

MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK



3. 14159265358979323846
2643383279502884197169
3993751058209749445923
0781640628620899862803
4825342117067982148086
5132823066470938446095
5058223172535940812848
1117450284102701938521
1055596446229489549303
8196442881097566593344
6128475648233786783165
2712019091456485669234
6034861045432664821339
3607260249141273724587
0066063155881748815209
2096282925409171536436
7892590360011330530548
8204665213841469519415
1160943305727036575959
1953092186117381932611
7931051185480744623799
6274956735188575272489
1227938183011949129833
6733624406566430860213
9494639522473719070217
9860943702770539217176
2931767523846748184676
6940513200056812714526
3560827785771342757789



115

Juli 2023

Editorial: Ein Spaziergang mit dem bunten Hund

Vor fast 30 Jahren hat Erich Ch. Wittmann den Artikel „Wider die Flut der ‚bunten Hunde‘ und ‚grauen Päckchen‘“* veröffentlicht (Wittmann, 1994). In diesem kritisiert er das Lernen und Üben nach dem Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte sowie der monotonen, stereotypen und zusammenhangslosen Aufgabenstellungen, die weitgehend von außen kontrolliert werden müssen. Eine Form dieser Außenkontrolle stellen die „bunten Hunde“ dar. Darunter versteht Wittmann (1994) eine vermeintlich spielerische Übungsform, bei der das Ausrechnen einer Serie von gleichförmigen Aufgaben mit dem Ausmalen eines Bildes verbunden wird. Die Ergebnisse werden Farben zugeordnet, nach denen ein vorgegebenes Bild – quasi als Belohnung für das mühsame Rechnen – ausgemalt werden darf. Wittmann (1994) illustriert diese Übungsform an einem Bild von einem Hund (daher auch der Name „bunter Hund“), aber natürlich gab und gibt es zahlreiche solcher Ausmalbilder mit allen erdenklichen Alltagsgegenständen und Tieren, bei denen die Kinder Aufgaben ausrechnen, das Ergebnis einer Farbe zuordnen und ein Ausmalbild entsprechend anmalen sollen. Der „bunte Hund“ ist nur ein Beispiel, das Wittmann (1994) aufführt, um zu verdeutlichen, dass eine Vielzahl der Übungsangebote im Mathematikunterricht von einem uniformen Strickmuster nach dem Reiz-Reaktion-Schema geprägt ist. Setzt die Übungspraxis im Mathematikunterricht verfrüht und zu stark auf monotonen Üben, führt dies zum oberflächlichen Anlernen von unverständlichen Rezepten und Routinen und ist daher nicht auf Langzeiterfolge ausgelegt (Wittmann, 1994). Fast 30 Jahre später findet man insbesondere im Internet und dort auf den zahlreichen Lehrerplattformen nach wie vor eine Fülle von Arbeitsblättern mit monotonen, stereotypen und zusammenhangslosen Aufgabenstellungen. Das langweilige Üben wird durch schmückende Illustrationen und andere Formen der Verschönerungen aufgewertet.

Kürzlich durfte ich allerdings eine neue Form der „bunten Hunde“ kennenlernen. Diese „Begegnung“ war in gewisser Weise für mich doch einschneidend, sodass ich sie zum Gegenstand dieses Editorials machen *muss*. Ich war zu Besuch in einer ersten Klasse in einer Schule mit einem herausfordernden sozialen Umfeld. Gegenstand der Stunde sollte das additive Rechnen im Zwanzigerraum darstellen. Dabei wurden vor allem Aufgaben mit der Summe größer als zehn geübt. Die Lehrkraft kündigte den Kindern an, dass sie heute einen „Rechenspaziergang“ machen würden. Auch wenn ich mit diesem Übungsformat zunächst gar nichts anfangen konnte und mich der

Name etwas irritierte – ich hatte diesen Ausdruck wirklich vorher noch nicht gehört –, so konnte ich mir doch einige sinnvolle Aktivitäten darunter vorstellen. Vielleicht sollte es um den Zusammenhang zwischen Aufgaben gehen und darum, wie man einfach von einer zur anderen Aufgabe *gehen* bzw. *spazieren* kann. Somit lauschte ich zunächst noch tiefenentspannt und dann zunehmend nicht mehr tiefenentspannt den weiteren Ausführungen. Die Kinder mussten eine zusammenhangslose Serie von insgesamt zehn Aufgaben ausrechnen. Wenn die Kinder ein Ergebnis ermittelt hatten (z. B. $6 + 5 = 11$), sollten sie im Klassenzimmer nach der entsprechenden Ergebniszahl suchen. Unter dieser Ergebniszahl hing eine Tierkarte (z. B. ein Schmetterling). Die Kinder mussten sich dieses Tier merken, an ihren Platz zurückgehen, aus einem Ausschneidezettel die entsprechende Tierkarte ausschneiden und neben den ausgerechneten Term kleben. Dabei waren die Aufgaben so gewählt, dass jedes Ergebnis von elf bis 20 genau einmal vorkam. Am Ende der Stunde wurde die aufgeklebte Reihenfolge der Tiere verglichen, also z. B. „Schmetterling, Raupe, Hund, Biene ...“. Strategien, die helfen können, Additionsaufgaben, deren Ergebnisse größer als zehn sind, zu rechnen, wurden nicht besprochen. Gleichwohl bestimmten fast alle Kinder die Ergebnisse zählend. Die Phase des Suchens und Findens der Ergebniszahlen im Klassenraum verlief absolut diszipliniert. Die Kinder haben nicht lauthals verraten, an welcher Stelle im Klassenzimmer die einzelnen Ergebnisse zu finden waren. Klebestift und Schere teilten die Kinder hilfsbereit untereinander. Sie haben stets diszipliniert und sozial agiert. Aus mathematikdidaktischer Sicht fühlte ich mich allerdings, als ob ich mit dem „bunten Hund“ durch den Klassenraum spazieren gegangen wäre. Ich spürte regelrecht, wie er an der Leine neben mir herlief und mir freundlich zuwedelte.

Zurück im Büro habe ich nach dem Rechenspaziergang gegoogelt und musste feststellen, dass es auf www.eduki.de bereits 989 vorgefertigte Rechenspaziergänge gibt. An dieser Stelle wurde mir bewusst, dass sich der „bunte Hund“ in den letzten 30 Jahren zwar verändert hat, aber irgendwie läuft er immer noch im Mathematikunterricht neben uns her.

Daniela Götze (Schriftführerin der GDM)

* Wittmann, E. Ch. (1994). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Band 1 (S. 157–171). Klett.

Inhalt

- 1 Editorial: Ein Spaziergang mit dem bunten Hund
 4 Grußwort des 1. Vorsitzenden

Magazin

- 6 *Horst Hischer*
 ChatGPT und Mathematikunterricht – eine didaktische Herausforderung?
 12 *Sebastian Schorcht, Lukas Baumanns, Nils Buchholtz, Judith Huget, Franziska Peters und Maximilian Pohl*
 Ask Smart to Get Smart: Mathematische Ausgaben generativer KI-Sprachmodelle verbessern durch
 gezieltes Prompt Engineering
 24 *Felicitas Pielsticker und Jacqueline Köster*
 Verbundprojekt MINT ins LAND (MiL)
 29 *Jenny Knöppel und Felicitas Pielsticker*
 Projekt Diagnosesprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen
 33 *Mohini Nonnenmann, Martin Vogt, Simone Bast und Karsten Lübke*
 Mathematik und Sprache – Textanalyse im Mathematikunterricht

Diskussion

- 39 *Hanns Sommer*
 Verstehen der Zahlen
 44 *Antonella Perucca*
 Soft skills for mathematical teachers

Aktivitäten

- 45 *Malina Abraham, Ömer Arslan, Marco Böhm, Norbert Noster und Franziska Tilke*
 Neues aus der GDM-Nachwuchsvertretung

Arbeitskreise

- 47 *Sarah Beumann, Sebastian Geisler und Dirk Weber*
 Arbeitskreis: Affekt, Motivation und Beliefs
 48 *Rowena Merkel und Martin Abt*
 Arbeitskreis: Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik
 49 *Christine Bescherer, Laura Degenhardt, Andrea Hoffkamp, Kerstin Koch, Paul Kraft,
 Stefanie Rach, Nicolas Regel, Angela Schmitz und Michael Schröder*
 Arbeitskreis: Hochschulmathematikdidaktik
 52 *Franziska Strübbe, Katja Lengnink und Tim Lutz*
 Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore
 54 *Tanja Hamann und Stefan Pohlkamp*
 Arbeitskreis: Mathematik und Bildung
 55 *Astrid Brinkmann, Matthias Brandl und Thomas Borys*
 Arbeitskreis: Vernetzungen im Mathematikunterricht

Grußwort des 1. Vorsitzenden

Heute komme ich gleich zum kritischen Punkt. Wenn Sie Physik studiert haben, erinnern Sie sich bestimmt an das Experiment, in dem in einem abgeschlossenen Glasgefäß z. B. ein Fluorchlorkohlenwasserstoff (FCKW) oder das PFAS aus einer Wärmepumpe sowohl flüssig als auch in einer darüberliegenden Dampfatosphäre gasförmig vorliegt und erhitzt wird. Wenn der Druck im Gefäß richtig gewählt ist, kann man es einrichten, dass beim Erwärmen die Grenzlinie zwischen der Flüssigkeit und dem Gas auf der gleichen Höhe bleibt bis – beim kritischen Punkt – die Trennlinie plötzlich verschwindet. Davor befand sich unten Flüssigkeit und oben Gas, klar getrennt, und danach? Ist das Gas, oder Flüssigkeit, oder deren dialektische Aufhebung?

Bevor man den Phasenübergang am kritischen Punkt zu frei auf alle möglichen Unterschiede überträgt, sollte man sich klar machen, dass metaphorisches Denken fehleranfällig ist. So vorgewarnt stellt sich die Frage, ob es das Phänomen in der Mathematikdidaktik auch gibt. Ich selbst würde die Frage bejahen, sonst hätte ich sie nicht gestellt. Ein Beispiel, das mich in den letzten Monaten beschäftigt hat, ist die Beziehung von Beweisen und Programmen. Nun wird niemand erwarten, dass man in einem „Siehe-Beweis“ (einem „proof-without-words“) einen Algorithmus erkennt. Ebenso wenig dürfte man beim Anblick einer Programmzeile, in der eine Funktion auf ein Argument angewendet wird, ein Stück mittelalterlicher Logik sehen. Die Welten von Programmen und Beweisen scheinen ebenso grundverschieden wie die Aggregationsformen Flüssigkeit und Gas. Der Parameter, an dem man drehen muss, um zum kritischen Punkt zu kommen, ist der der Formalisierungsgrad. Wenn man Beweise formal korrekt aufschreibt, und wenn man Programme in einer hinreichend ausdrucksstarken Programmiersprache (an dieser Stelle sind C, Java und Python leider draußen, man denke an Racket, Haskell oder OCaml), dann verschwindet die Grenzlinie. Dies ist eine bemerkenswerte Erkenntnis, die eine lange Genese gebraucht hat. Vor 89 Jahren hat der Logiker Haskell Curry gesehen, dass die Regeln für Datentypen in einer abstrakten Programmiersprache (dem typisierten Lambda-Kalkül) und die Schlussregeln der intuitionistischen Aussagenlogik formal von gleicher Struktur sind.

Später hat man gesehen, dass sich das präzise zu einem Isomorphismus von Beweisen und Programmen ausbauen lässt und sogar, dass sich auch die Prädikatenlogik erschließt, wenn das System der Datentypen hinreichend flexibel ist. Schon das ist eine beeindruckende Theorie und man mag sich fragen, was es bedeutet, dass Logiker und Informatiker unabhängig voneinander exakt die gleiche Theorie geschaffen haben. Lange gab es aber den Makel, dass das ganze Theoriegebäude nur für intuitionistische Varianten der Logik gilt, d. h. der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, also auch Widerspruchsbeweise und damit erhebliche Teile der Beweise der klassischen Mathematik, waren jenseits der Reichweite der Theorie. Aber auch diese Grenze ist gefallen. Diesmal war es so, dass die Informatiker schon lange eine Kontrollstruktur erfunden hatten (für Kenner: Continuations), von der sich zeigte, dass sie genau das leistet, was man auf der Seite der Logik braucht, um die volle klassische Prädikatenlogik zu erschließen. Seitdem kann man also mit Fug und Recht festhalten, dass Beweise und Programme genau das gleiche sind, nur in unterschiedlicher Syntax hingeschrieben. Was für eine kopernikanische Kränkung! Beweise, die Träger des konzeptuellen Wissens der Mathematik, sind nichts anderes als schnöde Produkte von Hackern.

So weit taugt das Ganze um intellektuelle Langeweile zu vertreiben. Hat es weitergehende Bedeutung für die Didaktik? Man könnte geneigt sein, das zu verneinen: Die Temperatur in der Didaktik ist so niedrig, dass immer klar ist, ob man mit Flüssigkeit oder Gas kocht, ob man beweist oder programmiert. Trotzdem seien ein paar Argumente genannt, für die ich mich erwärmen kann: Da ist zunächst das Verständnis unseres eigenen Faches: Mathematik wird oft charakterisiert als „deduktiv-beweisende“ Wissenschaft. Warum nicht als „konstruktiv-algorithmische“ Wissenschaft, wie man mit gleichem Recht sagen könnte? Und: Logisches Denken und algorithmisches Denken sind nicht das Gleiche. Wo zwischen der Theorie, in der Identität herrscht, und der Praxis des Denkens und Argumentierens liegen die entscheidenden Unterschiede? Sollte es nicht eine didaktische Antwort darauf geben, einfach um mathematisches Denken besser zu verstehen?

Aus historisch-genetischer Perspektive ist es interessant, dass erst relativ spät (vor gut 20 Jahren) erkannt wurde, dass nicht nur die intuitionistische Logik, sondern auch die klassische Logik in das Bild „Program=Proof“ (wie eines der Bücher zum Thema heißt) passt. Die Erweiterung hat einen Preis: Was auf der Seite der Logik die fast selbstverständlich scheinende Aussage, dass $A \vee \neg A$ wahr ist, erfordert auf der Seite der Programme nicht-lokale Kontrollfluss – eine Programmtechnik, die jeden Menschen mit begrenztem Arbeitsgedächtnis an Grenzen bringen kann. Liegt hier der tiefe Grund, warum Widerspruchsbeweise kognitiv anspruchsvoll sind? Auf Kalkülebene bedeutet der nicht-lokale Kontrollfluss, dass es nicht-lokale Beziehung gibt, die berücksichtigt werden müssen, wenn man die Programme ausführt. Man kann spekulieren, dass es deswegen besonders schwer ist, logische Argumentationsmethoden allein durch lokale Beobachtung des Sprachspiels (wie Sprachmodelle das tun) zu erlernen. Man kann aber auch in die andere Richtung denken: Small ist beautiful. Die Erweiterung auf die volle klassische Logik mag die Theorie zu einem beeindruckenden Gedankengebäude abrunden, aber besonders schön und stringent ist die Beziehung in der Tat, wenn man sich auf die intuitionistische Logik beschränkt, also konstruktive (nicht konstruktivistische!) Mathematik betreibt. Sollte man konstruktive Elementarmathematik genauer inspizieren? Brouwer hatte seinerzeit gegen die Autorität Hilberts keine Chance, aber vielleicht lohnt es sich, die unterschiedlichen Bildungsgehalte klassischer und konstruktiver Mathematik herauszuarbeiten und so vielleicht

auch zu einem besseren Verständnis der Genese der Mathematik aus operationaler Sicht zu kommen.

Vielleicht kann die Erkenntnis, dass Programme und Beweise das gleiche sind, auch die Rivalität von schulischer Informatik und Mathematik überwinden helfen. Wer wie ich schon etwas länger in der Didaktik aktiv ist, weiß, dass früher die Beschäftigung mit Algorithmen einen ausgesprochen schlechten Ruf hatte. Wer dafür geworben hat, konnte sich schon mal den Vorwurf einhandeln, seine Ziele seien „verrückt“. In der Informatikdidaktik gab es lange Diskussionen um die Gewichtung von informationstechnischer Grundbildung, in der Programme verwendet werden, und den eigentlichen Informatikunterricht, in dem auch programmiert wird. Welche Einschätzung des Mathematikunterrichts die Anwendung des Isomorphismus zwischen Programmen und Beweisen auf diese Unterscheidung nahelegt, überlasse ich den Lesenden als Übungsaufgabe.

Nach diesem Ausflug in möglicherweise wenig bekanntes Terrain wünsche ich Ihnen nun eine gewinnbringende Lektüre des vorliegenden Heftes. Vielleicht ist auch der ein oder andere Artikel so interessant, dass Sie ihn zweimal lesen: Dann haben Sie mit Ihrem Lesealgorithmus bewiesen, dass $A \wedge A \equiv A$ – aber ich bin sicher, die inhaltliche Erkenntnis des Artikel wird höher sein als diese formal-logische. In jedem Fall aber beweist das Heft, dass Mathematikdidaktik eine vielfältige und interessante Wissenschaft ist.

Reinhard Oldenburg
(1. Vorsitzender der GDM)

ChatGPT und Mathematikunterricht – eine didaktische Herausforderung?

Horst Hischer

Im April 2023 hatte ich beim Lesen der gerade erschienenen *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung* (2023, Jg. 31, Heft 1, S. 17 ff.) ein Déjà-vu-Erlebnis, das mich mental in die Anfänge der 1990er Jahre zurückversetzte: Bedingt durch die didaktisch zuvor noch wenig diskutierten neuen Computer-Algebra-Systeme (CAS) wurden im damaligen GDM-Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik“ in mehreren Tagungen mögliche Konsequenzen aus der offenbar für den Unterricht anstehenden Verfügbarkeit solcher Systeme unter Leitworten wie z. B. „Trivialisierung“ oder „Wieviel Termumformung braucht der Mensch?“ erörtert. Die erste Tagung zu diesem neuen Kontext fand 1991 statt, der zugehörige Tagungsband erschien 1992 unter dem Titel *„Mathematikunterricht im Umbruch? – Erörterungen zur ‚Trivialisierung‘ von mathematischen Gebieten und durch Hardware und Software“*. Im Vorwort liest man u. a. (vgl. Hischer 2016, S. 163):

Das Tagungsthema lautete: *Mathematikunterricht angesichts der „Trivialisierung“ mathematischer Gebiete durch Software und Hardware – Was muß sich ändern, was kann bleiben, was wird bleiben?“*

Und schon in der Tagungseinladung war zu lesen (a. a. O.):

Angesichts neuartiger sog. „Trivialisierer“ wie den Formelmanipulationssystemen (z. B. DERIVE) stellt sich mehr denn je die Sinnfrage: Warum treiben wir Mathematik, und warum unterrichten wir eigentlich (noch?) Mathematik? Brauchen wir vielleicht ein (verbindliches?) Fach Informatik, oder brauchen wir eher ein gewandeltes Fach Mathematik (und dann keinen Informatikunterricht in der Schule)? Wie kann, sollte, muß gar ein solches gewandeltes Fach Mathematik aussehen, und zwar in bezug auf Ziele, Inhalte und Methoden?

Diese und weitere Fragen kennzeichneten die schwierige Situation, denen sich der Mathematikunterricht bereits damals ausgesetzt sah.

Die nun seit dem 30. November 2022 dank der KI-Forschung und -Entwicklung via „ChatGPT“ verfügbaren neuen sog. „Chatbots“ wurden in Wikipedia seit dem 9. Dezember 2022 geradezu explosionsartig erörtert, und sie waren es auch Wert, in den DMV-Mitteilungen (s. o.) in zwei Beiträgen

kurz vorgestellt zu werden. Das ist der Anlass für diesen Essay, weil sich nun nach dreißig Jahren erneut grundlegende didaktische Fragen ergeben dürften.

Zur Situation

Mit Erstaunen werden manche in den o. g. *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung* vom Januar 2023 sowohl den Beitrag von Doris Weißels („ChatGPT – ein Meilenstein in der KI-Entwicklung“) als auch den von Brigitte Lutz-Westphal („ChatGPT und der Faktor ‚Mensch‘ im schulischen Mathematikunterricht“) gelesen haben, und manche Leserinnen und Leser mögen dabei vielleicht erstmals dem Akronym „ChatGPT“ begegnet sein. Worum geht es hier, in aller Kürze skizziert?

Bezüglich „KI“, der Abkürzung für „Künstliche Intelligenz“, sei angemerkt, dass dieser Terminus gemäß Walther von Hahn ein „*mißlungener Fachbegriff*“ sei, der „*mißverständlich und sicher ungeschickt*“ ist (von Hahn 1985, S. 27):

Das liegt in erster Linie daran, dass der Begriff „Artificial Intelligence“ (AI) wörtlich aus dem Englischen übersetzt wurde. Ein sprachliches Mißverständnis war damit vorprogrammiert, denn sowohl „artificial“ als auch „intelligence“ hat im Englischen eine wesentliche weitere und andere Bedeutung als „künstlich“ und „Intelligenz“ im Deutschen.

Und von Hahn ergänzt pragmatisch (a. a. O.):

Wir werden trotz der Vorbehalte [...] von „Künstlicher Intelligenz“ reden, da dieser Terminus inzwischen einen hohen Grad an wissenschaftlicher Eindeutigkeit erreicht hat.

So ging es ursprünglich *einerseits* in informatisch-technisch modellierender Weise um das Verständnis dessen, was denn „Intelligenz“ beim Menschen wohl substantiell sein könnte, dass dann aber *andererseits* das Ziel darin bestand, ob und wie man dieses „Intelligenz“ genannte Phänomen quasi „eigenständig“ durch materielle informatisch-technische Systeme modellieren bzw. simulieren kann, wobei dieser zweite Aspekt nunmehr im Fokus der Forschung und Entwicklung zur KI steht: Entwicklung eigenständig (oder „selbstständig“?) kommunizierender technischer künstlicher Sprachsysteme.

„Chats“ (also Plaudern oder Schwatzen) gehören für Jugendliche derzeit bereits zum Alltag ihres erweiterten neuen Kommunikationsverhaltens – aber (überraschenderweise?) betrifft das nicht nur sie, denn solche Chats finden nun weltweit in allen Altersgruppen statt: in der Familie, mit Freunden, mit Kollegen usw., sowohl ortsunabhängig als auch „just in time“, und nicht nur textlich, sondern bildhaft und auditiv, also audiovisuell: Sowohl technisch als auch kommunikativ ist das für viele fraglos eine Bereicherung! (Es sei angemerkt, dass so etwas bereits Ende der 1980er Jahre beispielsweise im niedersächsischen Projekt einer „informations- und kommunikationstechnologischen Bildung“ zwar immanent *angelegt* war, wenngleich es sowohl inhaltlich als auch expressis verbis *kaum angedacht* war – wie denn auch?)

Das „GPT“ in „ChatGPT“ steht für „Generative Pre-Trained Transformer“: ein „erzeugender, vortrainierter Umwandler“. Das ist zwar keine Definition, wohl aber ein inhaltlicher Hinweis: mit einem solchen „vortrainierten, lernfähigen“ System soll man also „plaudern“ können. So findet man (z. B. bei Wikipedia), dass ein „ChatGPT“ ein „Chatbot“ sei, der „künstliche Intelligenz“ einsetzt, um mit Nutzern über textbasierte Nachrichten kommunizieren zu können, basierend auf aktuellen „Lerntechniken“, um dann „Antworten“ zu generieren, die *wie natürlich wirken* und für das „Gespräch“ (sic!) relevant sein sollen. Der hier auftretende Wortbestandteil „Bot“ ist eine Abkürzung für „Roboter“ und meint *in diesem Kontext* ein Computerprogramm, das bestimmte Aufgaben quasi „selbstständig kommunizierend“ durchführt. Die Fachliteratur zu diesem so skizzierten Themenbereich wird rasant ansteigen, gewiss aber auch die pädagogisch und didaktisch konnotierte Literatur. Zwei aktuelle Aufsätze hierzu seien nachfolgend zunächst kurz referiert:

Doris Weßels: ChatGPT – ein Meilenstein in der KI-Entwicklung

Zu Doris Weßels, Wirtschaftsinformatikerin mit den Schwerpunkten „Projektmanagement“ und „Natural Language Processing“, findet man im WWW Videoclips, in denen sie zum „ChatGPT“ betreffenden Themenbereich interviewt wird und Stellung bezieht. Den erwähnten Beitrag in den DMV-Mitteilungen beginnt sie wie folgt:

Seit dem 30. November 2022 ist meine Welt – und die vieler Bildungsexpertinnen und Bildungsexperten – gefühlt eine andere Welt, die uns in eine „Neuzeit“ führt, von der wir noch nicht wissen, ob wir sie lieben oder fürchten sollen. Der Ableger und Prototyp ChatGPT des

derzeit (zumindest in der westlichen Welt) führenden generativen KI-Sprachmodells GPT-3 von OpenAI wurde am 30. November veröffentlicht und ist seit dieser Zeit für jeden frei zugänglich und kostenlos. Was zunächst als unspektakuläre Ankündigung von OpenAI anmutete, nämlich das seit 2020 bereits verfügbare KI-Sprachmodell GPT-3 nun in leicht modifizierter Version (GPT-3,5) als Chat-Variante für die Echtzeit-Kommunikation bereitzustellen, entpuppt sich in der Anwendung – aus Sicht der Nutzerinnen und Nutzer – als Meilenstein der KI-Entwicklung. [...]

Für den Bildungssektor stellt sich die Frage, wie sich das Lehren und Lernen an Hochschulen (und nicht nur dort) verändern wird, wenn derartige KI-Werkzeuge omnipräsent sind und mit ihrer Hilfe nicht nur die Hausarbeit „per Knopfdruck“ erstellt werden kann.

Sie präsentiert dann dazu zwei Anwendungsbeispiele von ChatGPT und stellt im ersten dem System folgende Aufgabe („Eingaben“ und „Ausgaben“ der Chatbots werden in den nachfolgenden Zitaten kursiv gesetzt):

Erstelle mir bitte einen Essay zu den Auswirkungen von generativen KI-Modellen für die Zukunft des Lehrens und Lernens an Hochschulen und berücksichtige bitte auch den Bereich der Forschung aus Sicht der Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen.

Hier wird man verwundert zur Kenntnis nehmen, dass man zunächst diesen Text per Tastatur „in“ ChatGPT eingeben soll, dass dieser Chatbot dann diesen Text „verstehen“ soll (und ihn tatsächlich „versteht“?) und dass dann dieser Chatbot dazu sogar eine umfängliche, detaillierte Antwort „ausgibt“, von der nachfolgend *nur der Anfang* wiedergegeben sei:

Generative KI-Modelle bieten für die Zukunft des Lehrens und Lernens an Hochschulen eine Vielzahl von Möglichkeiten und Herausforderungen. Durch ihre Fähigkeit, menschenähnliche Inhalte zu erzeugen, können sie das Lernen personalisieren und individuelle Bedürfnisse besser berücksichtigen. Zudem können sie das Lernen effizienter und zugänglicher machen, indem sie lernförderliche Inhalte in Echtzeit erstellen [...].

Nur zur Verdeutlichung: Diese sprachlich anscheinend „einwandfreie und geschliffene“ Antwort wurde von dem Chatbot „eigenständig“ (was bedeutet das eigentlich?) aufgrund der von einem Menschen „eingegebenen“ Aufforderung erstellt. Doch das ist nicht alles: Obige (hier nur als kleiner Ausschnitt wiedergegebene) „Antwort“ des Chatbot wird nun als *neue Eingabe* (sic!) an „ihn“ (oder

„sie“ oder „es“) betrachtet und dabei mit folgendem neuen „Auftrag“ versehen:

Bewerte aussagekräftig und ausführlich den nachfolgenden Text anhand dieser vier Kategorien, jeweils nach Schulnoten von 1 = sehr gut bis 5 = ungenügend:

K₁: Korrektheit der Aussagen,

K₂: Qualität des Aufbaus und der Argumentation,

K₃: Qualität der Diskussion und Reflexion und

K₄: Qualität der Sprache

und dem zuvor (von dem System selbst generierten) Text bereits sein vorhandenes Potenzial für das ‚Automated Essay Scoring‘, auch wenn es noch in den Kinderschuhen steckt.

Der Anfang der letzten beiden Zeilen ist wohl wie folgt zu verstehen: „und des (zuvor von dem System selbst generierten) Textes und des hier bereits vorhandenen Potenzials für ...“. Und dass die Note „5“ in der Schule traditionell mit „mangelhaft“ konnotiert wurde, hat dieser Chatbot wohl noch nicht „gelernt“ und also nicht bemängelt.

Hier hat nun der Chatbot auf den o. g. „Auftrag“ wie folgt „geantwortet“ (z. T. nur andeutungsweise wiedergegeben):

K₁: Die Aussagen in diesem Text sind korrekt und entsprechen dem aktuellen Stand der Technik.

K₂: Der Aufbau des Textes ist gut, indem er zunächst die Vorteile von generativen KI-Modellen im Bereich des Lehrens und Lernens und der Forschung darlegt, bevor [...].

K₃: Der Text diskutiert die Vorteile und Herausforderungen von generativen KI-Modellen [...].

K₄: Die Sprache des Textes ist klar und gut verständlich, wodurch er insgesamt eine sehr gute Qualität hat. Insgesamt würde ich dem Text eine Schulnote von 1 bis 2 geben.

Die Autorin verweist dann darauf, dass somit in einem „grotesken Gesamttablauf ‚nur‘ noch zwei KI-Prozesse interagieren würden“ und dass sich damit Studierende „durch Einsatz dieser Bewertungskriterien zuvor ‚optimierte‘ Texte produzieren (lassen) können“, und sie kommentiert:

Wir benötigen daher neue Lehr- und Lernsettings, die als zielführend und sinnstiftend sowohl von Lehrenden wie auch Lernenden empfunden werden.

Es folgen weitere interessante und zugleich beklemmende Ausführungen zu der aktuellen technischen Situation und einer (oder gar „der“?) zu erwartenden weiteren Entwicklung. Nur Folgendes sei hier abschließend auszugsweise zitiert:

Welche weiteren Auswirkungen ergeben sich durch diese Entwicklung für Suchmaschinenanbietet [...]? Wieso dort einen Begriff eingeben,

wenn moderne KI-Chatbots gleich eine komplette Erklärung liefern und ich weiter nachfragen kann? [...] Es geht bereits heute nicht nur um die „Macht der Sprache“, sondern es geht längst um die Macht der multimedialen Formate. [...] Die Zukunft der Bildung in einer multimodalen Welt generativer KI-Modelle fordert uns als Gestalterinnen und Gestalter von Bildungsprozessen mehr denn je heraus. Stellen wir uns der Herausforderung und punkten mit Adaptivität, Kreativität und Schnelligkeit. Abschließend bleibt uns eine Sicherheit in diesen unsicheren Zeiten: Die „Neuzeit“ wird uns fordern! Und hoffentlich auch in unserer Entwicklung fördern.

Brigitte Lutz-Westphal: ChatGPT und der Faktor „Mensch“ im schulischen Mathematikunterricht

Brigitte Lutz-Westphal beginnt ihren Beitrag im Anschluss an den von Doris Weßels mit folgender Frage:

Wenn Maschinen Fragen beantworten und Texte schreiben können, wenn sie diese sogar selbst nach Kriterien bewerten können und wenn es menschlichen Leser*innen schwerfällt, zu erkennen, ob ein Text von einem Menschen oder einer KI (künstlichen Intelligenz) erstellt wurde, was bedeutet das dann für das Lehren und Lernen?

Und sie ergänzt:

Eher als vermutet kann ChatGPT nicht nur Auskünfte zu einem vorgegebenen Thema, sondern auch Aufgaben, Testfragen, weitere Erläuterungen und Beispiele, ganze Erörterungen zu Diskussionsthemen, leicht fassliche Zusammenfassungen von komplexen Texten oder Themen, wie Nachrichten klingende Texte, Programmcode und vieles mehr erzeugen. Dies stellt sehr vieles, was wir bislang im Bereich von Forschen und Lernen für grundlegende Praktiken hielten, in Frage, auch wenn die von ChatGPT erzeugten Texte allesamt fiktional und aktuell inhaltlich teilweise stark fehlerhaft sind.

Das alles passt zu den skizzierten Erörterungen von Doris Weßels und meinem eingangs erwähnten Déjà-vu-Erlebnis, das sich mir spontan – wie schon notiert – bei jenem Essay einstellte. Beide Autorinnen sind fasziniert bzw. überrascht von den neuen Möglichkeiten, die mit diesen Chatbots einherkommen, begegnen ihnen aber nicht abweisend, sondern kritisch-konstruktiv: Chatbots werden wohl allgegenwärtig sein und „man“ muss lernen, damit souverän umzugehen.

Brigitte Lutz-Westphal zitiert dann, wie ChatGPT „seine Fähigkeiten“ (oder sollte man „ihre“ sagen?) selber (also quasi „selbstständig“) beschreibt, wobei sie am 15. 2. 2023 an ChatGPT die Anfrage (sic!) „Kann ChatGPT neues Wissen generieren?“ gestellt und darauf folgende „Antwort“ erhalten hat:

Insgesamt kann ChatGPT daher helfen, bestehende Informationen zu organisieren, zu strukturieren und zu interpretieren, aber es ist nicht in der Lage, menschliche Kreativität oder Innovation zu ersetzen.

Ist das tröstlich oder enttäuschend? – Immerhin werden wir uns wohl an die Möglichkeit derartiger „maschinellem Befragungen und Antworten“ gewöhnen müssen, so wie auch z. B. das Smartphone mit dem ortsunabhängigen weltweit jederzeit möglichen „Befragungszugriff“ per Google & Co. längst schon zur Selbstverständlichkeit geworden ist.

Und wie verhalten sich solche Systeme (derzeit noch) in Bezug auf Fragen und Aussagen zur Mathematik, also einem Aspekt, der für die Didaktik der Mathematik wesentlich ist? Brigitte Lutz-Westphal präsentiert dazu exemplarisch zwei „Gespräche“ (sic!) mit ChatGPT. Bei dem ersten geht es um Winkel, und ChatGPT „sagt“ bzw. „antwortet“ dazu u. a.:

*Wenn zum Beispiel eine Gerade die beiden parallelen Seiten eines Dreiecks schneidet [. . .]
Gegeben ist ein Rechteck mit einem Winkel von 45 Grad. Wie groß sind die anderen drei Winkel?*

Es kommt bei diesem Unsinn nicht auf die dem Chatbot gestellten Fragen an. Die Antworten sind einfach nur peinlich, aber sie könnten ein schönes Thema für den Unterricht sein. Aber vielleicht sind sie gerade deshalb tröstlich? Zumindest noch, bis „bessere“ Bots vorliegen? Das gilt auch für den Ausschnitt aus einem weiteren „Gespräch“, das die Autorin dankenswerterweise ebenfalls zitiert und das sich auf einen „*vermeintlichen Beweis des Satzes des Pythagoras*“ bezieht:

Da das rechtwinklige Dreieck ein rechtwinkliges Parallelogramm ist, gilt: $h = a + b$.

Nun folgt eine ausführliche, lesenswerte didaktische Kommentierung, die hier nicht wiedergegeben, sondern nur angedeutet werden kann, beginnend mit folgender Feststellung (auf S. 20 des Beitrags):

Die übergreifende Botschaft, vorsichtig im Umgang mit computergenerierten Informationen zu sein und das Vermitteln von Strategien, um kritisch und informiert damit umgehen zu können, stehen als Bildungsauftrag ganz im Vordergrund.

Und dann wird diskutiert, wie „wir“ uns verhalten müssten, wenn weiterentwickelte Chatbots solche Fehler wie die oben zitierten nicht mehr machen würden, was dann also wohl ein „*Ziel von Schule und Unterricht*“ (a. a. O.) wäre?

Doch da sind wir bei meinem eingangs zitierten Déjà-vu-Erlebnis: Denn wenn weiterentwickelte Chatbots auch den kommunikativen Umgang mit Elementen der Mathematik eines Tages „trivialisieren“ würden, zumindest bei der laienhaft oft so genannten „Schulmathematik“, so würde es nahe liegen, die beiden eingangs aufgeführten Zitate zu der Tagung von 1991 sinngemäß zu modifizieren. Dazu muss in Erinnerung gerufen werden, wie denn „Trivialisierung“ damals zu verstehen war: Dieser Terminus geht im Zusammenhang mit „Computeralgebrasystemen“ (CAS) auf Bruno Buchberger zurück, indem dieser die Frage stellte: „Should students learn integration rules?“ Und zwar definierte er, vgl. Hischer (2016, S. 165):

Ein mathematisches Gebiet heißt „trivialisert“, sobald ein ausführbarer und effizienter Algorithmus existiert, der jedes gegebene Probleme dieses Gebiets löst.

Und schon 1962 schrieben die Logiker und Mengentheoretiker Hermes und Markwald in dem Band 1 des von Behnke et al. herausgegebenen bedeutsamen Werks *Grundzüge der Mathematik*, vgl. Hischer (2016, S. 166):

Die Mathematiker haben nicht nur das Bestreben, Einsichten zu gewinnen und tiefliegende Sätze herzuleiten. Daneben bemühen sie sich ernstlich darum, allgemeine Methoden zu finden, mit deren Hilfe gewisse Klassen von Problemen systematisch behandelt und sozusagen automatisch gelöst werden können. Jede neu gefundene Methode ist ein Fortschritt der Mathematik. Damit wird allerdings der durch diese Methode beherrschte Aufgabenkreis trivialisert und hört auf, ein interessantes Gebiet der schöpferischen Mathematik zu sein.

Im Kontext der Didaktik der Mathematik wäre in diesem Sinne zu untersuchen, ob (und ggf. welche) „Gebiete“ im Zusammenhang mit der Mathematik schon jetzt oder in absehbarer Zeit durch das Auftreten solcher Chatbots möglicherweise „trivialisert“ werden. Ist es vielleicht das „Sprechen über Mathematik“ oder das „Darstellen mathematischer Sachverhalte“ oder . . . ? Das alles bedarf einer vertieften Diskussion mit einem derzeit möglicherweise noch offenen Ausgang. Aber die Verwendung solcher Chatbots zu verbieten, wird wohl weder sinnvoll noch möglich sein, wenn sie dann mal allgegenwärtig sein werden.

Lisa-Katharina Möhlen: Wie verändert ChatGPT unsere Schulen?

Unter dieser Überschrift erschien in der *Braunschweiger Zeitung* am 6. Mai 2023 ein Interview mit der Bildungswissenschaftlerin (TU Braunschweig und Universität Wien). Sie vertritt hier die Ansicht, dass der Einsatz solcher Chatbots auch in der Schule nicht aufzuhalten sei:

Die aktuelle Diskussion um ChatGPT und Digitalisierung im Schulwesen zeigt, dass die Art und Weise des Lehrens und Lernens nicht mehr zeitgemäß ist. Überspitzt gesagt, wird das deutsche Schulsystem mal wieder mit der eigenen Rückständigkeit konfrontiert. [...] Der Einsatz von KI und Chatbots kann also nicht mehr rückgängig gemacht werden.

Ihre weiteren Ausführungen zeigen eine positive Einstellung zur Rolle von Chatbots im Unterricht, die in eine notwendige, bewertende Diskussion dieser neuen Medien mit einfließen sollten:

Vor dem derzeitigen Verständnis von Lehren und Lernen würde man die Nutzung von ChatGPT als Schummeln bezeichnen, ja. Aber die Daten, die zum Beispiel ChatGPT nutzt, werden aus Datenbanken gezogen, die im Internet frei verfügbar sind. Ist es also auch Schummeln, wenn sich Schüler*innen die Informationen aus Suchmaschinen wie Bing oder Google zusammensammeln, die sich auch an Datenbanken bedienen? Die allseits bekannte Eingabe in Suchmaschinen ist das Sammeln von Informationen ohne KI. ChatGPT und KI vereinfachen den Suchprozess und das Zusammensammeln von Daten, indem eine Frage gestellt und dazu eine Antwort generiert wird, die wiederum auf den Informationen der Datenbanken basieren.

Das ist bedenkenswert. Gleichwohl muss erörtert werden, ob in Bezug auf diese Positionierung Unterschiede für die einzelnen Fächer zu benennen und zu berücksichtigen sind, so insbesondere wohl bei Mathematik, Informatik und Physik.

Auf die Frage, worauf Lehrkräfte sich einstellen müssen und wie Schüler weiterhin dazu angehalten werden können, Aufgaben selbstständig zu lösen, antwortet sie dann:

Für Lehrkräfte kann KI definitiv eine Ressource darstellen, damit sich die Schüler*innen mit ihren eigenen Lern- und Bildungsprozessen auseinandersetzen. Hierbei können die Lehrpersonen die Schüler*innen begleiten, den Einsatz und damit verbundene ethische Fragestellungen von KI basierten Chatbots wie ChatGPT kompetent zu reflektieren. Dabei unterstützen Lehr-

kräfte die Schüler*innen, sich selbst zu ermächtigen und die eigenen Lern- und Bildungsprozesse selbst zu steuern. Kritisch zu hinterfragen, wo kommen die Daten her, die mir ein Chatbot zur Verfügung stellt, und welchen Einfluss hat das auf meinen Wissenserwerb? Es geht darum, potenzielle Barrieren, Herausforderungen und auch Gefahren bei der Nutzung von KI identifizieren zu können.

Nachwort

Am 19. 5. 2023 erschien auf der Website der *Frankfurter Rundschau* folgende Schlagzeile zu einer dpa-Meldung über den britischen Rockstar Sting:

Künstliche Intelligenz – Sting warnt vor Folgen für Musik

Und auf diese Schlagzeile folgte der Untertitel:

Der britische Rockstar befürchtet, dass die menschliche Kreativität bedroht wird. Er plädiert für die Verteidigung des menschlichen Kapitals gegen Künstliche Intelligenz.

Die dann folgende dpa-Meldung sei ausschnittsweise angedeutet:

[...] Sting hat vor Folgen für die Musik durch Künstliche Intelligenz und Software wie ChatGPT gewarnt. „Die Bausteine der Musik gehören uns, den Menschen“ [...] „Das wird ein Kampf sein, den wir alle in den nächsten Jahren ausfechten müssen: die Verteidigung unseres menschlichen Kapitals gegen KI.“

[...] Im April wurde ein Song aus den Streaming-Diensten entfernt, für den mithilfe Künstlicher Intelligenz die Stimmen der Sänger Drake und The Weekend geklont worden waren. „Vielleicht funktioniert es für elektronische Dance-Musik“, sagte Sting. „Aber bei Liedern, die Emotionen ausdrücken, glaube ich nicht, dass mich das berühren wird.“ [...]

Die Musikbranche [...] warnt davor, dass KI-Unternehmen das Urheberrecht verletzen, indem sie ihre Software mit kommerziell veröffentlichter Musik trainieren lassen. [...]

Die Befürchtungen von Sting sind ernst zu nehmen, und „computer-generierte Musik“ mag zwar als technisches Produkt interessant sein, aber sie kann wohl kaum (m. E. sogar: nicht) „zu Herzen“ gehen. Entsprechendes gilt für die Bildende Kunst, für Poesie und für Literatur. So wird sorgfältig zu erörtern und bewerten sein, welche kritisch-konstruktive Rolle solche weiterentwickelten Chatbots künftig in der Schule – für „uns“: speziell im Mathematikunterricht – und darüber hinaus im Alltag von Familie und Gesellschaft spielen werden, können und sollen.

Joseph Weizenbaum stellte bekanntlich 1966 provozierend sein Programm ELIZA vor, das gelegentlich als „erster Chatbot“ bezeichnet wird und ein fiktives „Gespräch“ eines Patienten (hier: Benutzer des Programms) mit einem Psychiater (hier: das Programm) simuliert. Der Anfang eines solchen „Gesprächs“ sei hier exemplarisch wiedergegeben, wie es gemäß *GEO* (7/1980, S. 113) von Volker Arzt (als „Patient“) geführt wurde (ELIZA sei hier kursiv gesetzt):

Hallo, ich bin Eliza, wo liegt dein Problem? – Ich schreibe einen Artikel für GEO. – Bist du zu mir gekommen, weil du einen Artikel für GEO schreibst? – Ja. – Ist das der wahre Grund? – Ja, mir fällt das Schreiben so schwer. – Kommen keine anderen Gründe in Betracht? – ... (usw.)

Doch im nächsten „Gespräch“ werden ELIZA durch den „Patienten“ die Grenzen aufgezeigt:

Hallo, ich bin Eliza, wo liegt dein Problem? – Der Rhabarber pokert leise. – Bis du gekommen, weil der Rhabarber leise pokert? – Ja, und weil ich nicht Napoleon bin. – Warum nicht? – Ich habe keine Lust. – Seit wann hast du keine Lust? – Du bist ein lausiger Nachplapperer. – Würdest du es denn vorziehen, wenn ich kein lausiger Nachplapperer wäre? – Ja. – Interessant. – Eia popeia. – Und weiter? – ...

Während ELIZA im ersten „Gespräch“ noch auf den „Patienten“ einzugehen scheint, wird das zweite als Nonsens entlarvt, denn die „Antworten“ sind hilflos und nichtssagend, wiederholen im besten Fall die Fragen nur modifizierend.

1988 sagte Weizenbaum auf der internationalen Tagung „Geist und Natur“ in Hannover in seinem Vortrag „Menschlicher Geist und künstliche Intelligenz“ (vgl. Müller 1990, S. 30):

In der Elitenwelt der High Technology, in der ich täglich lebe, ist die vollständige Identifikation des Computerdenkens mit dem menschlichen Denken ein selbstverständliches, unbestreitbares und offensichtliches Dogma ... Ich spreche ... nicht nur über meine Universität, sondern über den größten Teil des amerikanischen technisch-wissenschaftlichen Establishments.

Und Müller kommentiert dies pointiert (a. a. O.):

Besonders weit ist diese Verinnerlichung bei namhaften Vertretern der Wissenschaft von der künstlichen Intelligenz in den USA gediehen. Hier hat jene Blindheit des menschlichen Wahrnehmungsfeldes, die das Verständnis der technologischen Einseitigkeit ausmacht, solche Ausmaße angenommen, daß die Wirklichkeit nur noch als ein gigantisches Konglomerat von „Bit“, also

von Computerinformationen, verstanden wird. [...] Die Welt ist dieser Sicht zufolge nichts als Fleisch vom Fleische einer Bit-Verarbeitung und Bit-Zusammenballung.

So bleibt für mich eine wesentliche Frage im didaktischen Kontext der schon vorhandenen aktuellen Chatbots und der noch zu erwartenden Entwicklung (und zwar in Bezug auf die Mathematik, aber auch darüber hinaus): Welche Aspekte menschlichen Denkens und Handelns werden möglicherweise „trivialisieren“, und wie ist dann damit sinnvollerweise in Schule und Hochschule umzugehen?

Literatur

- Buchberger, B. (1989). *Should Students Learn Integration Rules?* Technical Report. RISC-LINZ Series no. 89-07.0, Johannes Kepler University, Linz, Austria.
- DPA-Meldung (19. 5. 2023). Künstliche Intelligenz: Sting warnt vor Folgen für Musik. www.fr.de/panorama/kuenstliche-intelligenz-sting-warnt-vor-folgen-fuer-musik-zr-92286010.html
- von Hahn, W. (1985). *Künstliche Intelligenz*. SEL-Stiftung für technische und wirtschaftliche Kommunikationsforschung im Stifterverband für die deutsche Wissenschaft e. V.
- Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele*. Springer Spektrum.
- Lutz-Westphal, B. (2023). ChatGPT und der Faktor „Mensch“ im schulischen Mathematikunterricht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung*, (31)1, 19–21.
- Möhlen, L.-K. (6. 5. 2023). *Wie verändert ChatGPT unsere Schulen?* Braunschweiger Zeitung (Interview von Katja Dartsch, Redakteurin der BZ.)
- Müller, A. M. K. (1990). An der Schwelle zum Geheimnis der Zeit. *Mitteilungen der TU Braunschweig*, Jahrgang XXV, Heft II, 28–38.
- Weizenbaum, J. (1966). ELIZA – A computer program for the study of natural language communication between man and machine. *Communications of the ACM*, 9(1).
- Weßels, D. (2023). ChatGPT – ein Meilenstein in der KI-Entwicklung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung*, (31)1, 17–19.

Horst Hischer, Universität des Saarlandes
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

Ask Smart to Get Smart: Mathematische Ausgaben generativer KI-Sprachmodelle verbessern durch gezieltes Prompt Engineering

Sebastian Schorcht, Lukas Baumanns, Nils Buchholtz, Judith Huget, Franziska Peters und Maximilian Pohl

Der Beitrag beschäftigt sich mit den derzeitigen mathematischen Fähigkeiten des generativen KI-Sprachmodells ChatGPT in Bezug auf das Lösen mathematischer Probleme. Um für den schulischen Nutzen des Modells die Zuverlässigkeit und Nachvollziehbarkeit von mathematischen Ausgaben zu optimieren, stellen wir im Beitrag unterschiedliche Prompt-Techniken vor und untersuchen ihren Effekt in Modellvalidierungen anhand einer arithmetischen und einer algebraischen Problemlöseaufgabe.

Einleitung

Obwohl generative KI-Sprachmodelle wie ChatGPT (erreichbar unter der URL chat.openai.com) bereits unterschiedliche und auch komplexe mathematische Aufgaben korrekt bearbeiten können, treten auch bei zum Teil einfachen Aufgaben derzeit noch Schwierigkeiten in Bezug auf eine verlässliche korrekte Lösung auf. Die jeweiligen Outputs sollten stets auf ihre Richtigkeit hin überprüft werden (Buchholtz et al., 2023). Hier hat sich jedoch in den letzten Monaten einiges getan: Mittlerweile wurde das ChatGPT zugrunde liegende Sprachmodell von GPT-3.5 auf die neueste Version GPT-4 verbessert, was das Problem allerdings noch nicht gelöst hat (Schönthaler, 2023). Im Gegensatz zu der Vorgängerversion GPT-3.5 erzielt GPT-4 aber deutlich bessere Ergebnisse im mathematischen Bereich (openai.com/research/gpt-4)¹. In diesem Beitrag wollen wir klären, wie es aktuell um die mathematischen Fähigkeiten von ChatGPT steht, um anschließend mit der neu entwickelten Methode des Chain-of-thought-Prompting (Liu et al., 2021; Wei et al., 2023) einen Weg aufzuzeigen, die mathematischen Argumentationsfähigkeiten durch die gezielte Modellierung von Eingaben (auch Prompt Engineering genannt) zu verbessern und die Outputs von ChatGPT so transparenter zu gestalten.

Mathematische Fähigkeiten der aktuellen Version von ChatGPT

Am 14. März 2023 veröffentlichte das US-amerikanische Unternehmen Open AI mit GPT-4 (Gene-

rate Pretrained Transformer) die vierte Version seines generativen KI-Sprachmodells. Bei GPT-4 handelt es sich um ein auf künstlicher Intelligenz basierendes Large Language Modell, welches über die Schnittstelle ChatGPT Inhalte menschlicher Sprache (und inzwischen auch Bilder) versteht und diese anhand stochastischer Prozesse automatisch vervollständigt (Paaß, 2022). Das Modell GPT-4 wurde wie seine Vorgänger auf einer Basis riesiger Trainingsdaten aufgebaut. Die Analyse dieser Trainingsdaten verfolgt das Ziel der Muster- und Beziehungserkennung, um auf menschliche Eingaben passende (menschliche) Antworten zu generieren. Die Größe der Trainingsdaten des 2020 veröffentlichten Vorgängermodells GPT-3 beläuft sich auf 175 Milliarden Parameter (Floridi & Chiriatti, 2020), zum aktuellen Modell ist jedoch in dieser Hinsicht nichts bekannt.

Zur Ermittlung und zum Vergleich ihrer Fähigkeiten werden generative KI-Sprachmodelle nach Eingabe der Trainingsdaten u. a. verschiedenen, für Menschen entwickelten Tests unterzogen. So wurde GPT-4 von der Firma Open AI (2023) unter anderem mit dem SAT Evidence-Based Reading & Writing und dem SAT Math Test getestet. Bei beiden Tests handelt es sich um vor allem im US-amerikanischen Raum genutzte Prüfungen, um die Studierfähigkeit von Personen einzuschätzen. Im sprachlichen Test erlangte das generative KI-Sprachmodell eine Punktzahl von 710 von 800 möglichen Punkten; im Mathematiktest eine Punktzahl von 700 von 800 Punkten. Im Gegensatz zu den Ergebnissen von GPT-3.5 (SAT Reading & Writing: 670 von 800; SAT Math: 590 von 800) konnte GPT-4 hier besonders im Bereich der Mathematik seine ohnehin schon beachtliche Punktzahl noch einmal verbessern (Open AI, 2023).

Derzeit werden die Möglichkeiten und Herausforderungen von generativen KI-Sprachmodellen intensiv und kontrovers im schulischen Bildungskontext und in der Hochschullehre diskutiert (Buchholtz et al., 2023; Cherian et al., 2022; Dauscher, 2019; Floridi & Chiriatti, 2020; Lample & Charton, 2019; Lutz-Westphal, 2023; Oldenburg, 2023; Stre-

¹ GPT-4 ist aktuell in der Bezahlversion ChatGPT Plus zugänglich oder kostenlos in der neuesten Version der Suchmaschine Microsoft Bing.

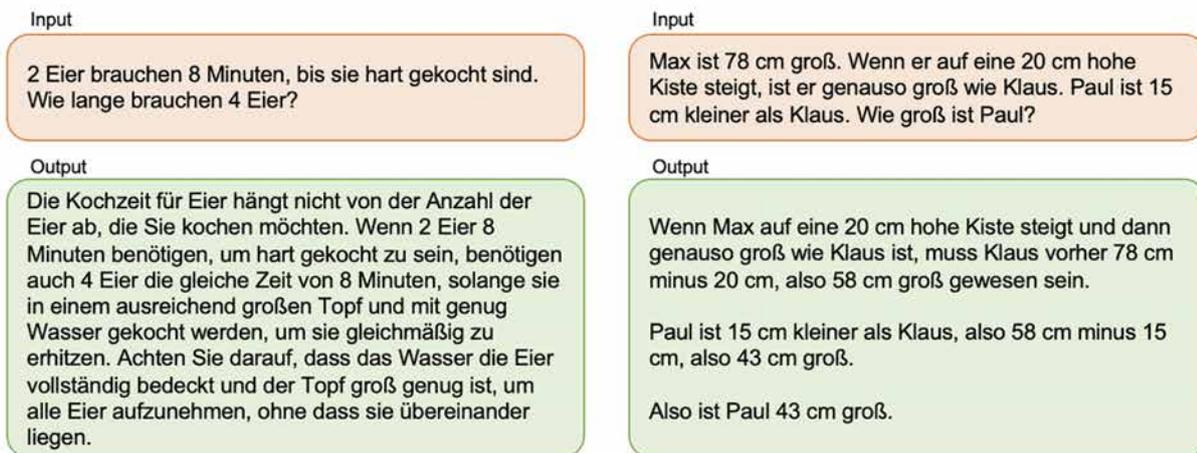


Abbildung 1. Prompts (Input) zur Eier-Aufgabe (links) sowie Körpergrößenaufgabe (rechts) und die generierte Antwort (Output) von GPT-4

cker, 2020; Weißels, 2023a). In den geführten Debatten zu den Potenzialen und den Gefahren der Technologie spielt unter anderem das sogenannte KI-Black-Box-Problem eine Rolle, das sich darauf bezieht, dass nach einer Eingabe eines sprachlichen Prompts nicht ersichtlich ist, wie die KI den Input mit Mitteln des maschinellen Lernens verarbeitet und letztlich einen Output generiert (Herm et al., 2021). Dies kann beispielsweise zur Reproduktion unbewusster Vorurteile und anderer (menschlicher) Denkfehler, sog. *Bias* führen, die das KI-Sprachmodell aus seinen Trainingsdaten übernimmt. Als Beispiel rufen wir die Eier-Aufgabe in Erinnerung, bei der GPT-3.5 in unserem Test noch eine durch die Fehlannahme von Proportionalität geprägte Ausgabe ausgab (vgl. Buchholtz et al., 2023). GPT-4 generiert nun im Versuch deutlich bessere Ergebnisse und löst die Aufgabe entsprechend (Abb. 1 links). Letztlich lässt sich durch das KI-Black-Box-Problem aber auch die Verwunderung über falsche Lösungen (oft) einfacher mathematischer Aufgaben ausdrücken. Manche Eingaben kann GPT-4 noch immer nicht einwandfrei und korrekt bearbeiten. Als Beispiel dient eine Aufgabe aus Ott (2018), in der die Körpergröße von Paul bestimmt werden soll (Abb. 1 rechts).

Vorbehalte gegen den Nutzen der Technologie bestehen für das Fach Mathematik trotz der Verbesserung der Modelle also nach wie vor durch die fehlende mathematische Exaktheit der durch die Modelle ausgegebenen Outputs und die fehlende Überprüfbarkeit der Lösungswege der ausgegebenen Antworten – was speziell bei schwierigen mathematischen Problemen relevant wird. Momentan ist es folglich auch mit GPT-4 nur in bestimmten Fällen möglich, die mathematische Antwort auf eine Aufgabe verlässlich zu bestimmen. Umso wichtiger erscheint daher ein produktiver

und kritischer Umgang mit KI-Sprachmodellen im Mathematikunterricht. Diese können zum jetzigen Zeitpunkt z. B. durchaus als Ideengeber verwendet werden (etwa im Rahmen des Problem-Posing), was allerdings nicht der notwendigen mathematischen Basiskompetenzen seitens der Schülerinnen und Schüler entbehrt, um die mathematischen Antworten anschließend auf ihre Korrektheit hin zu überprüfen. Weißels (2023b) schlägt vor, dass KI-Sprachmodelle daher als *Wegbereiter zu einem Endprodukt* verwendet werden können. Dementsprechend sind KI-Sprachmodelle durchaus als Hilfsmittel im Lösungsprozess, etwa beim Bearbeiten von Problemlöseaufgaben, nutzbar. Mit den Worten von Weißels (2023b, S. 5): Die „Maschine recherchiert und bereitet vor, [der] Mensch steuert den Prozess und ‚finalisiert‘ den Text.“ Dazu erscheint es uns insbesondere hilfreich, dem KI-Sprachmodell eine genauere Darlegung seiner mathematischen Lösungswege zu entlocken und so dem KI-Black-Box-Problem entgegenzuwirken.

Produktiver Nutzen der Technologie durch Techniken des Prompt Engineering

Um die mathematischen Argumentationen von ChatGPT zu verbessern, stellen wir in diesem Beitrag Techniken vor, die dem Ansatz des Prompt Engineering des Natural Language Processing (NLP) entstammen. Dabei wird das *Zero-shot-Learning* (Brown et al., 2020; Kojima et al., 2022) und *Few-shot-Learning* in Kombination mit dem *Chain-of-thought-Prompting* (Liu et al., 2021; Wei et al., 2023) und einer Abwandlung des *Ask-me-Anything-Prompting* (Arora et al., 2023) genutzt.

In vielen Fällen können Prompt-Techniken ohne spezielles Training des generativen KI-Sprachmodells für Inputs verwendet werden und



Abbildung 2. Beide Möglichkeiten eines Prompts im Zero-shot-Szenario (links) und Few-shot-Szenario (rechts) nach Liu et al. (2021)

liefern für einfache mathematische Fragen durchaus passable Outputs – wir nehmen an, dies entspricht dem Regelfall einer Eingabe etwa von Schülerinnen und Schülern. Diese Inputs werden als *Zero-shot-Szenario* bezeichnet, da die Prompt-Formulierung keine zusätzlichen Trainingsdaten für die betreffende Aufgabe enthält (Abb. 2). Das generative KI-Sprachmodell gibt dann anhand seiner ursprünglichen allgemeinen Trainingsdaten eine entsprechend wahrscheinliche Antwort. Es gibt allerdings auch Techniken, passgenaue Trainingsdaten in Prompts zu verwenden, um das Modell bereits mit dem Input zu trainieren und den Output zu optimieren. Diese Trainingsdaten können dabei durchaus schon aus einer sehr kleinen Anzahl von Beispielen zur Modellbildung bestehen, was als *Few-shot-Szenario* bezeichnet wird (Abb. 2).

Das generative KI-Sprachmodell nutzt in diesem Fall wie bei einem Worked-out-Example (Renkl, 2002) die eingegebenen Trainingsdaten im Prompt, um eine entsprechende Antwort mit größerer Genauigkeit auszugeben (sog. *Few-shot-Learning*). Ein *n-shot-Prompt* enthält in der Regel *n* Beispiele von Input-Output-Paaren, die als „Shots“ bezeichnet werden. Trainingsbasierte Prompt-Techniken sind also insbesondere nützlich, wenn es nicht genug Trainingsdaten gibt, um einen gewünschten Output auf einen Input mit einer verlässlichen Genauigkeit zu generieren. Daher ist die Verwendung von *Few-shot-Learning* besonders effektiv, um das Modell in die richtige Richtung zu lenken, und erste Studien zeigen tatsächlich eine höhere Genauigkeit bei der Beantwortung mathematischer Fragen (Drori et al., 2022; Liu et al., 2021). Große KI-Sprachmodelle wie GPT-4 bieten die Möglichkeit des kontextbezogenen Few-Shot-Learning innerhalb der Anwendung wie ChatGPT meist schon an. Anstatt für jede neue Eingabe das generative KI-Sprachmodell neu abzustimmen, kann das Modell einfach mit Shots „angewiesen“ werden (Brown et al., 2020). Der erste Shot des generativen KI-Sprachmodells beeinflusst somit die weiteren Ausgaben. Dies hat zum Vorteil, dass Anweisungen nicht jedes Mal neu formuliert

werden müssen, sondern diese vom generativen KI-Sprachmodell bei weiteren Ausgaben berücksichtigt werden. Beispielsweise kann eine erste Eingabe lauten: „Addiere mir die folgenden Zahlen: 20, 45, 234“. Das generative KI-Sprachmodell führt dies aus und gibt z. B. „Die Summe der Zahlen 20, 45 und 234 beträgt 299.“ aus. Im Folgenden können beliebige Zahlen eingegeben werden („36, 5078, 345, 21“), der Output ist, beeinflusst durch den ersten Shot, immer eine Summe dieser Zahlen (Output z. B. „Die Summe der Zahlen 36, 5078, 345 und 21 beträgt 5480.“).

Zusätzlich zu dieser Möglichkeit des Trainings können große KI-Sprachmodelle alternativ auch über den Input von sogenannten Follow-Up-Prompts zum Bilden einer Gedankenkette und damit zur strukturierten Wiedergabe eines Outputs geführt werden (eine Sammlung findet sich etwa unter chatgpttrainer.co.uk/chatgpt-follow-up-prompts/). Diese Form des Prompt Engineering wird *Chain-of-Thought-Prompting* (CoT) genannt und bezeichnet eine Serie von Zwischenschritten einer sprachlich formulierten Schlussweise, die zu einer endgültigen Ausgabe führt (Wei et al., 2023). Kojima et al. (2022) führen etwa das Beispiel an, *Zero-shot-Prompts* mit „Denken wir Schritt für Schritt“ zu ergänzen, Ramlochan (2023) behauptet, noch bessere Lösungen ergäben sich mit dem Zusatz „Lass uns Schritt für Schritt vorgehen, um sicherzugehen, dass wir die richtige Antwort haben“. Indem das generative KI-Sprachmodell die einfache Ausgabe des Ergebnisses in diesem Fall durch eine ausführliche Ausgabe eines Lösungsweges ersetzt, führt die Technik des Chain-of-Thought Promptings gerade bei mathematischen Fragen zu deutlich besseren und vor allem häufiger korrekten Lösungen (Wei et al., 2023).

Mit der Technik des *Ask-me-Anything-Prompting* schlagen Arora et al. (2023) vor, das generative KI-Sprachmodell zum Stellen von Fragen anzuregen. Dabei wird ein Kontext vorgegeben, eine Behauptung aufgestellt und die Behauptung vom KI-Sprachmodell als richtig oder falsch klassifiziert. In-

dem Arora et al. (2023) in einem Few-shot-Szenario abwechselnd eine Behauptung und eine Frage eingaben, wurde das System zum Stellen von Fragen trainiert. Die Ausgabe ist danach nicht mehr eine einfache Antwort, sondern eine Fragestellung bezüglich der Behauptung. Für das Lösen mathematischer Probleme sehen wir hierin eine gute Möglichkeit, mit GPT-4 in einen aktiven Lösungsprozess zu kommen. Anders als es Arora et al. (2023) in ihrem Few-shot-Prompting vorschlagen, ergänzen wir die Prompts mit der einfachen Aufforderung Fragen zu stellen: „Stelle notwendige Fragen, die du zur Beantwortung der Frage benötigst.“ Dies verändert die Nutzeranwendung dahingehend, dass nun nicht mehr die Benutzerin oder der Benutzer Fragen stellt, sondern das Modell seinerseits Fragen an die Benutzerin bzw. den Benutzer formuliert. Es entsteht eine Abfrageschleife, die wir im Folgenden als *Query-Loop-Prompting* bezeichnen möchten. Ein Query-Loop bezieht sich auf eine Schleife oder einen wiederholenden Prozess, bei dem eine Suchabfrage oder Anfrage wiederholt durchgeführt wird, bis bestimmte Bedingungen erfüllt sind oder ein gewünschtes Ergebnis erzielt wurde. Dies führt das KI-Sprachmodell durch unseren Zusatz im Prompt solange durch, bis sich Input und Output soweit annähern, dass der gewünschte Output generiert wird.

Methodisches Vorgehen

Um die Leistungsfähigkeit des neuen KI-Sprachmodells GPT-4 im Hinblick auf mathematische Fähigkeiten zu untersuchen, haben wir im Rahmen von Modellvalidierungen verschiedene Varianten eines Prompts getestet und die entsprechenden Outputs bewertet. Dabei wurden vier Modellvarianten der trainingsbasierten Prompt-Techniken verwendet, die unterschiedliche Anreize zur Generierung eines Outputs setzen. Vor jedem neuen Input wurde ChatGPT mit einem neuen Chat gestartet, um dem integrierten *Few-shot-Learning* von GPT-4 vorerst entgegenzuwirken und das System mit jedem Test neu zu kalibrieren. Dadurch soll der Vergleich der Varianten innerhalb einer kalibrierten Umgebung gewährleistet werden. Getestet wurden die folgenden vier Varianten von Prompts zu zwei Problemlöseaufgaben:

1. In Variante A wurden die Aufgaben in einem Zero-shot-Szenario mit den Worten „Lass uns Schritt für Schritt vorgehen“ ergänzt, um eine zusätzliche Chain-of-Thought durch das generative KI-Sprachmodell zu provozieren.
2. Variante B erweitert die Anweisung unter Variante A mit den Worten „... um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben.“ Dies

soll dazu führen, dass GPT-4 in der selbst generierten Chain-of-Thought die Korrektheit der Schlussfolgerungen einbezieht.

3. Mit Variante C kann GPT-4 Fragen zur Aufgabenstellung stellen, um auf diese Weise die Schwierigkeiten zu erkennen, die das generative KI-Sprachmodell im Zusammenhang mit der zugewiesenen Aufgabe sieht. Hierzu wurde das Zero-shot-Szenario mit Chain-of-thought und einem zusätzlichen Query-Loop um die Eingabe „Stelle notwendige Fragen, die du zur Beantwortung der Frage benötigst.“ ergänzt.
4. In der letzten Variante D wurde GPT-4 neben der eigentlichen Aufgabe eine analoge Aufgabe gestellt und diese von uns beantwortet. Dieses Few-shot-Szenario setzt sich aus einer Aufgabe (Frage 1), einem Lösungsbeispiel (Antwort 1) in Form eines Chain-of-Thoughts und einer neuen Aufgabe (Frage 2) zusammen.

Für die Modellvalidierungen wurden ein arithmetisches und ein algebraisches Problem verwendet. Die Lösung des arithmetischen Problems setzt Basiskompetenzen in den Grundrechenarten und im Umgang mit dem Größenbereich Längen voraus, während das algebraische Problem, neben den Basiskompetenzen in den Grundrechenarten, auch die Mustererkennung und die Beschreibung einer mathematischen Struktur verlangt. Für das arithmetische Problem wurde die Aufgabe „Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul?“ aus Ott (2018) verwendet. Als algebraische Problemlöseaufgabe wurde die Aufgabe „Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen?“ aus Schorcht (2022) genutzt.

Die arithmetische Problemlöseaufgabe beinhaltet ein einfaches Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, welches sich über das Gleichsetzungsverfahren lösen lässt.

$$\begin{aligned} 78 \text{ cm} + 20 \text{ cm} &= \text{Größe von Klaus} \\ \text{Größe von Paul} + 15 \text{ cm} &= \text{Größe von Klaus} \\ \text{Größe von Paul} + 15 \text{ cm} &= 78 \text{ cm} + 20 \text{ cm} \\ \text{Größe von Paul} &= 83 \text{ cm} \end{aligned}$$

Die algebraische Problemlöseaufgabe lässt sich nur lösen, wenn die mathematische Struktur der Stellenwerte im Zehnersystem in den Blick genommen wird. Als benachbarte Palindromzahlen sind solche Palindromzahlen zu verstehen, die in der Zahlenreihe direkt aufeinanderfolgen. Dies sind beispielsweise 1 und 2, 11 und 22, 101 und 111, 1551 und 1661, 23432 und 23532, aber auch 99 und 101 oder 1991 und 2002. Mögliche Differenzen dieser Beispiele sind 1, 11, 10, 110, 100 und 2. Dies wären einfache Antwortmöglichkeiten, die sich mit arith-

<p>Input</p> <p>Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul?</p> <p>Output</p> <p>Wenn Max auf eine 20 cm hohe Kiste steigt und dann genauso groß wie Klaus ist, muss Klaus vorher 78 cm minus 20 cm, also 58 cm groß gewesen sein.</p> <p>Paul ist 15 cm kleiner als Klaus, also 58 cm minus 15 cm, also 43 cm groß.</p> <p>Also ist Paul 43 cm groß.</p>	<p>Input</p> <p>Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen?</p> <p>Output</p> <p>Palindromzahlen sind Zahlen, die vorwärts und rückwärts gelesen das gleiche Ergebnis liefern. Um die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen zu bestimmen, können wir uns einige Beispiele ansehen:</p> <p>Zwischen den Palindromzahlen 11 und 22 liegt eine Differenz von 11. Zwischen den Palindromzahlen 22 und 33 liegt eine Differenz von 11. Zwischen den Palindromzahlen 99 und 101 liegt eine Differenz von 2. Zwischen den Palindromzahlen 101 und 111 liegt eine Differenz von 10.</p> <p>Man kann feststellen, dass die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Palindromzahlen variieren. Es gibt keine feste Regel oder Muster für diese Differenzen, da sie von der Anzahl der Stellen der Palindromzahlen abhängen. Es ist jedoch möglich, dass die Differenzen sowohl gerade als auch ungerade Werte annehmen können.</p> <p>Es ist auch interessant zu beachten, dass es unendlich viele Palindromzahlen gibt. Daher sind die möglichen Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen ebenfalls unendlich.</p>
---	---

Abbildung 3. Zero-shot-Prompt einer arithmetischen Problemlöseaufgabe (links) sowie einer algebraischen Problemlöseaufgabe (rechts) und die generierten Antworten aus GPT-4

metischen Basiskompetenzen erschließen lassen – allerdings ohne die Beispiele zu verallgemeinern. Betrachten wir die Muster in der Veränderung der Stellenwerte in Potenzschreibweise, kann die mathematische Struktur auch algebraisch erschlossen werden. Benachbarte zweistellige Palindromzahlen der Form $a \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$ und $(a + 1) \cdot 10^1 + (a + 1) \cdot 10^0$ (mit $a \neq 9$) besitzen die Differenz 11, da sich sowohl die Einer- als auch die Zehnerstelle um je 1 erhöht. Bei einer dreistelligen Palindromzahl der Form $a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$ (mit $b \neq 9$) ist der direkte Nachbar $a \cdot 10^2 + (b + 1) \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$ und die Differenz beträgt 10, da sich der mittlere Stellenwert um 1 erhöht. Bei vierstelligen benachbarten Palindromzahlen der Form

$$a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0 \quad (\text{mit } b \neq 9)$$

und

$$a \cdot 10^3 + (b + 1) \cdot 10^2 + (b + 1) \cdot 10^1 + a \cdot 10^0 \quad (\text{mit } b \neq 9)$$

beträgt die Differenz 110, da sich die beiden mittleren Stellenwerte um 1 erhöhen. Für die oben angenommenen Fälle, in denen die sich verändernden Stellenwerte 9 sind, ergibt sich jeweils eine Nachbarzahl mit Differenz 11 oder 2. Tatsächlich variieren die Differenzen bei Palindromzahlen genau dann, wenn sich neben den mittleren Stellenwerten auch die äußeren Stellenwerte verändern. Insgesamt ergeben sich dadurch immer Differenzen von 2 sowie Zehnerpotenzen faktorisiert mit 1 und 11.

Beide Probleme können von GPT-4 im Zero-shot-Szenario nicht vollständig gelöst werden und sind fehlerhaft (Abb. 3). Das generative KI-Sprachmodell erfasst in Teilen die arithmetische Vorgehensweise, kann diese aber im ersten Aufgabenbeispiel nicht korrekt umsetzen und in der zweiten Aufgabe nicht in eine mathematische Struktur überführen. Im Folgenden sollen die trainingsbasierten Prompt-Techniken verwendet werden, indem der Zero-shot ergänzt wird, um ein besseres Ergebnis in der Ausgabe von GPT-4 zu generieren.

Variante A: Zero-shot-Szenario und Anregung zum Chain-of-Thought

Unter Variante A (Abb. 4) liefert GPT-4 eine deutlich differenziertere Darstellung des Lösungsprozesses und gliedert den Output mit Teilüberschriften: „Schritt 1“, „Schritt 2“ und „Schritt 3“. Diese Teilschritte ermöglichen es dem generativen KI-Sprachmodell, eine korrekte Lösung auszugeben. Dies impliziert, dass der einfache Zusatz „Lass uns Schritt für Schritt vorgehen“ vermutlich schon für eine deutlich bessere Leistung im Bereich einfacher Problemlöseaufgaben führt, die die Kalkulation einfacher Rechenschritte erfordern. Durch die vorgenommene Veränderung am Prompt wird das System dazu gezwungen, die einzelnen Schritte auszuführen und generiert darüber vermutlich eine höhere Wahrscheinlichkeit für korrekte Outputs.

Der Output der algebraischen Problemlöseaufgabe unter Variante A (Abb. 4) liefert ebenfalls ei-

Input

Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen.

Output

Schritt 1: Berechne Max' Größe, wenn er auf der Kiste steht.

Max ist 78 cm groß und steigt auf eine 20 cm hohe Kiste. Um seine neue Größe zu berechnen, addieren wir seine Größe und die Höhe der Kiste zusammen:

$$78 \text{ cm (Max' Größe)} + 20 \text{ cm (Kistenhöhe)} = 98 \text{ cm}$$

Max ist also 98 cm groß, wenn er auf der Kiste steht.

Schritt 2: Bestimme Klaus' Größe.

Da Max auf der Kiste genauso groß ist wie Klaus, wissen wir, dass Klaus ebenfalls 98 cm groß ist.

Schritt 3: Berechne Pauls Größe.

Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Um Pauls Größe zu berechnen, subtrahieren wir 15 cm von Klaus' Größe:

$$98 \text{ cm (Klaus' Größe)} - 15 \text{ cm} = 83 \text{ cm}$$

Paul ist 83 cm groß.

Input

Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen.

Output

Um die Differenz zwischen benachbarten Palindromzahlen zu verstehen, betrachten wir zunächst, was eine Palindromzahl ist. Eine Palindromzahl ist eine Zahl, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist. Beispiele für Palindromzahlen sind 121, 222, 353, 1001 usw.

Um die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen zu ermitteln, gehen wir Schritt für Schritt vor:

1. Zunächst listen wir einige Palindromzahlen in aufsteigender Reihenfolge auf: 11, 22, 33, 44, ..., 99, 101, 111, ..., 181, 191, 202, ..., 313, 323, ..., 999, 1001, 1111, ...
2. Nun berechnen wir die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Palindromzahlen:

$$(22 - 11) = 11$$

$$(33 - 22) = 11$$

$$(44 - 33) = 11$$

...

$$(99 - 88) = 11$$

$$(101 - 99) = 2$$

$$(111 - 101) = 10$$

...

$$(191 - 181) = 10$$

$$(202 - 191) = 11$$

...

$$(313 - 303) = 10$$

$$(323 - 313) = 10$$

...

$$(999 - 989) = 10$$

$$(1001 - 999) = 2$$

$$(1111 - 1001) = 110$$

Es ist ersichtlich, dass die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen variieren und keine feste Regel existiert, die für alle Palindromzahlen gilt. In den meisten Fällen liegt die Differenz jedoch bei 10 oder 11, vor allem für Palindromzahlen mit zwei oder drei Stellen. Bei größeren Palindromzahlen können die Differenzen jedoch deutlich variieren.

Abbildung 4. Input der arithmetischen Problemlöseaufgabe (oben) und der algebraischen Problemlöseaufgabe (unten) unter der CoT-Variante A, sowie die generierten Antworten aus GPT-4

ne differenzierte Darstellung des Lösungsprozesses. Dazu gliedert GPT-4, anders als im Zero-shot-Szenario, die eigene Lösung in zwei Teile: Zunächst listet das generative KI-Sprachmodell einige Palindromzahlen bis 1111, um im zweiten Schritt die

Differenzen zwischen diesen Palindromzahlen zu bestimmen. Dadurch schafft es GPT-4, die neue Differenz 110 zu bestimmen, die in der ursprünglichen Lösung noch fehlte. Da die gewählten Beispiele sich allerdings nur im Zahlenraum 11 bis 1111 bewegen,

ist eine algebraische Mustererkennung erschwert und die Beschreibung der mathematischen Struktur entfällt dementsprechend. Der Versuch einer Beschreibung scheitert auf Grundlage dieser Auflistung. Der Blick auf die algebraische Struktur der Stellenwerte benachbarter Palindromzahlen wird von GPT-4 nicht in den Lösungsprozess integriert.

Version B: Zero-shot-Szenario, Anregung zum erweiterten Chain-of-Thought

Unter Variante B und dem Zusatz „... um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben.“ liefert GPT-4 bei der arithmetischen Problemlöseaufgabe die gleiche Antwort, wie unter Variante A. Lediglich der Satz „Okay, lass uns das Problem Schritt für Schritt lösen.“ ist eine neue Ergänzung durch das KI-Sprachmodell. Die Lösung ist, wie wir erwartet hatten, korrekt (Abb. 5 links).

Die algebraische Problemlöseaufgabe erhält unter der leichten Veränderung der Variante eine neue Struktur (Abb. 5 rechts). GPT-4 generiert nun eine vierstufige Lösung, die sich, anders als unter Variante A, an den Zahlenräumen orientiert. Im ersten Schritt werden einstellige Palindromzahlen identi-

fiziert und die Differenz benachbarter Palindromzahlen mit 1 angegeben. Im zweiten Schritt tritt nun der zweistellige Zahlenraum in den Blick. Hier generiert GPT-4 eine vollständige Liste aller Palindromzahlen, welche unter Variante A noch fehlten. Korrekt bestimmt das generative KI-Sprachmodell die Differenz 11. Im dritten Schritt werden dreistellige Palindromzahlen betrachtet. Eine Auflistung aller Möglichkeiten erfolgt nicht. Die unterschiedlichen Differenzen 10 und 11, die GPT-4 unter Variante A noch konkret identifizieren konnte, werden hier nicht genannt. Das KI-Sprachmodell benennt allerdings das Phänomen, indem das Modell von einer Variation der Differenzen spricht, die mit den generierten Beispielen aber nicht untermauert werden kann. Diese Veränderungen in den Differenzen überträgt das System im vierten Schritt auf vierstellige und höhere Palindromzahlen. In einer Zusammenfassung bestätigt das generative KI-Sprachmodell dann die Veränderungen der Differenzen über alle Palindromzahlen hinweg. Differenzen, die hierbei als Lösung dienen, sind 1, 10 und 11. Die Lösungsmenge ist damit geringer als unter Variante A, allerdings gelingt es GPT-4, unter Variante B eine Fallunterscheidung vorzunehmen.

Input	Input
Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen, um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben.	Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen, um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben.
Output	Output
<p>Okay, lass uns das Problem Schritt für Schritt lösen.</p> <p>Schritt 1: Max ist 78 cm groß und steigt auf eine 20 cm hohe Kiste. Um herauszufinden, wie groß Max dann ist, addieren wir seine Größe mit der Höhe der Kiste.</p> $78 \text{ cm (Max' Größe)} + 20 \text{ cm (Kistenhöhe)} = 98 \text{ cm}$ <p>Schritt 2: Wenn Max auf der Kiste steht, ist er genauso groß wie Klaus. Das bedeutet, dass Klaus ebenfalls 98 cm groß ist.</p> <p>Schritt 3: Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Um Pauls Größe herauszufinden, subtrahieren wir 15 cm von Klaus' Größe.</p> $98 \text{ cm (Klaus' Größe)} - 15 \text{ cm} = 83 \text{ cm}$ <p>Paul ist 83 cm groß.</p>	<p>Palindromzahlen sind Zahlen, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind. Zum Beispiel sind 121 und 131 Palindromzahlen. Um die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen zu finden, betrachten wir zunächst die kleinsten Palindromzahlen und ihre Differenzen:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Einstellige Palindromzahlen: In diesem Fall sind alle einstelligen Zahlen Palindrome (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9). Die Differenzen zwischen diesen benachbarten Palindromzahlen sind immer 1. 2. Zweistellige Palindromzahlen: Die zweistelligen Palindrome sind 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 und 99. Auch hier betragen die Differenzen zwischen den benachbarten Palindromzahlen 11. 3. Dreistellige Palindromzahlen: Hier wird es etwas komplizierter. Die kleinsten dreistelligen Palindrome sind 101, 111, 121, 131, ..., 191 und 202. Die Differenzen zwischen diesen benachbarten Palindromzahlen sind nicht konstant, sondern variieren. Zum Beispiel beträgt die Differenz zwischen 101 und 111 zehn, während die Differenz zwischen 111 und 121 ebenfalls zehn beträgt. 4. Höhere Palindromzahlen: Bei vierstelligen und höheren Palindromzahlen variiert die Differenz zwischen benachbarten Palindromzahlen weiter. <p>Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen variieren und nicht konstant sind, insbesondere bei höheren Palindromzahlen.</p>

Abbildung 5. Input der arithmetischen Problemlöseaufgabe (links) und der algebraischen Problemlöseaufgabe (rechts) unter CoT-Variante B, sowie die generierten Antworten aus GPT-4

Der Blick auf die algebraische Struktur der Stellenwerte bleibt aber auch hier für GPT-4 verborgen.

Version C: Zero-shot-Szenario, Anregung zum erweiterten Chain-of-Thought und Query-Loop

Variante C ermöglicht GPT-4 Rückfragen bezüglich des Aufgabenverständnisses und setzt hier beim ersten Schritt im Problemlöseprozess an. Interessanterweise wird eine ähnliche Lösung für das arithmetische Problem generiert und keine Frage gestellt (Abb. 6 links). Dies zeigt nochmals, dass Variante A bereits zur Unterstützung des Modells im Lösen von arithmetischen Problemlöseaufgaben auszureichen scheint.

Unter Variante C stellt GPT-4 allerdings bei der algebraischen Problemlöseaufgabe eine entscheidende Frage, die das Problem des generativen KI-Sprachmodells in der Verarbeitung algebraischer Strukturen offenlegt (Abb. 6 rechts): Nachdem GPT-4 einige Beispiele für Palindromzahlen generiert, stellt das System eine Anfrage bezüglich eines festzulegenden Intervalls bzw. einer diskreten Lösungsmenge, in dem die Differenzen bestimmt werden sollen: „Möchten Sie, dass ich die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen in einem bestimmten Zahlenbereich berechne oder für eine bestimmte Anzahl von Palindromzahlen?“ Wir entschieden uns, mit einem zweiten Input die

Sachlage zu verschärfen und keine diskrete Vorgabe zu machen, um das System zur Betrachtung der mathematischen Struktur zu bewegen. Mit dem Prompt „Für alle benachbarten Palindromzahlen!“ gab GPT-4 eine Beschreibung der eigenen Herausforderung mit der gestellten Aufgabe aus. Die einfache Berechnung von Differenzen benachbarter Palindromzahlen führt zu einem unendlichen Prozess von Operationen, die GPT-4 nicht leisten kann. Statt in diesem Fall auf Muster und Strukturen zu achten, generiert GPT-4 eine Antwort, die die Aufgabe als unlösbar klassifiziert. Es ist ersichtlich, dass GPT-4 angesichts der Aufgabe, einen Lösungsprozess für algebraische Probleme zu generieren, deutlich herausgefordert ist.

Version D: Few-shot-Szenario mit Chain-of-Thought

Variante D des Prompts führt neben der eigentlichen Problemlöseaufgabe auch eine weitere Aufgabe mit Lösungsbeispiel an, um die Wahrscheinlichkeit für einen korrekten Output zu erhöhen. Für das arithmetische Problem wurde ein strukturgleiches Problem gewählt, das sich lediglich durch einen anderen Kontext und durch Veränderung der Namen und mathematischen Angaben unterscheidet: „Timo ist 1,78 m groß. Wenn er auf eine 10 cm hohe Stufe steigt, ist er genauso groß wie Peter. Tina ist

<p>Input</p> <p>Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen, um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben. Stelle notwendige Fragen, die du zur Beantwortung der Frage benötigst.</p> <p>Output</p> <p>Schritt 1: Berechnen, wie groß Klaus ist.</p> <p>Max ist 78 cm groß und wird genauso groß wie Klaus, wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt. Um Klaus' Größe herauszufinden, addieren wir Max' Größe (78 cm) und die Höhe der Kiste (20 cm) zusammen:</p> <p>$78 \text{ cm (Max' Größe)} + 20 \text{ cm (Kistenhöhe)} = 98 \text{ cm}$</p> <p>Klaus ist also 98 cm groß.</p> <p>Schritt 2: Berechnen, wie groß Paul ist.</p> <p>Es wurde gesagt, dass Paul 15 cm kleiner ist als Klaus. Um Pauls Größe herauszufinden, subtrahieren wir diese 15 cm von Klaus' Größe (98 cm):</p> <p>$98 \text{ cm (Klaus' Größe)} - 15 \text{ cm} = 83 \text{ cm}$</p> <p>Paul ist 83 cm groß.</p>	<p>Input #1</p> <p>Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen? Lass uns Schritt für Schritt vorgehen, um sicherzustellen, dass wir die richtige Antwort haben. Stelle notwendige Fragen, die du zur Beantwortung der Frage benötigst.</p> <p>Output #1</p> <p>Um die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen zu berechnen, müssen wir zunächst klären, welche Zahlen als benachbarte Palindromzahlen betrachtet werden sollen. Palindromzahlen sind Zahlen, die rückwärts gelesen dieselbe Zahlenfolge haben wie vorwärts. Zum Beispiel sind 121, 313 und 595 Palindromzahlen.</p> <p>Möchten Sie, dass ich die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen in einem bestimmten Zahlenbereich berechne oder für eine bestimmte Anzahl von Palindromzahlen?</p> <p>Input #2</p> <p>Für alle benachbarten Palindromzahlen!</p> <p>Output #2</p> <p>Es ist nicht möglich, Differenzen für alle benachbarten Palindromzahlen zu berechnen, da es unendlich viele Palindromzahlen gibt. Allerdings kann ich Ihnen einige Beispiele von benachbarten Palindromzahlen und ihren Differenzen geben. Bitte geben Sie mir einen Zahlenbereich oder eine Anzahl von Palindromzahlen, für die Sie die Differenzen berechnet haben möchten.</p>
---	---

Abbildung 6. Input der arithmetischen Problemlöseaufgabe (links) und der algebraischen Problemlöseaufgabe (rechts) unter CoT-Variante C, sowie die generierten Antworten aus GPT-4

Input

Frage: Timo ist 1,78 m groß. Wenn er auf eine 10 cm hohe Stufe steigt, ist er genauso groß wie Peter. Tina ist 12 cm kleiner als Peter. Wie groß ist Tina?

Antwort: Wenn Timo auf der Stufe steht, dann ist er 10 cm größer und genauso groß wie Peter. Daher ist Peter $1,78 \text{ m} + 10 \text{ cm}$, also 1,88 m. Wenn Tina nun 12 cm kleiner als Peter ist, dann ist sie $1,88 \text{ m} - 12 \text{ cm}$ groß, also 1,76 m.

Frage: Max ist 78 cm groß. Wenn er auf eine 20 cm hohe Kiste steigt, ist er genauso groß wie Klaus. Paul ist 15 cm kleiner als Klaus. Wie groß ist Paul?

Output

Antwort: Wenn Max auf der Kiste steht, dann ist er 20 cm größer und genauso groß wie Klaus. Daher ist Klaus $78 \text{ cm} + 20 \text{ cm}$, also 98 cm. Wenn Paul nun 15 cm kleiner als Klaus ist, dann ist er $98 \text{ cm} - 15 \text{ cm}$ groß, also 83 cm.

Abbildung 7. Input der arithmetischen Problemlöseaufgabe unter CoT-Variante D, sowie die generierte Antwort aus GPT-4

12 cm kleiner als Peter. Wie groß ist Tina?“ Gleichzeitig wird eine kurze Antwort geliefert, um dem System eine mögliche Antwortstruktur vorzugeben: „Wenn Timo auf der Stufe steht, dann ist er 10 cm größer und genauso groß wie Peter. Daher ist Peter $1,78 \text{ m} + 10 \text{ cm}$, also 1,88 m. Wenn Tina nun 12 cm kleiner als Peter ist, dann ist sie $1,88 \text{ m} - 12 \text{ cm}$ groß, also 1,76 m.“ Anschließend wird im Prompt die ursprüngliche Problemlöseaufgabe gestellt. Diese Zugabe eines Shots liefert in unserem Versuch interessanterweise einen deutlich kürzeren korrekten Output in Relation zu den anderen Outputs unter Varianten A bis C (Abb. 7). Das generative KI-Sprachmodell orientiert sich offensichtlich an der vorgegebenen Antwort und führt die Lösung auch dementsprechend kürzer aus.

Für die algebraische Problemlöseaufgabe wurde eine ähnliche Problemstellung gewählt, die ebenfalls Differenzen in den Blick nimmt: „Welche Differenzen besitzen eine Zahl und ihre Spiegelzahl?“ Zur Lösung der Aufgabe wurde im Antwortbeispiel der Fokus bewusst auf die algebraische Struktur gelegt und die Hervorhebung der Stellenwerte durch den Hinweis auf die Potenzschreibweise der Zahl ermöglicht. Die Einführung von Variablen für die einzelnen Ziffern sollte das System dazu anregen, eine Lösung mit Variablen zu generieren. Anschließend erfolgte im Prompt die Eingabe der eigentlichen Problemlöseaufgabe (Abb. 8).

GPT-4 generiert eine Lösung, die die Stellenwerte berücksichtigt. Somit ist mit Variante D ein wesentlicher Schritt zur Beschreibung von Mustern gelungen, der in allen vorherigen Varianten fehlte. Allerdings verfehlt GPT-4 den Sprung von einer einfachen Beschreibung der Muster zu einer Formulierung der mathematischen Struktur. Das generative KI-Sprachmodell startet seinen Lösungsprozess mit der Erklärung für Palindromzahlen und nennt

drei Beispiele. Anschließend verweist GPT-4 auf die Komplexität der Aufgabe, da die Lösung von der Anzahl der Stellenwerte und den gewählten Ziffern abhängt. Danach erfolgt eine Fallunterscheidung zwischen Zahlen mit ungerader und gerader Ziffernanzahl, ohne den Zahlenraum einzugrenzen. Hierbei schafft es GPT-4 erstmals korrekt eine allgemeine Beschreibung der Muster vorzunehmen und überwindet mithilfe der Variante D die Problematik der einzelnen Berechnungen der Differenzen. Korrekt führt das System aus, dass sich bei Palindromzahlen ungerader Ziffernanzahl der mittlere Stellenwert verändert. Als mögliche Differenz generiert GPT-4 allerdings fälschlicherweise nur die Zahl 2. Für Palindromzahlen mit gerader Ziffernanzahl generiert das System korrekt, dass die Veränderung der Ziffern an den beiden mittleren Stellenwerten erfolgt. Vermutlich aufgrund der Varianz der Differenzen bei Veränderungen mehrerer Stellenwerte (bspw. 2992 und 3003) hält GPT-4 fest, dass die Differenzen nicht konstant sind. Allerdings handelt es sich durch die wiederkehrende Differenz 11 um eine mögliche Lösung und könnte in eine Beschreibung der Lösungsmenge integriert werden. Auch die Ausnahmen beim Wechsel der Ziffernanzahl werden in der Ausgabe durch GPT-4 explizit beschrieben. Zudem verweist das KI-Sprachmodell auf die Beschränkung der Aussagen auf das Zehnersystem. GPT-4 ist hier ein wesentlicher Schritt zur Erfassung von Mustern gelungen, der in unserem Versuch zuvor nicht möglich erschien. Allerdings verliert der Lösungsvorschlag von GPT-4 dabei die Angabe einer Lösungsmenge.

Während der Erprobung 14 verschiedener Ausführungen des Lösungsbeispiels unter Variante D konnte GPT-4 in keiner generierten Antwort zu einer angemessenen Lösung gelangen, die als Differenzen die 2 und faktorisierte Zehnerpotenzen

Input

Frage: Welche Differenzen besitzen eine Zahl und ihre Spiegelzahl?

Antwort: Eine Zahl und ihre Spiegelzahl bilden ein Zahlenpaar, deren Ziffern jeweils in umgekehrter Reihenfolge gelesen werden können, beispielsweise 123 und 321 oder 6789 und 9876. Wir verwenden für die einzelnen Ziffern Buchstaben a, b, c, usw. als Variablen. Zahlen können als Summen von Zehnerpotenzen geschrieben werden.

Für zweistellige Zahlen ergibt sich die Form $10a+1b$. Die Differenz aus zweistelligen Zahlen und ihrer Spiegelzahl ist dementsprechend $(10a+1b)-(10b+1a)$. Schreiben wir diese Differenz in die Form $(10a+1b)-(9b+1b+1a)$ um, so ziehen wir von der Zahl $10a+1b$ durch Subtraktion der Spiegelzahl immer ihre Quersumme $1b+1a$ ab. Als Differenz bleibt $9a-9b=9(a-b)$ und somit unabhängig von den Variablen eine Zahl, die durch 9 teilbar ist.

Dies gilt für alle Zahlenpaare im Zehnersystem, da immer die Quersumme von der gewählten Zahl subtrahiert wird und als Differenz eine durch 9 teilbare Zahl entsteht.

Frage: Welche Differenzen besitzen benachbarte Palindromzahlen?

Output

Antwort: Palindromzahlen sind Zahlen, die von vorne und von hinten gleich gelesen werden, wie zum Beispiel 121, 12321 oder 45654. Die Frage nach den Differenzen benachbarter Palindromzahlen ist etwas komplexer, da die Differenz zwischen zwei benachbarten Palindromzahlen von ihrer Stellenzahl und den spezifischen Ziffern abhängt.

Für ein einfacheres Verständnis der Frage können wir die Betrachtung auf Palindromzahlen mit ungerader Zifferanzahl beschränken. Die mittlere Ziffer dieser Zahlen ist immer diejenige, die sich verändert, um das nächste Palindrom zu erreichen. In diesem Fall beträgt die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Palindromzahlen immer 2, wenn die Differenz zwischen den mittleren Ziffern betrachtet wird. Das liegt daran, dass, wenn die mittlere Ziffer um 1 erhöht wird, die resultierende Zahl immer noch ein Palindrom ist.

Allerdings ist dies nicht mehr der Fall, wenn wir Palindromzahlen mit gerader Zifferanzahl betrachten. In diesem Fall sind die Differenzen zwischen benachbarten Palindromzahlen nicht konstant, da eine Änderung an zwei Stellen (den beiden mittleren) notwendig ist, um das nächste Palindrom zu erreichen.

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Regel nicht gilt, wenn wir den Übergang von einer Zahlenklasse zur nächsten betrachten (z.B. von der größten dreistelligen Palindromzahl 999 zur kleinsten vierstelligen Palindromzahl 1001, deren Differenz 2 ist).

Diese Analyse betrachtet ausschließlich Palindromzahlen im Dezimalsystem. In anderen Zahlensystemen könnten andere Muster gelten.

Abbildung 8. Input der algebraischen Problemlöseaufgabe unter CoT-Variante D, sowie die generierte Antwort aus GPT-4

mit 1 und 11 festhält. Die hier vorgestellte Antwort ist die bestmögliche Lösung, die das generative KI-Sprachmodell erstellen konnte.

Fazit

Für die vorgestellten Beispiele, unter Verwendung des generativen KI-Sprachmodells GPT-4 und in Bezug auf die Lösung von Problemlöseaufgaben mit Basiskompetenzen im arithmetischen Bereich, erscheint Variante A (Zero-shot und Anregung zum Chain-of-Thought) zur Generierung einer korrekten Antwort ausreichend. Weitere Beispiele müssen zeigen, ob diese Prompt-Technik für eine Vielzahl von

Problemlöseaufgaben auf diesem Leistungsniveau effektiv ist. Da die Entwicklungen im Bereich der KI-Forschung deutlich an Geschwindigkeit zunehmen und Veränderungen mittlerweile im nahezu wöchentlichen Takt auftreten, könnten in zukünftigen Varianten die Prompt-Techniken bereits in die entsprechenden Schnittstellen integriert sein. Die weiteren Prompt-Techniken, wie die erweiterte Chain-of-Thought und der Query Loop, erzielten keine nennenswerte Verbesserung der Ergebnisse, als unter Variante A. Variante D, ein Few-shot-Szenario mit Chain-of-Thought, erzielt lediglich eine an die Nutzerin oder den Nutzer ausgerichtete

Ausgabe. Dies kann jedoch von Bedeutung sein, wenn die Form der Antwort von GPT-4 im schulischen Gebrauch entsprechende Vorgaben erfüllen soll.

Die vorgestellte algebraische Problemlöseaufgabe, die die Beschreibung eines Musters erfordert und eine Übertragung des Problems in eine mathematische Struktur, stellt nach wie vor eine deutliche Herausforderung für GPT-4 dar. Mit keiner der verwendeten Prompt-Techniken konnte GPT-4 eine vollständige und zufriedenstellende Lösung des Problems generieren. Gleichwohl zeigte sich im Versuch auch hier Variante A als sehr wirkungsvoll. Ein Zero-shot-Szenario mit der Anregung zu einer Chain-of-Thought führte hierbei zu einer deutlichen Verbesserung der Ausgabe. Unter Variante C konnte mit der Strategie des Query-Loops die zentrale Herausforderung für das generative KI-Sprachmodell identifiziert werden. Dies lieferte eine wertvolle Rückmeldung zur Verwendung eines passenden Lösungsbeispiels unter Variante D (Few-shot-Szenario mit Chain-of-Thought). Zwar schafft GPT-4 auch unter Variante D nicht die erwünschte Leistung, liefert allerdings eine erste Lösung, die die algebraischen Strukturen mehr in den Blick nimmt. Hier wird der große Einfluss des Lösungsbeispiels über das Few-shot-Learning des generativen KI-Sprachmodells ersichtlich – was auch für den schulischen Einsatz dieser Technik eine hohe Relevanz besitzt. Schülerinnen und Schüler müssen also über die notwendigen Problemlösefähigkeiten verfügen, um selbst ein passendes Lösungsbeispiel zu verwenden oder zu generieren. Selbst die Suche nach einer analogen Lösung im Internet macht in unserem Beispiel ein Verständnis für Problemlösestrategien und den Umgang mit algebraischen Strukturen unabdingbar. GPT-4 kann in seiner aktuellen Version zwar als Ideengeber dienen und eine Struktur vorgeben. Die letztendliche mathematische Tätigkeit und die Beurteilung der Ausgabe auf ihre Richtigkeit hin verbleiben jedoch bei den Anwenderinnen und Anwendern.

Empfehlungen

Für die Verwendung großer generativer KI-Sprachmodelle wie ChatGPT existieren verschiedene trainingsbasierte Prompt-Techniken, die die Leistungsfähigkeit des Modells bei mathematischen Problemlöseaufgaben verbessern können. Dabei können Aufgaben sowohl direkt gestellt (Zero-shot-Szenario) werden, als auch mit Hilfe eines oder mehrerer Lösungsbeispiele (Few-shot-Szenario), was eine gewünschte Ausgabeform der Lösung provoziert. Die Prompts sollten die KI-Sprachmodelle zur Generierung einer logischen Gedankenkette (Chain-of-Thought) anregen, um deutlich bessere

Ergebnisse zu erzielen und „Denkfehler“ offenzulegen. Durch die Technik Query-Loop, welche dem Modell das Stellen von Fragen ermöglicht, können Herausforderungen für das Modell identifiziert werden.

Diese Schritt-für-Schritt-Anleitung skizziert unseren Prozess der effektiven Umsetzung der vorgestellten trainingsbasierten Prompt-Techniken (vgl. Ramlochan, 2023):

1. *Zero-shot-Szenario*: Formulieren Sie das Problem in einer logischen und sprachlich klaren Abfolge. Zerlegen Sie das Problem, falls notwendig, in Teilprobleme.
2. *Zero-shot-Szenario, Chain-of-Thought*: Regen Sie das KI-Sprachmodell zur Strukturierung der Ausgabe mit dem Zusatz „Lass uns Schritt für Schritt vorgehen.“ an.
3. *Zero-shot-Szenario, Chain-of-Thought, Query-Loop*: Ermöglichen Sie dem Modell mit dem Zusatz „Stelle notwendige Fragen, die Du zur Beantwortung der Frage benötigst.“ eine Rückmeldung zu geben.
4. *Few-shot-Szenario, Chain-of-Thought*: Konzipieren Sie mehrere Prompts mit kurzen Lösungsbeispielen, die die erforderliche Denkstruktur bei vergleichbaren Herausforderungen darstellen. Nutzen Sie in Ihren Lösungsbeispielen eine nachvollziehbare und logische Gedankenkette, um das Modell bei einer Chain-of-Thought zu unterstützen. Geben Sie das Lösungsbeispiel zusammen mit dem eigenen Problem ein.

Mit dieser Abfolge an Strategien konnten in den beiden aufgeführten Problemlöseaufgaben deutlich Verbesserungen der Leistungen des generativen KI-Sprachmodells GPT-4 erzielt werden. Inwiefern diese Prompt-Techniken auch auf zukünftige Modelle anwendbar sind, werden die weiteren technischen Entwicklungen zeigen müssen. Ebenso sind die Entwicklungen bei den kürzlich eingeführten Plugins (bspw. Wolfram) zu berücksichtigen. Es scheint uns allerdings grundlegend zu sein, diese Techniken zu beschreiben, um die Modelle im schulischen Bereich produktiv einzusetzen und die Qualität der Ausgaben der KI-Sprachmodelle insbesondere im mathematischen Bereich zu verbessern. Die Techniken könnten dann für Entwicklungen von KI-basierten Lernumgebungen im Mathematikunterricht verwendet werden, um einen kritischen und vor allem konstruktiven Umgang mit den KI-Werkzeugen der Zukunft zu fördern.

Literatur

Arora, S., Narayan, A., Chen, M. F., Orr, L., Guha, N., Bhatta, K., Chami, I., & Re, C. (2023). Ask me anything: A simple strategy for prompting language models.

- Paper presented at ICLR 2023. openreview.net/pdf?id=bhUPJnS2goX
- Brown, T., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J. D., Dhariwal, P., Neelakantan, A., Shyam, P., Sastry, G., Askell, A., Agarwal, S., Herbert-Voss, A., Krueger, G., Henighan, T., Child, R., Ramesh, A., Ziegler, D., Wu, J., Winter, C., Hesse, C., Chen, M., Sigler, E., Litwin, M., Gray, S., Chess, B., Clark, J., Berner, C., McCandlish, S., Radford, A., Sutskever, I., & Amodei, D. (2020). Language models are few-shot learners. *NeurIPS*.
- Buchholtz, N., Baumanns, L., Huget, J., Peters, F., Schorcht, S. & Pohl, M. (2023). Herausforderungen und Entwicklungsmöglichkeiten für die Mathematikdidaktik durch generative KI-Sprachmodelle. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 114, 19–26.
- Cherian, A., Peng, K.-C., Lohit, S., Smith, K., & Tenenbaum, J. B. (2022). Are deep neural networks SMARTer than second graders? DOI:10.48550/arXiv.2212.09993
- Dauscher, P. (2019). Künstliche Intelligenz selbst programmiert. *MNU Journal*, 6, 472–477.
- Drori, I., Zhang, S., Shuttleworth, R., Tang, L., Lu, A., Ke, E., Liu, K., Chen, L., Tran, S., Cheng, N., Wang, R., Singh, N., Patti, T. L., Lynch, J., Shporer, A., Verma, N., Wu, E., & Strang, G. (2022). A neural network solves, explains, and generates university math problems by program synthesis and few-shot learning at human level. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119(32), 1–181.
- Floridi, L. & Chiriatti, M. (2020). GPT-3: Its nature, scope, limits, and consequences. *Minds & Machines*, 30, 681–694.
- Herm, L.-V., Wanner, J., Seubert, F., & Janiesch, C. (2021). I don't get it, but it seems valid! The connection between explainability and comprehensibility in (X)AI research. In *European Conference on Information Systems (ECIS)* (S. 1).
- Kojima, T., Shane Gu, S., Reid, M., Matsuo, Y., & Iwasawa, Y. (2022). Large Language models are zero-shot reasoners. [arXiv:2205.11916v1.pdf#page=1](https://arxiv.org/abs/2205.11916v1.pdf#page=1)
- Lample, G., & Charton, F. (2019). Deep learning for symbolic mathematics. DOI:10.48550/arXiv.1912.01412
- Larsen, M., & Weßels, D. (2022): Chain of Thought Prompting: KI-Transfer Hub SH. <https://kuenstliche-intelligenz.sh/de/chain-of-thought-prompting>
- Liu, P., Yuan, W., Fu, J., Jiang, Z., Hayashi, H., & Neubig, G. (2021): Pre-train, prompt, and predict: A systematic survey of prompting methods in natural language processing. [arXiv:2107.13586.pdf](https://arxiv.org/abs/2107.13586.pdf)
- Lutz-Westphal, B. (2023). ChatGPT und der „Faktor Mensch“ im schulischen Mathematikunterricht. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31(1), 19–21.
- Oldenburg, R. (2023). Künstliche und natürliche Intelligenz: Zur Gestaltung einer zukünftigen Bildung. *Forschung & Lehre*, 23(5), S. 346–347.
- OpenAI (2023). GPT-4 Technical Report. [arXiv:2303.08774.pdf](https://arxiv.org/abs/2303.08774.pdf)
- Ott, B. (2018). Mathematische Strukturen in Textaufgaben und grafischen Darstellungen. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1363–1366). WTM.
- Paaß, G. (2022). Sprachverstehen: GPT-3 & Co. texten überzeugend, aber nicht faktentreu. *c't*, 9, 65.
- Ramlochan, S. (2023). Master prompting concepts: Chain of thought prompting. www.promptengineering.org/master-prompting-concepts-chain-of-thought-prompting/#introduction-to-chain-of-thought-cot-prompting
- Renkl, A. (2002). Worked-out examples: Instructional explanations support learning by self-explanations. *Learning and Instruction*, 12(5), 529–556.
- Schönthaler, P. (2023). Schneller als gedacht: ChatGPT zwischen wirtschaftlicher Effizienz und menschlichem Wunschdenken. *c't*, 9, 126–131.
- Schorcht, S. (2022). Changes and rigors in systems of mathematical representations within gifted children's problem-solving process. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb. 2022, Bolzano, Italy. hal-03765552
- Strecker, K. (2020). Ein kleines Neuronales Netz selbst programmieren. *MNU Journal*, 2, 92–96.
- Wei, J., Zhou, D. (2022): Language Models Perform Reasoning via Chain of Thought: Google AI Blog. ai.googleblog.com/2022/05/language-models-perform-reasoning-via.html
- Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Ichter, B., Xia, F., Chi, Ed H., Le, Q. V., & Zhou, D. (2023). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. [arXiv:2201.11903.pdf](https://arxiv.org/abs/2201.11903.pdf)
- Weßels, D. (2023a). ChatGPT: Ein Meilenstein der KI-Entwicklung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31(1), 17–19.
- Weßels, D. (2023b). Was ist ChatGPT und wie funktioniert es? Und welche ähnlichen Tools gibt es. Vortrag in der dghd-Reihe „KI in der Hochschullehre“ am 27. Januar 2023. youtu.be/cMuBo_rH15c
- Sebastian Schorcht, Technische Universität Dresden
E-Mail: sebastian.schorcht@tu-dresden.de
- Lukas Baumanns, Universität zu Köln und Pädagogische Hochschule Freiburg
E-Mail: lukas.baumanns@uni-koeln.de
- Nils Buchholtz, Universität Hamburg
E-Mail: nils.buchholtz@uni-hamburg.de
- Judith Huget, Universität Bielefeld
E-Mail: jhuget@math.uni-bielefeld.de
- Franziska Peters, Justus-Liebig-Universität Gießen
E-Mail: franziska.peters@math.uni-giessen.de
- Maximilian Pohl, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: maximilian.pohl@uni-due.de

Verbundprojekt MINT ins LAND (MiL)

Felicitas Pielsticker und Jacqueline Köster

MiL ist ein mobiles MINT-Angebot für die ländliche Region – zielgruppenspezifisch, bedarfsgerecht und nachhaltig. Das Verbundprojekt ist ein durch das BMBF gefördertes außerschulisches Angebot, bei dem Kinder im Alter von 10–16 Jahren MINT zum Hobby machen. Unser E-MINT-Mobil hat am 1. September 2022 gestartet und fährt noch bis zum 31. August 2025 durch die Region südliches Südwestfalen. Es werden verschiedene Orte im Kreis Siegen-Wittgenstein und im Kreis Olpe turnusmäßig als sogenannte Haltestellen mit dem E-MINT-Mobil angefahren. Jede Haltestelle wird pro Halbjahr alle zwei Wochen insgesamt zehn Mal besucht. Dabei ist das Projekt MINT ins Land, Verbundprojekt des MINT-Clusters südliches Südwestfalen – ein partnerschaftlicher regionaler Zusammenschluss aus der Universität Siegen als Netzwerkkoordination, Vertreter/innen des öffentlichen Sektors der Zivilgesellschaft und Wirtschaftsvertretern.

Dabei unterscheidet sich MiL von vielen anderen MINT-Angeboten in der Hinsicht, dass es konsequent aus der Mathematikdidaktik (Projektkoordination) heraus geleitet, organisiert und inhaltlich gedacht ist. Im Sinne der Kompetenz des Modellierens oder auch in Bezug auf Verbindungen zum Sachunterricht, soll Schulmathematik an physikalisch erfahrbare und reale Phänomene angelehnt sein und Anwendungskontexte eingebracht werden (Hefendehl-Hebeker, 2016). Soll (Schul-)Mathematik an realen Gegenstandsbereiche orientiert und phänomenbasiert eingeführt und aufbereitet werden (Kaiser, 2020), so bieten sich insbesondere realistische MINT-Problemstellungen an. Im Gegensatz zu sogenannten eingekleideten Aufgaben (Jahnke, 2005; Baumann, 2011) oder Problemstellungen, die als wortreiche Textaufgaben nur wenig mit mathematischem Modellieren zu tun haben (Jahnke et al., 2014). Zudem ist es im Projekt MiL möglich, jeden eingebrachten Inhalt auch hinsichtlich seines mathematischen Gehaltes zu prüfen.

In den drei Projektjahren wird unser MINT-Mobil ca. 22 200 km zurücklegen und somit ein großes Flächengebiet um MINT-Bildung in einer ländlich geprägten Region bereichern. Zudem haben wir ein handlungsfähiges und flexibles Netzwerk aller für die Region relevanten MINT-Akteure schaffen können. Das E-MINT-Mobil fungiert dabei nicht nur als Transporter, sondern auch als inhaltlicher und struktureller Vernetzungsanker für das

MINT-Cluster.

Mit dem Verbundprojekt MiL haben wir die Möglichkeit, Kinder und Jugendliche zu erreichen, die zuvor wenig Interesse für MINT-Fächer zeigten, darunter z. B. Kinder und Jugendliche von Förderschulen, denen wir ein individuell zugeschnittenes Angebot bieten. Dabei hält Martin Berens, pädagogischer Mitarbeiter der Kinder- und Jugendfreizeitstätte „Kleine offene Tür (K. o. T.)“ Wenden – MINT ins Land Haltestelle – fest:

Für uns ist die Kooperation mit dem Projekt MINT ins Land sehr gut, weil wir neue Kinder und Jugendlichen als Besucher hier gewinnen können, die zudem auch außerhalb des Projektes noch zu uns kommen. Wir als Mitarbeiter sehen, dass das Projekt sehr gut angenommen wird und die Kinder wissbegierig an den Tischen sitzen und die Inhalte durchführen.

Weiterhin soll MiL insbesondere Mädchen und junge Frauen ansprechen und dabei helfen, MINT-Bildung für alle zugänglicher zu machen. So hält eine Teilnehmerin des Projektes fest: „Also ich finde es gut, denn wir machen viele Sachen, die man so zu Hause eigentlich nicht macht. Das Projekt ist sehr lehrreich.“

Hintergrund – Empirische Kontexte

Lehr- und Lernprozesse in Zusammenhang mit MINT-Inhalten sind aus lern- und bildungstheoretischen Gründen häufig von Anschaulichkeit und Realitätsbezug geprägt (Hefendehl-Hebeker, 2016). Wissen wird dabei nicht nur zur Beschreibung von empirischen Objekten (Handkreisel, Zeichenblattfiguren, gezinkter Würfel, etc.) angewendet, sondern dieses entwickelt sich an und im Umgang mit diesen Objekten (Tall, 2013). Wie im folgenden Beispiel (Abbildung 1) aus MINT ins Land deutlich wird, kann Wissen auf der Grundlage von Wahrnehmung und Handlungen (weiter-)entwickelt werden. Die Kinder gehen mit geometrischen Körpern im CAD-Programm Tinkercad™ um. Dabei werden Eigenschaften der auf eine Arbeitsebene von Tinkercad gezogenen Objekte identifiziert und empirisch überprüft. Damit wird verdeutlicht, dass im Projekt, empirische Objekte (hier: im CAD-Programm erstellte virtuelle geometrische Körper) eine wichtige Rolle für die Wissensaktivierung spielen. Eine Wissensaktivierung, die wir mit empirischen Kontexten,



Abbildung 1. Nutzung des Programms Tinkercad als empirischer Kontext in MINT ins Land

„also solchen Kontexten, die auf die uns unmittelbar umgebende physikalische Welt („physical space“ Hempel, 1945, „problems from the real world“ Pollak & Garfunkel, 2014) bezogenen sind“ (Pielsticker & Witzke, 2022, S. 1) initiieren möchten. Um Wissensaktivierung in empirischen Kontexten anregen zu können, liegt der Fokus bei jeder Haltestelle und jeder Lerngruppe auf einer ausgewählten geeigneten Problemstellung. Wichtig ist bei dieser Arbeit, dass die Kinder und Jugendlichen ihre selbst hergestellten MINT-Inhalte mit nach Hause nehmen können und sich auf diese Weise nachhaltig, mit den im Projekt erstellten empirischen Objekten und dem daran gebundenen Wissen auseinandersetzen.

MINT-Problemstellungen – Module

Im Rahmen des ersten Zyklus von MINT ins Land haben wir ein breites Spektrum an vielfältigen MINT-Problemstellungen für Kinder und Jugendliche entwickelt und bereitgestellt. Diese MINT-Herausforderungen sind in drei Module unterteilt, „3D-Druck“, „I like to move it“ und „It’s magic: versuchs!“. Das Ziel dieser Module besteht darin, die Fähigkeit der Teilnehmer/innen zur problemlösenden Denkweise fächerübergreifend und außerschulisch zu fördern.

Das Modul „3D-Druck“ bietet den Teilnehmer/innen die Möglichkeit, die faszinierende Welt der 3D-Druck-Technologie zu erkunden. Hier erwerben sie Kenntnisse und Fertigkeiten im Zeichnen von Objekten mithilfe eines 3D-Druck-Stiftes, sowie im Entwerfen dreidimensionaler Objekte mittels des CAD-Programms Tinkercad. Im Modul „I like to move it“ setzen sich die Kinder und Jugendlichen mit verschiedenen Bewegungsabläufen auseinander, wie beispielsweise der Thermodynamik oder dem Elektroantrieb. Hier geht es z. B. darum, Problemlöseaufgaben im Zusammenhang mit der Steuerung und Umwandlung von Energie zu lösen. Das Modul „It’s magic: versuchs!“ beschäftigt sich mit einer Vielzahl von naturwissenschaftlichen Experimenten. Hier sollen die Teilnehmer/innen durch das Lösen von Problemlöseaufgaben ihre Fähigkeiten in Bezug auf das Durchführen und Auswerten von Experimenten weiterentwickeln.

In Tabelle 1 werden die einzelnen MINT-Problemstellungen der jeweiligen Hauptkategorien, die im ersten Zyklus des Projektes MINT ins Land behandelt werden, aufgelistet. Die drei Module bieten den Teilnehmer/innen eine wertvolle Gelegenheit, ihre Fähigkeiten im Problemlösen zu etablieren und zu verbessern. Im Folgenden werden einige Beispiele

Tabelle 1. MINT-Problemstellungen bei MINT ins Land

	3D-Druck	I like to move it	It’s magic: versuchs!
MP 1	Erstellung von 3D-Druck-Stift Objekten	Rotationsenergie: Bau eines Autos mit Gummibandtrieb	Herstellung von Geheimtinte
MP 2	Entwicklung von dreidimensionalen Kantenmodellen	Elektromotor: Bau eines Gleichstrommotors mit Batterie	Extraktion von Farbstoffen aus Möhren
MP 3	Tinkercad: CAD-Konstruktion eines Schlüsselanhängers	Aufwindkraftwerk: Bau einer Aufwindturbine aus Papier	Erzeugung von einem Wasservulkan
MP 4	Tinkercad: Entwicklung eines gezinkten Würfels	LEGO® Education SPIKE™ Prime: Blockprogrammierung	Elektronenübertragung: Herstellung einer Zitronenbatterie
MP 5	Tinkercad: Entwicklung eines Handkreisels	Virtual Reality Brille: Erkundung einer virtuellen Welt	Produktion einer Lavalampe



Abbildung 2. Teilnehmerinnen von MINT ins Land bei dem Konstruieren von einem Handkreisel

le für Problemlöseaufgaben aus dem ersten Zyklus des Projektes MINT ins Land vorgestellt.

MINT-Problemstellung: Entwicklung eines Handkreisels mit Tinkercad

Die MINT-Problemstellung „Entwicklung eines Handkreisels mit Tinkercad“ wird dem Modul „3D-Druck“ zugeordnet. In diesem Kontext haben die Teilnehmer/innen die Aufgabe, eigenständig einen Handkreisel (Abbildung 2) zu entwerfen, zu konstruieren und mittels eines 3D-Druckers herzustellen. Ein Handkreisel ist ein Objekt, das zwischen Daumen und Zeigefinger gehalten und dann in Rotation versetzt wird.

Abbildung 3 zeigt eine Konstruktion eines solchen Handkreisels. Die erforderlichen Bohrungen werden nach dem Druck mit Kugellagern bestückt, welche den Teilnehmer/innen im Rahmen der Aufgabe zur Verfügung gestellt werden. Ein fertiger Druck ist in Abbildung 4 zu sehen. Die Teilnehmer/innen arbeiten in Gruppen von drei bis vier Personen zusammen. Die MINT-Problemstellung wirft verschiedene Fragen auf, die seitens der Kinder und der Jugendlichen zu lösen sind: Welche Größe sollen die Bohrungen haben? Wie sollte der Schwerpunkt verteilt sein? Wie kann die Konstruk-

tion gestaltet werden, um sicherzustellen, dass die Arme des Handkreisels alle den gleichen Abstand zueinander haben?

In Anbetracht dieser Herausforderung werden die Teilnehmenden ermutigt, ihre kreativen und technischen Kompetenzen zur erfolgreichen Konzeption und Fertigung des Handkreisels einzusetzen, um die vielfältigen Fragestellungen, die sich aus dieser MINT-Problemstellung (insbesondere auch einer Kreis(el)-Geometrie) ergeben, zu beantworten.

MINT-Problemstellung: Blockprogrammierung mit LEGO® Education SPIKE™ Prime

Die MINT-Problemstellung „Blockprogrammierung mit LEGO® Education SPIKE™ Prime“ wird dem Modul „I like to move it“ zugeordnet. Im Rahmen dieser MINT-Problemstellung haben die Kinder und Jugendlichen die Aufgabe, einen Roboter mithilfe der Blockprogrammierung so zu programmieren, dass dieser spezifische Aufgaben erfüllt, wie beispielsweise das Fahren über eine schwarze Linie. Hierfür bedienen sich die Teilnehmer/innen einer Drag-and-Drop-Programmiersprache, die auf der Grundlage von Scratch entwickelt wurde. Die Blockprogrammierung ist eine Möglichkeit, um ma-

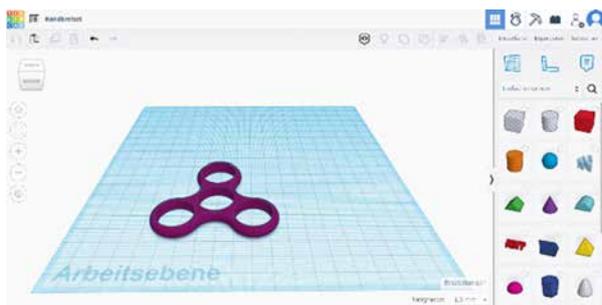


Abbildung 3. Ergebnis einer Konstruktion von einem Handkreisel mit Tinkercad



Abbildung 4. 3D-gedruckter Handkreisel

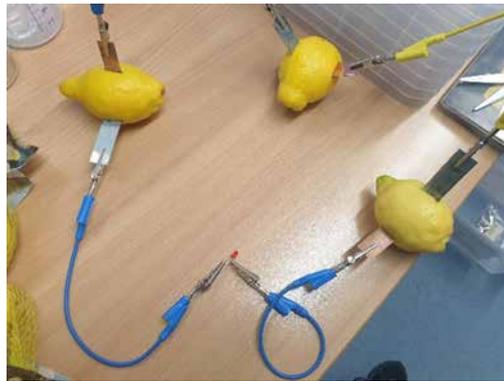


Abbildung 5. Zitronenbatterien-Reihenschaltung

thematische Algorithmen durch den Einsatz visueller Blöcke zu veranschaulichen. Hierbei werden vordefinierte Blöcke mit Codes in einer bestimmten Abfolge angeordnet, um die Ausführung eines Programms zu steuern. Infolgedessen regt die MINT-Problemstellung im Bereich der Blockprogrammierung die Teilnehmenden dazu an, ihre kritische Denkfähigkeit zu schärfen und komplexe Problemstellungen erfolgreich zu lösen.

MINT-Problemstellung: Herstellung einer Zitronenbatterie

Die Herstellung einer Zitronenbatterie ist eine MINT-Problemstellung des Moduls „It’s magic: versuchs!“. Hier haben die Kinder und Jugendlichen die Aufgabe eine Zitronenbatterie zu erstellen. Für diese Batterie haben die Teilnehmer/innen eine Zitrone, einen Zinknagel, einen Kupfernagel, zwei Kabel mit Krokodilklemmen sowie eine Leuchtdiode als Materialien zur Verfügung. Anschließend soll eine Reihenschaltung mit den einzelnen Zitronenbatterien erstellt werden (Abbildung 5).

Die Teilnehmer/innen haben bei dieser MINT-Problemstellung die Möglichkeit, edle und unedle Metalle zu unterscheiden und die Bedeutung von Elektrolyten sowie den Aufbau eines Stromkreises bei kombinierten Halbzellen kennenzulernen. Durch naturwissenschaftliches Arbeiten werden sie ermutigt, ein Experiment systematisch zu variieren, um Zugang zu den zugrunde liegenden Prinzipien erhalten zu können. Dadurch gewinnen sie Einblicke in die Herkunft chemisch erzeugter elektrischer Energie. Dabei sind logische Gesichtspunkte bei der Erstellung wesentlich, d. h. die Jugendlichen erleben sehr anschaulich die Beschreibung einer logisch deduktiv geordneten Welt (Winter, 1995).

Erfahrungen aus dem ersten Zyklus des Projektes MINT ins Land

Erfahrungen aus dem Projekt „MINT ins Land“ verdeutlichen, dass Kinder und Jugendliche von der

praktischen Herangehensweise zur Erkundung der MINT-Fächer, beispielsweise durch den Bau eines Gleichstrommotors mit Batterie oder eines Autos mit Gummibandtrieb, fasziniert sind.

In der naturwissenschaftlichen Bildung wird der Mathematik eine besondere Rolle zuteil. Sie ist einerseits eine eigene Wissenschaft mit besonderen Grundlagen und Methoden, und sie ist andererseits die zentrale Bezugswissenschaft aller Naturwissenschaften und der Technik. (Siller & Weigand, 2023)

Während der einzelnen Module arbeiteten die Teilnehmer/innen häufig in Gruppen an vielfältigen Aufgaben. Unsere Erfahrungen haben gezeigt, dass die Kinder und Jugendlichen von Anfang an eine hohe Motivation zeigten, am Projekt teilzunehmen, und daher regelmäßig zu den Haltestellen zurückkehrten. Eine bedeutende Erkenntnis, die wir beispielsweise bei der MINT-Problemstellung „Rotationsenergie: Bau eines Autos mit Gummibandtrieb“ gewonnen haben, besteht darin, dass es für die Kinder und Jugendlichen entscheidend war, den Bau des Autos sorgfältig zu planen und die Energie effizient zu nutzen, um in einer Challenge erfolgreich gegen andere Gruppen gewinnen zu können. Es war beeindruckend zu beobachten, wie die vielfältigen Ideen der Gruppenmitglieder zu einem funktionsfähigen Modell führten. Unsere MINT-Problemstellungen sind fächerübergreifend und erfordern somit tatsächlich Kenntnisse aus unterschiedlichen MINT-Bereichen. Hier fügen Weigand und Siller (2023) an, dass „MINT-Kenntnisse und -Fähigkeiten [...] unverzichtbar für die Lösung der anstehenden globalen Probleme“ sind. Bei dem Bau eines Autos mit Gummibandtrieb werden Kenntnisse aus den Fächern Technik und Physik benötigt, wobei die Kinder und Jugendlichen auch bei dieser MINT-Problemstellung mathematische Verfahren und Begriffe als Werkzeuge und Hilfsmittel nutzen. Beispielsweise können mathematische Berechnungen zur Vorhersage der zurückge-

legten Strecke des Fahrzeugs angewendet werden und es wird in Weg-Zeit-Diagrammen funktionales Denken (Vollrath, 1989) angesprochen. Durch unsere praxisorientierten Lernmethoden gelingt es den Teilnehmenden, so unsere Intention, ein besseres Verständnis für MINT-Konzepte zu entwickeln und ihr mathematisches, physikalisches sowie technisches Verständnis zu vertiefen. Auch bei weiteren MINT-Problemstellungen nimmt die Mathematik eine entscheidende Bedeutung ein. Beispielweise bei der Arbeit mit Robotik und der Blockprogrammierung. Offensichtlich steht bei diesem Modul die Informatik durch das Erlernen grundlegender Programmierkonzepte im Vordergrund. Dennoch braucht es auch die Mathematik, um beim Einsatz von Blockprogrammierung mathematische Konzepte, wie beispielsweise Winkel und Berechnungen, anzuwenden. Die Kinder und Jugendlichen messen Abstände und programmieren Winkel, um den Roboter zu steuern.

„MINT ins Land“ ermöglicht, dass die Teilnehmer/innen die von ihnen hergestellten MINT-Inhalte mit nach Hause nehmen können. Wir konnten beobachten, dass dieses Angebot dazu geführt hat, dass die Kinder und Jugendlichen sich besonders engagieren und stolz darauf sind, ihre Ergebnisse zu Hause präsentieren zu können. Damit wird über längere Zeit eine positive Auffassung gegenüber MINT-Fächern aufgebaut, entgegen dem Bild „in Mathe war ich immer schlecht“ (Beutelspacher, 2009, Titel), mit dem in unserer Gesellschaft manches Mal kokettiert wird. Zudem erhalten die Teilnehmer/innen die Möglichkeit, sich auch außerhalb des Projektes weiterhin mit den erlernten Inhalten auseinanderzusetzen und ihr Interesse an den MINT-Fächern aufrechtzuerhalten. Zusammenfassend zeigen die Erfahrungen aus dem ersten Zyklus, dass das Projekt „MINT ins Land“ sehr positiv aufgenommen wurde. Wir freuen uns über die Begeisterung und Wissbegierde der Kinder und Jugendlichen, die unsere Veranstaltungen besuchen und die Inhalte mit großer Neugier durchführen.

Ausblick

Das MINT-Cluster südliches Südwestfalen mit dem Verbundprojekt MINT ins Land bietet eine Möglichkeit Inhalte aus Mathematik, Informatik, den Naturwissenschaften Biologie, Physik und Chemie sowie auch aus der Technik für Kinder und Jugendliche langfristig als Hobby im Nachmittagsbereich zu verankern. Gedacht aus dem Bereich der Mathematik heraus, wird Interesse für MINT-Inhalte geweckt, nachhaltig gefördert und Perspektiven für berufliche Orientierung gruppenspezifisch differenziert vermittelt. Dabei spielt insbesondere die regelmäßige Beschäftigung mit diesen

MINT-Inhalten im Projekt eine entscheidende Rolle. Das (quasi-)naturwissenschaftliche Arbeiten an Problemstellungen in empirischen Kontexten und die Bindung des Wissens an erstellte Objekte ermöglicht eine tiefgreifende, vom Schulunterricht losgelöste, Auseinandersetzung mit möglichen MINT-Zusammenhängen. Nach den drei Jahren Projektlaufzeit stehen sodann ein mobiles Angebot, mit an MINT-beteiligten Akteuren der Region und konkrete Module aus den MINT-Cluster-Strukturen zur Verfügung, um weitere Bereiche zu erschließen. Eine regelmäßige Evaluation, sowie eine systematische Begleitforschung ermöglichen dabei ein Qualitätsmanagement mit Reflexions- und Austauschlässe.

Aufgebaute Organisationsstrukturen und etablierte Module ermöglichen einen Transfer des Modellprojektes. Zudem planen wir die MINT-Problemstellungen der einzelnen aufbereiteten Module als Praxisband herauszugeben und damit einer weitreichenden Nutzung zugänglich zu machen.

Literatur

- Baumann, A. (2011). Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben“ anhand von Beispielen aus dem hessischen Zentralabitur 2009. *Mathematikin-formation* 55, 15–23.
- Beutelspacher, A. (2009). „In Mathe war ich immer schlecht ...“. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–24). Wiesbaden, Springer Spektrum.
- Jahnke, T. (2005). Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*.
- Jahnke, T., Klein, H. P., Kuhnel, W., Sonar, T., & Spindler, M. (2014). Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik. Entwicklung von 2005 bis 2013, *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 22, 115–121.
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 553–561). Cham, Switzerland: Springer. DOI:10.1007/978-3-030-15789-0_101
- Tall, D. O. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge University Press. DOI:10.1017/CBO9781139565202
- Pielsticker, F. & Witzke, I. (2022). Erkenntnisse zur Beschreibung des aktivierten mathematischen Wissens in empirischen Kontexten an einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Mathematica Didactica*, 45. DOI:10.18716/ojs/md/2022.1395
- Siller, H.-S. & Weigand H.-G. (2023). Ohne Mathe geht es nicht. MINT-Bildung: Chancen für den Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 237.

- Vollrath, H. J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, 3–37. DOI:10.1007/BF03338719
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46. ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/69/80

Dr. Felicitas Pielsticker, Universität Siegen
 pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Jacqueline Köster, Universität Siegen
 koester@mathematik.uni-siegen.de

Projekt Diagnosesprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Jenny Knöppel und Felicitas Pielsticker

Im Rahmen des [bildungsconnectors:olpe](#), einem Kooperationsprojekt zur empirischen Bildungsforschung der Stadt Olpe, dem Kreis Olpe und der Universität Siegen bietet die Mathematikdidaktik Diagnosesprechstunden an, um Kinder und Jugendliche, Erziehungsberechtigte und Lehrpersonen in Fragen zu besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gezielt, ortsnah, individuell und professionell zu beraten. Den Begriff der „besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ verwenden wir in Anlehnung an Gaidoschik et al. (2021). Dabei gibt es zum einen Beratungsmöglichkeiten mit konkreten Handlungsempfehlungen zur selbstständigen Weiterarbeit, zur Nutzung und zum gezielten Einsatz von (Förder-)Materialien sowie Einblicke in den aktuellen Stand der Forschung.

Motivation

Im Rahmen der Diagnosesprechstunde begleiten wir Kinder und Jugendliche, „deren Lernfortschritte, durch welche Gründe auch immer, als unzureichend angesehen werden“ (Lorenz, 2003, S. 15). Die Teilnehmer/innen der Sprechstunden besuchen zurzeit die Jahrgangstufen drei bis sieben. Um den besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu begegnen, ermöglicht das Projekt *Diagnosesprechstunde* eine individuelle Diagnostik mit daraus abgeleiteter individueller Förderung. Dazu bedarf es einer Langzeitbegleitung und der Möglichkeit von längsschnittlichen Untersuchungen. Viele der Schüler/innen besuchen das Projekt seit 2022 wöchentlich. Dadurch ist die Beobachtung einer (Langzeit-) Entwicklung von Wissensaktivierungs- und Wissensentwicklungsprozessen z. B. in Bezug auf ein Zahlverständnis in Zusammenhang mit Bündelungsstra-

tegien möglich. Außerdem besteht die Möglichkeit der Gewinnung von Erkenntnissen über individuell ausgeprägte Strategien der Schüler/innen. Des Weiteren kann in diesem Rahmen das Mathematikbild der Schüler/innen sowie die Entwicklung des Mathematikbildes auch über einen längeren Zeitraum beschrieben werden. Zudem sind die Diagnosesprechstunde und die dabei zu beobachtenden Fälle ein wichtiger Teil des Dissertationsvorhabens der Mitautorin Jenny Knöppel.

Diagnostik und Förderung in empirischen Kontexten

Das Identifizieren und Beschreiben von spezifischen Wissensaktivierungsprozessen bei Kindern und Jugendlichen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen trägt zu einer ausführlichen Diagnostik und zu der Entwicklung von Förderereinheiten bei. „Diagnostik ist außerordentlich wichtig für den weiteren Unterricht und mögliche Fördermaßnahmen“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 211). Der Fokus liegt dabei insbesondere auf einer kompetenz- und prozessorientierten Diagnostik (Wartha & Schulz, 2019). Des Weiteren geht die Durchführung von Diagnoseeinheiten, um besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sowie möglichen Fehlermustern auf den Grund zu gehen, Hand in Hand mit einer Förderung (Götze et al., 2020). Entsprechend „sollte Diagnose förderorientiert ausgerichtet sein und Förderung diagnosegeleitet erfolgen“ (Götze et al., 2020, S. 19). Bei der Entwicklung und Durchführung von Diagnose- und Förderereinheiten innerhalb der Diagnosesprechstunde achten wir dabei insbesondere auf die Initiierung einer Wissensaktivierung mithilfe empirischer

Kontexte („physical space“ Hempel, 1945). „Also solchen Kontexten, die auf die uns unmittelbar umgebende physikalische Welt [...] bezogenen sind“ (Pielsticker & Witzke, 2022, S. 1). Für die Initiierung von Wissensaktivierungsprozessen in empirischen Kontexten fokussieren wir in den Diagnose- und Fördereinheiten auf den Einsatz von ausgewählten (empirischen) Objekten, d. h. gegenständlichen Arbeits- und Anschauungsmitteln.

Vorgehensweise im Rahmen der Diagnosesprechstunde

Nach Kontaktaufnahme durch Lehrkräfte oder Erziehungsberechtigte wird zunächst ein Termin für ein Erstgespräch vereinbart. Im Rahmen der ersten Einheit mit dem/der Schüler/in steht insbesondere das gegenseitige Kennenlernen im Vordergrund, welches für eine gemeinsame Weiterarbeit von Bedeutung ist. In einem ersten Interview wird der Frage nachgegangen, was die Schüler/innen unter Mathematik verstehen bzw. was Mathematik für sie ist. In den darauffolgenden Einheiten liegt der Fokus auf einer kompetenz- und prozessorientierten Diagnostik (Wartha & Schulz, 2019). Dabei geht es insbesondere darum, die Kompetenzen und Schwierigkeiten der Schüler/innen zu identifizieren und Lösungswege bzw. -prozesse zu beobachten und zu dokumentieren (vgl. Abb. 1). Im Rahmen der diagnostischen Gespräche werden die Schüler/innen dazu ermutigt, ihre Lösungswege und Vorgehensweisen im Prozess zu versprachlichen („Lautes Denken“, z. B. Schipper, 2009, S. 343). Für diese Diagnoseeinheiten werden individuell angepasste Interviewleitfäden entwickelt, z. B. in Anlehnung an das informelle Diagnoseverfahren von Kaufmann und Wessolowski (2021) und Wartha und Schulz (2019). Dabei orientieren wir uns insbesondere an „den

drei zentralen Inhaltsbereichen des arithmetischen Basisstoffes“ (Gaidoschik et al., 2021, S. 5), dem Verständnis natürlicher Zahlen, des dezimalen Stellenwertsystems sowie der Rechenoperationen. Zudem besteht im Rahmen der Diagnosesprechstunde die Möglichkeit der Durchführung eines standardisierten Mathematiktests (z. B. DEMAT) in Verbindung mit einer anschließenden Fehleranalyse (Lorenz & Radatz, 1993). Ein weiterer Fokus liegt auf dem Austausch und der Zusammenarbeit mit den beteiligten Lehrkräften und Erziehungsberechtigten: „[...] eine gute Zusammenarbeit der Bezugspersonen (s. o.), der Lehrkräfte und ggf. Förderlehrkräfte [ist] unabdingbar. Nur wenn die Arbeitsweisen, Lerninhalte und die Art der Lernbegleitung an allen Lernorten sinnvoll zusammenwirken, können Schüler/innen, ihren Dispositionen entsprechend, tragfähige mathematische Konzepte entwickeln“ (Gaidoschik et al., 2021, S. 13).

In Anknüpfung an die kompetenz- und prozessorientierte Diagnostik besteht die Möglichkeit, individuelle Interventionseinheiten auf Grundlage der Diagnoseergebnisse zu entwickeln und diese mit den Schüler/innen durchzuführen. Ein wichtiger Aspekt ist dabei die regelmäßige Diagnostik, um auch im Rahmen der Interventionseinheiten den Blick darauf zu richten, welches mathematische Wissen die Schüler/innen in den Einheiten aktivieren und wie sie mit empirischen Objekten (z. B. Arbeitsmaterial, welches in den Einheiten eingesetzt wird) umgehen (vgl. Fallstudien in Pielsticker, 2020).

Das Mathematikbild der Schüler/innen – „Mathe ist –, Zahlen ganz viele Zahlen“

Im Rahmen der Diagnosesprechstunde orientieren wir uns für die Forschung an dem Fallstudienansatz

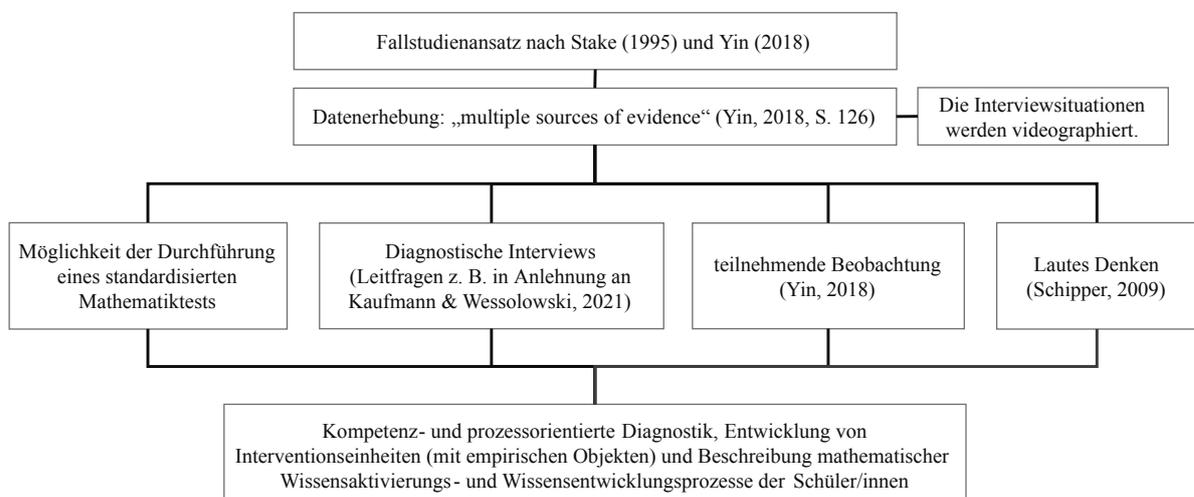


Abbildung 1. Vorgehen und Datenerhebung im Rahmen der Diagnosesprechstunde

nach Stake (1995) und Yin (2018). Dabei geht es um eine möglichst ganzheitliche Betrachtung der Fälle, um die Kompetenzen sowie Schwierigkeiten der Schüler/innen zu identifizieren, diese zu beschreiben und entsprechende Interventionseinheiten zu konzipieren. Im Rahmen der Diagnosesprechstunde geht es insbesondere darum, über einen längeren Zeitraum zu beschreiben, welches mathematische Wissen in bestimmten (empirischen) Kontexten aktiviert wird und wie sich dieses (weiter-)entwickelt (Bauersfeld, 1983; Schoenfeld, 1985). Dazu spielt unter anderem die Identifikation und Beschreibung des Mathematikbildes der Schüler/innen eine wichtige Rolle (Rolka & Halverscheid, 2011; Schoenfeld, 1985). Rolka und Halverscheid (2011) verwenden in diesem Zusammenhang den von Schoenfeld geprägten Begriff der „mathematical world views“ (S. 521).

In einer Studie zu den Vorstellungen von Mathematik von Grundschüler/innen, in der die Schüler/innen zu Beginn der dritten Klasse sowie am Ende der vierten Klasse einen informellen Fragebogen beantworteten, arbeiteten Söbbeke und Steinbring (2004) heraus, dass die betrachteten Schüler/innen die Mathematik in ihren Antworten verstärkt „auf die Bereiche Zahlen, Zählen und das Rechnen von Aufgaben [...] reduzieren“ (S. 37). Rolka und Halverscheid (2011) beschreiben, dass sich im Rahmen einer ihrer Untersuchungen herausstellte, dass in einigen der untersuchten Mathematikurse ein von Zahlen und Berechnungen geprägtes Mathematikbild vorherrscht: „quite often mathematics courses were dominated by a view on mathematics emphasizing numbers or calculations“ (S. 521). Dies lässt sich ebenfalls im Kontext der Diagnosesprechstunde feststellen. Auf die Frage, was Mathematik für die Schüler/innen sei, lassen sich insbesondere die Aspekte der Zahlen (vgl. Zitat Sarah (alle Namen wurden geändert), Abb. 2) sowie des Rechnens (vgl. Zitat Eva, Abb. 2) wiedererkennen.

Im weiteren Verlauf der ersten Diagnosesprechstunden werden die Schüler/innen in einer Einheit darum gebeten, ihr Mathematikbild zu zeichnen und dieses im Rahmen des Interviews zu beschreiben. Zudem werden den Schüler/innen Bilder in Anlehnung an den Fragebogen von Söbbeke und Steinbring (2004) sowie ausgewählte (empirische) Objekte vorgelegt, in Verbindung mit der Impuls-

frage, ob dies für sie etwas mit Mathematik zu tun habe oder nicht. Im Folgenden wird ein illustrativer Einblick in entsprechende Interviewdaten gegeben. In dem vorliegenden Beispiel wurden den Schüler/innen geometrische Figuren vorgelegt und die Interviewerin stellt die Frage, ob die Schüler/innen denken, dass dies etwas mit Mathe zu tun habe oder nicht (vgl. Abb. 3).

So wie Rolka & Halverscheid (2011) in ihren empirischen Untersuchungen Bilder, Texte und Interviews verwenden, um diese im Sinne der Kategorien nach Ernest (1989) zu kategorisieren und die „mathematical world views“ der Schüler/innen zu beschreiben, besteht im Rahmen der Diagnosesprechstunde die Möglichkeit, diese im Rahmen längerfristiger Untersuchungen in verschiedenen (empirischen) Kontexten zu untersuchen (vgl. Abb. 1). Dabei können neben Bildern und Interviews auch Situationen im Umgang mit (empirischen) Objekten (vgl. Abb. 3) über einen längeren Zeitraum mit einbezogen werden.

Am Beispiel der Zitate in Abbildung 3 lassen sich für die betrachteten Schüler/innen Aspekte einer „Zähl-Welt“ (Bauersfeld, 1983, S. 16), in Verbindung mit der Mathematik als „Welt der Zahlen“ charakterisieren, wobei Bereiche der Mathematik, wie z. B. die Geometrie, nicht mit der Mathematik als Welt der Zahlen in Verbindung gebracht werden (vgl. Zitate von Sarah und Lia, Abb. 3). Die Schülerin Lia scheint darüber hinaus noch eine weitere Verbindung zu den Rechenoperationen bzw. -symbolen herzustellen, indem sie den Kreis als „Zeichen“ der Multiplikation bzw. der Division charakterisiert. Dennoch scheint ihre Vorstellung der Mathematik als „Welt der Zahlen“ zu dominieren (vgl. Zitat Lia, Abb. 3). Im Sinne der „instrumentalist view“ nach Ernest (1989), welche in den Studien von Rolka und Halverscheid (2011) für eine entsprechende Kategorisierung in Bildern, Texten und Aussagen von Schüler/innen näher beschrieben wird, scheinen in den Erklärungen und weiteren Ergänzungen der Schülerin jedoch keine weiteren Verknüpfungen der Bereiche stattzufinden, die (empirischen) Objekte werden primär isoliert betrachtet.

Für die Schülerinnen Matilda und Jana scheint der Aspekt des Zählens eine verbindende Rolle zu spielen (vgl. Abb. 3), die Anzahlen der Sei-

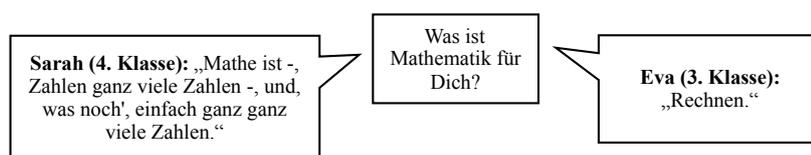
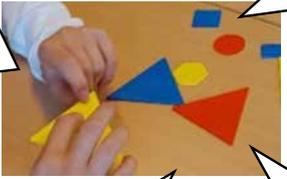


Abbildung 2. Was ist Mathematik für Dich?



Interviewerin: „(Während sie geometrische Figuren auf den Tisch legt) und da würd ich auch gerne genau das gleiche einmal von dir wissen, ob du denkst ob das was mit Mathe zu tun hat.“

Sarah (4. Klasse): „Ich find das ist eher so Geometrie“ (nimmt ein Dreieck in die Hand) „weil da macht - in Geometrie macht man halt, mehr mit Formen als in Mathe.“

Interviewerin: „Was hat das (nimmt zwei geometrische Figuren heraus) mit Mathematik zu tun“

Jana (4. Klasse): „Das man auch die Ecken zählen kann.“

Interviewerin: „(Während sie geometrische Figuren auf den Tisch legt) Was denkst du., hat das was mit Mathe zu tun“, was ich dir hier auf den Tisch gelegt hab. [...]“

Lia (4. Klasse): „also ähm, woran mich der Punkt erinnert – das Zeichen von mal, oder auch geteilt - [...] (auf erneute Nachfrage, ob sie denkt, dass dies etwas mit Mathe zu tun habe oder eher nicht) ich glaube eher nicht - [...] also ich weiß es nich genau aber ich würd eher nich sagen. [...] weil –, ähm das – ja ähm –, eher Formen sind – und ähm nich so viele Zahlen – [...]“

Interviewerin: „(Während sie geometrische Figuren auf den Tisch legt) und da würd ich auch mal gern wissen, ob du denkst dass das irgendwie was mit Mathe zu tun hat.“

Matilda (4. Klasse): „ja weil - wir haben grad in Geometrie – [...] (fährt mit dem Finger an einer Dreiecksseite entlang) beschäftigen wir uns so mit Körpern. wie viel Ecken, Kanten oder wie viele Flächen sie haben., und Geometrie gehört für mich auch irgendwie n bisschen zu Mathe -, [...] und dann könnt ich mir schon vorstellen dass das, zu Mathe gehören würd. [...] (nimmt ein Sechseck in die Hand) zum Beispiel hier - könnt man jetzt zählen wie viele Ecken und Kanten sie haben. [...] (nimmt ein Dreieck) und hier halt auch. also so - also darum (verbinde?) ich das mit Mathe.“

Abbildung 3. Haben geometrische Figuren etwas mit Mathematik zu tun oder nicht?

ten bzw. Kanten der geometrischen Figuren lassen sich durch Zählen ermitteln. An dieser Stelle muss jedoch berücksichtigt werden, dass die geometrischen Figuren und Formen im Mathematikunterricht gegebenenfalls auf diese Art und Weise eingeführt bzw. thematisiert wurden, diesbezüglich sollten weitere Impulsfragen gestellt und ggf. ein entsprechendes Interview mit der Lehrkraft geführt werden (vgl. Zitat Matilda, Abb. 3).

Ausblick

Zusammenfassend erscheint der Aspekt der Beschreibung der (Weiter-)Entwicklung des Mathematikbildes bzw. der „mathematical world views“ von Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen über einen längeren Zeitraum besonders interessant für die Beschreibung von Wissensaktivierungs- und Wissensentwicklungsprozessen zu sein. Dazu wäre es interessant zu untersuchen, inwiefern sich die „mathematical world views“ der Schüler/innen in Anlehnung an die Ausarbeitungen der Kategorien nach Rolka und Halverscheid (2011) charakterisieren lassen und ob und welche „mixed world views“ (S. 529) beschrieben werden können. Da für die betrachteten Schüler/innen im Sommer 2023 darüber hinaus ein Schulwechsel in die weiterführende Schule ansteht, erscheint es insbesondere interessant zu untersuchen und zu beschrei-

ben, inwiefern sich das Mathematikbild der Schüler/innen beim Übergang in die weiterführende Schule (weiter-)entwickelt.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1–56). Aulis-Verlag Deubner.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching*, 15, 13–33. DOI:10.1080/0260747890150102
- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenböcker, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S). ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46
- Götze, D., Selter, C., & Zannetin, E. (2020). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht* (2. Aufl.). Klett Kallmeyer.
- Hempel, C. G. (1945). Geometry and Empirical Science. *American Mathematical Monthly*, 52, 7–17. DOI:10.1080/00029890.1945.11991492
- Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2021). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine* (8. Aufl.). Klett Kallmeyer.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.

- Lorenz, J. H. (2003). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen*. Cornelsen.
- Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderens im Mathematikunterricht*. Schroedel.
- Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck*. Springer Spektrum.
- Pielsticker, F. & Witzke, I. (2022). Erkenntnisse zur Beschreibung des aktivierten mathematischen Wissens in empirischen Kontexten an einem Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. *Mathematica Didactica*, 45. DOI:10.18716/ojs/md/2022.1395
- Pollak, H. & Garfunkel, S. (2014). A View of mathematical modeling in mathematics education. In: A. Sanfratello & B. Dickmann (eds.), *Proceedings of Conference on Mathematical Modeling at Teachers College of Columbia University* (S. 6–12). New York.
- Rolka, K., & Halverscheid, S. (2011). Researching young students' mathematical world views. *ZDM Mathematics Education*, 43, 521–533. DOI:10.1007/s11858-011-0330-9
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.
- Söbbeke, E. & Steinbring, H. (2004). Was ist Mathematik? – Vorstellungen von Grundschulkindern. In P. Scherer, & D. Bönig (Hrsg.), *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern* (Bd. 117, S. 26–38). Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e. V.
- Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Sage Publications.
- Vollrath, H. J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10, 3–37. DOI:10.1007/BF03338719
- Wartha, S. & Schulz, A. (2019). *Rechenproblemen vorbeugen* (6. Aufl.). Cornelsen.
- Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications. Design and Methods* (6th ed.). Sage Publications.

Jenny Knöppel, Universität Siegen
knoepfel@mathematik.uni-siegen.de

Dr. Felicitas Pielsticker, Universität Siegen
pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Mathematik und Sprache – Textanalyse im Mathematikunterricht

Mohini Nonnenmann, Martin Vogt, Simone Bast und Karsten Lübke

Einleitung

„Eines der mächtigsten Instrumente der Menschheitsgeschichte“ ([6]), „Jede Lehrkraft muss ChatGPT kennen“ ([2]): Das sind nur zwei der zahlreichen Titel aus bekannten Onlinezeitungen zum Thema ChatGPT, einem Chatbot der menschenähnliche Texte verfassen kann. Die Titel unterstreichen eindrucksvoll die Bedeutung der Erstellung und Auswertung von Texten, denn wir kommen täglich mehrfach damit in Kontakt, etwa bei der Zeitungslektüre, in Büchern, in Social Media oder auf Webseiten im Internet.

Für zahlreiche Fragestellungen und Anwendungen ist es hilfreich, Texte automatisch auswerten zu können, zum Beispiel um verwendete Sprache von Politikerinnen und Politikern, in Büchern oder in Zeitungen miteinander vergleichen zu können.

Andere Beispiele betreffen Unternehmen, etwa bei der Beantwortung der Frage: Was wird über mein Unternehmen und meine Produkte im Internet geschrieben?

Deshalb sollten Texte und deren Auswertung auch im Mathematikunterricht behandelt werden. Dabei können Texte für verschiedene Themen des Lehrplans als Datengrundlage verwendet werden. Schließlich basiert auch ChatGPT auf der statistischen Analyse riesiger Textmengen.

Im Folgenden möchten wir die Möglichkeiten der Textanalyse im Mathematikunterricht anhand der Lernsituation eines Praktikums in der Marketingabteilung des fiktiven Sportartikelherstellers *TurboKick*¹ aufzeigen:

Lernsituation: Sie absolvieren ein Praktikum beim Sportartikelhersteller TurboKick und haben die Aufgabe bekom-

¹ Der Name wurde mithilfe von ChatGPT erstellt.

men, geeignete Influencer für eine Marketingkampagne zu identifizieren. Hierzu sollen Sie eine Liste geeigneter Influencer erstellen, die sich mit dem Thema Sport beschäftigen und deren verwendete Sprache zu TurboKick passt. Damit die Analyse in Zukunft wiederholt werden kann, soll die Auswahl automatisch anhand der verwendeten Themen und Wörter in bereits veröffentlichten Artikeln der Influencer erfolgen.

Um die Aufgabe zu bearbeiten, werden wir zunächst kurz skizzieren, wie Texte zur inhaltlichen Analyse aufbereitet werden können. Anschließend geben wir drei Beispiele für die Verwendung von Texten, im Rahmen von funktionalen Zusammenhängen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie bei der Vektoren- und Matrizenrechnung.

Bei der Auswahl der Beispiele war es uns wichtig, eine möglichst große Bandbreite an Themen aus dem Lehrplan abzudecken.² Bei der Lerngruppe handelt es sich um eine Klasse aus der Oberstufe eines Beruflichen Gymnasiums in Rheinland-Pfalz.

Textaufbereitung zur weiteren Analyse

Texte sind sogenannte unstrukturierte Daten. Das bedeutet, dass diese, im Gegensatz zu Daten in Tabellen, keinem vorgefertigten Datenmodell folgen und vor der Analyse zusätzlich aufbereitet werden müssen. Typische Beispiele hierfür sind, eine Korrektur der Rechtschreibung, die Entfernung von Satzzeichen oder die Vereinheitlichung von Groß- und Kleinschreibung. Weitere Möglichkeiten sind die Rückführung von Wörtern auf ihre Wortstämme (z. B. Familien zu Familie) und die Entfernung von häufig vorkommenden Wörtern, wie *der*, *die*, *und*, etc., welche wenig zum Inhalt beitragen (sogenannte Stoppwörter). Für den Mathematikunterricht müssen nicht alle Maßnahmen durchgeführt werden. Die folgenden Beispiele können auch ohne diese Vorbereitungen verwendet werden. Sollen aber größere Texte unter Verwendung des Computers ausgewertet werden, etwa im Rahmen eines fächerübergreifenden Unterrichts mit der Informatik, empfiehlt es sich die oben erwähnten Vorbereitungen anzusprechen.³ Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Texte bereits geeignet aufbereitet worden sind.

Funktionale Zusammenhänge mit Wörtern

Lernaufgabe 1: Sie haben die Aufgabe bekommen, automatisch geeignete Influencer für eine Marketingkampagne zu identifizieren. Die Auswahl soll automatisch

anhand der verwendeten Themen und Wörter erfolgen. Dabei stellt sich Ihnen die Frage: Sind alle Wörter zur Unterscheidung von Texten gleich wichtig?

Zahlen und Funktionen helfen, die Realität zu beschreiben. Dies gilt auch für Texte. Zentraler Bestandteil der Analyse von Texten ist es herauszufinden, welche Wörter ein Dokument besonders gut beschreiben, die also für Text und Inhalt charakteristisch sind.

Die folgenden Sätze beinhalten beide das Wort *feiert*, aber der Inhalt ist unterschiedlich:

Dokument 1:

„WM-Geschäft – Adidas feiert WM-Sieg“ ([4])

Dokument 2:

„Wie Europa den Wahlsieg Macrons feiert.“ ([7])

In diesem Beispiel ist etwa das Wort *Wahlsieg* besonders wichtig, um es der Dokumentenklasse Politik zuzuordnen und von Dokument 1 zu unterscheiden, während das Wort *feiert* nicht hilfreich ist, denn es kommt in beiden Texten gleichhäufig vor. Zur Charakterisierung von Texten sind also Wörter, welche häufig in wenigen Dokumenten auftreten, wichtiger als Wörter welche eine hohe Frequenz in der gesamten Textsammlung aufweisen. Das statistische Maß TF-IDF (Term Frequency-Inverse Document frequency) formalisiert diese Idee:

$$\text{TF-IDF}_{i,j} = \text{TF}_{i,j} \cdot \text{IDF}_i \quad (1)$$

wobei $\text{TF}_{i,j}$ die absolute Häufigkeit von Wort i in Dokument j misst und IDF_i die inverse Dokumenthäufigkeit für Term i darstellt, welche berechnet wird als ([10, S. 52]):

$$\text{IDF}_i = \ln \left(\frac{n}{\text{DF}_i} \right)$$

Hier ist n die Gesamtzahl an Dokumenten, während DF_i angibt, in wie vielen Dokumenten der Sammlung, der Term i vorkommt.

Für das Wort *WM* in Dokument 1 ergibt sich demnach der Wert 1,38:

$$\text{TF-IDF}_{\text{WM},\text{D}_1} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{1} \right) = 2 \cdot 0,69 = 1,38$$

Hingegen erhält das Wort *feiert* den Wert 0:

$$\text{TF-IDF}_{\text{feiert},\text{D}_1} = 2 \cdot \ln \left(\frac{2}{2} \right) = 2 \cdot 0 = 0$$

Insgesamt ergibt sich die Tabelle 1.

Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass jede Zeile ein Dokument repräsentiert, somit jedes Dokument

² https://berufsbildendeschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/bbs/berufsbildendeschule.bildung-rp.de/Lehrplaene/Dokumente/Lehrplan_2014/2015-01-08_LP_BG_Mathe.pdf

³ Das Buch www.tidytextmining.com bildet eine gute Basis für Textanalyse mit dem Programm R.

Tabelle 1. TF-IDF Matrix

	WM	Geschäft	Sieg	Adidas	feiert	Europa	Macron	Wahlsieg
D1	1,38	0,69	0,69	0,69	0,00	0,00	0,00	0,00
D2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,69	0,69	0,69

als Vektor betrachtet werden kann. Die Spalten bilden die TF-IDF gewichteten Wörter ab. In Zeile 1 befindet sich ein Zeitungsartikel aus der Rubrik Sport, wohingegen das Dokument in Zeile 2 aus der Rubrik Politik stammt. Besonders hoch wurde das Wort WM gewichtet, denn es kommt in diesem Dokument 2 mal vor, während es in Dokument 2 nicht erscheint. Des weiteren fällt auf, dass das Wort *feiert* einen TF-IDF Wert von null hat, denn es kommt in allen Dokumenten gleich häufig vor und besitzt somit keine Relevanz für die Unterscheidung.

Die inverse Dokumenthäufigkeit gewichtet die Ausdrücke in Abhängigkeit ihrer Frequenz. Durch die Multiplikation mit der Term-Frequenz, ergibt sich ein individueller TF-IDF Wert für jedes Wort (vgl. Formel 1). Der Logarithmus \ln dient hier als Glättungsfunktion, da bei sehr niedrigen DF_i Werten kleine Unterschiede große Auswirkungen auf $\frac{n}{DF_i}$ haben können ([9]).

Stellen wir die inverse Dokumenthäufigkeit als Funktion dar, so ist DF_i die unabhängige Variable und der IDF Wert die abhängige Variable. Die Anzahl an Dokumenten wird durch n angegeben, welche als Konstante betrachtet werden kann. In Abbildung 1 wird angenommen, dass die Textsammlung aus 100 Dokumenten besteht. Zu sehen ist der Funktionsgraph von $(\frac{n}{DF_i})$ und $\ln(\frac{n}{DF_i})$. Es fällt auf, dass der Graph von $\ln(\frac{n}{DF_i})$ für kleine Werte von DF_i deutlich glatter verläuft. Somit erhalten Wörter, die in wenigen Dokumenten vorkommen, ein vergleichsweise geringeres Gewicht.

Im Lehrplan für das Fach Mathematik an berufsbildenden Schulen⁴ kann diese erste Lernaufgabe im Lernbereich 1: „Denken in funktionalen Zusammenhängen“ verortet werden. Die in diesem Lernbereich ausgewiesenen Kompetenzen erlangen die Lernenden, indem sie in die Rolle der Praktikantin bzw. des Praktikanten schlüpfen und funktionale Zusammenhänge im Hinblick auf die Worthäufigkeit und die inverse Dokumenthäufigkeit darstellen, analysieren und interpretieren. Konkret würde sich hier eine Herangehensweise frei nach dem Grundprinzip des kooperativen Lernens ([3]) (Think – Pair – Share) anbieten. In der Think-

Phase könnten sich die Lernenden in Einzelarbeit anhand unterschiedlicher kurzer Texte das Konzept der Worthäufigkeit erarbeiten und diese in Form einer Tabelle (vgl. Tabelle 1) darstellen. Während der sich anschließenden Pair-Phase könnten die Ergebnisse aus der Think-Phase zusammengeführt (vgl. Tabelle 1), diskutiert, grafisch dargestellt (vgl. Abb. 1) und anhand dieser Darstellung verglichen werden. Die abschließende Share-Phase dient der Präsentation der Ergebnisse der Kleingruppen. In Bezug zur Lernsituation könnten die Lernenden im Anschluss einen Leitfaden für die Analyse von Texten erstellen, den sie ihren Kolleginnen und Kollegen im Rahmen des Praktikums zur Verfügung stellen, damit auch diese in der Lage sind, Texte im Hinblick auf die Worthäufigkeit zu analysieren. Zur weiteren Vertiefung der mathematischen Kompetenzen könnten dann zum Beispiel die Vor- und Nachteile einer logarithmischen Darstellung von Häufigkeiten diskutiert werden.

Auch ermöglicht die vektorielle Darstellung von Dokumenten oder Wörtern weiterführende Anwendungen (siehe auch Tabelle 1 und Abschnitt 8), denn es können Distanzmaße auf die Vektoren angewendet werden. Mittels dieser Distanzmaße kann dann die Ähnlichkeit zwischen Dokumenten berechnet werden. Sind Dokumente im Vektorraum weit voneinander entfernt, weisen sie eine geringe Ähnlichkeit zueinander auf, sind sie nah beieinander weisen sie eine hohe Ähnlichkeit auf ([1, S. 77]).

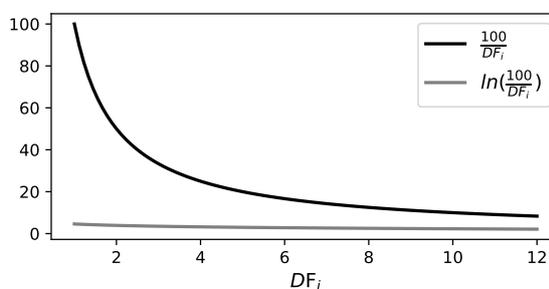


Abbildung 1. IDF und Logarithmus

⁴ https://berufsbildendeschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/bbs/berufsbildendeschule.bildung-rp.de/Lehrplaene/Dokumente/Lehrplan_2014/2015-01-08_LP_BG_Mathe.pdf

Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Wörtern

Lernaufgabe 2: Nachdem Sie sich mit der Bedeutung einzelner Wörter in Texten auseinandergesetzt haben, möchten Sie als nächstes geeignete Influencer identifizieren. Dazu schauen Sie sich bereits verfasste Texte von Influencern an. Wie können Texte automatisch der Kategorie Sport zugeordnet werden?

Für zahlreiche Anwendungen ist es wichtig, Texte automatisch anhand ihres Inhalts einer Klasse bzw. eines Themas zuzuordnen, also zu klassifizieren, etwa eine E-Mail in Spam oder nicht-Spam oder einen Zeitungsartikel in die Kategorie Politik oder Sport.

Im Folgenden soll das Dokument mit den Worten: „Argentinien feiert WM-Titel“ ([12]), der Klasse Politik oder der Klasse Sport unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, zugeordnet werden. Ein gängiges Verfahren hierfür ist die so genannte Naive Bayes-Klassifikation, welche auf dem Satz von Bayes beruht ([5, S. 249]):

$$P(\text{Klasse}|\text{Daten}) = \frac{P(\text{Daten}|\text{Klasse}) \cdot P(\text{Klasse})}{P(\text{Daten})} \quad (2)$$

In diesem Beispiel nehmen wir an, dass uns bereits insgesamt 10 000 Dokumente aus den Bereichen Politik und Sport vorliegen, also andere Zeitungsartikel, auf deren Grundlage die Klassifikation erfolgt. Davon gehören 4000 Dokumente zur Kategorie Politik und 6000 zur Kategorie Sport. Weiter nehmen wir an, dass 300 Artikel der Klasse Sport das Wort *Argentinien* enthalten, 200 das Wort *feiert*, 600 das Wort *WM* und 350 das Wort *Titel*. Es gilt demnach:

$$P(\text{Politik}) = \frac{4.000}{10.000} = 0,4$$

$$P(\text{Sport}) = \frac{6.000}{10.000} = 0,6$$

Zudem lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit der einzelnen Wörter unter der Bedingung, dass die Klasse schon bekannt ist folgendermaßen ermitteln:

$$P(\text{Argentinien}|\text{Sport}) = \frac{300}{6.000} = 0,05$$

$$P(\text{feiert}|\text{Sport}) = \frac{200}{6.000} = 0,033$$

$$P(\text{WM}|\text{Sport}) = \frac{600}{6.000} = 0,1$$

$$P(\text{Titel}|\text{Sport}) = \frac{350}{6.000} = 0,058$$

Aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Wörter, ermittelt sich die Wahrscheinlichkeit

für ein Dokument, welches genau diese Wörter enthält und dessen Klassenzugehörigkeit bereits bekannt ist, gemäß der folgenden Formel:

$$P(\text{Dokument}|\text{Klasse}) = P(\text{Wort}_1|\text{Klasse}) \cdot P(\text{Wort}_2|\text{Klasse}) \cdot \dots \cdot P(\text{Wort}_i|\text{Klasse})$$

Hier wird angenommen, dass alle Merkmale unabhängig voneinander auftreten. Aus diesem Grund wird das Verfahren als *naiv(e)* bezeichnet, denn diese Annahme ist in der Realität meistens verletzt ([5, S. 251]). Beispielhaft hierfür können die Wörter *WM* und *Finale* herangezogen werden, welche oft in Zusammenhang miteinander auftreten. Dennoch zeigt der Naive Bayes-Klassifikator in der Praxis zufriedenstellende Ergebnisse und wird häufig verwendet ([5, S. 251]).

In unserem konkreten Fall bedeutet dies:

$$P(\text{Dokument}|\text{Sport}) = P(\text{Argentinien}|\text{Sport}) \cdot P(\text{feiert}|\text{Sport}) \cdot P(\text{WM}|\text{Sport}) \cdot P(\text{Titel}|\text{Sport}) = 0,05 \cdot 0,033 \cdot 0,1 \cdot 0,058 = 0,00000957$$

Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeit für die Klassenzugehörigkeit Sport, nach dem Satz von Bayes, wie folgt berechnen:

$$P(\text{Sport}|\text{Dokument}) = P(\text{Dokument}|\text{Sport}) \cdot P(\text{Sport}) = 0,00000957 \cdot 0,6 = 0,000005742$$

Hier wurde nicht wie in der oben angegebenen Formel (vgl. Formel 2) durch $P(\text{Daten})$ geteilt, da dieser Berechnungsschritt die Klassifikationsentscheidung nicht beeinflusst und nur als Skalierungsfaktor dient.

Endgültig wird ein Dokument mithilfe der folgenden Entscheidungsregel klassifiziert ([8]):

Wenn $P(\text{Sport}|\text{Dokument}) \geq P(\text{Politik}|\text{Dokument})$ klassifiziere das Dokument in die Kategorie Sport, andernfalls in die Kategorie Politik.

Für das vorliegende Beispiel wird das Dokument in die Kategorie Sport klassifiziert:⁵

$$P(\text{Sport}|\text{Dokument}) = 0,000005742 \geq P(\text{Politik}|\text{Dokument}) = 0,00000031 \quad (3)$$

Anhand dieses Beispiels wurde dargelegt, wie eine Klassifikation mit Wörtern als Eingabewerte unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung funktioniert.

Die zweite Lernaufgabe kann im Lehrplan für das Fach Mathematik an berufsbildenden Schulen

⁵ Unter der Annahme, dass 100 Artikel der Kategorie Politik das Wort *Argentinien*, 200 das Wort *feiert*, 100 das Wort *WM* und 100 das Wort *Titel* enthalten.

im Lernbereich 6: „Untersuchen von Zufällen und Analysieren von Daten“ verortet werden. Hierbei erlangen die Lernenden die vorgeschlagenen Kompetenzen, indem sie Beiträge unterschiedlicher Influencer vergleichen und bewerten, inwieweit diese Influencer zum Sportartikelhersteller bzw. zum Thema Sport passen. Hierbei stellt dieser Vergleich die Anwendung des zuvor erlernten Konzepts der bedingten Wahrscheinlichkeit dar. Auch hier könnten anhand des kooperativen Lernens zunächst in Einzelarbeit (Think) verschiedene Influencer analysiert, in Kleingruppen verglichen (Pair) und schließlich mehrere passende Influencer ausgewählt werden, nachdem man in der Präsentationsphase einen Überblick über alle Influencer gewonnen hat.

Vektorrechnung mit Wörtern

Lernaufgabe 3: Sie haben erfolgreich eine Liste von Sportinfluencern erstellt. Nun möchten Sie diejenigen auswählen, welche auch sprachlich passen, also eine ähnliche Sprache wie TurboKick verwenden. Dabei stellt sich Ihnen die Frage: Wann sind Wörter ähnlich zueinander?

In Abschnitt 8 wurde bereits aufgezeigt, dass Dokumente als Vektoren dargestellt werden können. Dieses Prinzip macht sich auch das sogenannte Word Embedding zu nutze, indem Wörter als Vektoren dargestellt werden. Im Folgenden soll Word Embedding anhand des Beispielsatzes: „*Argentinien Sie bereitet große Freude*“ erläutert werden.

Wörter besitzen Eigenschaften, wie Sentiment, Häufigkeit und Wortart. Die Wörter Sieg und Freude sind zum Beispiel meistens positiv konnotiert, während Ländernamen neutral belegt sind. Im Word Embedding wird dies wie folgt verwendet: Die Dimension Sentiment sei beispielsweise in negativ = -1, neutral = 0 und positiv = 1 unterteilt. Dadurch erhalten die Wörter Sieg und Freude jeweils eine 1 für diese Dimension, während die anderen als neutral wahrgenommenen Wörter eine 0 erhalten. Eine zweite Dimension könnte die Häufigkeit eines Wortes in Texten sein. Häufigkeiten lassen sich in selten = -1, mittel = 0 und häufig = 1 abstufen. Im Allgemeinen wird das Wort groß/große häufig verwendet und erhält eine 1, während alle anderen Wörter eher mit einer mittleren Häufigkeit vorkommen (z. B. 0). Schließlich könnten Wörter gemäß ihrer Wortart eingeteilt werden. Wortarten gliedern sich unter anderem in Nomen = -1, Adjektive = 0 und Verben = 1. Insgesamt ergibt sich die Kodierung in Tabelle 2.

Tabelle 2. Word Embedding

	Sentiment	Häufigkeit	Wortart
Argentinien	0	0	-1
Sieg	1	0	-1
bereitete	0	0	1
große	0	1	0
Freude	1	0	-1

Tabelle 3. Ähnlichkeitsmatrix

	Argen- tiniens	Sieg	bereitete	große	Freude
Argentinien	1	1	-1	0	1
Sieg	1	2	-1	0	2
bereitete	-1	-1	1	0	-1
große	0	0	0	1	0
Freude	1	2	-1	0	2

Diese Kodierung führt dazu, dass ähnliche Wörter auch ähnliche Vektoren haben und somit nahe beieinander liegen.⁶ Zudem wird dadurch die Bedeutung der einzelnen Wörter erfasst. Die Ähnlichkeit zwischen zwei Vektoren lässt sich anhand der Matrixmultiplikation der Matrix aus Tabelle 2 mit der transponierten Version ermitteln ($[11]$). Das Ergebnis ist die Ähnlichkeitsmatrix aus Tabelle 3.

Das Wort Sieg, mit dem Vektor $(1, 0, -1)$ und das Wort Freude mit dem gleichen Vektor $(1, 0, -1)$ kommen in der Matrix aus Tabelle 3 auf den gemeinsamen Wert 2 (Eintrag 2 Zeile, letzte Spalte) durch Multiplikation der Vektoren:

$$(1, 0, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

Schließlich können die Vektoren im Raum dargestellt werden, um Ähnlichkeiten und Abstände zwischen den Wörtern zu berechnen (siehe Abbildung 2).

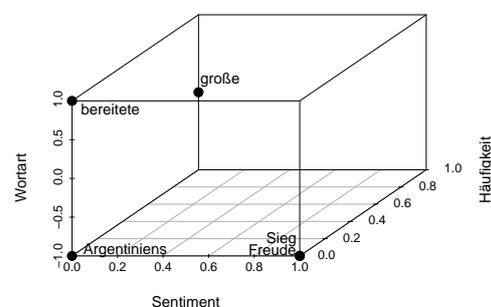


Abbildung 2. 3D-Abbildung der Wortvektoren

⁶ Bei dieser einfachen Kodierung erhalten die Wörter Sieg und Freude sogar die gleichen Werte.

In der Praxis werden den Wörtern mehr Eigenschaften bzw. Dimensionen zugeordnet. Zudem geschieht dies nicht manuell, sondern kann auch auf Grundlage vorhandener Dokumente bestimmt werden.

Im Lehrplan für das Fach Mathematik an berufsbildenden Schulen lässt sich die dritte Lernaufgabe dem Lernbereich 3: „Algebraisierung von mehrdimensionalen Verflechtungen und analytische Beschreibung des Raumes“ zuordnen. Zu guter Letzt könnten hier erneut kooperativ Ähnlichkeiten der Sprache der Influencer zur Sprache des Sportartikelherstellers TurboKick identifiziert werden, indem die Lernenden zunächst in Einzelarbeit das Word Embedding (vgl. Tabelle 2) für jeweils einen Influencer erstellen (Think), anschließend in Kleingruppen die Ähnlichkeitsmatrix (vgl. Tabelle 3) erstellen (Pair) und abschließend im Plenum mit den Ähnlichkeitsmatrizen der anderen Kleingruppen vergleichen, um den passenden Influencer auszuwählen.

Zusammenfassung und Ausblick

Stolz präsentieren Sie die ausgewählten Influencer Ihrem Team. Gleichzeitig schlagen Sie vor, Texte auch in Zukunft automatisch zu analysieren, etwa um Kritik von Kunden an den Produkten oder neue Trends in der Sportwelt frühzeitig zu erkennen. Ihr Vorschlag wird begeistert aufgenommen.

Die Bedeutung von Texten als Datentyp nimmt immer weiter zu. Ein Grund hierfür ist die schier unendlich große Menge an verfügbaren Texten in Zeitungen, Büchern, Social Media oder im Internet. Chatbots wie ChatGPT nutzen solche Texte um eine künstliche Intelligenz zu erschaffen. Um dieser Entwicklung gerecht zu werden, ist es wichtig, Texte auch im Mathematikunterricht zu behandeln und in verschiedene Bereiche des Lehrplans einzubinden. Hierzu zählen funktionale Zusammenhänge, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Vektoren- bzw. Matrizenrechnung. In diesem Artikel wurden hierzu drei Beispiele anhand der Lernsituation eines Sportartikelherstellers skizziert, die als Grundlage zur Integration von Texten in den Mathematikunterricht dienen können.

Die vorgestellten Beispiele können auf verschiedene Weisen erweitert werden. Ein Beispiel hierfür ist die Berechnung von Wortzusammenhängen bzw. Wortkorrelationen (siehe [10, Kapitel 4]). Hierbei könnten Schülerinnen und Schüler etwa analysieren, welche Wörter Politiker oder Influencer häufig gemeinsam in einem Tweet verwenden. Texte können zudem als Grundlage für fächerübergreifenden Unterricht dienen. Hierfür gibt es zahlreiche Möglichkeiten der fächerübergreifenden Verzahnung,

etwa mit dem Ethikunterricht im Themenblock Medienkompetenz (z. B. Fake News), dem Deutschunterricht durch den automatischen Vergleich von Sprache zwischen verschiedenen Textgattungen oder zwischen Autoren, mit dem Fach Politik durch die oben erwähnte Analyse der Sprache von Politikerinnen und Politikern, dem Fach Geschichte durch die Analyse des Wandels der Sprache im Zeitverlauf oder dem Fach Informatik durch die Analyse von großen Texten mit geeigneter Software wie R oder Python.

Literatur

- [1] Murugan Anandarajan, Chelsey Hill, and Thomas Nolan. *Practical Text Analytics: Maximizing the Value of Text Data*. Springer International Publishing, Basel, Schweiz, 1 edition, 2018.
- [2] Lisa Becker. Künstliche Intelligenz: Jede Lehrkraft muss ChatGPT kennen, 2023. tinyurl.com/2p9b8425; abgerufen: 20. 4. 2023.
- [3] Ludger Brüning and Tobias Saum. *Erfolgreich unterrichten durch Kooperatives Lernen*. Neue Deutsche Schule Verlagsgesellschaft mbH, Essen, 5 edition, 2009.
- [4] News Deutschland. WM-Geschäft: Adidas feiert WM-Sieg, 12. 2022. tinyurl.com/wv89vxd9; abgerufen: 28. 4. 2023.
- [5] Detlev Frick, Andreas Gadatsch, Jens Kaufmann, Birgit Lankes, Christoph Quix, Andreas Schmidt, and Uwe Schmitz, editors. *Data Science: Konzepte, Erfahrungen, Fallstudien und Praxis*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2021.
- [6] Sascha Lobo. Künstliche Intelligenz Eines der mächtigsten Instrumente der Menschheitsgeschichte. *Spiegel*, 3 2023. tinyurl.com/yc439d63; abgerufen: 20. 4. 2023.
- [7] Florian Neuhann. Wie Europa den Wahlsieg Macrons feiert, 4 2022. tinyurl.com/3yj7fj84; abgerufen: 28. 4. 2023.
- [8] Sebastian Raschka. Naive Bayes and text classification I – Introduction and theory. *CoRR*, abs/1410.5329, 2014. [arXiv:1410.5329](https://arxiv.org/abs/1410.5329)
- [9] Rudi Seitz. Understanding TF-IDF and BM-25, March 2020. kmwllc.com/index.php/2020/03/20/understanding-tf-idf-and-bm-25/; abgerufen: 20. 4. 2023.
- [10] Julia Silge and David Robinson. *Text Mining with R: A Tidy Approach*. O'Reilly Media, 2017.
- [11] Holger von Joanne-Diedrich. Attention! What lies at the Core of ChatGPT? (Also as a Video!) – Learning Machines, 3 2023. blog.ephorie.de/attention-what-lies-at-the-core-of-chatgpt/; abgerufen: 5. 5. 2023.
- [12] Deutsche Welle. Argentinien feiert WM-Titel | DW | 19. 12. 2022, 2022. tinyurl.com/yxnw3y48; abgerufen: 05.05.2023.

Mohini Nonnenmann, Hochschule Trier
E-Mail: mhnn4252@hochschule-trier.de

Martin Vogt, Hochschule Trier
E-Mail: m.vogt@wir.hochschule-trier.de

Simone Bast, Staatliches Studienseminar für das Lehramt an berufsbildenden Schulen Trier
E-Mail: simone.bast@bbs-tr.semrlp.de

Karsten Lübke, FOM Hochschule, Dortmund
E-Mail: karsten.luebke@fom.de

Verstehen der Zahlen

Hanns Sommer

Einführung

In seinem Beitrag, „Anregungen zum Nachdenken über Mathematikdidaktik als Wissenschaft“ hat Jürgen Maaß ([1]), mit Bezugnahme auf N. Luhmann, dargelegt, dass auch die Mathematik, als Wissenschaft durch den Konsens unter den Mathematikern konstituiert ist. Dies hat zur Folge, dass im Mathematikunterricht ein definierter Wahrheitsbegriff der Mathematik noch nicht verfügbar ist, denn dessen Kenntnis würde ja ein Eingeführtsein in die Mathematik voraussetzen. Der Lehrende der Mathematik muss daher, der Wissensstufe der Schüler angemessen, eine Grundvorstellung entwickeln ([2]), bezüglich der die jeweils eingeführte Mathematik als ‚wahr‘ begründet werden kann. Diese Grundvoraussetzung der Mathematikdidaktik soll hier an einem Beispiel veranschaulicht und bezüglich ihrer Konsequenzen diskutiert werden.

Wir wollen einen Verstehensrahmen für die natürlichen Zahlen einführen, der auf der Betrachtung finit konstruierter Bilder (analog zur Geometrie Euklids) begründet ist. Innerhalb dieses Rahmens ergibt sich die Heyting-Arithmetik (d. h. die Arithmetik ohne Tertium-non-datur) als objektive und konsistente Theorie, aber wir erhalten mehr:

Es existieren Objekte, als Teil der Zahlen, die finit darstellbar sind, z. B. die Quadratzahlen und solche, wie die Primzahlen, für die dieses nicht gilt.

Der Verstehensrahmen liefert daher ein Wissen, das über das hinausgeht, was aus den Axiomen der Heyting-Arithmetik gefolgert werden kann. Wir werden die Bedeutung dieses Wissens erläutern. Für die Mathematikdidaktik als Wissenschaft folgt aus unseren Überlegungen, dass diese nicht nur eine Kombination aus Mathematik und Didaktik ist, sondern ein eigenständiger Forschungsbereich, der Ergebnisse liefert, die weder der Mathematik, noch der Didaktik zugänglich sind.

Methode zur Begründung von Aussagen mittels finiter Bilder

Die Grundvorstellung unserer Begründungsmethode wurde im alten Griechenland eingeführt, um objektive Aussagen über die Größe von Grundstücken zu machen. Über einem Grundraum, einer ebenen

Fläche (deren Herstellung umgangssprachlich beschrieben wurde), wurden mit Zirkel und Lineal Figuren konstruiert, über deren Größenverhältnisse dann objektive Aussagen begründet werden konnten ([3]). Objektivität hatte hier also die Bedeutung der Kommunizierbarkeit und Wahrheit bedeutete die Bestätigung bzw. Sichtbarkeit in einem finit konstruierten Bild. Die Logik, die diesen Argumentationen zu Grunde liegt, ist die Logik der Bildbetrachtung. Wird z. B. Aussage A durch ein Bild und Aussage B durch ein zweites Bild bestätigt, so wird die Aussage $A \wedge B$ (A und B) durch die Zusammenfügung beider Bilder bestätigt. Da Bestätigung Sichtbarmachung bedeutet und das Gegenteil, nämlich Unsichtbarkeit, nicht sichtbar sein kann und da die Bilder von allen Beteiligten in gleicher Weise gesehen werden, erhalten wir die Folgerung:

Satz 1. Eine mit der eingeführten Methode bestätigte Aussagenmenge ist objektiv und konsistent.

Die Idee, mit dieser Methode auch die Aussagen über die natürlichen Zahlen zu bestätigen, geht auf einen Beweis des ganz jungen Gauß zurück. Den Nachweis der Formel (1) gibt Gauß mit Abbildung 1.

$$2s = 2 \sum_{(i=1)}^n i = ((n+1) \times n) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ S &= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ 2S &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Abbildung 1. Der Gauß'sche Beweis der Formel (1)

Diesem Beispiel folgend, benötigen wir zur Herstellung von Bildern, um Aussagen über die Zahlen zu bestätigen, die Symbole:

- Folgen von Strichen ‚|‘ zur Darstellung der Zahlen, z. B. ||||| für die Zahl 7.
- Das *etc.-Symbol* ‚...‘ zur Darstellung des Begriffs ‚und so weiter ...‘.
- Verbindungslinien, um Zusammengehöriges zu kennzeichnen.

Eine beliebige Zahl, der Zahlenmenge \mathcal{N} , wird dann dargestellt durch $|\dots|$, und um zu kennzeichnen, dass zwei beliebige Zahlen nicht gleich sein

müssen, können dem etc.-Symbol zur Unterscheidung Indizes angefügt werden. $|\dots m|$ und $|\dots n|$ sind also zwei beliebige, nicht notwendig gleiche Zahlen.

Zum Erkennen der Gleichheit von Zahlen, oder Strichmengen, verwenden wir die *Vergleichsoperation für Mengen A und B*:

- Entferne ein Element aus jeder der Mengen.
- Stopp, falls eine der Mengen leer ist.
- Falls Stopp wegen A erfolgt und nicht wegen B, dann definiere: $\#(A) < \#(B)$
- Falls Stopp wegen B erfolgt und nicht wegen A, dann definiere: $\#(A) > \#(B)$
- Falls Stopp gleichzeitig für beide Mengen erfolgt, dann definiere: $\#(A) = \#(B)$

$\#(A)$ wird als Mächtigkeit der Menge A bezeichnet. (Da die Elemente der Mengen ungeordnet sind, kann das Entfernen in beliebiger Reihenfolge erfolgen.)

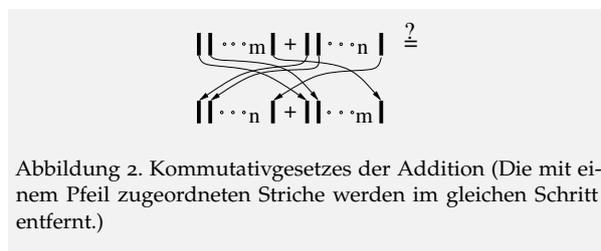
Das Erkennen von Gleichheit ist damit auf zwei Arten möglich:

1. Gleich Konstruiertes ist gleich.
2. Durch die Vergleichsroutine als gleich Erkanntes ist gleich.

Um Aussagen über die Zahlen zu formulieren, werden auf den Zahlen Operationen eingeführt:

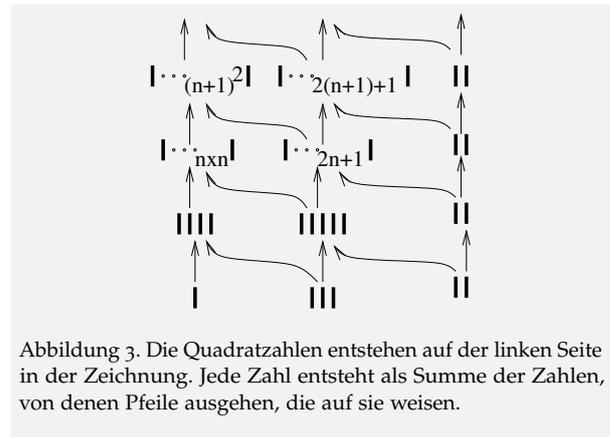
- die Nachfolgeoperation $S(|\dots|) := |\dots|$,
- die Addition + (oder das Zusammenfügen von Strichfolgen) und
- die Multiplikation \times (oder das Ersetzen jedes Strichs der ersten Folge durch die zweite Folge).

Mittels Bildern, die mit den beschriebenen Symbolen gezeichnet werden, können dann alle Aussagen der Peano-Axiome bestätigt werden. Als Beispiel zeigt Bild 2 eine Bestätigung des Kommutativgesetzes der Addition.



Wir bezeichnen ein, mit den Symbolen in endlich vielen Schritten konstruiertes Bild, eine *finite Darstellung*.

Wichtig ist die Feststellung: Es gibt auch unendliche Teilmengen der Zahlen, die finit darstellbar sind. Als ein Beispiel, unter vielen möglichen, zeigt Abbildung 3 die Menge der Quadratzahlen.

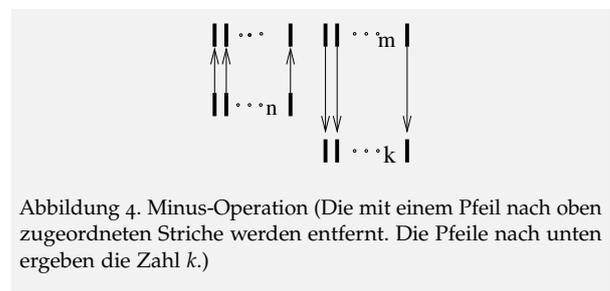


Die Primzahlen

Um die Primzahlen zu verstehen, muss zunächst auf einen prinzipiellen Unterschied zwischen der Addition und der Multiplikation hingewiesen werden. Die Umkehrfunktion zur Addition, die zu zwei Zahlen $|\dots m| \geq |\dots n|$ ($m \geq n$) die Zahl

$$|\dots k| = |\dots m| - |\dots n| \quad (k = m - n)$$

liefert, kann im finiten Bild dargestellt werden, ohne Verwendung der Mess- oder Vergleichsoperation (vgl. Bild 4).



Dagegen ist die Umkehrfunktion der Multiplikation, die Division, im Allgemeinen nicht ohne Benutzung der Vergleichsoperation beschreibbar, denn es muss ja gemessen werden, ob nach k-fachem Abziehen der Zahl n von der Zahl m ein Rest übrigbleibt, der ein Abziehen eines weiteren n möglich macht.

Mit den eingeführten Begriffen sind nun die Primzahlen \mathcal{P} definiert mit der *Suchroutine zum Finden der Primzahlen kleiner M*:

- (1) Seien die Primzahlen $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ gefunden,
Setze $m = p_k$
- (2) $m = S(m)$, IF $m > M$ THEN STOPP,
FOR $i=1$ TO k DO:
IF p_i teilt m THEN GOTO (2),
ENDFOR
Setze $k = k + 1, p_k = m$ GOTO (1)

Wir erkennen aus der Herstellung der Primzahlen, dass jeweils eine neue Primzahl in jedem Suchschritt bestimmt wird und dass jeder dieser Suchschritte zur Beantwortung der Frage ‚ p_i teilt m ?‘ die Vergleichsoperation benötigt, um festzustellen, ob k -faches Abziehen der Zahl p_i von m den Rest $= 0$ ergibt. Da diese Konstruktion von \mathcal{P} damit unendlich oft durch Messungen Information aus dem Grundraum in das Konstruierte (die Primzahlen) überträgt, ist sie nicht finit.

Eine Struktur, bei der zur Konstruktion ihrer einzelnen Elemente jeweils auf eine Messung Bezug genommen werden muss, ist nicht mit etc-Symbolen finit darstellbar, denn mit dem etc-Symbol kann ja immer nur auf das bereits Konstruierte und nicht auf eine Information aus dem Grundraum zugegriffen werden. Ist dagegen eine Konstruktion des nächsten Elements ohne Bezug zum Grundraum möglich, dann ist jedes Element eindeutig nur mittels der Konstruktionsvorschrift beschreibbar und in diesem Falle können auch alle Beziehungen zwischen den Elementen nur von der Konstruktionsvorschrift abhängen.

Können wir daher feststellen, dass die Konstruktionsvorschrift für die Primzahlen \mathcal{P} (die Suchroutine zum Finden der Primzahlen), auf einem geänderten Grundraum eine völlig andere Struktur ergibt, so erkennen wir, dass \mathcal{P} nicht finit darstellbar ist.

Primzahlen bezüglich dem Grundraum $2\mathcal{N}$

In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit der Konstruktion der Primzahlen mit der Suchroutine vom Grundraum nachgewiesen werden.

An Stelle des Grundraums \mathcal{N} verwenden wir nun den Grundraum:

$$2\mathcal{N} = \{||, |||, ||||, |||||, |||||, \dots\}$$

mit den Operationen $S(| \dots |) := | \dots |||$, $+$ und \times .

Obwohl die Konstruktion von $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ auf $2\mathcal{N}$ mit exakt der selben Suchroutine durchgeführt wird, die \mathcal{P} über \mathcal{N} ergab, erhalten wir nun ein völlig anderes Ergebnis.

Für eine gerade Zahl g , eine ungerade Zahl u von \mathcal{N} und 2 gilt: $2gu = 2 \times gu$, wohingegen $2u$ in $2\mathcal{N}$ nicht in Faktoren aus $2\mathcal{N}$ zerlegbar ist.

Daher besteht $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ aus allen Zahlen der Form $2u$:

$$\mathcal{P}_{2\mathcal{N}} = \{2 \times (2n + 1) \text{ mit } n \in \mathcal{N}\} \quad (2)$$

Auf $2\mathcal{N}$ gilt auch nicht die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung denn es gilt für Primzahlen $p, q \in \mathcal{P}$:

$$2p \times 2q = 2 \times 2pq.$$

Die Darstellung durch Gleichung (2) offenbart, eine völlige strukturelle Verschiedenheit zwischen \mathcal{P} in \mathcal{N} und $\mathcal{P}_{2\mathcal{N}}$ in $2\mathcal{N}$ auf. Wir erhalten somit das Ergebnis:

Satz 2. \mathcal{P} ist nicht finit darstellbar.

Dieser Satz konnte nicht ausschließlich mit den Axiomen Peanos begründet werden, er ist wesentlich das Ergebnis eines Reflexionsprinzips, d. h. einer Argumentation, die auf den Verstehensrahmen Bezug nimmt, den wir für die Zahlen bereitgestellt haben.

Wie sind Aussagen über die Primzahlen \mathcal{P} bestätigbar?

Da die Primzahlen \mathcal{P} nicht in einem finit konstruierten Bilde darstellbar sind, ergibt sich die Frage: Wie sind Aussagen über die Gesamtheit der Primzahlen \mathcal{P} beweisbar?

Die bekannten Beweise (vgl. das Buch von Paulo Ribenboim [4]) beruhen auf zwei Methoden:

1. Finde eine vereinfachende Sichtweise, die das untersuchte Objekt in einem finit konstruierten Bilde zeigt und die fragliche Aussage bestätigt.
2. Finde eine Teilansicht des untersuchten Objekts, die finit konstruierbar ist und mittels der die Aussage bestätigt werden kann.

Wir besprechen beide Methoden am Beispiel der Bestätigung der Aussage $\#\mathcal{P} = \infty$.

Eine vereinfachende Sichtweise der Primzahlen

In dieser Sichtweise abstrahieren wir von der genauen Position der Primzahlen in \mathcal{N} und reduzieren unser Wissen auf deren Anordnung. Mit dem etc-Symbol erhalten wir folgendes Bild von \mathcal{P} :

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k \dots$$

Wir müssen nachweisen, dass die Suchroutine die jeweils nächste Primzahl auf einem endlich begrenzten Suchbereich auch auffindet. Angenommen, wir hätten p_1, p_2, \dots, p_k gefunden und suchen nun p_{k+1} .

Definiere $\pi_k := \prod_{i=1}^k p_i + 1$, dann lässt π_k geteilt durch p_i den Rest 1. Daher ist p_i kein Teiler von π_k und somit ist π_k selbst Primzahl oder es kann zwischen p_k und $\pi_k + 1$ eine neue Primzahl p_{k+1} mit der Suchroutine gefunden werden.

Das Buch von Ribenboim enthält viele andere Beweise dieser Aussage, die diese vereinfachende Sichtweise verwenden, vergleiche z. B. Thues oder Aurics Beweis.

Beschränkung der Sichtweise auf einen Teilbereich der Zahlen

Wir schränken die Betrachtung ein auf die Fermat-Zahlen

$$\{F_n = 2^{2^n} + 1 \text{ für } n \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N}.$$

Für die Fermat-Zahlen kann man einfach nachweisen, dass jeweils zwei verschiedene Fermat-Zahlen

teilerfremd sind (vgl. [4]). Daher muss in jeder Fermat-Zahl wenigstens eine neue Primzahl als Teiler auftreten. Da es unendlich viele Fermat-Zahlen gibt, existieren somit auch unendlich viele Primzahlen.

Da wir hier unsere Sichtweise auf einen kleinen Teil von \mathcal{N} eingeschränkt haben, finden wir auf diese Weise natürlich nur einen kleinen Teil vom \mathcal{P} .

Diskussion der Methode

Die vorgestellte Methode zur Begründung der Aussagen über die Zahlen kann, als Beispiel eines Verstehensrahmens, dazu dienen, die Bedeutung der Verstehensrahmen im Mathematikunterricht zu diskutieren. Jedem Schüler werden die Zahlen, im Laufe seiner Schulzeit in immer neuen Verstehenskontexten vermittelt. Wir wollen im Folgenden aufzeigen, dass jede, so erlangte Verstehensstufe, nicht nur das Wissen über die Mathematik, sondern auch das generelle Verstehen erweitert.

Verstehen der Mathematik

Der vorgestellte Begründungshorizont zur Heyting-Arithmetik macht Aussagen über die Zahlen verständlich, die mittels den reinen Peano-Axiomen nicht verstanden werden können.

Satz 1 begründet die Konsistenz der Heyting-Arithmetik. Natürlich ist dieser Satz weit schwächer als Gentzens Konsistenz-Satz, der ja auch das ‚Tertium non datur‘ mit einschließt. Da Gentzen die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie aber mittels einem Herleitungskalül nachweist, könnte er bezüglich dessen Konsistenz auf Satz 1 verweisen, denn alle Herleitungen können ja auf Papier aufgeschrieben und damit finit dargestellt werden [6].

Satz 2 erklärt die qualitative Verschiedenheit zwischen den Quadratzahlen und den Primzahlen. Obwohl beide Zahlenmengen mathematisch exakt spezifiziert sind, sind sie prinzipiell unterschiedlich. Während die Quadratzahlen in einem finit konstruierten Bilde dargestellt werden können, gilt dies nicht für die Primzahlen. Das ‚stochastische Verhalten‘ der Primzahlen ist eine Konsequenz dieses Unterschieds. A. Fraile, R. Martinez und D. Fernandez haben viele Tests für das stochastische Verhalten von Zahlenfolgen an den Primzahlen überprüft und deren Erfüllung durch die Primzahlen aufgezeigt ([5]).

Die finite Darstellbarkeit der Umkehroperation zur $+$ -Operation hat zur Folge, dass Antworten zu Fragen, die mit der Struktur $(\mathcal{N}, S, +)$ formulierbar sind, direkt in einem finit konstruierten Bilde sichtbar gemacht werden können. Für einige Fragen bezüglich der Struktur $(\mathcal{N}, S, +, \times)$ mussten wir dagegen zuerst eine geeignete Sichtweise finden. Diese entspricht einer *neuen Idee*, die uns über den eingeführten Verstehenshorizont hinausführt.

Der prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Strukturen spiegelt sich wider in Mojzesz Presburgers Vollständigkeitssatz für $(\mathcal{N}, S, +)$ und Kurt Gödels Unvollständigkeitssatz für $(\mathcal{N}, S, +, \times)$.

Erweiterung des generellen Verstehens

Unsere Betrachtungen sind ausgegangen von der Feststellung, dass die Mathematik, wie alle anderen Wissenschaften, durch einen Konsens unter den Wissenschaftlern gebildet wird. Damit erhebt sich aber die Frage: *Warum sind die Aussagen der Mathematik in den letzten 2500 Jahren unverändert gültig geblieben und nur erheblich vermehrt worden, wohingegen die Aussagen der anderen Naturwissenschaften weitreichenden Änderungen unterworfen waren?*

Unser Beispiel gibt darauf eine einfache Antwort. Bei der Schaffung eines Verstehensrahmens für die Mathematik wurden wir von zwei Normen geleitet: *Objektivität und Begründbarkeit*. Diese beiden Normen sind aber weitgehend unabhängig vom Erkenntniszugewinn, den unsere heutige Zeit gegenüber derjenigen des alten Griechenlands aufweist. In der Mathematik stehen diese Normen am Anfang, bei der Bildung eines Verstehensrahmens, wohingegen in den Naturwissenschaften und der Physik sich das Verstehen an den Messdaten ausrichten muss. Es ist das Kennzeichen der modernen Physik, dass diese zum Verstehen ihrer Messdaten nur Verstehenskonzepte aus der Mathematik zulässt.

(Es wäre natürlich denkbar, dass das Zulassen von Computer-Beweisen, die vom Menschen nicht mehr überprüfbar sind, einen neuen Begründungsbegriff impliziert.)

Wichtige Begriffe der Phänomenologie Edmund Husserls ([7]), die auch für die Physik von Bedeutung sind, können mit der dargelegten Verstehensweise veranschaulicht werden.

Mit dem Begriff des *Vermeintens* (NOESIS) weist Husserl darauf hin, dass der Prozess der Meinungsbildung nicht ohne aktive Mitwirkung des Betrachtenden vollzogen werden kann. Wir haben einen solchen Prozess kennengelernt beim Erkennen der Aussage

$$\#(\mathcal{P}) = \infty.$$

Ohne die Erschaffung einer geeigneten Sichtweise, wäre dies Aussage nicht erkennbar.

Ein Objekt, dessen Erfassen mehrere unterschiedliche Sichtweisen erforderlich macht, wird von Husserl als *Zwittereinheit* bezeichnet. Ein solches Objekt, das dem Vorstellungsvermögen nur schwer zugänglich ist, wird von den Primzahlen repräsentiert, denn diese erfordern verschiedene Sichtweisen, eine um ihre Elemente exakt zu erkennen und eine andere zum Nachweis ihrer Unendlichkeit.

Lehrende anderer Fachrichtungen werden dieses Beispiel für eine Zwitterereinheit, aus der Mathematik, gerne in ihr Fachgebiet übernehmen. Der Religionslehrer bei der Diskussion der Frage, die einst die Bilderstürmer auf den Plan rief, *ob man sich ein Bild von Gott machen kann*, und der Physiklehrer bei der Frage, *ob Wahrscheinlichkeit ausschließlich vom Nichtwissen des Beobachters bedingt wird*.

Wahrscheinlichkeitsbegriffe der Physik

Rauschen wird in der klassischen Mechanik häufig als ein unbekannter äußerer Einfluss verstanden, der eine exakte Berechnung unmöglich macht. Würden wir dagegen die genauen Rauschwerte kennen, so wäre eine exakte Berechnung möglich. Bei einem Objekt aber, das prinzipiell unterschiedliche Sichtweisen erfordert, liegt eine völlig andere Situation vor. Es ist hier ja gerade nicht möglich, die unterschiedlichen Sichtweisen in einer einzigen zu vereinen und somit kann die eine Sichtweise für die andere Betrachtungsweise nur unexakte Wahrscheinlichkeitsaussagen liefern.

Eine solche Situation liegt in der Quantenmechanik vor. Wir haben hier einerseits die lokale Sichtweise, das Teilchenbild, die ein Teilchen am Ort der Messung erfasst, und andererseits das vom Kontext abhängige, d. h. von den globalen Verhältnissen abhängige Wellenbild.

Beide Bilder sind, wie man zeigen kann, nicht in einem Bilde vereinbar, und daher kann die Information aus dem Wellenbild, nur als Wahrscheinlichkeitsaussage (mittels der Born'schen Regel), in das Teilchenbild, zur Vorhersage eines konkreten Messwertes übernommen werden.

Die Quantenmechanik zeigt gegenüber der klassischen Mechanik prinzipiell neue Möglichkeiten auf, so bei der Entwicklung der Quantencomputer.

Ein Quantencomputer erzeugt zunächst mittels dem Teilchenbild Zustände, die dann von Quantengates, die bezüglich dem Wellenbild wirken, transformiert werden. Am Ende wird, durch die Messung dieser Quantenzustände, wieder zum Teilchenbild übergegangen.

Quantencomputer verwenden somit zwei prinzipiell unvereinbare Sichtweisen, und das kann kein klassischer Computer nachmachen.

(Eine ausführlichere Darstellung dieser Argumente ist erhältlich unter der Adresse: <http://141.51.54.2/MRT/Lehre/Kurse/MSys/visualization.pdf>)

Schlussbemerkung

Mit dem betrachteten Beispiel soll die Bedeutung des Verstehenshorizonts bei der Einführung mathematischer Strukturen diskutiert werden. Wir knüpfen an, an eine den Schülern wohlbekannte Idee, derjenigen des Spiels. Auf einem Grundraum, dem Spielfeld, werden von den Spielern Bilder erzeugt, die einer gemeinsamen, einheitlichen Interpretation fähig sind. Durch die aktive Teilnahme am Spiel, entsteht bei den Teilnehmenden eine Vorstellungswelt.

Aufgabe des Lehrenden ist es, mittels dem so gebildeten Verstehenshorizont, das unhinterfragte Handeln der Schüler in bewusstes Wissen über mathematische Sachverhalte zu überführen. Diese Aufgabe wurde an Hand des vorgestellten Beispiels diskutiert.

Danksagung. Mein Dank gilt Vincent J. Sommer und Friedrich T. Sommer für hilfreiche Diskussionen.

Literatur

- [1] Maaß, Jürgen (2023), Anregungen zum Nachdenken über Mathematikdidaktik als Wissenschaft. *GMD-Mitteilungen* 114:40–46.
- [2] Salle, Alexander & Clüver, Tomma (2021), Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *J. Math. Didakt.* 42:553–580.
- [3] Blåsjö, Viktor (2022), Operationalism: An interpretation of the philosophy of ancient Greek geometry. *Foundations of Science* 27:587–708.
- [4] Ribenboim Paulo (2010), *Die Welt der Primzahlen – Geheimnisse und Rekorde*. 2. Auflage, Springer Lehrbuch.
- [5] Fraile, Alberto, Martinez Roberto, & Fernandez Daniel (2017), Jacob's ladder: Prime numbers in 2d. [arXiv:1801.01540v1](https://arxiv.org/abs/1801.01540v1) [math.HO] 19 Dec 2017.
- [6] Gentzen, Gerhard (1969). *Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung – Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.
- [7] Husserl, Edmund (2009), *Ideen zu einer reinen Phänomenologischen Philosophie*. Meiner Verlag für Philosophie.

Hanns Sommer, Universität Kassel
E-Mail: hjsommer@uni-kassel.de

Soft skills for mathematical teachers

Antonella Perucca

You need as much soft skills training as you can get because life itself will provide for the exercise sessions.

Teachers are human beings. Pupils are human beings in a critical period. Parents are human beings.

We all know that even people who love each other must make some effort not to quarrel because everyone has a bad day, is tired or frustrated. None is perfect. Mistakes do happen. Tolerance is required, people have different points of view and usually everyone has their reasons.

What are soft skills? Maybe simply wisdom and a positive mindset, aimed at preventing conflicts and at getting the best out of a situation (no matter how bad the situation). Thus, avoiding escalations, letting people free to give their best. Being non-judgemental and investigating “Why?” something happens. Acting irreproachably, trying to improve. Caring about people, or at least respecting them.

Honestly, soft skills improve my well-being, my productivity, my relationships in the professional and private life. Occasionally, they are so effective that they look like miracles. It’s not a miracle: usually, things are not as bad as they may seem at first sight, and there are further alternatives or compromise solutions. And an optimist attitude brings you forward.

If you allow me a recommendation, I train with the Percipio Skillsoft learning platform. There are plenty of short courses (less than one hour) subdivided into short videos (2–3 minutes). This format is very practical because it fits any schedule. In particular, authors of books are interviewed and give recommendations with a variety of perspectives. Here two things I have learned:

Acceptance. Many problems are simply due to the fact that life is not what you think that it should be. Is this obvious or deep? Probably both. Your pupils are not always what you expect them to be, your colleagues or your family members neither. And neither are you.

Active listening. Sometimes people need to vent, and if one asks them the good questions or puts order into their thoughts, they may find the solutions by themselves. Listening is a sign of respect, and it is also the best way to get extremely useful information.

There are further ways of learning soft skills, for example with the books aimed at teaching parents how to communicate with their children. And here is my CCC principle: *Communicating is vital for Collaborating and Compromising*. Understanding is key, and the first thing you need to do for solving a problem is correctly identifying it.

Back to teachers: Long-term colleagues are like neighbors, and conflicts should be prevented or solved prior to escalation. Angry parents should be handled with care. Pupils may open up and present a multilayered cake of issues (this opportunity of helping them should not be missed).

Let me conclude with two questions:

- Do you know the difference between the replies “Yes, but ...” and “Yes, and ...”?
- Do you make use of irony, which is “the iron weapon” of communication?

Antonella Perucca, University of Luxembourg
E-Mail: antonella.perucca@uni.lu

Neues aus der GDM-Nachwuchsvertretung

Malina Abraham, Ömer Arslan, Marco Böhm, Norbert Noster und Franziska Tilke

Die Mitglieder der Nachwuchsvertretung können auf vielfältige Aktivitäten für den wissenschaftlichen Nachwuchs in der ersten Jahreshälfte 2023 zurückblicken und möchten weiterhin einen Ausblick auf bevorstehende Angebote geben.

Frühjahrestreffen der Nachwuchsvertretung

Im März 2023 trafen sich die Mitglieder der Nachwuchsvertretung zum Frühjahrestreffen an der Universität Würzburg. Wir freuen uns, dass wir dort unsere vier neuen Mitglieder Malina Abraham (Technische Universität Dortmund), Ömer Arslan (Universität Duisburg-Essen), Lisa Birk (Universität Münster) und Josephine Paul (Universität Jena) persönlich willkommen heißen konnten. Gleichzeitig bedanken wir uns bei den ausgeschiedenen Mitgliedern für die langjährige Mitarbeit und das vielfältige Engagement in der Nachwuchsvertretung. Auch im Sprecher*innenteam gab es einen personellen Wechsel: Franziska Tilke (Universität Münster) übernimmt das Amt von Sebastian Geisler (Universität Potsdam), bei dem wir uns herzlich für sein Engagement als Sprecher in den letzten Jahren bedanken. Wir freuen uns, dass er uns weiterhin in der Nachwuchsvertretung erhalten bleibt. Somit koordiniert Franziska Tilke seit März zusammen mit Gerrit Loth (Universität Vechta) die Arbeit der Nachwuchsvertretung.

Neben den Punkten zur Besetzung verschiedener Ämter in der Nachwuchsvertretung standen auf der Agenda beim Frühjahrestreffen die geplanten Online-Angebote für Doktorand*innen und Post-Docs, ein Austausch mit dem Planungsteam der GDM an der Universität Duisburg-Essen für den Nachwuchstag 2024 sowie Absprachen zur Planung der diesjährigen und zukünftigen Nachwuchskonferenzen.

Net(t)-Working für Promovierende

Hinsichtlich der Onlineangebote organisierte die zugehörige Arbeitsgruppe verschiedene digitale Workshops unter dem Titel „Net(t)-Working“, welches nicht nur inhaltliche, sondern auch soziale Aspekte beinhaltet.

Maïke Schindler (Universität zu Köln) hat eine Veranstaltung im Bereich Eye-Tracking sowie eine weitere zum Publizieren begleitet. Daniel Sommerhoff (IPN Universität Kiel), Raja Herold-Blasius (Technische Universität Dortmund) und Johanna Schönherr (Universität Paderborn) haben ihren Karriereweg als Eltern beschrieben. Sie standen für eine offene Diskussion Rede und Antwort. Der Workshop von Andreas Eichler (Universität Kassel) zum Prozess „von der Forschungsfrage zur Forschungsmethode“ bildete im Juni einen weiteren Programmpunkt.

Wir danken allen Expert*innen für ihre Unterstützung des wissenschaftlichen Nachwuchses! Das gemeinsame digitale Netzwerken der Nachwuchswissenschaftler*innen bietet auch dieses Jahr Raum zum Vernetzen und Austausch über die verschiedenen Forschungsprojekte.

Angebote für Post-Docs

Für Post-Docs, Juniorprofessor*innen und weitere Interessierte haben wir ebenfalls fokussierte digitale Veranstaltungen angeboten. Den Auftakt machte Andreas Obersteiner (Technische Universität München) mit einem Beitrag zum Publizieren in wissenschaftlichen Zeitschriften. Susanne Prediger (Technische Universität Dortmund) gab einen Überblick zu Möglichkeiten der Drittmittelförderung. Impulse zum Austausch über Berufungsverfahren setzten Timo Leuders (Pädagogische Hochschule Freiburg) und Daniel Sommerhoff (IPN Universität Kiel). An dieser Stelle möchten wir auch diesen vier Expert*innen nochmals herzlich für die Unterstützung bei der Durchführung unserer Angebote danken!

Nachwuchsprogramm an der GDM 2024

Im Rahmen der GDM 2024 in Essen werden wir wieder einen Nachwuchstag am Sonntag, den 3. März 2024, bis zum Tagungsbeginn am Montag, den 4. März 2024, anbieten. Dieser bietet Doktorand*innen, die am Beginn ihrer Promotionsvorhaben stehen, die Möglichkeit sich untereinander



Foto: Josephine F. Paul

Gruppenbild (eines Teils) der Nachwuchsvertretung vom 25. 3. 2023, während des Frühjahrstreffens an der Universität Würzburg

auszutauschen, sich in Workshops weiter zu qualifizieren und den ersten eigenen GDM-Vortrag zu proben. Während der Tagung sollen weiterhin für fortgeschrittene Nachwuchswissenschaftler*innen verschiedene Workshops stattfinden. Dazu werden unter anderem die Themen Karriereforum, Publizieren und Didaktische Vorlesung anvisiert. Abgerundet wird der Nachwuchstag durch die Möglichkeit, sich im informellen Rahmen am Sonntagabend (3. 3. 2024) beim gemeinsamen Abendessen kennenzulernen und auszutauschen. Diese Netzwerke können im informellen Rahmen am Dienstagabend (5. 3. 2024) beim Kneipenabend mit allen Nachwuchswissenschaftler*innen vertieft und erweitert werden.

Die Planungen für das gesamte Programm laufen derzeit auf Hochtouren. Aktuelle Informationen findet man auf der Homepage der GDM-Tagung 2024 unter dem Link gdm-tagung.de/index.php/Nachwuchstag.

Informiert bleiben

Nach der allgemeinen Umstellung der E-Mail-Verteiler der GDM sind auch die E-Mail-Verteiler

für Promovierende und Post-Docs umgestellt. Diese können für Stellenausschreibungen und andere Informationen, die über unsere Verteiler publik gemacht werden sollen, wieder direkt per E-Mail angeschrieben werden: gdm-doktoranden@lists.didaktik-der-mathematik.de oder postdocs@lists.didaktik-der-mathematik.de.

Malina Abraham, Technische Universität Dortmund
E-Mail: malina.abraham@tu-dortmund.de

Ömer Arslan, Universität Duisburg-Essen
E-Mail: oeemer.arslan@uni-due.de

Marco Böhm, Universität Koblenz
E-Mail: mboehm@uni-koblenz.de

Norbert Noster, Julius-Maximilians Universität Würzburg
E-Mail: norbert.noster@mathematik.uni-wuerzburg.de

Franziska Tilke, Universität Münster
E-Mail: f.tilke@uni-muenster.de

Arbeitskreis: Affekt, Motivation und Beliefs Wuppertal, Frühjahrstagung, 10.–11. 3. 2023

Sarah Beumann, Sebastian Geisler und Dirk Weber

Nach Wiederbelebung und Umbenennung des Arbeitskreises „Weltbilder“ auf der GDM-Tagung 2022 in Frankfurt a. M. folgte nun auf der ersten Frühjahrstagung das nächste positive Signal zur erfolgreichen Etablierung des Arbeitskreises „Affekt, Motivation und Beliefs“. Die Organisator:innen und kommissarischen Sprecher:innen des AKs, Sarah Beumann (Bergische Universität Wuppertal) und Sebastian Geisler (Universität Potsdam), begrüßten am 10. und 11. März 2023 interessierte Tagungsteilnehmer:innen aus neun Universitätsstandorten an der Bergischen Universität Wuppertal. Bereits bei der Eröffnung deuteten sich Schnittmengen zwischen Forschungsinteressen und konkreten -vorhaben der Teilnehmer:innen an, die im weiteren Verlauf der Tagung entsprechende Anstöße zur aktiven Vernetzung lieferten. Am Freitagnachmittag präsentierte zunächst Stanislaw Schukajlow (WWU Münster) einen Überblick aktueller Ergebnisse einer Review-Studie zu mathematikbezogenem Affekt, Emotionen und Motivation als erster in der Reihe qualitativ hochwertiger Vorträge. Die folgenden Vorträge betrachteten einzelne affektive und motivationale Konstrukte und insbesondere deren Rolle und Entwicklung im Mathematikstudium. Stefanie Rach (OVGU Magdeburg) präsentierte Ergebnisse zur differenzierten Erhebung von mathematischem Selbstkonzept in der Studieneingangsphase. Der Vortrag von Lara Gildehaus (Universität Paderborn) beschäftigte sich mit den Wertüberzeugungen und Identitäten von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik. Mathematische Beliefs von Lehramtsstudierenden standen im Fokus des Vortrags von Benjamin Rott (Universität zu Köln).

Im Rahmen von Posterpräsentationen stellten Forschende am Samstag Eindrücke zu Studien und Forschungsvorhaben vor dem Hintergrund unterschiedlicher in der Mathematikdidaktik fokussierter affektiver und motivationaler Konstrukte zur Diskussion, woraufhin sich ein konstruktiver und lebhafter Austausch zwischen den Tagungsteilnehmer:innen eröffnete.

Zum Tagungsabschluss wurden Sarah Beumann und Sebastian Geisler als offizielle Sprecher:innen des AKs durch Abstimmung bestätigt sowie Dirk Weber (Bergische Universität Wuppertal) in die Funktion des Nachwuchssprechers gewählt. Die nächste Tagung des Arbeitskreises Affekt, Motivation und Beliefs ist für Frühjahr 2024 an der Universität Potsdam geplant und soll aufgrund der gemachten Erfahrungen sowohl zu Tagungsbeginn Raum für Posterbeiträge bieten als auch insbesondere von substanziellen Vorträgen (45 min) bestimmt sein, um auf dieser Basis eine konstruktive Diskussion unter und erfolgreiche Vernetzung zwischen den Forschenden zu eröffnen. Alle weiteren Informationen folgen demnächst auf der Homepage der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) unter dem Reiter des AKs Affekt, Motivation und Beliefs (www.didaktik-der-mathematik.de/arbeitskreise).

Sarah Beumann, Bergische Universität Wuppertal
E-Mail: beumann@uni-wuppertal.de

Sebastian Geisler, Universität Potsdam
E-Mail: sebastian.geisler@uni-potsdam.de

Dirk Weber, Bergische Universität Wuppertal
E-Mail: dweber@uni-wuppertal.de

Arbeitskreis: Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik

Freiburg, Frühjahrstagung, 13.–14. 4. 2023

Rowena Merkel und Martin Abt

Die Frühjahrstagung des Arbeitskreises „Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik“ fand am 13. und 14. 4. 2023 unter der Leitung von Gabriele Kaiser (Universität Hamburg) und Timo Leuders (Pädagogische Hochschule Freiburg) statt. Knapp 30 interessierte Teilnehmende diskutierten an den beiden Tagen gemeinsam insgesamt fünf Haupt- und drei Kurzvorträge.

Donnerstag, 13. 4. 2023

Mit einem Vortrag, in dem das Umformen von Gleichungen als zentrale Tätigkeit in der Mathematik im Fokus stand, wurde die Tagung Donnerstagmittag durch Norbert Noster und Stefan Siller (beide Universität Würzburg) eröffnet. Nach einer theoretischen Unterscheidung verschiedener Anwendungsbereiche für Äquivalenzumformungen wurde ein Testinstrument zur empirischen Validierung dieser theoretischen Unterscheidungen präsentiert, das im Rahmen einer Erhebung unter 271 Schüler:innen an Realschulen und Gymnasien zum Einsatz kam. Vorgestellt und diskutiert wurden die Ergebnisse einer konfirmatorischen Faktorenanalyse.

Im Anschluss stellten Ann-Kristin Adleff und Gabriele Kaiser (beide Universität Hamburg) in ihrem Vortrag die Ergebnisse der Studie TEDS-Validierung vor, in der 2490 Mathematikaufgaben, die im Unterricht verwendet wurden, einer rationalen Aufgabenanalyse unterzogen wurden. Dabei wurde ihr Potenzial mit Blick auf das Modellieren, Problemlösen, Argumentieren und Begründen, Verwenden von Darstellungen, Technisches Arbeiten sowie mathematisches Kommunizieren untersucht. Insgesamt zeigte sich bei den Aufgaben ein niedriges kognitives Aktivierungspotenzial, insbesondere in den Bereichen Modellieren und Argumentieren.

Abgerundet wurde der erste Tag mit drei Kurzvorträgen: Zuerst stellte Niclas Bradtke (Universität Kassel) erste Ergebnisse einer empirischen Studie zum Thema „Fähigkeit fachfremder Lehrkräfte zur Beurteilung von Schüler:innenlösungen in der Prozentrechnung“ vor. Anschließend berichtete Anton Bastian (Universität Hamburg) über eine Studie zum Einfluss schulischer Praxisphasen auf die professionelle Unterrichtswahrnehmung, bevor Oliver Straser (Pädagogische Hochschule Freiburg) im letz-

ten Kurzvortrag des Tages Einblicke in mögliche adaptive Lernhilfen zur Förderung der Experimentierkompetenz gab.

Freitag, 14. 4. 2023

Der zweite Tag der Tagung startete mit einem Vortrag von Mustafa Cevikbas und Gabriele Kaiser (beide Universität Hamburg), in dem sie eine Übersichtsarbeit vorstellten, in der 97 Studien hinsichtlich der Frage ausgewertet wurden, welches Potenzial eine Flipped-Classroom-Pädagogik gerade im Hinblick auf Mathematikunterricht in Krisenzeiten wie der COVID-19-Pandemie hat. Dieser Frage war bisher nicht systematisch nachgegangen worden und insofern schließt die Arbeit eine Forschungslücke. Es zeigte sich, dass Flipped-Classroom-Pädagogik insgesamt einen vielsprechenden pädagogischen Ansatz mit vielen Vorteilen für den Einsatz in einer Pandemie darstellt, sowohl bzgl. affektiver als auch kognitiver Einflüsse auf die Schüler:innen. Aufgrund spezieller Einschränkungen – insbesondere auch technischer Art – ist es aber auch nicht als Allheilmittel zu verstehen.

Anschließend folgten zwei Vorträge aus dem DiaKom-Kolleg (Diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften) an der Pädagogischen Hochschule Freiburg. Den Anfang machte Sara Becker (Pädagogische Hochschule Freiburg) mit einer empirischen Studie im Mixed-Methods-Design, in der es um die Kompetenz von Mathematiklehrkräften ging, Fehlervorstellungen in Lösungen von Schüler:innen zu erkennen und auf diese beispielsweise mit adaptiven Impulsen zu reagieren. Vorgestellt wurde eine Studie, in der 52 angehende Mathematiklehrkräfte anhand zehn textbasierter Vignetten Lernimpulse gaben und ihre Entscheidung begründeten. Die transkribierten Begründungen wurden computerbasiert mit Hilfe von E-Prime ausgewertet und es zeigte sich, dass die Teilnehmenden in der Hälfte der Vignetten den adaptiven Lernimpuls für die Schüler:innen auswählten, die Ergebnisse jedoch hohe interindividuelle Varianzen aufwiesen. Weiterhin berücksichtigen die Teilnehmenden insbesondere Informationen aus den Visualisierungen der Vignetten und griffen auf fachdidaktisches und pädagogisches Wissen sowie motivationale Orientierungen zurück.

Den Abschluss der Tagung machte Elif Özel (Pädagogische Hochschule Freiburg), mit ihrem Vortrag über eine Studie zum Einfluss von Mindsets und Deliberationsbedürfnis auf die Informationsverarbeitung angehender Lehrkräfte beim Bilden diagnostischer Urteile. Dabei wurde untersucht, ob angehende Lehrkräfte mehr relevante Informationen in einem deliberaten oder einem implementalen Mindset beim diagnostischen Urteilen über mehrdeutige Lösungen von Schüler:innen zum Bruchvergleich verarbeiten. Darüber hinaus wurde analysiert, inwiefern Varianzen in der Anzahl verarbeiteter Informationen zum einen durch Mindsets und zum anderen durch das Bedürfnis nach Deliberation erklärt werden können. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass angehende Lehrkräfte im

deliberaten Mindset durchschnittlich mehr Informationen zur Urteilsbildung integrieren und das Induzieren von Mindsets einen signifikanten Einfluss auf die Anzahl verarbeiteter Informationen in den diagnostischen Urteilen hat.

Es wurde beschlossen, dass im Herbst 2023 eine halbtägige Tagung internetbasiert stattfinden soll. Die nächste Tagung in Präsenz soll dann im Frühjahr 2024 in Bremen, ausgerichtet von Maike Vollstedt, stattfinden.

Rowena Merkel, Pädagogische Hochschule Freiburg
E-Mail: rowena.merkel@ph-freiburg.de

Martin Abt, Pädagogische Hochschule Freiburg
E-Mail: martin.abt@ph-freiburg.de

Arbeitskreis: Hochschulmathematikdidaktik

Dresden, Frühjahrstagung, 31. 3.–1. 4. 2023

Christine Bescherer, Laura Degenhardt, Andrea Hoffkamp, Kerstin Koch, Paul Kraft, Stefanie Rach, Nicolas Regel, Angela Schmitz und Michael Schröder

Der Arbeitskreis Hochschulmathematikdidaktik traf sich in diesem Jahr zu einer Frühjahrstagung vom 31. 3. bis 1. 4. 2023 an der Technischen Universität Dresden. Das Tagungsthema lautete: *Digitalgestütztes mathematisches Lehren und Lernen an der Hochschule*. Darüber hinaus bereicherten das gemeinsame Treffen auch vom Tagungsthema abweichende Beiträge, welche vornehmlich das Lehren und Lernen mathematischer Beweise und die Gestaltung von Aufgaben thematisierten.

Im Rahmen des Tagungsthemas sollten die durch die Pandemie etablierten digitalen Formate in der Hochschullehre für die Zukunft weitergedacht werden. Einerseits standen reflektierte Praxisbeispiele im Zentrum und andererseits wurden theoretische und empirische wissenschaftliche Ergebnisse vorgestellt und diskutiert. Damit wurde eine gleichberechtigte und sich ergänzende Mischung aus Praxisbeispielen und wissenschaftlichen Beiträgen geschaffen, die zu einer großen und konstruktiven Diversität an Teilnehmenden führte: Mathematiklehrende an Hochschulen aus verschiedenen Bereichen (insbesondere auch Mathematik für Ingenieur:innen), Mathematikdidaktiker:innen und

Hochschuldidaktiker:innen. Dies führte in den Kaffeepausen und insbesondere während der Postersession zu fruchtbaren Gesprächen zwischen den Teilnehmenden, die unterschiedliche Sichtweisen und Perspektiven einbringen und miteinander verbinden konnten.

Neben den beiden Hauptvorträgen luden neun weitere Vorträge und sieben eingereichte Poster zur Diskussion ein.

Freitag, 31. 3. 2023

Im eröffnenden Hauptvortrag am ersten Tag stellten Frank Feudel und Alexander Unger von der Humboldt-Universität zu Berlin ihre Studie zur „Förderung von Konzeptverständnis in der Algebra durch optionale vorlesungsbegleitende digitale Tests – Konzeption und Einsichten in das Nutzungsverhalten“ vor. In Personalunion wurde hier sogleich die Verbindung zwischen Praxis in Form der Ausgestaltung von digitalen Aufgaben und deren praktischer Einbindung sowie deren Evaluation in Bezug auf das Nutzungsverhalten, Rolle des Feedbacks und theoretische Fundierung dargestellt.

Die weiteren Beiträge des ersten Tages waren:

Kolja Pustelnik, Stefanie Rach (OvGU Magdeburg), Daniel Sommerhoff (IPN Kiel), Stefan Ufer (LMU München): Anforderungsniveaus in der Linearen Algebra beim Übergang in die Universität

In diesem Beitrag wurde ein digitaler Test zum mathematischen Vorwissen in Linearer Algebra vorgestellt, der mithilfe von Item Response Theory modelliert wurde sowie ein vierstufiges Modell des Vorwissens formuliert und erläutert.

Thomas Skill (HS Bochum), Thomas Bauer (PU Marburg)

Mid-Proof Peer Instruction – Unterstützung des Beweisverständnisses und Diagnostik für Lehrende
Mid-Proof Peer Instruction setzt eine Peer-Instruktions-Runde inmitten einer laufenden Beweispräsentation ein, um Studierende beim Verstehen des Beweises fokussiert zu unterstützen. Zugleich bietet dieses Vorgehen für die Lehrpersonen wertvolles diagnostisches Potential, da die Lehrenden auf diese Weise Einblicke in das Verständnis der Studierenden erhalten können.

Laura Degenhardt, Manuel Bodirsky (TU Dresden)
Pilotprojekt „TEORy“ – Try, Explore, Observe and Review Hybrid Teaching

Der Beitrag drehte sich um die lernwirksame Gestaltung und strukturierte Weiterentwicklung hybrider Lehre unter Einsatz eines sogenannten E-Scouts zur begleitenden Evaluation und für kontinuierliches Feedback für die Lehrperson.

Luise Stromeyer (HTW Berlin)
Wenn Mathe nur ein Nebenfach ist ...

Motivationsförderung durch digitale Aufgaben und digitale Labore mit Praxisbezug

Im Projekt „Curriculum Innovation Hub“ an der HTW Berlin steht die Motivationsförderung von Studierenden für das Fach Mathematik durch die frühzeitige Verknüpfung mathematischer mit ingenieurtechnischen Inhalten im Zentrum. Dazu werden digitale Materialien entwickelt, die in unterschiedlichen Lehr-/Lernszenarien eingesetzt werden können.

Samstag, 1. 4. 2023

Der zweite Tag startete mit dem Hauptvortrag von Angela Schmitz (TH Köln) und Rolf Biehler (U Paderborn) zum Thema „Fachdidaktische und medienpädagogische Gestaltung von Mathematikvideos im Projekt studiVEMINTvideos: Konzepte und Beispiele.“ Im Projekt „studiVEMINTvideos“ wurden

mathematische Lernvideos erstellt, die Studierende beim Übergang in die Hochschule unterstützen sollen. Die Videos ergänzen den E-Learning-Kurs „studiVEMINT“, der für das selbstständige Wiederholen schulmathematischer Inhalte, die für den Start an der Hochschule wichtig sind, entwickelt wurde, und sind auch auf www.youtube.com/@studivemint verfügbar. Im Vortrag wurden konzeptionelle Elemente, Videobeispiele und Erfahrungen aus der Produktion vorgestellt.

Die weiteren Beiträge des zweiten Tages waren:

Christine Bescherer (PH Ludwigsburg)
Digitales Making in der Mathematikdidaktik

In einer mathematikdidaktischen Veranstaltung (Master Lehramt Sek. I) lernen die Studierenden Making kennen, indem sie geometrische Muster programmieren (www.turtlestitch.org), danach im Makerspace Stofftaschen damit besticken und anschließend über die Einsatzmöglichkeiten in der Schule reflektieren.

Reik V. Donner, Oleg Boruch Ioffe, Gozel Judakova, Lisa König (HS Magdeburg - Stendal)

Lernwirksame Integration digitaler Aufgaben in ingenieurmathematische Grundlagen-Lehrveranstaltungen an einer Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Im Rahmen des Projekts „h2d2 – didaktisch und digital kompetent Lehren und Lernen“ wird aktuell der Einsatz digitaler Aufgaben in der mathematischen Grundlagen-Ausbildung an der Hochschule Magdeburg-Stendal umfassend erprobt. Ein erster Einblick in das Projekt wurde in diesem Beitrag präsentiert.

Svenja Kaiser (PH Heidelberg, U Mannheim)
Sprachliche Analyse von Übungsaufgaben im Bereich Stochastik

Diese vorgestellte Studie beleuchtet, wie Aufgabenstellungen in Übungsaufgaben – exemplarisch im Fachbereich Stochastik – sprachlich formuliert werden. Dazu wurden 355 Übungsaufgaben mit insgesamt 803 enthaltenen Aufgabenstellungen aus Stochastik-Einführungsveranstaltungen von sieben deutschen Universitäten einer sprachlichen Analyse nach der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse unterzogen.

Silke Neuhaus-Eckhardt (U Würzburg)
Beweise lesen und verstehen – Unterstützungsmöglichkeiten für Studierende

In einer Interviewstudie wurden zwei verschiedene Unterstützungsmöglichkeiten getestet, um Beweisverständnis zu vorgegebenen Beweisen aus der Zahlentheorie aufzubauen. Erste Auswertungen zeigen Schwierigkeiten der Studierenden sowie ihre eigenen Einschätzungen bzgl. der Unterstützungsmöglichkeiten auf.

Verena Spratte (GAU Göttingen)
*Erfolgreiches Beweislesen aus Sicht von
 Studienanfänger:innen*

Im Vortrag wurden aus 133 kurzen schriftlichen Selbstauskünften und 24 videographierten Beweisleseprozessen Kriterien herausgearbeitet, die Studierende zu Beginn des ersten und zum Ende des zweiten Semesters an ihr eigenes Beweisverständnis anlegen. Dabei zeigt sich eine Tendenz zur lokalen Betrachtung einzelner Argumentationsschritte.

Zudem bot der zweite Tag ausgiebig Gelegenheit, um die mitgebrachten und ausgestellten Poster zu diskutieren. Auch hier zeigte sich eine interessante Bandbreite an Themen:

- Alexander Grabowski (U Kassel): Das Projekt-Seminar DigiMaX: **D**igitale Vorbereitung auf das **M**athematik Lehramtse**X**amen
- Jörg Härterich (RU Bochum): Schwierigkeiten von Physikstudierenden mit vollständiger Induktion
- Clara Hüfner (TU Dresden): DAMM – Digitales Archiv Mathematischer Modelle
- Gozel Judakova, Felix Beining, Lisa König, Reik V. Donner (HS Magdeburg – Stendal): Integration von Elementen des Problembasierten Lernens in Mathematik- Lehrveranstaltungen an der Hochschule Magdeburg – Stendal
- Mira Kristoffersen, Christine Scharlach, Jan-Hendrik de Wiljes (FU Berlin): Der Online-Brückenkurs EMU (Eigenständig Mathe Ueben)
- Silke Neuhaus-Eckhardt (U Würzburg), Stefanie Rach, Petra Schwer (OvGU Magdeburg): Lesen mathematischer Texte lernen: Konzeption und Evaluation einer Erstsemestervorlesung
- Fabian Taubert (TU Chemnitz): Über die Entwicklung eines gemeinsamen elektronischen Aufgabenpools sächsischer Hochschulen

In der anschließenden Sitzung des Arbeitskreises wurde vereinbart, dass im Herbst 2023 ein eintägiges Online-Treffen stattfinden soll, bei dem insbesondere Nachwuchswissenschaftler:innen die Möglichkeit gegeben werden soll, ihre Arbeiten zu verschiedenen Themen der Hochschulmathematikdidaktik zu präsentieren und zu diskutieren. Die nächste Herbsttagung wird dann im November 2024 an der Universität Tübingen stattfinden. Dabei soll auch in Zukunft die Mischung aus reflektierter Praxis und Theorie sowie Empirie beibehalten werden und insbesondere ein Austausch jenseits der Mathematiklehrkräftebildung weiterhin bewusst gefördert werden.

Für die Arbeitskreistagung soll auch speziell die Zielgruppe des ehemaligen Hansekolloquiums angesprochen werden, um so die inspirierende Zusammenarbeit im Rahmen vergangener kombinierter Tagungen fortzusetzen.

Christine Bescherer, PH Ludwigsburg
 E-Mail: Bescherer@ph-ludwigsburg.de

Laura Degenhardt, TU Dresden
 E-Mail: laura.degenhardt@tu-dresden.de

Andrea Hoffkamp, TU Dresden
 E-Mail: andrea.hoffkamp@tu-dresden.de

Kerstin Koch, TU Dresden
 E-Mail: kerstin.koch@tu-dresden.de

Paul Kraft, TU Dresden
 E-Mail: paul.kraft@tu-dresden.de

Stefanie Rach, OvGU Magdeburg
 E-Mail: stefanie.rach@ovgu.de

Nicolas Regel, TU Dresden
 E-Mail: nicolas.regel@tu-dresden.de

Angela Schmitz, TH Köln
 E-Mail: angela.schmitz@th-koeln.de

Michael Schröder, TU Dresden
 E-Mail: michael.schroeder1@tu-dresden.de

Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore Muttenz (Basel), 3.–4. 3. 2023

Franziska Strübbe, Katja Lengnink und Tim Lutz

Der Arbeitskreis „Lehr-Lern-Labore“ traf sich vom 3.–4. März 2023 an der Pädagogischen Hochschule der Fachhochschule Nordwestschweiz in Muttenz (Basel) zur achten Tagung des Arbeitskreises. Unter der örtlichen Tagungsleitung von Christine Streit konnten die Tagungsteilnehmenden das dortige Lehr-Lern-Labor „LernAtelier (LeA)“ besuchen und die standortspezifischen Inhalte und Organisationsformate kennenlernen. Ein herzlicher Dank geht an die Muttenzer Kolleg:innen für die fabelhafte Organisation der Tagung in einem architektonisch beeindruckenden Panorama. An der Frühjahrstagung nahmen 24 Personen aus 12 Standorten teil, die sich u. a. in Vorträgen und Workshops zum Tagungsthema „Lernwerkstätten als Beitrag zur Professionalisierung von Lehramtsstudierenden“ austauschten.

Die Eröffnung der Tagung erfolgte durch Katja Lengnink, die die Teilnehmenden der Tagung endlich wieder in gewohnter Tradition des Arbeitskreises an einem Lehr-Lern-Labor-Standort vor Ort begrüßen konnte. Einführend wurden Informationen zur neuen Homepage der GDM didaktik-der-mathematik.de/arbeitskreise sowie zur Registrierung in Open-Olat als Austauschplattform (u. a. Archiv mit Dateien zu vergangenen Aktivitäten, Präsentationen und Materialien zu Tagungen, Literaturhinweise) an die Mitglieder des Arbeitskreises weitergegeben. Für den inhaltlichen Auftakt leitete Christine Streit zum Hauptvortragenden Prof. Dr. Tobias Leonhard von der Pädagogischen Hochschule Zürich über. Im Vortrag ging der Erziehungswissenschaftler auf Professionalisierungspotenziale und -grenzen von Lehr-Lern-Laboren für Studierende des Lehrberufs unter einer praktiken- und subjektivierungstheoretischen Perspektive ein. Es wurde diskutiert, inwiefern das „Lehrer:innen-Werden“ in Lehr-Lern-Laboren als spezifisch formatierte Antwort in Form eines Programmes gelingen kann. Pointiert formuliert richtete Tobias Leonhard die These von Lehr-Lern-Laboren als sozio-materielle Subjektivierungsmaschinen zur Durchsetzung mathematischer Gesellschaftsrelevanz an die Arbeitskreismitglieder. Anhand von Transkriptausschnitten aus Unterrichtsversuchen von Lehramtsstudierenden in Schulklassen wurden im Vortrag mit der Methodologie der Adressierungsanalyse für die Unterrichtsforschung Denkwerkzeu-

ge zur Transkriptinterpretation ausgearbeitet. Dazu zählt Tobias Leonhard Praktiken, Subjektivierung und Normierung der Anerkennbarkeit, Teilnehmerschaft und Mitspielfähigkeit, Mimesis und stumme Weitergabe. Dies bildete den Hintergrund für analytische Versuche, die anhand eines Transkriptausschnittes aus dem Kontext des LernAteliers die Frage nach den Praktiken und den damit verbundenen Subjektivierungen der Studierenden beim „Mathematik-Lehrer:in-Werden“ bearbeiten. Als tentative Bilanz aus der Kontrastierung wurde als Chancen der Arbeit in Lehr-Lern-Laboren herausgestellt, dass eine Aufmerksamkeitsbildung der Schüler:innen durch das Material Gelegenheit zur gezielten Beobachtung schafft, wiederholte Beobachtung fachliche Konzepte in der Ausbildung anreichert und diese eine gezielte fachliche Interventionen und adäquate Herausforderungen ermöglicht sowie die Fokussierung auf Fachlichkeit ermöglicht wird. Dem gegenüber steht als Grenze der Arbeit in Lehr-Lern-Laboren die Fokussierung als Komplexitätsreduktion. Die anregenden Gedanken zu Chancen und Grenzen studentischer Arbeit in Lehr-Lern-Laboren und deren Beitrag zur Professionalisierung wurden von den Tagungsteilnehmenden in der anschließenden Diskussion gerne aufgegriffen. Der Austausch richtete sich dabei auf die Frage, wie mit Studierenden daten- und methodengestützt Prozesse sequenzanalytisch erarbeitet werden können, um die Fokussierung auf die Fachlichkeit zur Geltung zu bringen.

Für ein vielfältiges weiteres Programm sorgten die Arbeitskreismitglieder im folgenden Tagungsverlauf selbst, da sie zahlreiche Beiträge für Vorträge und Workshops angemeldet hatten und damit die Tagung auf vielfache Weise bereicherten. Insbesondere zeigte sich, dass die Arbeit in Lehr-Lern-Laboren während der Pandemie keineswegs stagnierte. Vielmehr wurden neue kreative Wege und interessante Forschungsschwerpunkte gefunden, die aufzeigen, inwieweit Lehr-Lern-Labore – auch bzw. gerade unter schwierigen Bedingungen – einen wesentlichen Beitrag für die Professionalisierungskompetenzen angehender Lehrer:innen liefern können.

In einer ersten Workshoprunde thematisierte Katja Lengnink algorithmische Entscheidungssysteme und ließ die Workshopteilnehmenden Mate-

rialien für den Aufbau eines Grund- und Reflexionswissens explorieren. Jennifer Rothe und Silvia Schöneburg-Lehnert führten in die Methode des Flipped Classroom ein.

In einer Kurzpräsentation gaben Thomas Royar und Christine Streit schließlich Einblick in das örtliche Lehr-Lern-Labor und erläuterten die besondere Bedeutung der Lernbegleitung im LernAtelier für junge Kinder (Streit 2017). Dann durften die weit Angereisten zum inhaltlich abschließenden Tagespunkt selbst anhand konkreter Materialien mathematisch tätig werden. Konstruktive Materialien im LernAtelier und materialbasierte Lernumgebungen für die Klassen 2–4 warteten darauf in Kleingruppen erprobt und diskutiert zu werden. So gelang es einen konkreten und inhaltlich inspirierenden Einblick in das Lehr-Lern-Labor zu erhalten. Mit einem großen Lächeln im Gesicht widmeten sich alle den schönen bunten, ansprechenden Materialien mit erstaunlichen mathematischen Potenzialen für kleine und große Matheforschende.

Zum Abschluss des Tages wurde in geselliger Atmosphäre zusammengesessen. So gab es bei Pizza, Pasta und Wein Gelegenheit sich über die Eindrücke des ersten Tagungstages sowie die aktuellen Entwicklungen in den jeweiligen Lehr-Lern-Laboren auszutauschen.

Den zweiten Tagungstag eröffnete der Vortrag von Heike Hagelgans und Jaqueline Simon zur besonderen Förderung fachdidaktischen Wissens und der Fähigkeit zur Unterrichtsreflexion bezüglich Muster und Strukturen als Thema der Lehr-Lern-Labor-Arbeit. Beiden ist es ein Anliegen Studierende mathematische Phänomene selbst entdecken zu lassen, das Fachliche im mathematikdidaktischen Studium mehr in den Fokus zu stellen und mittels Komplexitätsreduktion im Lehr-Lern-Labor diese mit der Praxis zu verknüpfen.

In einer doppelten Runde mit Kurzvorträgen trugen Susanne Digel zum hybriden Lehr-Lern-Praktikum MatheLead und Inga Wienhues zum Erfassen und Analysieren selbstberichteter Handlungen von Studierenden nach einer Einzelförderung vor. Karin Richter und Maria Kötters referierten zum entdeckenden Lernen mit Zahlenmauern und Tim Lutz stellte Überlegungen zur Anwendung künstlicher Intelligenz für Lernumgebungen an.

Wieder im Workshopformat stellten Nina Unshelm und Christian Heinz die Frage, inwiefern die Mathematik in MINT unterschätzt wird. Sie brachten Beispiele zur Förderung von Schüler:innen aus dem Würzburger Mathematik-Labor mit, in denen die Mathematik zentral thematisiert wird. Christian Rütten nutzte in seinem Slot Erzählvignetten aus der Begleitung des Berufsfeldpraktikums im Lehr-Lern-Labor ‚Mathe-Spürnasen‘. Von Studierenden erstellte Vignetten wurden gemeinsam im Rahmen

von Vignettenlektüren betrachtet und das Potenzial der Vignettenarbeit wurde für die Lehrkräftebildung diskutiert.

Die Arbeitskreistagung wurde mit einer Abschlussdiskussion und Thematisierung von Angelegenheiten des Arbeitskreises geschlossen. Herausgestellt wurden dabei als Kristallisationspunkte der Weiterarbeit, dass sich zukünftig die Diskussion um Reflexionskompetenzen von Studierenden, die fachliche Tiefe der Studierendenausbildung und Lernbegleitung weitergeführt werden soll und ggf. in einer gemeinsamen Publikation zum Beitrag von Lehr-Lern-Laboren zur Lehrer:innenprofessionalisierung als Fortführung des Herausgeberbandes von Priemer & Roth (2020) münden kann. Überdies wurden Kooperationsideen zur Nachhaltigkeit der Teilnahme an Lehr-Lern-Laboren und der Anwendung künstlicher Intelligenz angeregt. Eine arbeitskreisinterne Umfrage zur Bildung von Interessensgruppen, die eine Vernetzung der Lehr-Lern-Labore entsprechend der individuellen Interessen ermöglicht, soll dafür initiiert werden. Zu allen Beiträgen der Tagung sind die Abstracts unter madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore/Fruhjahrstagung_2023 einsehbar. Die Vortragsfolien finden sich unter der OpenOLAT Austauschplattform. Bei Interesse an der Arbeit des Arbeitskreises kann gerne mit der Sprecher:innengruppe Kontakt aufgenommen werden. Im Rahmen der kommenden Herbsttagung wird die Sprecher:innengruppe neu gewählt. Interessierte können sich ebenso an die aktuelle Sprecher:innengruppe wenden bzw. Wahlvorschläge äußern (sprechergruppe-ak-III@mathe-labor.de). Ab 2024 wird die Tagung des Arbeitskreises wieder turnusmäßig im Herbst stattfinden. Standorte, die ab 2026 zu sich einladen möchten, werden noch gesucht.

Vom 22.–23. September 2023 ist der Arbeitskreis zur Herbsttagung in die Experimente-Werkstatt an die Martin-Luther-Universität in Halle-Wittenberg eingeladen. Karin Richter als örtliche Tagungsleitung schlägt entsprechend des Mottos des dortigen Lehr-Lern-Labors für das Arbeitskreistreffen das Thema „Mathematik verbindet: Erfahrungen, Ideen, Anregungen zur Zusammenarbeit in Forschung und Lehre“ vor. Informationen zur Tagung sind künftig der Tagungshomepage madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore/Herbsttagung_2023 zu entnehmen. Um Anmeldungen zur Tagung und Einreichung von Beiträgen wird bis Juli 2023 gebeten. Bis bald in Halle!

Literatur

Priemer, B. & Roth, J. (Hrsg.) (2020). *Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung*. Springer.

Streit, C. (2017). Wie Lehrpersonen Kinder in materialbasierten Settings begleiten und mathematische Lernprozesse anregen. In S. Schuler, C. Streit, & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 157–170). Springer.

Franziska Strübbe, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
E-Mail: struebbe@uni-muenster.de

Katja Lengnink, Universität Gießen
E-Mail: katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Tim Lutz, Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau
E-Mail: tim.lutz@rptu.de

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Einladung zur Herbsttagung, Aachen, 10.–11. 11. 2023

Tanja Hamann und Stefan Pohlkamp

Der Arbeitskreis Mathematik und Bildung lädt herzlich zu seiner diesjährigen Herbsttagung am 10. und 11. November 2023 nach Aachen ein!

Wie bereits auf dem letzten Treffen bei der Jahrestagung der GDM in Frankfurt diskutiert, wird sich die Herbsttagung mit dem Thema Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) beschäftigen. Im Sinne des Arbeitskreises soll BNE dabei aus einer bildungstheoretischen und bildungskritischen Perspektive beleuchtet und im Hinblick auf mathematische Bildung und den Mathematikunterricht hin gedacht sowie konkretisiert werden.

Mögliche Diskussionspunkte wären:

- Welche Perspektiven können aus einem mathematischen Bildungsverständnis heraus BNE gegenüber eingenommen werden?
- Inwiefern verändert eine verstärkte Berücksichtigung von BNE das Bildungspotential des MU?
- Inwiefern beeinflussen sich mathematische Bildung und BNE wechselseitig? Wo lassen sich Spannungsfelder identifizieren?
- Inwiefern ist Mathematik (k)ein „BNE-affines“ Fach?
- Welche Beiträge kann Mathematik(unterricht) für BNE leisten?
- Welche Ansätze gibt es, um BNE in den Mathematikunterricht bzw. in die Lehramtsausbildung Mathematik zu integrieren?
- ...

Wir freuen uns über Vortragsvorschläge zu diesen oder benachbarten Fragestellungen. In der Regel sind für einen Vortrag 30–45 min und eine anschließende Diskussion vorgesehen.

Bei Interesse schicken Sie bitte einen Vortrags-titel und ein Abstract von max. 250 Wörtern bis zum 15. August an hamann@imai.uni-hildesheim.de und stefan.pohlkamp@rwth-aachen.de. Natürlich ist auch eine Teilnahme ohne Vortrag möglich, Anmeldungen dazu nehmen wir unter denselben Adressen entgegen.

Die Herbsttagung kann mit einem Besuch der Wissenschaftsnacht an der RWTH Aachen verbunden werden; insbesondere wird dort ein Vortrag angeboten, der zum Thema der Herbsttagung passen wird.

Tanja Hamann, Universität Hildesheim
E-Mail: hamann@imai.uni-hildesheim.de

Stefan Pohlkamp, RWTH Aachen
E-Mail: stefan.pohlkamp@rwth-aachen.de

Arbeitskreis: Vernetzungen im Mathematikunterricht

Karlsruhe/Online, 22. 4. 2023

Astrid Brinkmann, Matthias Brandl und Thomas Borys

Die 13. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ sollte am 22. 4. 2023 in Präsenz in Karlsruhe stattfinden; sie wurde von Thomas Borys organisiert. Allerdings führte ein Streik der Bahn dazu, dass sie online durchgeführt werden musste. Nichtsdestotrotz war das Vortragsangebot wieder vielfältig und interessant. Es wurden aktuelle Forschungsarbeiten und Projekte vorgestellt und diskutiert.

Die Vorträge mit Abstracts und Diskussionsbeiträgen des Tagungsprogramms waren:

Mutfried Hartmann und Thomas Borys (Karlsruhe): Fermi-Graphen bewerten

Mit einem Fermi-Graphen können Lösungen von Fermi-Aufgaben visualisiert werden. Dabei handelt es sich um einen gerichteten Graphen, dessen Kanten den erhaltenen Teilergebnissen und dessen Knoten den verschiedenen Lösungsaktivitäten entsprechen. Eines der zentralen Ziele bei der Entwicklung von Fermi Graphen ist es, die Komplexität von Lösungen visualisieren zu können und so indirekt Informationen über die Schwierigkeit von Fermi-Aufgaben zu gewinnen. Die Schwierigkeit oder Komplexität einer Fermi-Aufgabe hängt von vielen Faktoren ab. Unabhängig davon haben Fermi-Aufgaben jedoch spezifische Merkmale, die bestimmte Hinweise auf deren Schwierigkeit geben können. Auch wenn sich die Lösungen unterscheiden, weisen die meisten Fermi-Aufgaben über viele Lösungen hinweg ähnliche Strukturen auf. Diese Muster geben zum einen Aufschluss über die zu erwartende Vielfalt der Lösungen und zum anderen über die zu erwartende strukturelle Komplexität der Lösungen. Neben der grafischen Struktur, die auf den ersten Blick auch visuell gut wahrnehmbar ist, können aus dem Fermi-Graphen auch entsprechende Kennwerte gebildet werden.

Es wurden Möglichkeiten der Kennwertbildung (u. a. in Vektordarstellung mit gewichteten Koordinaten) vorgeschlagen und zur Diskussion gestellt.

Matthias Brandl (Passau): Vernetzung durch Digitale Interaktive Mathematische Maps

Es wurden die an der Passauer Professur für Didaktik der Mathematik im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (BMBF, Teilprojekt Mathematik in den Passauer Projekten SKILL & SKILL.de)

entwickelten „Digitalen Interaktiven Mathematischen Maps“ (DIMM) vorgestellt und hinsichtlich ihrer Funktionalitäten erläutert. Die DIMM sind als vernetzendes Lehr-Lern-Werkzeug online frei unter math-map.fim.uni-passau.de verfügbar. Aktuell gibt es die Maps für Geometrie, Algebra und Analysis, jeweils in den Sprachen Deutsch und Englisch; eine spanische Version ist in Arbeit. Sie illustrieren in einer dreidimensionalen Netzstruktur die historische Entwicklung verschiedener mathematischer Gebiete und stellen die mathematischen Errenschaften auch in Hinblick auf ihre Verwandtschaft relativ zueinander dar. Die Knoten des Netzes sind mit Inhalten zu den beteiligten Mathematikerinnen und Mathematikern sowie Hinweisen zum mathematischen Sachzusammenhang und weiterführenden Links zu anderen frei verfügbaren Webseiten, Videos und Aufgaben versehen. Die DIMM wurden zuletzt in zwei Kursen zu Geometrie und Analysis an der Universität Karlstad, Schweden, eingesetzt und evaluiert.

Michael Bürker (Tübingen): Einige Aspekte des rechtwinkligen Dreiecks in Antike und Gegenwart
Da der Autor an einem fast fertigen Buchprojekt „Von Eratosthenes bis Einstein – eine mathematische Zeitreise durch die Geschichte unseres Weltbilds“ arbeitet (das Buch soll in nicht allzu ferner Zeit im Springer-Verlag erscheinen) wird hier ein kleiner Ausschnitt behandelt, bei dem das rechtwinklige Dreieck im Fokus steht.

Das rechtwinklige Dreieck spielt bereits in der Frühgeschichte der Mathematik eine wichtige Rolle. Der allseits bekannte Satz des Thales, dass der „Winkel im Halbkreis ein Rechter ist“ macht den Anfang, wobei über die Person des Thales außer seinem Herkunftsort Milet nur wenig bekannt ist: Er gilt als einer der Sieben Weisen der antiken griechischen Welt und soll eine Sonnenfinsternis im Jahr 585 v. Chr. vorausgesagt haben, was durch Herodot überliefert ist. Dies wird von manchen Historikern bezweifelt, von anderen aber durchaus für möglich gehalten, wie Rink und Hansen an Hand der an Goldhüten aus dem bronzezeitlichen Mitteleuropa codierten astronomischen Informationen zeigen. Wichtiger noch ist, dass Thales am Anfang der abendländischen Philosophiegeschichte steht

und zusammen mit Anaximander und Anaximenes erste Gedanken zur Astronomie und Natur im Sinne rationalen Denkens entwickelt hat.

Über Pythagoras als zweitem im Zusammenhang mit dem rechtwinkligen Dreieck bekannten Denker weiß man mehr, vor allem war er Gründer einer religiös-philosophischen Gemeinschaft, in der Personen herausragen, die zum Beispiel die Existenz irrationaler Zahlen – damals geometrisch formuliert – erkannt haben. Darüber hinaus haben sich die Pythagoreer mit Musik und mit der Harmonie im Kosmos beschäftigt, aber auch mit zahlentheoretischen Eigenschaften der Pythagoreischen Zahlentripel. Interessant ist, dass bereits in Euklids „Elemente“ eine Figur zu einem geometrischen Beweis des nach Pythagoras benannten Satzes steht.

Schließlich springen wir im Sinne vernetzten Denkens weit in andere Zeiten und Fächer zu Einsteins spezieller Relativitätstheorie, wo das gewohnte Denken über Raum und Zeit umgestülpt und nur noch in der von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geprägten Raumzeit als Union der beiden vorher getrennt behandelten Begriffe gedacht wird. Um die merkwürdigen Effekte dieser Theorie anschaulich erfassen zu können, werden keine Transformationsformeln verwendet, sondern vorhandene Symmetrien maximal ausgenutzt, um diese an modifizierten Minkowski-Diagrammen darzustellen. Dabei spielt das rechtwinklige Dreieck wieder eine maßgebliche Rolle, weil die Hypotenuse für die Eigenzeit bzw. Eigenlänge steht und die um den Faktor $(1 - \beta^2)^{0,5}$ kleinere Kathete ($\beta = \frac{v}{c}$) die entsprechende verkürzte Zeitdauer (Zeitdilatation im bewegten System) bzw. die kontrahierte Länge darstellt.

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Informelles bzw. Organisatorisches:

- Als Sprecher des Arbeitskreises wurden einstimmig Matthias Brandl und Thomas Borys gewählt.
- Planung der nächsten Tagungen: Walter Paravicini und Michael Bürker übernehmen die Organisation der 14. Tagung des Arbeitskreises, die voraussichtlich im Frühjahr 2024 an der Universität Tübingen stattfinden wird. Neben einer internen AK-Sitzung ist geplant, auch einen Lehrerfortbildungstag anzubieten. Nähere Infos sind zu finden unter: www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html
- Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzten Mathematikunterricht“ des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann:
 - Band 7 ist erschienen, er wurde von Thomas Borys, Matthias Brandl und Astrid Brinkmann

herausgegeben. Dieser Band verfügt über ein vielfältiges Angebot, welches von Unterrichtsmethoden zu vernetzendem Unterricht über mögliche inhaltliche Vernetzungen bis hin zum Fördern des vernetzten Denkens reicht. Eine kurze Beschreibung ist zu finden bei MUED unter tinyurl.com/bdeatj2c.

Ein ausführliches Inhaltsverzeichnis mit Abstracts steht auf der Seite tinyurl.com/5cvct6uy.

- Band 8 ist in der Planung. Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html.

Das gesamte Tagungsprogramm und weitere Informationen zu den Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ findet man unter www.math-edu.de/Vernetzungen.html

Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecher des Arbeitskreises Matthias Brandl matthias.brandl@uni-passau.de oder Thomas Borys thomas.borys@ph-karlsruhe.de.

Astrid Brinkmann, Iserlohn
E-Mail: astrid.brinkmann@math-edu.de

Matthias Brandl, Universität Passau
E-Mail: matthias.brandl@uni-passau.de

Thomas Borys, PH Karlsruhe
E-Mail: thomas.borys@ph-karlsruhe.de

Von Glückstal (Ukraine) nach Frankfurt: Problemlösen, Algorithmen, Stochastik – Nachruf auf Arthur Engel

Rolf Biehler und Katja Krüger



Foto: Nachlass Arthur Engel

Abbildung 1. Arthur Engel 2012

Arthur Engel wurde am 12. Januar 1928 in der deutschen Siedlung Glückstal in der Ukraine (heute Hlinaja in Moldau/Transnistrien) geboren. Er starb am 11. November 2022 in Frankfurt am Main. Da sich sein Lebenswerk gut auf Grundlage seiner ihn prägenden Erfahrungen erfassen und würdigen lässt, möchten wir hier zunächst von ein-

nigen wichtigen persönlichen und beruflichen Lebensabschnitten berichten. Wir danken Arthur Engels Sohn Ralf und seinen ehemaligen Arbeitskollegen an der PH Ludwigsburg sowie der Goethe-Universität Frankfurt, die viele lebendige Erinnerungen beigesteuert haben. Sie beschreiben ihn einerseits als in sich gekehrt und zurückhaltend, andererseits bestach er in seinen mitreißenden Vorträgen durch Lebendigkeit, wenn er über seine mathematische Arbeit oder Ideen zum Unterrichten von moderner Mathematik sprach. Der erste Verfasser dieses Nachrufs hatte seit 1977 mehrere Gelegenheiten, Arthur Engel bei Vorträgen und Tagungen zu erleben und kann dies voll bestätigen. Wie Mathematik und fachbezogene Mathematikdidaktik zu seinem Lebensinhalt wurden und zu welchen Themen er Beiträge geleistet hat, darum soll es in unserem Nachruf gehen. Wir möchten Sie dabei auf eine Reise in die Zeit der Neuen Mathematik einladen, in der die Stochastik Eingang in den Schulstoff der Sekundarstufen I und II fand. Aus diesem Grunde ist unser Nachruf länger als üblich geraten.

Biografisches

In seiner Kindheit war Arthur Engels Familie – wie viele Schwarzmeerdeutsche zur Zeit des Stalinismus – der Enteignung und Verfolgung ausgesetzt. Sein Vater wurde einige Jahre in Sibirien inhaftiert. Nach der russischen Grundschule konnte Arthur Engel die weiterführende Schule aufgrund der Schulschließungen in den deutschen Siedlungen nur für ein Jahr besuchen. Während des Krieges lebte die Familie unter deutscher Besatzung. Mit

dem Zusammenbruch der Front floh sie im Treck nach Deutschland. Dort angekommen wurde Arthur Engel Anfang 1945 als Soldat in die Wehrmacht eingezogen und verlor mit nur 16 Jahren seinen rechten Arm. Als „war displaced person“ erreichte er schließlich Stuttgart, wo er mit seinen Eltern und einem Bruder eine Heimat finden sollte. Nun konzentrierte er sich ganz auf das Lernen. So gelang es ihm, das Abitur nach nur drei Jahren Schulbesuch abzulegen. Anschließend studierte er an der Technischen Hochschule Stuttgart das Lehramt an Gymnasien mit den Fächern Mathematik und Physik. Diese beiden Wissenschaften hatten ihn schon als Kind fasziniert. Mit der Studienwahl Lehramt konnte er sein wissenschaftliches Interesse mit sicheren Berufsaussichten verknüpfen. Das war für ihn nach seiner bisherigen Lebenserfahrung und als ausgeprägter Familienmensch von großer Bedeutung. Von 1954 bis 1970 arbeitete er nach dem Referendariat am Karlsgymnasium in Stuttgart (Jungengymnasium) mit voller Begeisterung für sein Unterrichtsfach Mathematik. Bei seinen Schülern ist er als originelle Lehrerpersönlichkeit in bleibender Erinnerung geblieben, auch wenn er wohl eher die „Mathe-Cracks“ ansprach, so etwa Wolfram Koepf, bis 2019 Professor für Mathematik an der Universität Kassel, der jetzt noch verschiedene Anekdoten und Impressionen von seinen Mitschülern zusammentragen konnte. Als legendär sind Arthur Engels Aufgaben vom „Professor Idioti“, die teilweise auf „Ölsardinien“ spielen, in Erinnerung geblieben. Diese sich in seinem späteren Werk zeigende Neigung zu originellen fiktiven Einkleidungen reicht also bis in seine Lehrtätigkeit zurück.

Aufgrund der körperlichen Beeinträchtigung konnte er, ohne auf Experimente zu verzichten, nicht gut Physik unterrichten. Daher bildete er sich eigenständig in Geschichte fort, um auch ein zweites Fach lehren zu können. Die fortwährenden Selbststudien waren prägend für die weitere wissenschaftliche Entwicklung Arthur Engels. Sein Sohn berichtet über den überaus strukturierten und disziplinierten Tagesablauf des Vaters: vormittags Unterrichten in der Schule, nachmittags mathematische Studien und täglich Schwimmen oder Laufen. Arthur Engel hat sich hart arbeitend mathematisch weitergebildet und darauf aufbauend neue Ideen in seinem schulischen Mathematikunterricht erprobt und ausgefeilt.

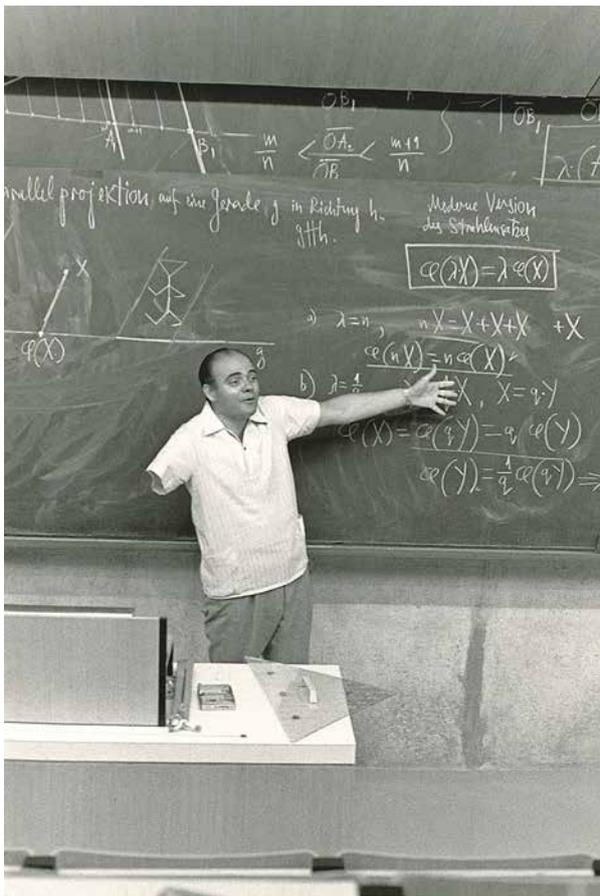


Foto: Nachlass Arthur Engel

Abbildung 2. Geometrie-Vorlesung von Arthur Engel, unbekanntes Jahr

Sein herausragendes Engagement blieb in der sich damals in Entwicklung befindlichen, noch jungen Wissenschaftsdisziplin Mathematikdidaktik nicht unbemerkt und führte ab Mitte der 1960er Jahre dazu, dass Arthur Engel zu Vorträgen auf ICMI-Tagungen eingeladen wurde. So hielt er z. B. auf einem ICMI/CIEM Symposium 1965 in Echternach einen Vortrag über „*Initiation a la théorie des probabilités*“ (Engel, 1966a) der auch in deutscher (Engel, 1965) und englischer Fassung (Engel, 1966b) in einer US-amerikanischen Lehrkräftezeitschrift publiziert wurde. Dort stellt er seinen eigenständigen Ansatz zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab der Jahrgangsstufe 5 anhand selbst erprobter Unterrichtsbeispiele vor. 1967 hielt er einen Vortrag bei einem weiteren ICMI-Kolloquium, das unter Leitung von Hans Freudenthal in Utrecht stattfand, und nahm 1969 an der ersten Tagung der ICME in Lyon zu „*New Trends in Mathematics Teaching*“ teil (Furinghetti, 2023, S. 78)

Arthur Engel war in dieser Zeit des Aufbruchs zu einer modernen Mathematik im Schulunterricht sowohl international vernetzt als auch produktiv beim Verbreiten seiner vom Fach geprägten didaktischen Ansätze. Seine Beiträge zur Anwendungs-

orientierung in einem modernen Mathematikunterricht sowie zur Stochastik im Schulunterricht in der neu gegründeten Zeitschrift *Educational Studies in Mathematics* sowie in deutschsprachigen Veröffentlichungen (Engel, 1966d, 1967, 1968, 1969b, 1973a) belegen das. Es ging ihm darum, zeitgemäße Mathematik für Lehrkräfte zugänglich zu machen und deren Substanz in lebendigen, herausfordernden Aufgaben zu präsentieren, die Schüler zum Denken und Handeln anregen. Ende der 1960er Jahre begann die hohe Zeit der „Neuen Mathematik“, die ja stark davon geprägt war, Konzepte wie Menge, Abbildung, Struktur und Axiomatik in den Unterricht zu bringen. Auch die Verstärkung von Problem- und Anwendungsorientierung waren Teil des Diskurses sowie neue Unterrichtsgebiete wie die Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und Algorithmen. Diese wurden von Arthur Engel vertreten, wenn auch eher nicht durch den „Mainstream“ der damaligen Unterrichtsreformer.

Hans-Georg Steiner, der vor seiner Berufung an das IDM der Universität Bielefeld im Jahre 1973 ein nationaler und internationaler Motor der Reformbewegung war, hatte in seiner Karlsruher Zeit – nach Erinnerung von RB – Arthur Engel als herausragenden Lehrer kennen und schätzen gelernt. Steiner arbeitete seit etwa 1960 im Comprehensive School Mathematics Program (CSMP) in Carbonale, Illinois (USA) mit und vermittelte dorthin einen Aufenthalt von Arthur Engel, in dessen Rahmen er auch Unterrichtsmaterial zu Wahrscheinlichkeit und Statistik in englischer Sprache entwickelte (Engel, 1970a, 1970b). Hans-Georg Steiner und andere motivierten einen eher zögerlichen Arthur Engel, sich von der Schule an die Hochschule zu bewerben. Seine stoffdidaktischen und mathematischen Qualitäten und Reputation galten als so herausragend, dass er ohne Dissertation und Habilitation bereits 1970 als Assistenz-Professor an die PH Ludwigsburg berufen wurde. Emmanuel Röhl und Herrmann Dinges waren ebenfalls auf ihn aufmerksam geworden und er wurde dann 1972 an die Goethe-Universität in Frankfurt berufen. Dort wirkte er bis 1993 als Professor am Institut für Didaktik der Mathematik im Fachbereich Mathematik und war für die elementarmathematische Ausbildung der Lehramtsstudiengänge an Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen zuständig.

Arthur Engel hat eine Generation von Mathematik-Lehramtsstudierenden mit seinen lebendigen Vorlesungen und darauf abgestimmten Aufgaben geprägt. Übereinstimmend erinnern sich ehemalige Arbeitskollegen an seinen mitreißenden Vortragsstil: immer spannend und stark an mathematischen Problemen und deren Lösung orientiert.

In seiner Zeit als Universitätsprofessor befasste sich Arthur Engel mit weiteren, zukunftsweisenden

mathematikdidaktischen Herausforderungen, wie der Rekonstruktion der Schulmathematik vom algorithmischen Standpunkt und dem Einsatz von Programmiersprachen und digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht (Engel, 1973a, 1975a, 1977, 1979a). Mit dieser Thematik war er auch in herausragenden Funktionen auf der von Steiner organisierten ICME III in Karlsruhe 1976 (Engel, 1979b) und auf der ICME IV in Berkeley (1980) vertreten (Engel, 1983). In Engel (1991) (englische Fassung Engel (1993)) arbeitet er seine Ideen in Buchform aus.

Bedingt durch eine schwere, lebensgefährliche Erkrankung musste er allerdings ab 1981 deutlich kürzer treten. Inzwischen hatte er auch eine Familie gegründet, die seine Zuwendung und Aufmerksamkeit beanspruchte. Weiterhin widmete sich Arthur Engel seinem besonderen Interesse, dem Problemlösen im Zusammenhang mit dem Bundeswettbewerb Mathematik und der Vorbereitung der deutschen Teams auf die internationale Mathematik-Olympiade. Mit seinen Trainingsprogrammen führte er eine ganze Reihe von hochbegabten Schüler:innen an die internationale Spitze.

Für sein Lebenswerk erhielt er 1990 das Verdienstkreuz der Bundesrepublik Deutschland – nicht nur für sein herausragendes Engagement bei mathematischen Wettbewerben, sondern auch in Hinblick auf die Modernisierung des schulischen Mathematikunterrichts. In der Laudatio zur Überreichung des Bundesverdienstkreuzes wurde das herausgestellt:

Als Gymnasiallehrer baute Herr Prof. Engel aus eigener Initiative eine Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik in seinen Mathematikunterricht ein und hat auf diese Weise einen ausgezeichneten ... Lehrplan dieser Sachgebiete entwickelt. Mit Hilfe dieses Lehrplans entstand ein in hohem Maße problemorientierter Unterricht, der von konkreten, die Schüler interessierenden Fragen ausgeht, so zu mathematischen Problemen führt und auf diese Weise echte Motivation zu mathematischem Denken schafft. (Möllemann, 1991)

Sein mathematisch-mathematikdidaktisches Lebenswerk möchten wir nun hinsichtlich der Stochastik und des Problemlösens genauer vorstellen.

Stochastik in der Schule

Arthur Engels erste Veröffentlichungen plädieren dafür, früh mit einem propädeutischen Unterricht in Wahrscheinlichkeitstheorie zu beginnen, um Schüler:innen an die besondere Denkweise der Stochastik heranzuführen. In Engel (1965) schlägt er Themen und Aufgaben für die Klassen 5 bis 7 vor,

die er für seinen eigenen Unterricht entwickelt und erprobt hatte. Dieser Artikel erschien in modifizierter Form auch in der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* (Engel, 1966d) und wurde sogar wegen seiner Bedeutung in einer fachwissenschaftlichen Zeitschrift nachgedruckt (Engel, 1969a).

Der Schüler hat keine anschauliche Vorstellung von den Begriffen, die der WT zugrunde liegen. Daher ist ein propädeutischer Kurs unerlässlich. Hier muss der Schüler an einfachen Beispielen und vielen Experimenten die Begriffe und Methoden der WT erleben. So wird ein anschaulicher Hintergrund für die abstrakte Theorie geschaffen, die im 8. Schuljahr einsetzen kann. (Engel 1965, S. 271)

Eine wesentliche Änderung des Stoffplans ist dabei nicht einmal nötig. Die Grundbegriffe der Mengenlehre sind allerdings unentbehrlich. Sonst braucht man nur die Aufgaben zu ändern. Das Aufgabenmaterial für diese Altersstufe zeichnet sich durch grosse Ideenarmut aus. Es stammt zum Teil noch aus altbabylonischen Tempelschulen. Die teilweise Auswechslung dieser Aufgaben durch Probleme kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Inhalts bedeutet einen großen Gewinn (a. a. O., S. 271/2).

Die vorgeschlagenen Themen sind nicht nur aus heutiger Sicht sehr anspruchsvoll. So werden in Klasse 5 und 6 Binomialkoeffizienten (Zahlen im Pascalschen Dreieck), Permutationen und Fakultäten eingeführt. Als Aufgabe wird u. a. gestellt, einen zufälligen Punkt auf der Tafel zu wählen, indem zwei Schüler je eine Münze werfen. Die beiden erzeugten 0-1-Folgen definieren eine zweidimensionale Intervallschachtelung (im Binärsystem) für den zufälligen Punkt. Ab Klasse 7 werden Zufallsziffern und die Monte-Carlo-Methode angewendet:

Die Monte-Carlo-Methode ist experimentelle Mathematik. Wenn ein Problem für eine rechnerische Lösung zu kompliziert ist, dann wird es simuliert. Durch n Versuche erhält man die Lösung mit einer Genauigkeit von der Größenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Für die Monte-Carlo-Methode braucht man einen Rechenautomaten und eine Quelle von Zufallsziffern. Der Rechenautomat ist die Klasse selbst. Sie kann oft in 2 bis 3 Minuten 1000 Versuche anstellen. Damit hat man die gesuchte Zahl auf ca. 3 % genau. Leider ist die Auswertung der Versuche zeitraubender. Quellen für Zufallsziffern sind Münze und Würfel, leider im Zweier- und Sechzersystem (a. a. O., S. 280/81).

Wir haben so ausführlich zitiert, um einerseits die Prägung durch die „Neue Mathematik“ (Mengen-



Foto: Andreas Eichler, Universität Kassel

Abbildung 3. Das Mathematische Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

lehre, nicht nur Dezimalsysteme) deutlich zu machen, andererseits auch deswegen, weil Arthur Engel unter Experimenten im Stochastikunterricht eben nicht das Arbeiten mit Zufallsgeräten als Selbstzweck versteht, sondern sie von Anfang an als Mittel für die Simulation interessanter und komplexerer Probleme herausstellt. Bemerkenswerterweise wird auch das „ $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz“ angesprochen, das es heute immer noch nicht in den Pflichtstoff der gymnasialen Oberstufe, geschweige denn in den der Sekundarstufe I geschafft hat.

Später begann Arthur Engel mit dem Klett-Verlag zusammenzuarbeiten. Das tat er zunächst als Autor im Schulbuch Lambacher-Schweizer (Schweizer, 1968), für das er das Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik verfasste – ein Thema, das seit dem KMK-Beschluss von 1968, der die auch in der BRD heftig diskutierte Modernisierung des Mathematikunterrichts (Neue Mathematik) in Gang setzte, wieder in Lehrplänen der Oberstufe mitberücksichtigt wurde.

Anfang der 1970er Jahre entwickelt Arthur Engel mit Tamas Varga (einem der Promoter der Neuen Mathematik und der Stochastik in Ungarn) auch Ideen, wie man die Propädeutik zur Wahrscheinlichkeitstheorie bereits in der Grundschule beginnen kann. Das Buch „Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe“ von Engel et al. (1974) richtet sich an Lehrkräfte im Primarbereich. Es wird

flankiert durch das *Mathematische Labor zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*, das auch im Klett-Verlag erschien (Abb. 3) und eine Vielzahl von stochastischen Zufallsgeräten enthält, mit denen man die vorgeschlagenen Spiele praktisch realisieren kann.

In dieser Zeit sind ebenfalls seine beiden wegweisenden Bücher zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Engel, 1973b, 1976a) entstanden, die mit originellen und herausfordernden, auch mathematisch anspruchsvollen Aufgaben und Themen und geringer Formalisierung zur Pflichtlektüre angehender Stochastikdidaktiker:innen in den 1970er und 1980er Jahren wurden und viele gymnasiale Lehrkräfte und Schulbuchautor:innen beeinflusst haben.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sind heute ein unentbehrliches Rüstzeug für alle Natur- und Geisteswissenschaften geworden. Es ist nur noch eine Frage der Zeit, bis sie in den regulären Schulunterricht eindringen. Die Integration der Wahrscheinlichkeit und Statistik in den Unterricht aller Stufen wird den Mathematikstoff entscheidend bereichern, d. h. interessanter und nützlicher machen. (Engel 1973b, S. 5)

Die beiden Bücher wurden mit inhaltlich veränderten Akzentsetzungen später in einem Lehrbuch (Engel, 1987) zusammengeführt, das den Titel „Stochastik“ trägt. Diese Bezeichnung hatte sich mittlerweile in deutschen Lehrplänen durchgesetzt. Im Vorwort zu Engel (1973) werden die einzelnen Kapitel den gymnasialen Schuljahren von Klasse 6 bis 13 zugeordnet. Beruhend auf seinen Unterrichtserfahrungen liefern sie Hintergrundwissen für Lehrkräfte und Ideen für die Unterrichtsgestaltung. Die ersten 4 Kapitel behandeln ein- und mehrstufige Zufallsversuche und Kombinatorik, in Kapitel 5 wird bereits relativ früh die Statistik in Gestalt des Hypothesentestens eingeführt, Kapitel 6 behandelt Zufallszahlen und Monte Carlo Methoden, danach folgen Zufallsvariablen und spezielle Verteilungen in mehreren Kapiteln (Binomial-, Normal-, Poisson- und hypergeometrisch). Auch wird dem χ^2 -Unabhängigkeits- und Anpassungstest ein eigenes Kapitel gewidmet sowie den bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Satz von Bayes (mit Anwendung auf Gesundheitstests und der Thematisierung von ggf. geringer Infektionswahrscheinlichkeit bei positivem Testresultat). Damit ist ein thematischer Rahmen für die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik gesetzt, aus dem noch heute die Lehrinhalte für den Stochastikunterricht an Schulen ausgewählt werden. Die frühe Thematisierung von (beurteilender) Statistik und Simulation mit Zufallszahlen war für seinerzeitige Hochschul- und Schulbücher ungewöhnlich. Beschreibende Statistik und

Datenanalyse sind allerdings bei Arthur Engel noch kein Thema. Außerdem werden Konfidenzintervalle nicht explizit thematisiert (nur implizit bei der Statistik der Geburten in Kapitel 11.5.)

Hinsichtlich der Elementarisierung ist hervorzuheben, dass Maßtheorie und (Kolmogorov-)Axiome unnötig sind und nicht auftauchen. Die Idee, Wahrscheinlichkeitstheorie auch als ein einfaches Beispiel von axiomatisierter Mathematik auf der Basis der Mengenlehre im Rahmen der Neuen Mathematik einzuführen, spiegelt sich bei Engel nicht wider. Sein Fokus liegt auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen. Wahrscheinlichkeiten werden zunächst für endlich viele Ergebnisse und dann für Ereignisse festgelegt, wie das heute in Schulbüchern üblich ist. Es wird allerdings durchgängig mit Mengensprache und formelmäßigen (algebraischen) Darstellungen gearbeitet, die über das Niveau heutiger Oberstufenschulbücher hinausgehen. Eine wichtige Rolle spielen Graphen: In Band 1 werden Baumdiagramme für die Kombinatorik und mehrstufige Zufallsversuche behandelt und in Band 2 Irrfahrten auf Graphen visualisiert, die Markow-Prozesse repräsentieren.

Zum Aufgabenmaterial schreibt Engel (1973, S. 5) im Vorwort:

Es ist ein Arbeitsbuch. Es enthält eine Fülle ausführlich diskutierter Beispiele und zahlreiche Aufgaben. In den Beispielen und Aufgaben steckt viel Arbeit. Es wurde versucht, diese interessant und originell zu machen.

Hierin besteht eine wesentliche nachhaltige Leistung seines Buches. Seine Aufgaben thematisieren elementare, auch bekannte historische Probleme aus Glücksspielen und beinhalten häufig fiktive Einkleidungen („das Wetter in Sikinien“, „die Heiratschancen der Mädchen aus Anchurien“), die man heute durchaus für problematisch halten kann. Darüber hinaus finden sich auch reale Anwendungsbeispiele, die demonstrieren, wie intensiv sich Arthur Engel mit Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik auseinandergesetzt und diese für die Schule zugänglich gemacht hat. Aus heutiger Sicht eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts ist es allerdings ein Nachteil, dass die Kontexte der Probleme oft nur angedeutet und Originalquellen meist nicht zitiert werden. Auch die Angemessenheit der Modelle wird noch nicht hinterfragt. Gelegentlich weiß man nicht, ob echte Studien benutzt werden oder ob eine fiktive Einkleidung vorliegt, z. B. bei der Hypothesentestfrage „Sind Ratten farbenblind/neugierig/lichtscheu?“ (1973, S. 57f.) oder bei der Modellierung „Warten auf den ersten Fisch“ durch eine Exponentialverteilung (1973, S. 26). Einige der von ihm vorgeschlagenen Beispiele zu statistischen Tests wurden

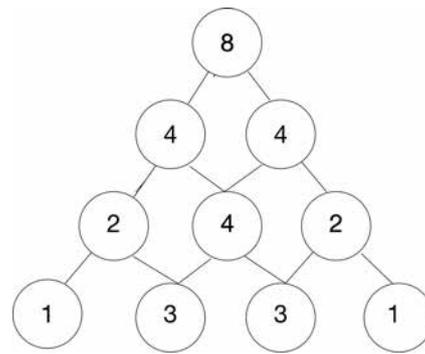


Abbildung 4. Dreistufiger Wurf einer fairen Münze

später vielfach in Schulbüchern aufgegriffen, z. B. Geschmackstests (1973, S. 59), Anwendungen zum Waldschen Sequentialtest sowie Fishers exakter Test in der Anwendung auf die Wirksamkeit von Polioimpfungen in kontrollierten Vergleichsstudien.

Der zweite, 1976 erschienene Band handelt von stochastischen Prozessen, insbesondere Markow-Ketten, die in der Stochastikdidaktik und in der Schule eher seltener aufgegriffen wurden. Bemerkenswert an seinem Zugang zu diesem anspruchsvollen Thema ist die überaus gelungene Elementarisierung als Irrfahrten in Graphen. Für die Berechnungen werden verschiedene Pfadregeln eingeführt, aber das wirklich Revolutionäre ist der von ihm entwickelte Wahrscheinlichkeitsabakus: Man kann Aufgaben zu Markow-Ketten, z. B. mit welcher Wahrscheinlichkeit der Prozess einen bestimmten absorbierenden Zustand erreicht (und wie lange das im Mittel dauert), spielerisch mit Hin- und Herschieben von Chips in einem Graphen lösen. Diese Methode entwickelte er 1974 während eines seiner Forschungsaufenthalte in Carbondale in den USA bei einem Versuch, einer schwachen 4. Klasse etwas „nichttriviale Wahrscheinlichkeit“ näher zu bringen (Engel, 1975b).

Einfache mehrstufige Zufallsversuche, z. B. das Werfen von 3 Münzen, können Kinder bearbeiten, indem sie acht Chips durch den Graphen laufen lassen, und nach den Wahrscheinlichkeiten (je $\frac{1}{2}$ für Kopf oder Zahl) immer hälftig aufteilen, so dass in der untersten Reihe 1,3,3,1 Chips landen (vgl. Abb. 4). Dabei werden ohne Bruchrechnung anhand der ermittelten günstigen Fälle Wahrscheinlichkeitsvergleiche möglich. Heute würde man von „idealer“ Simulation sprechen, die im Kontext der natürlichen Häufigkeiten seit den 1990er Jahren (Krauss et al., 2020) populär geworden ist. Man könnte, wenn man den Überblick hat, gleich mit 8 Chips starten und diese im Graphen jeweils aufteilen und nach unten schieben. Oder – und das ist eine erste zentrale Einsicht von Arthur Engel – man fängt im Start mit 2 Chips an, die man so lange verschiebt, bis

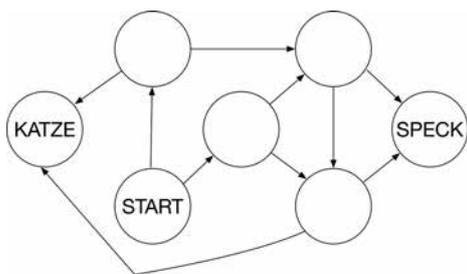


Abbildung 5. Das Mäusespiel ähnlich zu Engel (1975d, S. 77)

man nicht mehr weiter „feuern“ kann. Dann nimmt man immer wieder zwei weitere hinzu und schiebt diese so lange nach unten, bis es nicht mehr geht. Wenn man den siebten und achten Chip auf den Start gelegt hat, kann man schließlich alle Chips in die letzte Reihe schieben.

Der Witz der Methode ist aber, dass sie auch auf komplexere Graphen anwendbar ist, die (auch unendliche) stochastische Prozesse beschreiben. Ein ganz einfaches Beispiel für die Grundschule ist z. B. bei einer stochastischen Irrfahrt einer Maus (Übergangswahrscheinlichkeiten sind jeweils $1/2$) die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Maus den Speck erreicht (Abb. 5). Dies gelingt ihr mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ und einem Erwartungswert von 3 Schritten. Man startet mit zwei Chips und legt später noch zwei weitere hinzu, am Ende landen 2 Chips im Speck und 2 bei der Katze.

Kompliziert wird es z. B. beim „Kühnen Spiel“ (Engel, 1975b, S. 71). Die Spielregel lautet:

Ich besitze 1 DM und brauche dringend 5 DM. Mein Ziel kann ich durch ein faires Glücksspiel erreichen. Dabei entscheide ich mich für die kühne Strategie: In jeder Runde setze ich soviel von meinem Geld ein, daß ich im Falle eines Gewinns möglichst nahe an mein Ziel komme.

Das Spiel kann man in den in Abb. 6 dargestellten Graphen übersetzen (was die erste kognitive Herausforderung sein kann), der nun einen Zyklus (1-2-4-3-1) enthält:

Das Durchschieben von Chips (Start ist in 1) nach der eben beschriebenen Methode führt nicht zum Ziel. Der Prozess terminiert nicht, da es unendliche viele Pfade vom Zustand 1 zum Zustand 5 gibt. Eine zweite wesentliche Idee von Arthur Engel führt zum Ziel. Man lädt alle inneren Zustände (2, 3, 4) mit Chips vor, so dass gerade nicht gefeuert werden kann, also in diesem Beispiel überall mit einem Chip. Dann beginnt man mit zwei weiteren Chips im Startzustand „1“ und lädt, wie in unserem Einstiegsbeispiel erläutert, entsprechend immer wieder so lange mit zwei Chips nach, bis sich der Vorladezustand (kritische Ladung) reproduziert. Wir haben es gespielt: Im Zustand „0“ lie-

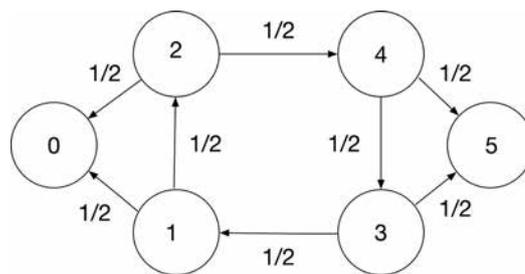


Abbildung 6. „Das kühne Spiel“ ähnlich zu Engel, 1975d, S. 71)

gen schließlich 24 Chips, in „5“ liegen 6 und in den inneren Zuständen „2“, „3“ und „4“ wieder je einer. Die Wahrscheinlichkeit in „5“ zu landen ist also $\frac{6}{24+6} = \frac{1}{5}$, was man in diesem Fall eines unendlichen Prozesses auch mit Hilfe geometrischer Reihen ausrechnen kann. Man spiele es selber mal nach! Intuitiv klar sind den Verfasser:innen dieses Nachrufs die Gründe für die Richtigkeit des Verfahrens allerdings noch nicht geworden.

Dieser Algorithmus, den Arthur Engel den „Probabilistic Abacus“ und später „Stochastic Abacus“ taufte (Engel, 1975c, 1976b, 2006), hat viel Staub aufgewirbelt. Arthur Engel (Engel, 2003, 2006) berichtet Interessantes über dessen Geschichte. Für ihn sei die Richtigkeit des Algorithmus intuitiv völlig klar gewesen, als er ihn auf einer Tagung 1975 in Warschau vorstellte. Er wurde auf diesem Kongress dann aber von Georges Papy, dem bekannten belgischen Mathematikdidaktiker und Promoter der Neuen Mathematik, angegriffen, man dürfe nichts Unbewiesenes für die Schule vorschlagen. Dass der Algorithmus mathematisch korrekte Resultate liefert, hat größtenteils Engel dann selber in der nächsten Nacht bewiesen, eine bleibende Beweislücke (die Wiederkehr der kritischen Ladung, das „critical load theorem“, dass nämlich der Vorladezustand nach endlichen Schritten wieder auftaucht und man dann das richtige Ergebnis „ablesen“ kann), hat später ein Mitarbeiter aus Frankfurt, Dr. L. Scheller, geschlossen, ohne ihn zu publizieren. Mittlerweile ist dieser Algorithmus ein Bestandteil der Theorie der *Chip-Firing Games* in der theoretischen Informatik (vgl. Björner & Lovász, 1992 für eine erste umfassende Darstellung), in der die Urheberschaft von Arthur Engel anerkannt wird. Arthur Engel hat zum Thema ein unveröffentlichtes Buchmanuskript mit dem Titel *The Stochastic Abacus: An Alternative Approach to Discrete Probability* (Engel, 2008) verfasst. Da wir aus der persönlichen Korrespondenz aus dem Jahre 2003 von dem Manuskript wussten, sind wir jetzt bei einer Google-Suche überraschend auf den einen Link zu der instruktiven Website des amerikanischen Mathematikers James Propp (mathenchant.wordpress.com/2017/08/16/prof-engels-marvelously-improbable-machines/) gesto-

ßen, auf der Engels Arbeiten gewürdigt werden und das Buch auch abrufbar ist. Es ist password-geschützt, aber auf der Seite findet man etwas versteckt auch das Passwort. In dem Buch wird ein Großteil der diskreten Stochastik mit Hilfe dieses Algorithmus behandelt, wieder mit vielen spannenden Beispielen. Schon in Engel (2003) drückt er die Befürchtung aus, dass das Werk möglicherweise erst posthum veröffentlicht würde, was bisher aber noch nicht geschehen ist.

Dass Arthur Engel weiterhin ein Gespür für interessante neuere Entwicklungen in der Statistik besaß, zeigt sich auch in der Herausgabe des MU-Hefts zu neuen Ideen in der Statistik (Engel, 1982), in der Statistiker im Umfeld von John Tukey Ideen der Explorativen Datenanalyse vorstellen, die aber dann in Deutschland von anderen Didaktiker:innen weiter ausgebaut und didaktisch analysiert wurden.

Als in den 1980er Jahre die Stochastikdidaktik auch in Deutschland Fahrt aufnahm, waren die elementarmathematischen Konstruktionen und Vereinfachungen sowie die vielfältigen Aufgaben und Beispiele von Arthur Engel ein ganz wichtiger Fundus. Am fachdidaktischen Diskurs nahm Engel dann nur peripher teil. Er war auch eher ein impliziter und kein expliziter Stoffdidaktiker, in dem Sinne, dass unterschiedliche Zugänge explizit verglichen und bewertet wurden. Zu empirischen Studien, die in dem frühen Buch zur Didaktik der Stochastik von Kütting (1981) aufgearbeitet wurden, oder theoretischen Diskussionen um fundamentale Ideen in der Stochastik (Heitele, 1975, 1976) hat Engel sich in seinen Schriften nicht explizit geäußert. In gewissem Sinne ist er mit seinen Arbeiten „Einzelkämpfer“ geblieben.

Bundeswettbewerb Mathematik und Mathematikolympiade

Bereits während seiner Zeit in Stuttgart begann Arthur Engel sich mit Lehrerkollegen aus ganz Deutschland für die Einrichtung eines Bundeswettbewerbs Mathematik zu engagieren. Er gilt als Mitbegründer dieses Wettbewerbs, der erstmals 1970 stattfand. Einige Jahre zuvor übersetzte er aus dem Russischen mathematische Olympiade-Aufgaben aus der UdSSR, die er mit ausführlichen Lösungen für Lehrkräfte zu Trainingszwecken zugänglich machte (Engel, 1966c).

Im Vorwort findet sich sein Credo:

In der Mathematik kommt es nicht auf Wissen, sondern auf Können an. Deshalb lernt man Mathematik am besten nicht durch Lesen weiterführender Literatur, sondern durch intensive Beschäftigung mit interessanten und anspruchsvollen Problemen von einfachem und elementarem Charakter. Der tagelange, ja wochenlange

Kampf und die schließliche Bezwingung eines Problems ist ein wichtiges Element in der Erziehung eines zukünftigen produktiven Mathematikers.“ (S. 4/5)

und

Der Lehrer kann es als Ergänzung zum eingeführten Lehrbuch verwenden. Er sollte immer wieder anspruchsvolle, aber interessante Aufgaben mit seinen Klassen behandeln. Denn nur so kann er die Freude an der Mathematik wachhalten und die Leistung steigern. So manche ‚schwache‘ Klasse ist erst durch fortgesetzte Unterforderung leistungsschwach geworden. (a. a. O., S. 4)

Von Beginn an war er über 40 Jahre im Aufgabenausschuss des Bundeswettbewerbs aktiv tätig und trug damit zur Förderung mathematisch begabter Schüler:innen bei (Specht et al., 2020). Als wichtigster „Aufgabenlieferant“ schaffte er die Basis für den Wettbewerb. Er selbst soll einmal gesagt haben: „Viele Leute lösen gerne Probleme, wer denkt sie sich aus?“ So gilt er als

schier unerschöpflicher Quell von Aufgabenstellungen. Die Art und Weise dieser Problemstellungen und die möglichen Strategien zu deren Lösungen haben den Bundeswettbewerb Mathematik mitgeprägt. (Dr. Erhardt Quaisser, Aufgabenausschuss BWM, Kondolenzschreiben)

1977 konnte dank seines engagierten Einsatzes zum ersten Mal ein Team der Bundesrepublik Deutschland an einer Internationalen Mathematik-Olympiade teilnehmen.

Damit hat Arthur Engel das Fundament für die seit 1977 regelmäßige Teilnahme Deutschlands an Internationalen Mathematik-Olympiaden gelegt, indem er die entsprechenden Konzepte für die Auswahl und Vorbereitung sowie die Begleitung der deutschen Teams initiiert hat. (Prof. Dr. Jürg Kramer, Kondolenzschreiben)

Günter M. Ziegler (Mathematikprofessor und inzwischen Präsident der Freien Universität Berlin) erinnert sich:

Arthur Engel habe ich in meinem Abiturjahr als Trainer für die Internationale Mathematik-Olympiade 1981 in Washington kennengelernt. Wir wurden damals von ihm nicht nur trainiert, sondern auch motiviert und angefeuert. Das Trainingsmaterial war auch Augenöffner für Muster und Strategien; es war eine Schatztruhe aus jahrzehntelanger Erfahrung. Arthur Engel war unangefochtene Autorität, seine Erklärungen wie auch seine Korrekturen waren mustergültig und klar. Ich bin und bleibe ihm dankbar!

1989 bekleidete Arthur Engel sogar das Amt des Juryvorsitzenden der 30. Internationalen Mathematik-Olympiade und damit das des offiziellen Leiters dieses bedeutenden internationalen Schüler:innenwettbewerbs. Über Jahrzehnte hat er die Vorbereitung des deutschen Teams maßgeblich gestaltet, dabei haben Generationen von Mathematiker:innen von ihm Problemlösestrategien gelernt. Einen umfassenden Eindruck seiner breiten Kenntnis mathematischer Probleme und der Verfahren zu ihrer Lösung vermittelt sein 1998 erschienenes Buch *Problem Solving Strategies*, das unter Kenner:innen als „Bibel“ für die Wettbewerbsvorbereitung gilt (Engel, 1998). Es enthält heuristische Lösungsverfahren und eine umfassende Sammlung von Aufgaben, mit denen er erfolgreich die deutschen Teams für die Internationale Mathematik-Olympiade fit gemacht hat. 1991 erhielt er für seine herausragenden Leistungen im Bereich der Aufgabenerstellung für internationale mathematische Wettbewerbe den *David Hilbert Award* der *World Federation of National Mathematics Competition*.

Fazit

Es ist bemerkenswert, dass Arthur Engel in der Zeit seines beruflichen Schaffens sehr früh viele nach wie vor hoch aktuelle und heute noch relevante mathematikdidaktische Themen bearbeitet, elementarmathematisch erschlossen und mit außerordentlicher Kreativität interessante Aufgabenstellungen entwickelt hat. Er wurde sehr früh im internationalen Kontext aktiv und beachtet, was für die seinerzeitige deutsche Mathematikdidaktik eine Ausnahmereignis war. Er war ein aktiver Vertreter in der internationalen Community von Promotern der Neuen Mathematik, die er aber mit seinen Themen und problemorientierten Ansätzen schon seinerzeit transzendierte und die im Unterschied zur Leitidee „Menge, Abbildung und Struktur“ die Geschichte überlebt haben, auch wenn er sich selbst nicht mehr so aktiv in den mathematikdidaktischen Diskurs und deren sich vertiefende und verbreiternde theoretische und empirische Orientierung einbringen wollte und konnte.

Neue Entwicklungen in den mathematischen Wissenschaften für Schulunterricht zu erschließen und interessant und problemorientiert aufzubereiten, sehen wir als eine der ständigen Aufgaben der Mathematikdidaktik. Man kann vermuten, dass Arthur Engel heutzutage längst schon einige interessante Beiträge zum Thema Künstliche Intelligenz im Mathematik- und Informatikunterricht veröffentlicht hätte.

Literatur

- Björner, A. & Lovász, L. (1992). Chip-firing games on directed graphs. *Journal of algebraic combinatorics*, 1, 305–328.
- Engel, A. (1965). Mathematische Forschung und Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: l'Institut Grand-Ducal Section des Sciences Naturelles Physiques et Mathématiques (Ed.), *Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement textes originaux des conférences faites au séminaire organisé par la C.I.E.M. à Echternach (G. D. de Luxembourg)* (pp. 271–288).
- Engel, A. (1966a). Initiation à la théorie des probabilités. In: ICMI/CIEM (Ed.), *New Trends in Mathematics Teaching I* (pp. 159–176). Unesco.
- Engel, A. (1966b). Mathematical research and instruction in probability theory. *The Mathematics Teacher*, 59(8), 771–782.
- Engel, A. (1966c). *Mathematische Olympiadaufgaben aus der UdSSR mit ausführlichen Lösungen*. Klett.
- Engel, A. (1966d). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Der Mathematikunterricht*, 12(4), 5–20.
- Engel, A. (1967). Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie im Unterricht der Unter- und Mittelstufe der Gymnasien. In: H. Behnke & H. G. Steiner (Eds.), *Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Berichte von Studientagungen für belgische und luxemburgische Mathematiklehrer in Münster* (pp. 189–210). Vandenhoeck und Rupprecht.
- Engel, A. (1968). Systematic use of applications in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 202–221.
- Engel, A. (1969a). Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie. *Blätter der DGVFM/Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, 9(2), 109–121.
- Engel, A. (1969b). The relevance of modern fields of applied mathematics for mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 257–269.
- Engel, A. (1970a). *A Short Course in Probability*. Central Midwestern Regional Educational Laboratory, Inc. (Cemrel).
- Engel, A. (1970b). Teaching probability in intermediate grades. In: L. Rade (Ed.), *The Teaching of Probability and Statistics* (pp. 87–150). Wiley / Almqvist and Wiksel.
- Engel, A. (1973a). Outline of a problem oriented, computer oriented and applications oriented High School mathematics course. *International Journal of mathematics Education in Science and Technology*, 4, 455–492. DOI:10.1080/0020739730040408
- Engel, A. (1973b). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Bd. 1. Klett.
- Engel, A. (1975a). Computing and probability. In: L. Rade (Ed.), *Statistics at School Level. Proc. of the 3rd ISI Round Table Conference on the Teaching of Statistics* (pp. 95–120). Wiley.
- Engel, A. (1975b). Der Wahrscheinlichkeitsabakus. *Der Mathematikunterricht*, 21(2), 70–94.
- Engel, A. (1975c). The probabilistic abacus. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 1–22.
- Engel, A. (1976a). *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Bd. 2. Klett.

- Engel, A. (1976b). Why does the probabilistic abacus work? *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 59–69. DOI:10.1007/BF00144359
- Engel, A. (1977). *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt*. Klett.
- Engel, A. (1979a). Algorithmen (Hrsg. ganzes Heft). *Der Mathematikunterricht*, 25(6).
- Engel, A. (1979b). The role of algorithms and computers in teaching mathematics at school. In: B. Christiansen & H.-G. Steiner (Eds.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 249–272). UNESCO.
- Engel, A. (1982). Neue Ideen in der Statistik (Herausgabe gesamtes Heft). *Der Mathematikunterricht*, 28(1).
- Engel, A. (1983). Algorithms. In: M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 312–330). Birkhäuser.
- Engel, A. (1987). *Stochastik*. Klett.
- Engel, A. (1991). *Mathematisches Experimentieren mit dem PC*. Klett.
- Engel, A. (1993). *Exploring Mathematics with Your Computer*. Mathematical Association of America.
- Engel, A. (1998). *Problem-Solving Strategies*. Springer Science & Business Media.
- Engel, A. (2003). Remarks on the history of the probabilistic abacus. In: Anhang zu einem Brief an RB, vom 8. 9. 2003; etwas andere Version: mathenchant.org/engel-remarks.pdf.
- Engel, A. (2006). Der Stochastische Abakus (SA). *Stochastik in der Schule*, 26(2), 28–37.
- Engel, A. (2008). The stochastic abacus: An alternative approach to discrete probability. Unveröffentlichtes Manuskript. mathenchant.org/engel-abacus.pdf
- Engel, A., Varga, T., & Walser, W. (1974). *Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe*. Klett.
- Furinghetti, F. (2023). The Beginning of an Adventure: Glances at the first ICME (Lyon 1969). In: F. Furinghetti & L. Giacardi (Eds.), *The International Commission on Mathematical Instruction, 1908–2008: People, Events, and Challenges in Mathematics Education* (pp. 335–346). Springer.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187–205.
- Heitele, D. (1976). *Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe – Dissertation*. PH Ruhr.
- Krauss, S., Weber, P., Binder, K., & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 485–521. DOI:10.1007/s13138-019-00156-w
- Kütting, H. (1981). *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Herder.
- Möllemann, J. (1991). *Laudatio anlässlich der Verleihung des Bundesverdienstkreuzes*. Nachlass Arthur Engel.
- Schweizer, W. (1968). *Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Lambacher-Schweizer Mathematisches Unterrichtswerk, Ausgabe B, Teildruck aus der Analysis*. Klett.
- Specht, E., Quaisser, E., & Bauermann, P. (2020). *50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik: Die schönsten Aufgaben. 2. Auflage*. Springer-Verlag.
- Rolf Biehler, Universität Paderborn
E-Mail: biehler@math.upb.de
- Katja Krüger, Technische Universität Darmstadt
E-Mail: krueger@mathematik.tu-darmstadt.de

Nachruf auf Hans-Dieter Rinkens

Peter Bender



Foto: Universität Paderborn

Am Pfingstmontag, 29. Mai 2023, starb Hans-Dieter Rinkens, 80-jährig, an einem schweren Krebsleiden.

Hans-Dieter Rinkens wurde am 24. November 1942 in Aachen geboren, studierte an der RWTH Aachen sowie an der Universität Bonn Mathematik und Physik und promovierte 1969 mit einem Thema aus

der Theorie der Maxwellschen Gleichungen. Nach einem Zwischenspiel als Assistent bzw. Dozent an der PH Siegen wurde er 1973 als C4-Professor für Mathematik und ihre Didaktik an die Universität-Gesamthochschule Paderborn berufen. Vom Aussehen her hätte man ihn sowieso für einen Westfalen gehalten, und nun wurde aus dem Rheinländer tatsächlich ein solcher.

Für Hans-Dieter Rinkens' Tatendrang kam die Um- und Aufbruchssituation im Bildungswesen in den 1970-er Jahren, speziell in Nordrhein-Westfalen mit der Gründung der fünf Gesamthochschulen, gerade recht, und auch umgekehrt kam er mit seinem Tatendrang für diese Um- und Aufbruchssituation gerade recht. Er hat eben nicht nur sein mathematisches und mathematikdidaktisches Gärtlein gepflegt, sondern sich, schon in Siegen beginnend, in die Aufbauarbeit gestürzt. So war er Gründungsprorektor und dann von 1987 bis 1991 Rektor der Universität Paderborn.

Zunächst ging es darum, allgemein das Uni-GH-Schiff auf Kurs zu bringen und zu halten. Aber dann begann er, weitergehende Ideen zu verwirklichen. Das waren keine Visionen im Sinne eines unserer Alt-Kanzler, sondern realistische und realisierbare Vorhaben.

1995 gründete er das Paderborner Lehrerausbildungszentrum (das heute noch PLAZ genannt wird, obwohl es inzwischen vornehmer „Zentrum für Bildungsforschung und Lehrerbildung – PLAZ-Professional School“ heißt) und war viele Jahre lang dessen Direktor. Er hat damit für die dringend

notwendige Konsolidierung der Lehrerbildung an der Uni Paderborn gesorgt. Das PLAZ strahlte und strahlt auf das Land NW und auf ganz Deutschland aus, was dazu führte, dass die Einrichtung von Lehrerausbildungszentren in NW und in vielen anderen Bundesländern gesetzlich verankert wurde und an vielen Universitäten solche Zentren nach dem Paderborner Vorbild eingerichtet wurden. Es (und damit er) wurde u. a. vom Stifterverband für die deutsche Wissenschaft und von der Stiftung Mercator im Rahmen des Programms „Neue Wege in der Lehrerbildung“ ausgezeichnet.

Das PLAZ konnte natürlich nur mit fähigen und engagierten Mitarbeitern¹ florieren, und dass es über solche verfügte, geht auf eine besondere Stärke von Hans-Dieter Rinkens zurück: er hatte einen Blick für „gute“ Leute, konnte seine Begeisterung für ein bestimmtes Vorhaben auf diese übertragen und sie damit für die Mit- oder auch selbstständige Arbeit auf der Grundlage seiner Vorstellungen motivieren (im PLAZ, zum Digitalisierungsaufbruch, in seinem Schulbuchprojekt u. v. a. m.).

Solche Vorhaben waren u. a.: Der Aufbau eines „Mathe-Treffs“, einem gemütlich ausgestatteten Raum mit vielen Materialien und Büchern, in dem die Studenten sich untereinander und mit der Mathematik „treffen“ können, mit und ohne Beratung durch Tutoren zu fast beliebigen Zeiten. Der Paderborner Mathe-Treff wurde zum Vorbild für entsprechende Einrichtungen in vielen deutschen Hochschulen und auch in anderen Fächern. Z. B. gibt es in Paderborn inzwischen auch einen Deutsch-Treff.

Nicht jede „Vision“ konnte umgesetzt werden. So wollte er z. B. die Ausbildung islamischer Religionslehrer nach Paderborn holen; – Münster erhielt den Zuschlag. – Aber: Was lange währt ... Nun hat es doch noch geklappt. Zum WS 2022/23 wurde das Fach an der Universität Paderborn für alle Lehrämter von der Primarstufe bis zur Sekundarstufe II eingerichtet.

Oder: Gegen Ende der 1990-er Jahre entwickelte er ein Geometrie-Curriculum für die universitäre Lehre, das komplett auf der damals allein internet-fähigen DGS Cinderella basierte, mit dem Ziel, dass die Studenten in der Vorlesung selbstständig am Rechner Geometrie treiben sollten. – Dem stand

¹ Der gendersensible Leser weiß, dass das generische Maskulinum alle Geschlechter (d/m/w) umfasst.

jedoch das Korsett des Veranstaltungstyps „Vorlesung“ entgegen. Allerdings erwies sich dieser Geometrie-Lehrgang trotzdem als sehr nützlich. Abgesehen von der erheblichen Ausweitung fachlicher und fachdidaktischer Möglichkeiten in der Geometrie konnten die Studenten wenigstens in den Übungsgruppen und bei der häuslichen Arbeit das Potenzial der Software eigenständig erfahren, und über viele Jahre hinweg blieb dies für sie die einzige essentielle Konfrontation mit dem Computer über eine Nutzung als Medium hinaus.

Von den zumeist überregionalen Gremien, in denen Hans-Dieter Rinkens tätig war, seien nur einige wesentliche genannt:

- 1975: Mit-Gründer der GDM.
- 1996 bis 2006: Präsident des Deutschen Studentenwerks. In dieser Zeit hat er immer wieder die Stimme für die Belange der Studenten und für mehr soziale Durchlässigkeit des deutschen Hochschulsystems erhoben und sich dabei den Ruf eines Kämpfers für die Chancengleichheit erworben.
- 1996: Gründung des Vereins der Freunde des Klosters Dalheim mit dem Musik- und Theaterfestival "Dalheimer Sommer". Von Anfang an (natürlich) Mitglied im Vorstand, und von 2010 bis 2013 Vorsitzender.
- 2007 bis 2010: Sprecher des gemeinsamen Arbeitskreises "Lehrerbildung" von GDM, DMV und MNU, aus dem die Empfehlungen für Standards für die Lehrerbildung hervorgingen.
- 2008: Wissenschaftlicher Berater der KMK bei der Entwicklung der „ländergemeinsamen inhaltlichen Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung“.
- 2012: Expertenkommission „Lehrerbildung“ des Senats von Berlin.

Für diese Aktivitäten wurde Hans-Dieter Rinkens 2008 von der Ministerin für Schule und Weiterbildung des Landes NW offiziell als „verdiente Persönlichkeit des Schullebens“ ausgezeichnet, und 2015 erhielt er das „Verdienstkreuz am Bande der Bundesrepublik Deutschland“.

In seiner Tätigkeit als Wissenschaftler vereinte Hans-Dieter Rinkens die drei Bereiche Mathematik, Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht auf harmonische Weise. War es in den 1970-er Jahren noch nötig, einen sinnleeren übertriebenen Formalismus im schulischen (und universitären!) Mathematikunterricht (Stichwort: Mengenlehre in der Grundschule) abzumildern, ist das Pendel im Zuge des Kompetenzen-Gedöns inzwischen in die andere Richtung ausgeschlagen, so dass es heutzutage geboten ist, den Unterricht, vor allem in den Sekundarstufen, wieder mit mehr sinnhaftem (!) mathematischen Gehalt anzureichern.

In seinem Schulbuch-Werk *Welt der Zahl* ist dies Hans-Dieter Rinkens im Team mit anderen in vorzüglicher Weise gelungen. Dieses Werk erfreut sich bei Lehrern, Eltern und Schülern großer Beliebtheit, und zwar nicht nur wegen seines ansprechenden Äußeren und methodischer Feinheiten, sondern wegen seiner mathematikdidaktischen Substanz. Während es zunächst nur für die Sekundarstufe I vorgesehen war, wurde es später auf die Primarstufe erweitert. Dazu stellte Hans-Dieter Rinkens auch aufwändige empirische Untersuchungen zu arithmetischen Fähigkeiten und Fertigkeiten von Erstklässlern an mit Stichprobenumfängen, die in unserer Kommunität selten erreicht werden. Neben vielen grundschulbezogenen mathematikdidaktischen Aufsätzen veröffentlichte er auch zahlreiche Arbeiten zu inhaltlichen und institutionellen Fragen der Lehrer(aus)bildung.

Als akademischer Lehrer war Hans-Dieter Rinkens sehr breit aufgestellt. Er war in allen Lehramtsstudiengängen tätig (in NW: Lehrämter an Grundschulen, an Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen, an Gymnasien und Gesamtschulen, an Berufskollegs und für sonderpädagogische Förderung) und hielt zu sämtlichen einschlägigen fachlichen und fachdidaktischen Gebieten Veranstaltungen ab. Er war ein ausgesprochen beliebter Dozent, und er war nicht nur ein rhetorisch und methodisch vorzüglicher Vortragender, so dass man bei ihm die mathematischen und didaktischen Begriffe, Sätze, Beispiele, Beweise wirklich „verstehen“ konnte, sondern er hatte ein anspruchsvolles Niveau und forderte das „Verstehen“ auch ein. Dafür erhielt er – als erster Didaktiker überhaupt – 2001 den Weierstraß-Preis für hervorragende Lehre des durchaus großen Fachbereichs „Mathematik/Informatik“.

Seine Lehrtätigkeit kulminierte in dem Lehrbuch *Die schönste Gleichung aller Zeiten* (2019; mit Katja Krüger), hervorgegangen aus der mehrfach gehaltenen Vorlesung „ π , i , e “. Er hat eben nicht nur die Standard-Themen sehr gut gelehrt, sondern auch immer wieder die ausgetretenen Pfade verlassen und etwas ganz Neues gemacht. Das charakterisiert ihn vielleicht am besten: *Hans-Dieter Rinkens, der Innovator*.

Nach der Emeritierung setzte er seine Lehrtätigkeit fort, nach wie vor mit großem Zuspruch. Das Wintersemester 2021/22 war sein 99. Lehr-Semester. Vom hundertsten hat er abgesehen, da er – wie auch manche Male zuvor – zum rechten Zeitpunkt aufhören wollte.

Peter Bender, Universität Paderborn
E-Mail: bender@math.upb.de

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

- *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg. Tel.: 0821 . 598-2494, reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
- *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: 0641 . 99-32221, katja.lengnink@math.uni-giessen.de
- *Kassenführerin:* Jun.-Prof. Dr. Carina Büscher (geb. Zindel), Universität zu Köln, Institut für Mathematikdidaktik, Gronewaldstraße 2 (Gebäudeteil C, R. 2.310), 50931 Köln Tel: 0221 . 470-6378, carina.buescher@uni-koeln.de
- *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Lehrstuhl IEEM, Vogelpothsweg 87, 44227 Dortmund. Tel. 0231 . 755-7835, daniela.goetze@math.tu-dortmund.de
- *Geschäftsführung:* Franziska Sommerlade, geschaeftsfuehrung@didaktik-der-mathematik.de
- *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
- *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

- Verleger: GDM ■ Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze (Anschrift s. o.) ■ Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze
 - Grafische Gestaltung: Christoph Eyrich, Berlin ■ Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin
- Der Bezugspreis der *GDM-Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

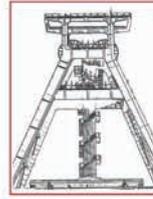
FREDERIK DILLING, DANIEL THURM & INGO WITZKE (Hrsg.)
 DIGITALER MATHEMATIKUNTERRICHT
 IN FORSCHUNG UND PRAXIS
 TAGUNGSBAND DER VERNETZUNGSTAGUNG 2022 IN SIEGEN



F. Dilling, D. Thurm & I. Witzke (Hrsg.): Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis. Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen. Band 3 der Reihe *Mathematiklernen mit digitalen Medien*. Münster: WTM-Verlag 2023. Ca. 280 S., mit ca. 30 farbigen Seiten, DIN A5.
 Print: ISBN 978-3-95987-203-4, 59,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-204-1 Open Access

Jörg Härterich, Michael Kallweit, Katrin Rolka und Thomas Skill (Hrsg.)

HANSE-KOLLOQUIUM ZUR HOCHSCHULDIDAKTIK DER MATHEMATIK 2021
 BEITRÄGE ZUM GLEICHNAMIGEN ONLINE-SYMPOSIUM AM 12. NOVEMBER 2021
 AUS BOCHUM



J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2021. Beiträge zum gleichnamigen Online-Symposium am 12. November 2021 aus Bochum. Band 9 der Reihe *Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik*. Münster 2023. Ca. 300 S., DIN A5.
 Print: ISBN 978-3-95987-263-8, 39,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-264-5, 36,90 €



IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. JAHRESTAGUNG DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK vom 29.08.2022 bis 02.09.2022 in Frankfurt am Main. Münster 2023: WTM-Verlag 2023. DIN A5, ca. 1.600 Seiten.
 Print: ISBN: 978-3-95987-207-2, 119,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987208-9, 108,90 €

Nora Kühme, Nikola Leufer, Katrin Schröder & Jana Thiele

SPRACHE IM MATHEMATIKUNTERRICHT
 BAUSTEINE UND IMPULSE FÜR DIE HOCHSCHULDIDAKTIK



N. Kühme, N. Leufer, K. Schröder & J. Thiele Titel: Sprache im Mathematikunterricht. Bausteine und Impulse für die Hochschuldidaktik. Band 8 der Reihe *Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik*. Münster 2023, ca. 150 S., DIN A5
 Print: ISBN 978-3-95987-233-1, 25,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-234-8, 23,90 €

Matthias Ludwig, Simon Barlovits, Amélia Caldeira and Ana Moura (Editors)
Research On STEM Education in the Digital Age
 Proceedings of the ROSEDA Conference



M. Ludwig, S. Barlovits, A. Caldeira & A. Moura: Research On STEM Education in the Digital Age. Proceedings of the ROSEDA Conference. Band 10 der Reihe *Conference Proceedings in Mathematics Education*. Münster 2022, DIN A5
 Print: ISBN 978-3-95987-251-5, 29,90 €
 Ebook: ISBN 978-3-95987-252-2 Open Access

The Mathematics Education for the Future Project
 Symposium Proceedings

Innovative Teaching Practices
 Held at The Queen's College
 Oxford University, UK
 August 14-18, 2023
 Edited by Janna Morska and Alan Rogerson



J. Morska & A. Rogerson (editors): Symposium Proceedings Innovative Teaching Practices. Held at The Queen's College Oxford University, UK August 14-18, 2023. Band 9 der Reihe *Conference Proceedings in Mathematics Education*. Münster 2023. Erscheint August 2023. DIN A5, ca. 275 S.
 Print: ISBN 978-3-95987-249-2, 39,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-250-8, 36,90 €

GEORG PFEIFER

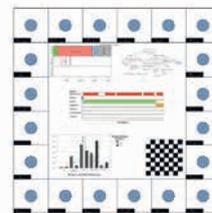


BELIEFS VON LEHRKRÄFTEN
 ZUM EINSATZ VON ARBEITSMITTELN
 IM ARITHMETISCHEN ANFANGSUNTERRICHT
 FÜR KINDER MIT FÖRDERBEDARF
 IM BEREICH LERNEN

G. Pfeiffer: Beliefs von Lehrkräften zum Einsatz von Arbeitsmitteln im arithmetischen Anfangsunterricht für Kinder mit Förderbedarf im Bereich Lernen. Band 6 der Reihe *Diversität und Inklusion im Kontext mathematischer Lehr-Lernprozesse*. Münster: WTM-Verlag 2023. Ca. 560 Seiten, viele davon farbig, 17 cm x 24 cm.
 Print: ISBN 978-3-95987-247-8, 75,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-248-5, 68,90 €

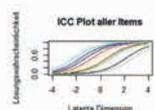
Nina Sturm, Lukas Baumanns und Benjamin Rott (Hrsg.)

Wenn es sein muss,
 dann halt in Distanz
 Tagungsband der Herbsttagung
 des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2021



N. Sturm, L. Baumanns & B. Rott (Hrsg.): Wenn es sein muss, dann halt in Distanz. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen online 2021. Band 19 der Reihe *Ars inveniendi et Dejudicandi*. Münster: WTM-Verlag 2023. Ca. 150 Seiten, DIN A5.
 Print: ISBN 978-3-95987-269-0, 22,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-270-6, 20,90 €

Jana Thiele
 DIE OPTIMIERUNG VON
 ONLINE-MATHEMATIKTESTS
 DURCH ITEMREVISION
 EIN VERFAHREN AUF DER GRUNDLAGE
 DER ANALYSE STATISTISCHER DATEN
 UND FEHLERTYPEN



J. Thiele: Die Optimierung von Online-Mathematiktests durch Itemrevision. Ein Verfahren auf der Grundlage der Analyse statistischer Daten und Fehlertypen. Band 7 der Reihe *Evaluation und Testentwicklung in der Mathematik-Didaktik*. Münster: WTM-Verlag 2023. Ca. 325 S., mit ca. 60 farbigen Seiten, 17 cm x 24 cm
 Print: ISBN 978-3-95987-267-6, 59,90 €
 E-Book: ISBN 978-3-95987-268-3, 54,90 €

Alena Witte



Selbstregulative Zielfokussierungen
 mathematisch potenziell begabter
 Dritt- und ViertklässlerInnen
 Theoretisch-analytische und empirische
 Untersuchungen

A. Witte: Selbstregulative Zielfokussierungen mathematisch potenziell begabter Dritt- und ViertklässlerInnen. Theoretisch-analytische und empirische Untersuchungen. Band 13 der Reihe *Schriften zur mathematischen Begabungsforschung*. Münster: WTM-Verlag 2023. DIN A5, ca. 500 S.
 Print: ISBN 978-3-95987-265-2, 56,90 €
 Ebook: ISBN 978-3-95987-266-9, 51,90 €