mal eine Frühjahrstagung des Arbeitskreises statt. Grund ist die verschobene GDM Jahrestagung in den Spätsommer. Aufgrund der pandemiebedingten Reise- und Veranstaltungsunsicherheiten wurde das Treffen digital abgehalten, es nahmen 28 Personen von insgesamt 13 Standorten teil. Für die inhaltliche Ausgestaltung des Tagungstages konnten fünf Vortragende gewonnen werden. So wurden an dem Tag insbesondere den spezifischen Inhalten und Entwicklungen der Lehr-Lern-Labor-Standorte Raum zur Präsentation und Diskussion gegeben.

Katja Lengnink, als neue Sprecherin des Arbeitskreises, führte durch den Tagungstag und gab zu Beginn Informationen zum Tagungsprogramm sowie den Vortragenden. Es folgten organisatorische und inhaltliche Hinweise zur Mitarbeit im Arbeitskreis. Interessierte sind herzlich eingeladen, im Arbeitskreis mitzuwirken und an den regelmäßigen Tagungen und Arbeitskreistreffen teilzunehmen. Weiterführende Informationen zu bisherigen und zukünftigen Aktivitäten des Arbeitskreises sind auf der arbeitskreiseigenen Homepage zu finden: https://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore_Mathematik. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit sich vom stellvertretenden Sprecher Tim Lutz (lutz@uni-landau.de) in den E-Mail-Verteiler (ak-lll@mathe-labor.de) des Arbeitskreises eintragen zu lassen, über den aktuelle Informationen und Einladungen zu den Tagungen verschickt werden. Um die inhaltliche Entwicklung des Arbeitskreises weiter voranzutreiben, auf aktuelle Publikationen aufmerksam zu machen sowie diese ggf. bereitzustellen und um eine Plattform für Diskussionsanlässe auch zwischen den Tagungen anzubieten, sei auf die Austauschplattform des Arbeitskreises hingewiesen. Diese ist unter https://dms.uni-landau.de/ak_lll/austauschplattform/ einsehbar. Die Sprecher/-innen/gruppe ist wie bisher unter sprechergruppe-ak-lll@mathe-labor.de erreichbar.

Thematische Schwerpunkte der Frühjahrstagung

Zum Ankommen am digitalen Tagungsort wurde den Mitgliedern des Arbeitskreises als Tagungsstart ein digitales „Kaffee und Talk"-Angebot dem Tagesprogramm vorangestellt, um informelle Austauschmomente auch in digitalen Zeiten zu ermöglichen und ein persönliches Wiedersehen zu fördern.

Das inhaltliche Programm begann mit einem Vortrag von Ramona Hagenkötter (Ruhr-Universität Bochum) zum Thema „Lernen durch Beobachtung von Modellpersonen beim realen mathematischen Experimentieren im Schülerlabor“. Gemeinsam mit Katrin Rolka, Valentina Nachtigall und Nikol Rummel (Ruhr-Universität Bochum) untersuchte sie die videovermittelte Beobachtung von Modellpersonen beim realen mathematischen Experimentieren als einen Ansatz, die (meta-) kognitiven Anforderungen während des Experimentierens an Schüler/-innen zu reduzieren. Dazu wurden in einer randomisierten kontrollierten Studie die videovermittelte Beobachtung von gleichaltrigen Schüler/-innen und Wissenschaftler/-innen jeweils beim realen mathematischen Experimentieren zum Bierschaum-Zerfall im Schülerlabor verglichen. In ihrem Vortrag präsentierte Ramona Hagenkötter erste Ergebnisse im Hinblick auf die Authentizitätswahrnehmung, die Einschätzung des eigenen Wissensstands und den Lernerfolg. Im Diskussionsteil ging Frau Hagenkötter durch die aufgeworfenen Rückfragen auf die perspektivische Weiterarbeit der Folgestudien ein. Eine interessante Anregung lieferte die Erörterung, wie materialbasierte Experimente und Simulationen das funktionale Denken fördern können (Lichti & Roth; 2020. DOI:/10.48648/cjee-y110).

Cathleen Heil (Leuphana Universität Lüneburg) stellte in ihrem Workshop „Mathe Draußen – Ansatzpunkte und Herausforderungen beim Aufbau eines mobilen LLL in Lüneburg“ ein ehrenamtlich getragenes, aber stark an die Universität angebundenes Projekt zur Vermittlung von Mathematik unter freiem Himmel vor. Dieses richtet sich einerseits über Nachmittagsangebote an Grundschulkinder und Eltern, die in „Mathematischen Stadtspaziergängen“ die Hansestadt durch die Mathebrille erkunden, richtet sich aber auch an Schulklassen in der Region. Erste Erkundungen zur Geometrie in der Natur sowie Möglichkeiten einer Strukturierung von thematischen Stadterkundungen über Karten, die zu einer eigenständigen und kooperativen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten anregen, wurden vorgestellt. Dabei stellte sich die Frage, wie die Nachmittagsangebote, aber auch für Angebote an Schulen nachbereitet werden sollten, um Erlebtes zu reflektieren, besprechen und fachlich zu festigen. Weiterhin wurde die Frage aufgeworfen, wie das Projekt im Spannungsfeld zwischen bürgerlichem Engagement und Professionalisierung weiterentwickelt werden kann, um beispielsweise in die Lehramtsausbildung am Standort eingebunden zu werden. In der von Cathleen Heil angeregten Ideenschmiede zur Begegnung konzeptioneller Herausforderungen brachten die Tagungsteilnehmenden ihre Lehr-Lern-Labor-Erfahrungen anhand eines interaktiven Pads ein. Dieser Austausch zwischen den Lehr-Lern-Labor-Standorten trug insbesondere dazu bei, dass für das Lüneburger Projekt mögliche Weiterentwicklungen zur Anbindung an den schulischen Unterricht sowie eine stärkere Einbindung von Studierenden formuliert werden konnten.

In ihrem Vortag „Schüleraktivitäten und Lehramtsausbildung im Mathelabor am KIT“ stellten Katja Hoeffer, Stephan Kindler, Ingrid Lenhardt und Lea Schenk (Karlsruher Institut für Technologie) die Lehr-Lern-Labor-Aktivitäten an der Fakultät für Mathematik in Karlsruhe vor. Unter dem Motto „Mathematik erleben, entdecken und begreifen“ haben bereits mehr als 35 000 Personen das Mathelabor besucht. Mit Laborbesuchen, Workshops, CAMMP-Days zur computergestützten mathematischen Modellierung und Aktivitäten in der Begabtenförderung (AMSEL-Programm) erhalten Kinder und Jugendliche neue Einblicke in die Mathematik. Studierende des Lehramts und Promovierende in der Fachdidaktik erproben hier eigene Projekte und testen ihre Unterrichtsmaterialien am lebenden Objekt. Im Vortrag gab das Team um Ingrid Lenhardt videobasiert einen didaktisch-methodischen sowie fachlichen Einblick in die Aktivitäten im Mathelabor. Interessierte und begabte Schüler/-innen können als Schulklassen in Begleitung ihrer Lehrkräfte das Schülerlabor Mathematik besuchen. Darüber hinaus werden Schüler/-innen-Workshops zu verschiedenen mathematischen Themen von mathematischen Zaubereien für die Grundschule bis Aufgaben zur modernen Kryptologie für Oberstufenschüler/-innen angeboten. Der Slogan der Aktivitäten lautet dabei „Mathe macht Spaß“. Stephan Kindler und Katja Hoeffer nahmen mit ihren Ausführungen zum CAMMP – Computational and Mathematical Modeling Program – Bezug zur Bedeutung von Modellierungskompetenzen von Kindern für den schulischen Unterricht. Ziel des Projektes ist es, die Relevanz von Mathematik für das alltägliche Leben erfahrbar zu machen. Zeit für Anregungen und Fragen wurde im Vortragsnachgang genutzt, um unter anderem über das Potenzial des Aufgabenangebotes für die Anregung von Modellierungsprozessen zu diskutieren. Dabei wurden die bei Schüler/-innen sehr heterogen vorhandenen Programmierungskompetenzen in den Blick genommen, die ein angeleitetes Modellieren erklären.

Im interaktiven Beitrag „Analoges und digitales Forschen im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe für kleine Asse‘ “ präsentierte Franziska Strübbe (Westfälische Wilhelms-Universität Münster) aktuelle Entwicklungen. Pandemiebedingt wurde die etablierte Organisationsform des dortigen Lehr-Lern-Labors in den vergangenen zwei Jahren vor grundlegende Herausforderungen gestellt, die vielfältige konzeptionelle Anpassungen notwendig machten. Daraus ist innerhalb der Arbeitsgruppe um Friedhelm Käpnick eine neue Form mathematischen Tätigseins im Lehr-Lern-Labor entstanden. Das analoge und digitale Forschen bezieht seitdem digitale Tools in Lehr- und Lernprozesse zukunftsorientiert ein ohne die etablierten Grundsätze mathematikdidaktischer Begabungsforschung sowie die entwickelten und erprobten offenen substanziellen Problemfelder zur Begabungsförderung zu vernachlässigen. Daraus ist das Konzept Alltags | Mathe | real für den Übergang Kita-Grundschule entstanden. Anhand der neu entwickelten Aufgabenmaterialien zum Thema „Süße und salzige Mathematik“ stellte Frau Strübbe das Konzept exemplarisch dar und illustrierte dieses mittels konkreter Erfahrungen aus dem Lehr-Lern-Labor. Die Teilnehmenden ergänzten den konzeptionellen Vorschlag mit praxisbezogenen Aktivitäten und forschungsmethodischen Anregungen.

Jürgen Roth (Universität Landau) stellte in seinem Vortrag „Potentiale von Lehr-Lern-Laboren – Worin bestehen sie und wie lassen sie sich heben?“ zunächst fest, dass Lehr-Lern-Labore vielfältige Potenziale für diverse Nutzergruppen eröffnen, zu denen Schüler/-innen, Lehramtsstudierende, Studienreferendar/-innen, Lehrkräfte, Dozierende und Forschende gehören. Da es aus seiner Sicht für die Betreiber/-innen von Lehr-Lern-Laboren wesentlich ist diese Potenziale zu kennen und Möglichkeiten zu identifizieren, wie diese zu heben sind, ist er in seinem Vortrag auf vielfältige inhaltliche wie organisatorische Fragen eingegangen, die dabei zu beantworten sind. Er gab einen Überblick über Potenziale von Lehr-Lern-Laboren, systematisiert nach Nutzergruppen, und bot am Beispiel des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität in Landau (https://mathe-labor.de) Einblicke in organisatorische Möglichkeiten und Rahmenbedingungen, die es erleichtern, diese Potenziale auszuschöpfen. Der Austausch unter den Tagungsteilnehmenden wurde unter den Facetten Nutzer/-innengruppen, Ziele, Vernetzung, Schwierigkeiten angeregt und mittels ZUM-Pad diskutiert. Es wurde offen diskutiert, in wie weit sich Lehr-Lern-Labore der Aufgabe der Wissenschaftskommunikation annehmen sollten.

Zum Tagungsausklang bündelte Katja Lengnink die Tagungsthemen in den Schlagworten Forschung, Lehr-Lern-Labor to go, Materialien, Potenziale, Methoden, Organisation und Herausforderungen. Diese Themen sollen als Ausgangspunkt für weitere Tagungstreffen genutzt werden, um den inhaltlichen Austausch innerhalb des Arbeitskreises weiterzuentwickeln. Als Zukunftsperspektive des Arbeitskreises wird weiterhin angestrebt, einen, die Lehr-Lern-Labor-Standorte übergreifenden Forschungsrahmen aufzuspannen. Die Herausbildung weiterer gemeinsamer Forschungsthemen und -methoden steht auf der Diskussionsagenda der Arbeitskreisaktivität.

Die rege Teilnahme an der ersten Frühjahrstagung haben wir mit Freude aufgenommen und danken allen Tagungsteilnehmenden für ihre vielfältigen Beiträge sowie anregenden Diskussionsimpulse, die zu einer guten und konstruktiven Zusammenarbeit des Arbeitskreises beigetragen haben.

Ausblick auf zukünftige Aktivitäten des Arbeitskreises

Für ein Zusammenkommen des Arbeitskreises, verbunden mit Begegnungen in Präsenz auf der GDM Jahrestagung sowie wieder an Standorten von Lehr-Lern-Laboren, wurden drei Folgetermine auf der Frühjahrstagung abgesprochen.

- Im Rahmen der GDM Jahrestagung in Frankfurt vom 29. 8.–2. 9. 2022 soll wie bisher ein Treffen des Arbeitskreises stattfinden. Da seit dem letzten Präsenztreffen der Arbeitskreisteilnehmenden mit der Herbsttagung 2019 dann inzwischen fast drei Jahre vergangen sind, soll das dortige Treffen vor allem ein Wiedersehensanlass sein. Alle Standorte sind herzlich eingeladen einen repräsentativen Gegenstand aus ihrem Lehr-Lern-Labor mitzubringen und anhand dessen die standort- und inhaltsspezifischen Aspekte des eigenen Lehr-Lern-Labors vorzustellen. Der genaue Tag des Arbeitskreistreffens wird mit Bekanntgabe des Tagungsprogramms noch mitgeteilt.
- Auch für das Jahr 2023 sind zwei weitere Arbeitskreistagungen geplant. Die zweite Frühjahrstagung findet vom 3. 3.–4. 3. 2023 an der Pädagogischen Hochschule Nordwestschweiz in Muttenz statt. Die örtliche Tagungsleitung Christine Streit lädt dazu herzlich in das Lehr-Lern-Labor „LeA – LernAtelier Mathematik“ ein. Das Rahmenthema der Tagung lautet „Der Beitrag von Lehr-Lern-Laboren zur (fachspezifischen) Professionalisierung von angehenden Lehrpersonen“. Nähere Informationen zum Tagungsprogramm sowie zur Anmeldung werden auf der Homepage des Arbeitskreises laufend aktualisiert.
- Im September 2023 ist der Arbeitskreis zur siebten Herbsttagung an die Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg eingeladen. Das Team um Karin Richter stellt den Arbeitskreisteilnehmenden die dortige „Experimente-Werkstatt Mathematik“ vor.

Literatur

Lichti, M. & Roth, J. (2020). Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern. Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis (ZMFP), 1, S. 1–35. DOI:10.48648/cjee-y110

Katja Lengnink, JLU Gießen
E-Mail: katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Tim Lutz, Universität Landau
E-Mail: lutz@uni-landau.de

Franziska Strübbe, Universität Münster
E-Mail: struebbe@uni-muenster.de

Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Online, 22. 4. 2022

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

An dem auf einen Tag gekürzten Treffen des GDM-Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ haben insgesamt 14 Kolleginnen und Kollegen teilgenommen.

1 Eröffnung (Gabriella Ambrus) und Begrüßung (Ödön Vancsó)

Die Corona-Pandemie hat zu Veränderungen der üblichen Termine geführt. Im Jahr 2022 ersetzt das eintägige Frühjahrstreffen des Arbeitskreises „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ (22. April 2022) das übliche zweitägige Herbsttreffen. Die alljährliche Sitzung des Arbeitskreises findet turnusmäßig im Rahmen der GDM-Jahrestagung in Frankfurt statt. Das Frühjahrstreffen 2022 ist in der Zählung die 7. Arbeitskreistagung.

2 Kurzvorträge

2.1 *Gabriella Ambrus & Csaba Csapodi: Essay problems in mathematics class in Hungary*

Abstract: Csaba Csapodi and Miklós Hoffmann in a recent article (www.mdpi.com/2227-7102/11/10/610) have raised the possibility of setting more open, essay-like problems in Hungarian mathematics classes, and in the longer term even in the final exams. This suggestion was followed by further steps in the last months: we developed three possible open essay problems in different topics, based on the secondary school mathematics curriculum. The problems were first piloted with undergraduate teachers, who were asked to write a short commentary on their attitudes towards such tasks, in addition to solving them. In the presentation, the problems will be presented alongside the students' solutions and answers to the questionnaire.

2.2 *Katalin Fried: Pre-equations*

Abstract: Solving word problems can be a real challange for 10–14 year old pupils. First, they have to create a mathematical model based on the text, usually leading to an equation, then they have to solve the equation.

First of all, we have to teach how the proper model can be found (which is difficult in itself), then we have to teach the steps of solving the equations, which, though a strong tool, is also difficult to teach.

But what if we could interpret the text in such a way that it would not only help create a direct solution, but also, helped experiencing the methods we use when solving an equation.

There are several problems which come from folklore and are given to children as trick questions. We examine how these can be linked to methods of solving equations and how they can help understanding modelling word problems.

2.3 *Zsuzsanna Jánvári: Interesting answers to open-ended descriptive statistics questions from 12th grade students*

Abstract: In March 2020, an „unusual descriptive statistics worksheet“ was filled in involving three secondary schools. The survey was completed by 9 groups of 8 teachers, a total of 158 students. The worksheet consisted of 3 tasks with questions on mean values, diagrams and dispersion indicators, with 3–4 items per task. In this presentation, I would like to speak about the characteristics of the answers to open-ended sub-questions, through some interesting student solutions.

2.4 *Johann Sjuts: Metakognitive Prozesse in Aufgabenbearbeitungen*

Abstract: Um Metakognition innerhalb von Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen in Mathematik geht es in dem vorgesehenen Kurzvortrag. Im Mittelpunkt steht ein strukturiertes und systematisches Instrumentarium zur Erfassung und Bewertung von Metakognition in Aufgabenlösungen. Zur Sprache kommen

- Möglichkeiten von Aufgabengestaltung und -umgestaltung zur Anregung von Metakognition,
- kognitive Verzerrungen,
- schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben,
- ein Ansatz zur Rekonstruktion metakognitiver Prozesse in Aufgabenbearbeitungen anhand eines entsprechenden Kategoriensystems sowie
- ein Einstufungssystem zur Intensität metakognitiver Aktivitäten.

3 Aktuelle Informationen zur Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ (Johann Sjuts)

Der Band 4 der von Éva Vásárhelyi und Johann Sjuts im WTM-Verlag herausgegebenen Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ wird im Laufe des Sommers fertig werden: Gabriella Ambrus & Johann Sjuts & Éva Vásárhelyi (Hrsg.): *Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche. Förderung für Talentierte und Interessierte über Grenzen hinweg*.

Zum Band 5 mit dem Titel *Mathematik und mathematisches Denken* werden erste Ideen erörtert.

4 Sonstiges (Gabriella Ambrus, Ödön Vancsó)

Auf CERME 13 (The 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) wird hingewiesen. Die Tagung findet vom 9. bis zum 14. Juli 2023 in Budapest statt.

Gabriella Ambrus, Eötvös Loránd Universität Budapest
E-Mail: ambrus.gabriella@ttk.elte.hu

Johann Sjuts, Universität Osnabrück
E-Mail: sjuts-leer@t-online.de

Arbeitsgruppe: PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Online-Sommertagung, 20.–21. 5. 2021

Roland Rink und Daniel Walter

Die fünfte Sommertagung der AG ‚PriMaMedien – Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe‘ fand am Freitag, 20. 5. 2022 und Samstag, 21. 5. 2022, im Onlineformat statt. 59 Teilnehmer*innen aus Praxis und Forschung tauschten sich im Rahmen von 16 Vorträgen über innovative Unterrichtsideen sowie aktuelle Forschungsprojekte zum Einsatz digitaler Medien in den Klassenstufen 1 bis 6 aus:

- Stephan Tomaszewski (TU Dortmund/WWU Münster): *Begriffsbildungsprozesse in digital-kollaborativen Lernumgebungen – Einsatzmöglichkeiten der digitalen Pinnwand Padlet zur Unterstützung mathematischer Diskurse*. Im Beitrag wurden Einsatzmöglichkeiten und Potentiale digitaler Medien (insbesondere Padlet) für fachbezogenes und kollaboratives Arbeiten durch angehende Lehrkräfte vorgestellt. Erste Ergebnisse eines Dissertationsprojekts zu Herausforderungen und möglichen Gelingensbedingungen wurden diskutiert.
- Jessica Kunsteller (WWU Münster): *Grundschulkinder erstellen Erklärvideos – Über Regeln und Nor-*

men an Erklärungen. Die Nutzung von Erklärvideos hat (nicht erst seit der Covid-19-Pandemie) stärkere Beachtung gefunden. Die Autorin untersucht in ihrem qualitativ ausgerichteten Forschungsprojekt, welche Regeln und Normen Zweit- bis Viertklässler*innen ansetzen, wenn sie Erklärvideos für andere Schüler*innen entwickeln.

- Andrea Baldus, Yannick Becker, Hannah Vonstein, Willy Noll und Lara Gayer (TU Dortmund): *divomath - Zielsetzungen und Aufbau einer digitalen verstehensorientierten Lernumgebung zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Im Beitrag wurde ein Projekt vorgestellt, das die Entwicklung einer verstehensorientierten digitalen Lernumgebung für den Präsenzunterricht vorsieht. Es wurden theoretische Grundlagen, die konzeptionelle Ausgestaltung sowie Einblicke in ausgewählte Unterrichtseinheiten dargelegt und diskutiert.
- Petra Heß (TU Dortmund): *Kinder erstellen Videos für Kinder – Potentiale bei der Produktion und Reflexion von Erklärvideos im Zahlenraum bis 20.* Im Rahmen des vorgestellten Dissertationsprojektes erstellen Kinder Erklärvideos, die mittels einer App aufgezeichnet werden. Anschließend reflektieren die Kinder die entstandenen Videos. Im Vortrag wurde der theoretische Hintergrund sowie der Forschungsansatz erläutert. Anschließend wurden das Design der Lernumgebung und Beispielvideos sowie der derzeitige Auswertungsstand vorgestellt. Abschließend werden erste Einblicke in den aktuellen Stand der Auswertung gegeben.
- Meike Böttcher, Lara Huethorst (TU Dortmund) und Daniel Walter (Universität Bremen): *FALEDIA – Entwicklung und Erforschung einer digitalen Lernplattform zur Steigerung von Diagnosefähigkeiten.* Es besteht in der Mathematikdidaktik dahingehend Konsens, dass Schülerinnen und Schüler idealerweise diagnosegeleitet gefördert werden sollen. Im Vortrag wurde der derzeitige Stand der Entwicklung und Erforschung einer digitalen Lernplattform vorgestellt, die zur Steigerung von Diagnosefähigkeiten angehender Grundschullehramtsstudierender beitragen kann.
- Christoph Schäfer (TU Chemnitz): *Fermi-Aufgaben mit dem digitalen Forscherheft bearbeiten.* Eigene Vorgehensweisen werden vielfach in sog. Forscherheften bearbeitet – dies kann auch digital geschehen und dadurch durch fachdidaktische Potenziale digitaler Medien angereichert werden. Im Vortrag wurden eine konzipierte Lernumgebung in ihren Grundzügen vorgestellt und erste Erfahrungen und Erkenntnisse aus einer Pilotstudie dargelegt und diskutiert.
- Heiko Etzold (Universität Potsdam) und Günter Krauthausen (Universität Hamburg): *Digitale Experimentierumgebungen.* Derzeit dominieren in den AppStores vornehmlich solche Anwendungen, die nicht das aktive Mathematiktreiben von Lernenden, sondern vielmehr die Anwendung von Rechenverfahren befördern. Im Vortrag wurde als Gegenpol eine mathematikdidaktisch fundierte Experimentierumgebung zu einem ausgewählten Inhalt (vgl. „klein, aber fein“) vorgestellt.
- Andreas Leinigen (JLU Gießen): *Erklären und Veranschaulichen im Lehrfilm – Kinder erstellen Lehrfilme über die schriftliche Subtraktion.* In dem vorgestellten Dissertationsprojekt produzieren Schülerinnen und Schüler in Gruppen einen eigenen Lehrfilm über das schriftliche Rechenverfahren der Subtraktion. Im Vortrag wurden der aktuelle Stand des Projektes präsentiert sowie Interaktionen der Schülerinnen und Schüler vorgestellt. Im Anschluss wurde gemeinsam diskutiert, wie die Produktion von Lehrfilmen das Verständnis zu Themen der Grundschulmathematik begünstigen könnte.
- Ulrich Schwätzer (Universität Duisburg-Essen): *KST-digital: Ein bewährter Eingangstest mit Bild-Sachaufgaben in digitalem Gewand.* Um Rechenschwierigkeiten möglichst vorzubeugen, ist die Erfassung von Lernständen bereits zum Schulanfang zentral. Der KST-digital kann diejenigen Kinder identifizieren, die Gefahr laufen, Rechenschwierigkeiten zu verfestigen. Im Vortrag wurden sowohl Einblicke in die Entwicklung des digitalen Tests, in seinen schulpraktischen Einsatz, als auch in Ergebnisse einer Implementierungsstudie mit $N = 113$ Kindern gegeben.
- Simeon Schwob (WWU Münster) und Paul Gudladt (Universität Oldenburg): *Potenziale von digitalen Online-Meetings für die Teilhabe am inklusiven Mathematikunterricht nutzbar machen.* In den vergangenen beiden Jahren ist die Nutzung von Online-Meeting-Tools verstärkt in die Praxis des Mathematikunterrichtens eingebunden worden, da hierdurch synchrones Distanzlernen realisiert werden konnte. Im Vortrag wurden anhand von interpretativ analysierten Transkriptsausschnitten, die im Rahmen fachdidaktischer Seminare entstanden sind, Potenziale für das Design der künftigen Lernumgebungen abgeleitet.
- Frederik Dilling und Amelie Vogler (Universität Siegen): *Computer-Aided-Design durch Blockprogrammierung – Ein Lernsetting mit Potenzial zur Förderung und Vernetzung algorithmischen und räumlichen Denkens.* Die Förderung algorithmischen Denkens als Teil der informatischen Grundbildung gilt als ein bedeutendes Ziel des Unterrichts der Grundschule, die auch im Fach

Mathematik etwa durch Blockprogrammierung von 3D-Modellen umgesetzt werden kann. Im Vortrag wurde eine Fallstudie zur Untersuchung des Lernprozesses eines Schülers in einer solchen Lernumgebung mit Bezug auf das algorithmische Denken, das räumliche Denken und die Verwendung mathematischen (Vor-)Wissens vorgestellt.

- Kerstin Bräuning, Georg Pfeiffer (MLU Halle-Wittenberg) und Birgit Brandt (TU Chemnitz): *Digitale Dokumentation kreativ gestalteter Mathematik mit der Tablet-App Book Creator.* Kinder werden kreativ gestaltend mathematisch tätig basierend auf dem Konzept „Gleiches Material in großer Menge". Dieses bewährte Konzept wurde digital unter Verwendung der App Book Creator umgesetzt. Im Beitrag wurden das Konzept sowie Einblicke in Vorgehensweisen von mathematisch interessierten Viertklässler*innen vorgestellt.
- Jonathan von Ostrowski (Universität Bremen): *Raumvorstellung durch virtuelle Aufgaben in Tinkercad fördern*. Die Förderung der Raumvorstellung ist ein wesentliches Ziel des Geometrieunterrichts in der Grundschule. Die 3D-Entwicklungsplatform Tinkercad bietet Chancen, Komponenten der Raumvorstellung zu fördern. Im Vortrag wurden Einblicke in die Erprobung bei Grundschüler:innen gegeben, Potentiale aufgezeigt und zur Diskussion gestellt.
- Andrea Dettelbach (Universität Paderborn): *Operatives Verändern von einfachen Additionsaufgaben unter Nutzung der App „Rechenfeld" – Design einer Lernumgebung*. Der Aufbau von Operationsvorstellung ist ein zentrales Ziel für den Mathematikunterricht der Grundschule. Im Vortrag wurde eine Lernumgebung zur Vertiefung des Operationsverständnisses vorgestellt, die die App Rechenfeld und die dort umgesetzte synchrone Vernetzung von Darstellungen als ein digitales Werkzeug nutzt.
- Julia Stark und Daniela Götze (WWU Münster): *Praktiken des Einsatzes einer App zur Förderung der Anteilvorstellung.* Schwierigkeiten beim Umgang mit Brüchen sind in der Forschung vielfach dokumentiert und das obwohl Lernende bereits im Alltag und der Grundschule erste Erfahrungen in dem Themenfeld sammeln. Die App Partibo, welche eine Handlungsorientierung mit einer digitalen Verarbeitung der Handlung verknüpft, bietet Chancen zur Entwicklung einer anschlussfähigen Anteilvorstellung. Welche Potenziale sich in den unterschiedlichen Praktiken bieten und welche Konsequenzen sich daraus für die Lehrkraft ergeben, wurde anhand von Schüler*innenbeispielen im Vortrag dargelegt und diskutiert.
- Peter Ludes-Adamy (Universität Hamburg) und Mia Lücke (Universität Hannover). *Wie soll das denn funktionieren? – Inklusion und Digitalisierung – Umgang mit Herausforderungen in der Grundschule*. Digitalisierung und Inklusion stellen komplexe Herausforderungen der gegenwärtigen Unterrichtspraxis dar, die bislang meist entweder getrennt voneinander bearbeitet oder in ein Spannungsverhältnis zueinander gestellt werden. Im Vortrag wurden Potenziale sowie Möglichkeiten eines digitalisierten (Mathematik)unterrichts für die Realisierung von Inklusion in der Grundschule aufgezeigt.

Arbeitsgruppentreffen während der Herbsttagung des AK Grundschule

Am 11. und 12. 11. 2022 findet die Herbsttagung des AK Grundschule im Onlineformat statt, bei der die AG PriMaMedien mit einer Arbeitsgruppensitzung vertreten sein wird. Ulrich Schwätzer (Universität Duisburg-Essen) wird weiterführende Einblicke in das Projekt ‚KST-digital' geben, in dem ein bewährter Schuleingangstest zu arithmetischen Vorkenntnissen digital aufbereitet wird.

Einladung zur Mitarbeit

Informationen zur Arbeitsgruppe PriMaMedien sind im Internet unter www.pri-ma-medien.de zu finden. Interessierte sind herzlich eingeladen, sich aktiv in der Arbeitsgruppe zu engagieren, indem sie an den regelmäßigen Arbeitsgruppentreffen während der GDM-Jahrestagungen sowie der jährlich stattfindenden Herbsttagung des AK Grundschule teilzunehmen. Sofern Sie regelmäßig Informationen zu Aktivitäten der Arbeitsgruppe per Mail erhalten möchten, können Sie in den AG-Newsletter aufgenommen werden. Gerne können Sie sich hierzu formlos bei Roland Rink (rrink@uni-bremen.de) oder Daniel Walter (dwalter@uni-bremen.de) melden.

Roland Rink, Universität Bremen
E-Mail: rrink@uni-bremen.de

Daniel Walter, Universität Bremen
E-Mail: dwalter@uni-bremen.de

Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Einladung zur Herbsttagung, 7.–8. 10. 2022

Daniel Sommerhoff und Anke Lindmeier

Die Herbsttagung des Arbeitskreis Psychologie und Mathematikdidaktik wird am 7.–8. Oktober 2022 im Schloss Rauischholzhausen stattfinden. Informationen zum Arbeitskreis, aktuelle Hinweise zur Tagung sowie die Möglichkeit zur Anmeldung sind auf der Homepage des Arbeitskreises zu finden: akpsy.didaktik-der-mathematik.de

Daniel Sommerhoff, IPN Kiel
E-Mail: sommerhoff@leibniz-ipn.de

Anke Lindmeier, Friedrich-Schiller-Universität Jena
E-Mail: anke.lindmeier@uni-jena.de

Nachruf auf Roland Mechling (2. 3. 1955–23. 4. 2022)

Hans-Jürgen Elschenbroich

Roland Mechling wurde nach dem Abitur 1974 in die Studienstiftung des Deutschen Volkes aufgenommen und begann ein Mathematik- und Physikstudium für das gymnasiale Lehramt an der Universität Karlsruhe, das er Ende 1979 abschloss.

Nach dem Referendariat trat er im Sommer 1981 seine Stelle am Okengymnasium in Offenburg an.

Zwei Hobbys haben ihn stets begleitet: zum einen Informatik und Programmieren, zum anderen die Musik, sowohl Musik hören (klassische Musik und Pop Musik) als auch Musik machen (Klavier und Gitarre).

Im Kreise der Mathematik-Lehrkräfte und Mathematik-Didaktiker ist er insbesondere durch die dynamische Mathematik-Software EUKLID DynaGeo bekannt geworden. Mit der Entwicklung und Programmierung war er dann über Jahre hinweg beschäftigt und sehr erfolgreich.

Hier sei kurz erwähnt, dass das Projekt 1994 im Rahmen einer Informatiklehrer-Fortbildung begann. Damals gab es schon dynamische Geometrie-Software (z. B. Cabri Géomètre), die unter dem Betriebssystem DOS lief und die DOS-typischen Beschränkungen hatte. Roland Mechling programmierte dann seine Software unter Turbo Pascal für Windows, die sofort auf enormes Interesse stieß. Von den ersten Anfängen 1994 bis 2016 wurde das Programm kontinuierlich weiterentwickelt. Neben der Geometrie kamen die Funktionen hinzu und die Möglichkeit, die einzelnen Konstruktionen auch in einer Web-Umgebung als interaktive Arbeitsblätter zu präsentieren. Lange Zeit war er mit seinem Programm Marktführer im deutschsprachigen Bereich und hat die Entwicklung des Mathematikunterrichts mit digitalen Werkzeugen entscheidend beeinflusst, ja geprägt.

Wer sich tiefer damit beschäftigen möchte, findet Details zur Entwicklungshistorie auf www.dynageo.de/euklid/eukl_hist.html, zur Versionsgeschichte auf www.dynageo.de/discus/messages/4/10.html?1462092596 sowie zu den mathematischen und informatischen Hintergründen auf www.dynageo.de/euklid/eukl_vi.html.

2015 kam die Diagnose einer schweren Krankheit, die dazu führte, dass er bald die weitere Entwicklung seines Programms einstellen musste. Nach schweren Jahren, die ihn schließlich 2021 ins Emmi-Seeh-Heim in Freiburg führten, verstarb er dann friedlich im Kreise der Familie.

Alle, die ihn kannten oder auch nur seine Software genutzt hatten, sind tief betroffen. Aber vieles, was er an Funktionalitäten entwickelt hat, wurde zum Quasi-Standard der Mathematik-Software und lebt so heute in anderen dynamischen Mathematik-Programmen weiter.

Hans-Jürgen Elschenbroich
E-Mail: juergen@elschenbroich.eu

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

- *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg. Tel.: 0821 . 598-2494 reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
- *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641 . 99-32221, katja.lengnink@math.uni-giessen.de
- *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31, 06110 Halle (Saale). Tel. 0345 . 5523-880, torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de
- *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für grundlegende und inklusive mathematische Bildung, Fliednerstraße 21, 48149 Münster. Tel. 0251 . 83-39304, daniela.goetze@uni-muenster.de
- *Geschäftsführung:* Karoline Haier, Tel. 0176 . 52758906, geschaeftsfuehrung@didaktik-der-mathematik.de
- *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
- *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

■ Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze
■ Grafische Gestaltung: Christoph Eyrich, Berlin ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

Neuerscheinungen im WTM-Verlag

stein-wtm@outlook.de
+49 172 534 09 00
http://wtm-verlag.de


Alfred Dominik, Karl Josef Fuchs & Simon Plangg
Mathematik in den Sekundarstufen 1 & 2
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Skripte zur Mathematik und ihrer Didaktik 7

A. Dominik, K.-J. Fuchs & S. Plangg: *Mathematik in den Sekundarstufen 1 & 2. Aufgaben für Lehramtsstudierende und didaktisch-methodische Kommentare.* Band 7 der Reihe Skripte zur Mathematik und ihrer Didaktik. Münster: WTM-Verlag 2022. Ca. 1120 S., 17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-219-5
Print 19,90 €

ISBN 978-3-95987-220-1
E-Book 18,90 €

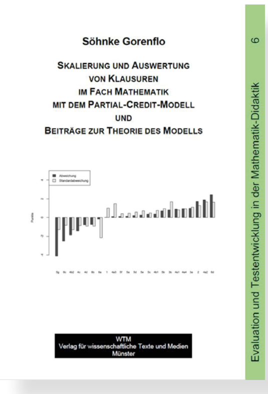

Dirk Eikmeyer
Professionalisierung von Studierenden im Praxissemester
Untersuchungen zur Wirksamkeit des Praxissemesters auf die berufsbezogenen Überzeugungen von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik(G)
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Schriften zur allgemeinen Hochschuldidaktik 7

D. Eikmeyer: *Professionalisierung von Studierenden im Praxissemester. Untersuchungen zur Wirksamkeit des Praxissemesters auf die berufsbezogenen Überzeugungen von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik(G).* Band 7 der Reihe Schriften zur allgemeinen Hochschuldidaktik. Münster: WTM-Verlag 2021. Ca. 410 S., davon viele farbig 17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-095-5
Print 46,90 €

ISBN 978-3-95987-096-2
E-Book 42,90 €

• • • • • •


Söhnke Gorenflo
Skalierung und Auswertung von Klausuren im Fach Mathematik mit dem Partial-Credit-Modell und Beiträge zur Theorie des Modells
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Evaluation und Testentwicklung in der Mathematik-Didaktik 6

S. Gorenflo: *Skalierung und Auswertung von Klausuren im Fach Mathematik mit dem Partial-Credit-Modell und Beiträge zur Theorie des Modells.* Band 6 der Reihe Testentwicklung und Eva-luation in der Mathematik-Didaktik. Münster: WTM-Verlag 2021. Ca. 230 S., DIN A5.

ISBN 978-3-95987-095-5
Print 42,90 €

ISBN 978-3-95987-096-2
E-Book 39,90 €


Martin Jungwirth, Nina Harsch, Yvonne Noltensmeier, Martin Stein & Nicola Willenberg (Hrsg.)
Diversität Digital Denken
The Wider View
Eine Tagung des Zentrums für Lehrerbildung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 08. bis 10.09.2021
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Schriften zur allgemeinen Hochschuldidaktik 8

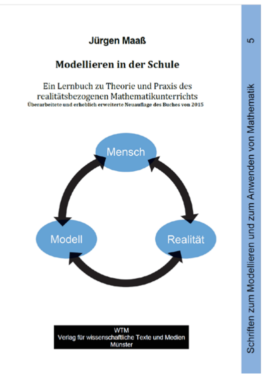
M. Jungwirth, N. Harsch, Y. Noltensmeier, M. Stein, N. Willenberg (Hrsg.): *Diversität Digital Denken – The Wider View. Eine Tagung des Zentrums für Lehrerbildung der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 08. bis 10.09.2021.* Band 8 der Reihe Schriften zur allgemeinen Hochschuldidaktik. Münster: WTM-Verlag 2022. Ca. 470 S., davon viele farbig. 17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-177-8
Print 66,90 €

ISBN 978-3-95987-178-5

E-Book 60,90 €

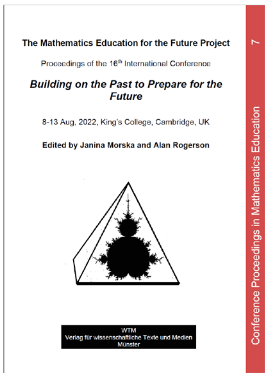
• • • • • •


Jürgen Maaß
Modellieren in der Schule
Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik 5

Maaß, J.: *Modellieren in der Schule - Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.* Überarbeitete und erweiterte Neuauflage. Münster: WTM-Verlag 2022, ca. 250 S., DIN A5.

ISBN 978-3-95987-201-0
Print 39,90 €

ISBN 978-3-95987-202-7
E-Book 36,90 €

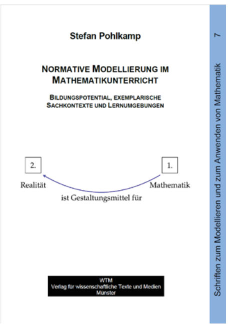

The Mathematics Education for the Future Project
Proceedings of the 16th International Conference
Building on the Past to Prepare for the Future
8-13 Aug. 2022, King's College, Cambridge, UK
Edited by Janina Morska and Alan Rogerson
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Conference Proceedings in Mathematics Education 7

J. Morska & A. Rogerson: *Building on the Past to Prepare for the Future. Proceedings of the 16th International Conference.* King's College, August 8 - 13, 2022. Band 7 der Reihe Conference Proceedings in Mathematics Education. Münster: WTM-Verlag 2022. Ca. 600 S., DIN A5.

ISBN 978-3-95987-217-1
Print 69,90 €

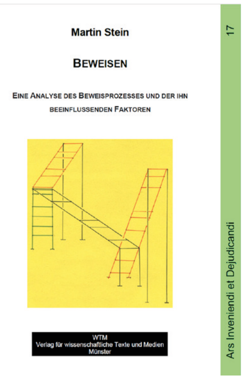
ISBN 978-3-95987-218-8
E-Book 60,90 €

• • • • • •


Stefan Pohlkamp
Normative Modellierung im Mathematikunterricht
Bildungspotential, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik 7

S. Pohlkamp: *Normative Modellierung im Mathematikunterricht. Bildungspotential, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen.* Band 7 der Reihe Schriften zum Modellieren und Anwenden von Mathematik. Münster: WTM-Verlag 2022. Ca. 340 S., 17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-187-7
Print 49,90 €


Martin Stein
Beweisen
Eine Analyse des Beweisprozesses und der ihn beeinflussenden Faktoren
WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster
Ars Inveniendi et Dejudicandi 17

M. Stein: *Beweisen. Eine Analyse des Beweisprozesses und der ihn beeinflussenden Faktoren.* Band 17 der Reihe Ars Inveniendi et Dejudicandi. Münster: WTM-Verlag 2022. Ca. 380 S., 17 cm x 24 cm.

ISBN 978-3-95987-213-3
Print 57,90 €

ISBN 978-3-95987-214-0
E-Book 52,90 €