MGDM

Mitteilungen der Gesellschaft
für Didaktik der Mathematik

117

SEP
2024

Editorial: Übergänge schaffen

Liebe Lesende,
als frischgebackenes Vorstandsmitglied fühle ich mich ein bisschen wie ein Erstklässler am ersten Schultag – neugierig und voller Tatendrang. Gleichwohl möchte ich diese Gelegenheit Ihrer Aufmerksamkeit nutzen, um mich bei Ihnen für das entgegengebrachte Vertrauen zu bedanken. Ich kann Ihnen versichern, dass ich mein Bestes geben werde, um diesem Vertrauen gerecht zu werden. Ein herzliches Dankeschön gilt auch meiner Vorgängerin Daniela Götze, die mir die Aufgaben der Schriftführung mit Engagement und Sorgfalt übergeben hat. Dabei weiß ich auch die hervorragenden Vorarbeiten aller Vorgängerinnen und Vorgänger[1] sehr zu schätzen. Ihre akkuraten und durchdachten Unterlagen sind für mich eine wahre Inspiration und spornen mich an, mein eigenes Organisationstalent weiterzuentwickeln. Ich bin gespannt darauf, gemeinsam mit Ihnen die nächsten Schritte zu gehen und die Arbeit der Schriftführung fortzuführen.

Seit ich das Amt der Schriftführung übernommen habe, durfte ich viele spannende Einblicke in die Arbeit des Vorstands gewinnen. Lassen Sie mich Ihnen einen kleinen Einblick geben: Da gibt es zum einen die monatlichen Online-Treffen mit dem Vorstand, bei denen wir uns zu den drängendsten Fragen austauschen und gemeinsam Lösungen für Probleme finden. Dazwischen flattert mir allerlei Post ins Haus – oder besser gesagt in mein E-Mail-Postfach. Sei es zu Adressänderungen, Neumitgliedschaften oder auch mal zu einem Austritt, ich bin diesbezüglich immer auf dem Laufenden. Ein wichtiger Partner in meiner Arbeit als Schriftführer ist die DMV/GDM-Geschäftsstelle in Berlin. Dort sorgt Frau Kirstein-Gaekel dafür, dass die eingehende Post zügig eingescannt und an mich weitergeleitet wird, was im Übrigen auch alle Hefte betrifft, die nicht bei der angegebenen Adresse landen. Großer Dank gebührt auch Herrn Eyrich für seine wertvolle Unterstützung und die Gestaltung des Innenlebens der *Mitteilungen*. Er ist ein Bindeglied zwischen Schriftführung, Druckerei und dem Versand. Der heimliche Favorit meines Aufgabenspektrums sind die *Mitteilungen der GDM*, die einen wirklich kreativen Teil der Arbeit ausmachen.

Erinnern Sie sich beispielsweise noch an Ihr erstes MGDM-Cover? War es das mit Thomas Jahnkes Suppenliesel oder doch das mit dem kreativen „GDM"-Schriftzug? Wissen Sie noch, wie viele Stellen der Zahl Π auf dem letzten MGDM-Cover abgebildet waren? 637! Die Titelbilder der MGDM[2] waren über viele Jahre hinweg treue Begleiter, die uns immer wieder ein Lächeln ins Gesicht zauberten. Diese Erinnerungen werden uns noch lange begleiten, doch manchmal ist es an der Zeit, Neues zu wagen. Im Lichte des kreativen Teils meiner Arbeit sowie nach zahlreichen eindrucksvollen Seminarräumen und Vorlesungssälen bekommen die Mitteilungen nun ein frisches Gesicht. Mit dem neuen Cover möchte ich nicht nur neue Erinnerungen schaffen, sondern auch zeigen, dass die MGDM bereit sind für ausführliche Diskussionen und Informationen zur Didaktik der Mathematik. Ihr Beitrag zur Zeitschrift ist also herzlich willkommen.

Zudem ist Ihnen sicherlich auch die neue Bindung unserer Zeitschrift aufgefallen. Dank der Klebebindung können wir ab sofort alle Einreichungen im aktuellen Heft berücksichtigen und müssen keine Beiträge mehr auf spätere Ausgaben verschieben. Ein Gewinn für unsere Autorinnen und Autoren, die im Ausnahmefall ein halbes Jahr auf die Veröffentlichung ihrer Arbeit warten mussten.

Mein Versprechen aus der Mitgliederversammlung einzulösen, bin ich Ihnen auch noch schuldig und wollte, so angekündigt, unseren Blick mit einer Prise Internationalität bereichern. Mit einer ordentlichen Portion Neugier werden wir gemeinsam die mathematikdidaktischen Gesellschaften anderer Länder unter die Lupe nehmen. In jeder Ausgabe erwartet Sie ein Interview mit einer Kollegin oder einem Kollegen anderer, nationaler Fachgesellschaften, die oder der uns von den Herausforderungen des Landes berichten wird. Lassen Sie sich überraschen, was die Fachdisziplinen in anderen Teilen der Welt bewegt und wie sie die Mathematikdidaktik voranbringen. Den Anfang macht Alf Coles aus Großbritannien, der uns die *British Society for Research into Learning Mathematics* näher bringen wird.

Noch ein Hinweis in ganz eigener Sache: Prüfen Sie Ihre Adresse in der Datenbank und melden Änderungen in der Anschrift, damit wir nicht weitere Privatdetektive auf sie ansetzen müssen (den QR-Code scannen oder unter didaktik-der-mathematik.de/login/ einloggen).

Viel Freude an der Lektüre und beste Grüße

Sebastian Schorcht
Schriftführung der GDM

[1] Daniela Götze (2018–2024), Andreas Vohns (2012–2018), Katja Lengnink und Thomas Jahnke (2006–2012), Michael Toepell (2002–2006), Gabriele Kaiser (2000–2002), Michael Neubrand (1994–2000), Lothar Profke (1988–1994), Peter Bender (1982–1988), Hartmut Spiegel (1980–1982), Helmut Siemon (1978–1980) und Hans-Joachim Vollrath (1975–1978). Im Jahr 2006 wurde angedacht, die Schriftführung von der Herausgabe der Mitteilungen zu trennen, was sich in den Jahren danach nicht durchgesetzt hat.

[2] Wer hier noch einmal Erinnerungshilfe benötigt, in der Ausgabe 94 wurden alle Cover von Andreas Vohns abgebildet.

In diesem Heft

Aktivitäten

Arbeitskreise

Tagungsberichte

Umschlagfoto: Shubham Dhage, Unsplash

Grußwort des 1. Vorsitzenden

Als Mathematikdidaktiklehr- und forschende wissen wir natürlich, was der Wert eines Terms ist, aber kennen wir auch die Kosten eines Terms? Diese Frage macht offensichtlich eine Anleihe bei dem berühmten Zitat von Alan Perlis über die Beziehung von Lispprogrammierern zu Werten und Kosten, aber sie soll den Blick gar nicht in die Informatik, sondern in die Bildungsökonomie lenken, einer wunderbaren Wissenschaft, die nicht nur wunderliches Wissen schafft, sondern unseren Blick auf die mathematische Bildung erweitern kann. Die allermeisten von uns dürften nicht wissen, was es kostet, einem Kind schriftliches Multiplizieren beizubringen, oder was es kostet, eine Grundvorstellung zur Division aufzubauen. Mit etwas durch Bildungsökonomie inspirierter Fantasie könnte das aber anders sein. Man könnte die Kosten des Bildungssystems auf jeden Spiegelstrich der Bildungsstandards umlegen. Das wäre interessant, aber nutz- und folgenlos (was einen davon nicht abhalten muss). Praktisch relevant wird es erst, wenn man die Intelligenz der freien Marktwirtschaft nutzt. Ich schlage folgende Umgestaltung des öffentlichen Schulwesens vor, weg von dem praktizierten Sozialismus, hin zu einem modernen markt- und wertorientierten Bildungssystem. Als Vorbild kann das Gesundheitswesen dienen. Lehrerinnen und Lehrer werden künftig also nicht mehr verbeamtet, sondern sie eröffnen als Selbstständige kleine Bildungspraxen. Diese werden unterschiedlich spezialisiert sein, einige bieten nur Mathematikunterricht an, andere gleich ein ganzes Fächerspektrum. Die Zeiten des Unterrichts (in Präsenz oder auch als Videosprechstunde) werden individuell mit den Sprechstundenhilfen abgestimmt. Lehrmittel werden nicht mehr von der Schule bereitgestellt oder in Buchhandlungen angeboten, sondern exklusiv in Lernotheken verkauft, wo studierte Didaktozeuten die Schulbücher ausgeben und in einigen seltenen Fällen auch ihr Können unter Beweis stellen, indem sie selbstständig ein paar Übungsblätter individuell nach Rezept zusammenmischen. Und ganz wichtig: In der Lernothekenumschau erfährt man, mit welchen erprobten Hausmitteln man die falsche Bruchaddition behandeln kann, oder wie man die ersten Anzeichen der Demenz erkennt und verhindern kann, dass das kleine Einmaleins im hohen Alter der Sekundarstufe schon wieder vergessen ist. Selbstverständlich kostet all das Geld. Die selbstständigen Lehrkräfte werden letztlich von den Bildungskassen bezahlt. Davon gibt es gesetzliche und private, die sich teilweise in der Leistung für die Lernenden unterscheiden. Nicht alle Kassen wollen oder können schließlich einen Beweis des Cosinussatzes bezahlen, vor allem aber macht es einen Unterschied für die Lehrkräfte: Privatversicherte erzeugen mehr Bürokratie, sorgen aber für viel mehr Einkommen. Die Korrektur von Klausuren ist bei gesetzlich Versicherten mit der Fallpauschale abgedeckt, bei privat Versicherten bringt jede Klausur 12,99 € und bei schlechter Handschrift noch 5 € Erschwerniszulage. Nebeneffekte eines solchen Systems, wie einen Mangel an Landlehrpraxen bei einem Überangebot in Starnberg werden sich wohl einstellen, lassen sich aber mit Sicherheit beheben, indem man die erfolgreichen Lösungen des Gesundheitswesens kopiert.

Ein solches System wird teuer. So mancher Bildungsversicherte wird gerne noch einen zweiten Beweis einholen, obwohl der erste sein Wissensbedürfnis bereits vollständig behandelt haben sollte. Verschriebene Lehrbücher werden eventuell nicht vollständig gelesen. Anreize zum Sparen müssen also her, und so kann man schon vorhersehen, dass die Politik ein Bonussystem einführen wird. Wer etwa ein ganzes Jahr nur zu den empfohlenen Vorsorgeleistunguntersuchungen geht, sich sonst aber von den Mathematikpraxen fernhält, bekommt ein Teil des Geldes zurück. Noch effizienter – und für uns als Didaktiker*innen noch erkenntnisbringender – wäre allerdings folgendes System: Die Bildungskassen stellen den Lernenden für jedes Schuljahr einen Betrag zur Verfügung, für den sie Unterrichtsstunden und Lehrmaterialien einkaufen können. Nicht verbrauchtes Geld wird am Ende des Jahres zwischen den Lernenden als Anreiz und den Kassen als Einsparung aufgeteilt. Was würde das für den Mathematikunterricht bedeuten, wieviel wäre es den Lernenden und ihren Eltern wert, eine quadratische Gleichung lösen zu können? Könnte es sein, dass es Lernende gibt, die das verfügbare Geld lieber in Informatikstunden zur Programmierung von künstlicher Intelligenz investieren als in die Behandlung der Ebenengleichung in Normalenform? Das Beispiel ist mit Absicht gewählt, weil es für die Lernenden letztlich auf das Gleiche hinausläuft: Ob man über cosine-similarity in der API-Dokumentation von OpenAI liest, oder über das Skalarprodukt im Schulbuch, der Inhalt ist letztlich der Gleiche. In der freien Marktwirtschaft bemisst sich der erzielbare Preis für einen Bildungsinhalt aber nicht nur nach seinen inneren Qualitäten, sondern auch an Verpackung und Werbung. Da müsste die mathematikdidaktische Industrie ihrer Produkte noch besser platzieren. Auf Qeios kann man eine kleine Studie meines Kollegen Etschberger und mir finden, die man im hiesigen Kontext so interpretieren kann, dass die Lernenden wohl nicht viel Geld für die Inhalte der Schulmathematik ausgeben würden, weil sie ihre Relevanz nicht erkennen. Das sollte uns beunruhigen, auch wenn das Beamtentum die meisten von uns vor den Unbilden der freien Marktwirtschaft schützt.

Spätestens jetzt dürften die meisten von Ihnen froh sein, dass das beschriebene Szenario nur die Ausgeburt einer möglicherweise überbordenden Fantasie ist, dass diese Satire nichts mit der Realität zu tun hat. Aber sind Sie da so sicher? Zeit und Geld, so wird oft behauptet, sind schließlich äquivalent, eine Art $E = mc^2$ der Ökonomie. Aktuell müssen sich die Schülerinnen und Schüler nicht überlegen, in welche Bildungsinhalte sie ihr Geld investieren, wohl aber, wo sie ihre Zeit investieren. Kürzlich sagte mir eine Mathematiklehrerin, dass sie keine Hausaufgaben mehr stellt, die würden eh nicht gemacht. So ist das, wenn man ein Produkt Schulmathematik anbietet, das keine Käufer findet. Das bedeutet nicht, dass das Produkt völlig schlecht ist, es bedeutet eben nur, dass es keine Käufer findet. Beispielsweise, weil andere Anbieter am Markt versprechen, dass man mit ihren Rezepterklärungvideos zwar nichts von Mathematik versteht (was man aber eh als irrelevant einschätzt), dass man aber zumindest die nächste Klausur besteht, weil einem gesagt wird, was man nach den mysteriösen Regeln der Mathematik tun „muss“. Das ist freie Marktwirtschaft in der Währung Lebenszeit. Lieber einmal vor der Klausur eine halbe Stunde Videos schauen als wochenlang täglich Hausaufgaben machen. Kein Wunder, dass die liberale Bildungsministerin Stark-Watzinger sich so für Daniel Jung begeistern kann – dessen Unbildungsangebot aktuell erfolgreich Zeit und Geld in die falsche Richtung lenkt.

Wenn Sie das Zitat von Alan Perlis nicht gefunden haben oder nicht verstehen, wie man es interpretieren sollte, biete ich Ihnen gerne meine Video-Sprechstunde an: Als GDM-Mitglied sind Sie mit 29,99 € zuzüglich Mehrwertsteuer pro Viertelstunde dabei. Aber seien Sie versichert, in diesem Heft gibt es kostenlos wertvolle Erkenntnisse.

Reinhard Oldenburg
1. Voritzender der GDM

Mathematische Bildung und Digitalisierung[1]

Strategiepapier der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)

Christine Bescherer, Carina Büscher, Katja Lengnink, Guido Pinkernell, Frank Reinhold, Florian Schacht, Christof Schreiber und Daniel Walter

Einleitung

Der fachdidaktisch reflektierte Einsatz digitaler Medien sowie die Förderung einer digitalen Bildung im Mathematikunterricht ist aus Sicht der GDM ein wesentlicher Faktor für eine erfolgreiche Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft auch im Schulunterricht, der durch fachliches Lernen geprägt ist (GDM, 2017; vgl. dazu auch KMK, 2016b). Eine Reflexion soll aus mathematikdidaktischer Perspektive dabei diejenigen Aspekte umfassen, die für den Aufbau mathematischer Kompetenzen unter Rückgriff auf digitale Medien wesentlich sind. Daher stehen im Zentrum der Auseinandersetzung mit Digitalisierung inhaltsbezogene Bereiche (z. B. Arithmetik, Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik), fachdidaktische Potenziale digitaler Medien und Werkzeuge (z. B. Multimodalität, Dynamisierung, computergestütztes Assessment, etc.), pädagogisch-motivierte fachbezogene Aspekte (z. B. Rolle der Sprache im Mathematikunterricht, Inklusion im Mathematikunterricht) sowie Hardware und Software (z. B. Tablets, Handhelds, Werkzeuge, Lernumgebungen, Apps).

Im Rahmen eines Symposiums zur Digitalisierung, das im März 2021 von der GDM veranstaltet wurde, wurden neben fachbezogenen Aspekten digitaler Werkzeuge beim Mathematiklernen auch Bezüge zu mediendidaktischen Fragen hergestellt, etwa was ein adäquater Beitrag des Fachs Mathematik zur allgemeinen Medienbildung sein kann. Umgekehrt sind Fragen zur Umsetzung des KMK-Kompetenzrahmens (KMK, 2016a), der für alle Fächer relevant ist, für eine wirksame mathematische Bildung zu berücksichtigen. In der aktualisierten Fassung der Bildungsstandards wurde dies als prozessbezogene Kompetenz „Mit Medien mathematisch arbeiten“ (KMK, 2022, S. 7) herausgestellt und ausformuliert. Auch die PISA-Studie 2022 geht auf „Mathematikkompetenz in einer durch Digitalisierung geprägten Welt“ (Lewalter et al., 2023, S. 27) ein.

Zu dem Zusammenspiel von Medienbildung und fachlicher Bildung wurden bereits in einem gemeinsamen Positionspapier der in der GFD organisierten Fachdidaktiken (2018) vier Bereiche identifiziert, in denen eine fachdidaktische Positionierung zur Digitalisierung beim fachlichen Lernen konkretisiert werden kann. In Anlehnung an diese Struktur werden in dem vorliegenden Strategiepapier die Ergebnisse der Diskussionen auf dem GDM-Symposium thematisch in vier Perspektiven gebündelt, die mathematikdidaktisch von besonderer Bedeutung sind. Diese werden durch einen Abschnitt zur Lehrkräftebildung ergänzt, um die zentrale Bedeutung der Professionalisierung von Lehrkräften im Rahmen der Transformation mathematischer Bildung zu verdeutlichen. Zuletzt werden aus den Perspektiven Handlungsfelder für die Mathematikdidaktik formuliert.

In Abschnitt 1, *Fachliche Kompetenzen digital fördern*, beschreiben wir die Entwicklung mathematischer Kompetenzen als zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts. Forschungs- und Entwicklungsbemühungen liefern zwar zahlreiche empirische Erkenntnisse und unterrichtspraktische Impulse, wie die Entwicklung mathematischer Kompetenzen durch digitale Medien bzw. Werkzeuge[2] unterstützt werden kann. Dennoch werden bestehende Konzepte noch nicht flächendeckend in der Praxis umgesetzt. Dies ist ein Grund dafür, dass es systematischer Bemühungen um Fort- und Weiterbildungen zu digitalen Medien in der Lehrkräftebildung bedarf.

Abschnitt 2, *Digitale Kompetenzen fachlich fördern*, widmet sich den Verbindungen der digitalen mit den mathematischen Kompetenzen. Im Fokus stehen hier die Chancen, die das Thematisieren allgemeiner digitaler Kompetenzen für die Entwicklung mathemati-

[1] Das Strategiepapier wurde auf Basis der vielfältigen Anregungen aller Teilnehmer:innen am Digitalisierungs-Symposium der GDM erstellt. Allen Mitwirkenden gilt ein herzlicher Dank.

[2] Je nach den mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Kontexten ist eher der Begriff „digitale Medien“ oder „digitale Werkzeuge“ oder auch „digitale Instrumente“ passend. Zur besseren Lesbarkeit verwenden wir den Sammelbegriff „digitale Medien und Werkzeuge“, wobei andere Begriffe mit gemeint sind.

scher Kompetenzen bieten kann und umgekehrt. Zudem wird die Entwicklung von digitalen Curricula über die Fächer und Klassenstufen hinweg begründet.

In Abschnitt 3, *Neue fachliche Kompetenzen durch Digitalisierung*, wird dargestellt, dass die für die gesellschaftliche Teilhabe notwendigen mathematischen Kompetenzen gerade durch die Digitalisierung Veränderungen unterworfen sind. So stellen insbesondere das statistische Denken sowie der Umgang mit Algorithmen wesentliche Kompetenzanforderungen dar, die es notwendig machen, geltende Curricula für den Mathematikunterricht an aktuelle Entwicklungen anzupassen und zu erweitern.

Abschnitt 4, *Personale digitale Bildung im Fach fördern*, reflektiert fachbezogen, was eine digitale personale Bildung in Bezug auf Mathematik bedeuten kann. Dabei wird das Konzept des digitalen Mündigwerdens – durch und gegenüber Mathematik – dargestellt. Hierzu sind Reflexionen über die Rolle von Mathematik in digital gestützten gesellschaftlichen Entscheidungsprozessen konstitutiv. Darüber hinaus wird das Mündigwerden für das Lernen von Mathematik thematisiert, das die verantwortliche Auswahl von digital verfügbaren Lernmaterialien zum Mathematiklernen im Rahmen personaler Bildung im Blick hat.

In Abschnitt 5, *Lehrkräfteausbildung und -weiterbildung*, wird herausgestellt, dass die Professionalisierung von Lehrkräften in allen vier genannten Bereichen zwar besondere Herausforderungen birgt, gleichzeitig aber eine notwendige Gelingensbedingung für die digitale Transformation des Mathematikunterrichts darstellt.

1 Fachliche Kompetenzen digital fördern

Zur Förderung mathematischer Kompetenzen unter Nutzung digitaler Medien/Werkzeuge liegen substanzielle Forschungsergebnisse vor.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist eine zentrale Aufgabe des schulischen Mathematikunterrichts, die in Deutschland durch schulstufenspezifische Bildungsstandards (bspw. KMK, 2003; 2004; 2022) beschrieben und festgelegt wird. Forschungs- und Entwicklungsbemühungen der vergangenen Jahrzehnte liefern fundierte empirische Erkenntnisse und unterrichtspraktische Impulse, wie die Entwicklung der in den Bildungsstandards festgeschriebenen Kompetenzen durch digitale Medien bzw. Werkzeuge unterstützt werden kann (z. B. Hillmayr et al., 2020, für einen Überblick). Sie weisen technische Gestaltungsmerkmale auf – wie etwa die schnelle und automatisierte Verarbeitung von Daten (Frischemeier & Schnell, 2021) – und zeigen so vielversprechende Potenziale für den Mathematikunterricht: So können beispielsweise synchron dargebotene und computergestützt vernetzte Darstellungen dabei unterstützen, die Verwobenheit verschiedener Darstellungen zu durchdringen (Artigue, 2002; Barzel & Schreiber, 2017; Ainsworth, 2006; Ladel, 2009; Reinhold et al., 2020) und „Darstellungsflüchtigkeit“ entgegenzuwirken (Huhmann, 2013). Dadurch können die Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ (KMK, 2003; 2004) gefördert sowie Schüler:innen zur Begriffsbildung angeregt werden (Duval, 2006; Lindmeier, 2018; Klose, 2022). Darüber hinaus sind digitale Medien zur Auslagerung von Kalkül geeignet, indem Routinetätigkeiten nicht von den Lernenden, sondern durch ein digitales Medium vollzogen werden. Dieses „Auslagerungsprinzip“ (Weigand & Weth, 2002; Rink & Walter, 2020) eröffnet Raum zur unmittelbaren Auseinandersetzung mit anderen, reichhaltigen mathematischen Aktivitäten.

Die Chancen digitaler Medien für das Mathematiklernen sollen verstärkt genutzt werden, wofür weitere Forschungs- und Entwicklungsprojekte notwendig sind.

Obgleich zahlreiche Beispiele vorliegen, die Chancen digitaler Medien zur Ausbildung mathematischer Kompetenzen illustrieren (bspw. Ball et al., 2018; Urff, 2012; Etzold, 2020; pri-ma-medien.de/projekte) werden bestehende Konzepte noch nicht flächendeckend in der Praxis umgesetzt (Drijvers, 2019; Krauthausen, 2020). Ursächlich hierfür können einerseits die im internationalen Vergleich verbesserungswürdigen infrastrukturellen Gegebenheiten an Schulen in Deutschland sein (Eickelmann et al., 2019). Andererseits kann die Transferproblematik auch durch zu geringe fachbezogene Unterstützung für Lehrkräfte im Rahmen der Aus- und Fortbildung erklärt werden. Durch die Kommunikation weiterführender Forschung kann eine höhere Akzeptanz digitaler Konzepte in der Schulpraxis bewirkt werden.

Lehrkräfte müssen auf hybride Lernsettings vorbereitet werden. Dafür muss ein sinnvolles Verhältnis von digitalen zu analogen Lernangeboten nach dem Primat der Fachdidaktik bestimmt werden.

Zur Unterstützung des fachbezogenen Erkenntnistransfers im Kontext digitaler Medien ist eine Stärkung systematischer Bemühungen zur Weiterentwicklung der Lehrkräfteausbildung und -fortbildung (Bönig & Thöne, 2019) erforderlich. Angesichts des immer umfassender werdenden Angebots digitaler Medien und Werkzeuge erscheint eine Metareflexion nötig: Lehrkräfte müssen auf der Grundlage fachdidaktischer Kriterien unter anderem entscheiden können, welche digitalen Lernangebote fachdidaktischen Standards genügen, wofür sie geeignet sein können und wie eine sinnvolle unterrichtliche Orchestrierung in Kombination mit analogen Medien gestaltet werden kann, damit Potenziale digitaler und analoger Medien ausgeschöpft werden können (Clark-Wilson et al., 2014). Dass eine Auswahl digitaler – wie auch analoger – Lernangebote idealerweise kriterial erfolgen soll (Primat der Fachdidaktik), kann als Konsens aufgefasst werden. Darüber hinaus bestehen bei den aktuell verfügbaren digitalen Lernangebote noch Entwicklungsbedarf in Hinblick auf verschiedene inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen (z. B. Daten und Zufall, Kommunizieren, . . .). Überdies ist ein Großteil der digitalen Lernangebote eher auf das automatisierende Üben prozeduraler Fertigkeiten ausgelegt, während Lernangebote, die für die Erarbeitung von Inhalten auch aus fachdidaktischer Sicht geeignet erscheinen, seltener zu finden sind. Dementsprechend sind auch stärkere Bemühungen seitens der Fachdidaktik hinsichtlich der forschungsbasierten Entwicklung weiterer digitaler Lernangebote anzustreben, die insbesondere nicht auf Aspekte des strukturierten Übens, sondern eher auf kognitiv aktivierende Vermittlung bisher unbekannter Inhalte fokussieren (vgl. Leuders, 2019).

2 Digitale Kompetenzen fachlich fördern

Die überfachliche Entwicklung allgemeiner digitaler Kompetenzen findet auch im Mathematikunterricht statt. Dafür sind zeitliche und personale Ressourcen sowie digitale Curricula notwendig.

Zur Frage, ob es ein eigenes Schulfach zur „Entwicklung digitaler Kompetenzen“ geben soll (Tulodziecki, 2016; Egger, 2018) gibt es derzeit keinen Konsens, sodass den Schüler:innen Lerngelegenheiten angeboten werden müssen, ihre digitalen Kompetenzen (Eickelmann et al., 2019; Vuorikari et al., 2022) im Rahmen des bestehenden Fachunterrichts zu entwickeln (KMK, 2016b; Brinda et al., 2020). Dies soll konsequent und über alle Schuljahre hinweg geplant werden. Um Dopplungen oder auch Lücken zu vermeiden, bedarf es hierzu klarer Absprachen und entsprechender „digitaler Curricula“ (Brinda et al., 2020) also einer Standardisierung von Inhalten, deren Abfolge und der jeweiligen Zuständigkeiten für das Unterrichten. Je nach Vorgaben kann diese Standardisierung auf unterschiedlichen Ebenen erfolgen, etwa auf Bundes-, Landes-, Schulbezirks- oder Schulebene. Da der Unterrichtsanteil eines Hauptfaches wie Mathematik vergleichsweise hoch ist, wird auch der Anteil des Fachs am digitalen Curriculum entsprechend ausfallen. Das impliziert nicht nur die Einplanung von Unterrichtszeit, sondern auch eine entsprechende Professionalisierung der Mathematiklehrkräfte.

Die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen kann als Gewinn für allgemeine digitale Kompetenzen verstanden werden – und umgekehrt.

Während ein übergreifendes Konzept für die Verankerung allgemeiner digitaler Kompetenzen im Mathematikunterricht noch entwickelt werden muss (Tondeur et al., 2007), sieht man solche in einzelnen Bundesländern schon curricular umgesetzt. Der „Rahmenplan Digitale Kompetenzen“ von Mecklenburg-Vorpommern zum Beispiel benennt zu einzelnen Kompetenzformulierungen der KMK sogenannte „Leitfächer“ und macht fachspezifische Themenvorschläge zur Adressierung der einzelnen Kompetenz im Fachunterricht (Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern, 2018). Über solche pragmatischen Zuordnungen hinaus birgt der Versuch, das fachliche Lernen für die Ausbildung digitaler Kompetenzen zu aktivieren auch Potenziale für eine engere Verknüpfung der digitalen mit den prozessbezogenen Kompetenzen der Fächer (vgl. Frederking & Romeike, 2022). Insbesondere für das Lernen von Mathematik kann das wie folgt konkretisiert werden (vgl. Pinkernell et al., 2022):

Die Kompetenzbereiche „Produzieren und Präsentieren“ sowie „Suchen, Verarbeiten und Aufbewahren“ des KMK-Kompetenzrahmens (KMK, 2016a) zeigen beispielsweise Überschneidungen zum „Kommunizieren“ unter den mathematischen Prozesskompetenzen. Hier geht es um das Vermitteln und Verarbeiten von Informationen, wobei der KMK-Kompetenzrahmen die Arbeit mit Texten hinsichtlich ihrer technischen, rechtlichen und gestalterischen Aspekte im Allgemeinen ausdifferenziert, in den Bildungsstandards Mathematik es dagegen um die Rezeption, Bewertung und Produktion von Texten mit fachlichem Anspruch geht. Diese Perspektiven ergänzen sich, und zwar auch im Interesse eines modernen Mathematikunterrichts, in dem die Informationsverarbeitung eine wachsende Rolle spielt.

Auch der Begriff „Problemlösen“ wird in beiden Kompetenzrahmen genannt. Während aber die mathematische Prozesskompetenz der Bildungsstandards Mathematik den Fokus auf die Anwendung ausgewählter Heurismen legt, verweist der KMK-Kompetenzrahmen zu digitalen Kompetenzen auf die kreative Anwendung und bedarfsgerechten Einsatz von digitalen Werkzeugen. Bemerkenswert ist dabei, dass es die mediendidaktische Perspektive ist, die an den kreativen Kern des mathematischen Problemlösens erinnert.

Das „Kooperieren“ ergänzt die digitale Kompetenz des Kommunizierens und hebt so das kollaborative Potenzial der Auseinandersetzung mit digitalen Informationen heraus. In den mathematischen Kompetenzen für den mittleren Bildungsabschluss findet das Kooperieren dagegen keine explizite Erwähnung – obgleich es in der methodischen Umsetzung des Mathematikunterrichts häufig vorkommt. Über kollaborative Sozialformen hinaus sind es die echten, weil herausfordernden Problemlösesituationen, die zur konstruktiven Zusammenarbeit aller Beteiligten motivieren können. Denn es hat sich gezeigt, dass gerade hier die individuell präferierten Heurismen und Werkzeuge, darunter Papier und Bleistift, digitale Multirepräsentationswerkzeuge, CAS und Onlinequellen, mit dem Ziel einer kollaborativen Problemlösung zusammengeführt werden können (vgl. Santos-Trigo et al., 2016)

3 Neue fachliche Kompetenzen durch Digitalisierung

Anforderungen an mathematische Kompetenzen verändern sich beständig – insbesondere auch durch die Digitalisierung.

Versteht man mathematische Grundbildung als ein Ziel des Mathematikunterrichts, so soll diese Schüler:innen in die Lage versetzen, Mathematik in unterschiedlichen Situationen erfolgreich einzusetzen. Darunter fallen auch die Beschreibung und das Verstehen ihrer Lebenswelt – einschließlich gesellschaftlich relevanter Themen – unter mathematischen Gesichtspunkten (OECD, 2019; Winter, 1996). Diese Lebenswelt durchläuft auch durch die Digitalisierung in vielfältigen Kontexten eine Veränderung, sodass die bestehenden Curricula dahingehend geprüft werden sollen, ob sie dem Anspruch der mathematischen Grundbildung genügen (Pinkernell et al., 2022). Aktuell können die folgenden drei Themenbereiche als relevant eingeschätzt werden.

Statistisches Denken muss digital verstanden werden, wenn es als Kernkompetenz des 21. Jahrhunderts gesehen werden soll.

Mit Blick auf „Daten und Zufall" stellt das *statistische Denken* – als Kernkompetenz für ein Leben in einer digitalisierten Welt – ein Beispiel dar, bei dem aktuelle Curricula und Schulbücher die Analyse echter Daten mit digitalen Medien bereits anleiten. Dabei orientieren sich viele Tätigkeiten an Empfehlungen der deutschsprachigen und internationalen Mathematikdidaktik (Ben-Zvi & Makar, 2016; Eichler & Vogel, 2013; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Krüger et al., 2015; Biehler, 2014). Sie fokussieren auf die Vermittlung von konzeptuellem gegenüber prozeduralem Wissen, auf die Integration realer und nicht nur realistisch anmutender Daten sowie auf die Nutzung von digitalen Medien zur automatisierten Berechnung und Erstellung von Grafiken. Insgesamt muss hier jedoch weiterhin eine konsequente Umsetzung im Unterricht eingefordert werden.

Die Befassung mit mathematischen Algorithmen kann die Idee des Algorithmus im Sinne des Computational Thinking *stärker herausarbeiten.*

Die „Leitidee Algorithmus", die bereits in den Kerncurricula für die Sekundarstufe II enthalten ist (KMK, 2015), sollte mit ihrem Grundanliegen auch in die Sekundarstufe I und ggf. auch für die Primarstufe durchdacht werden. So sind Algorithmen im Mathematikunterricht zwar präsent und prägen in Form von Formeln und Verfahren das Bild mathematischer Rechenfertigkeiten, sie werden jedoch in der Regel nicht mit Blick auf die Idee des Algorithmisierens thematisiert. Dies sollte im Sinne des *Computational Thinking* (Eickelmann et al., 2019; Hickmott et al., 2018; Wing, 2006; Barcelos et al., 2018) überdacht werden, sodass gängige Algorithmen, wie etwa ausgewählte schriftliche Rechenverfahren in der Primarstufe oder das Heron-Verfahren in den Sekundarstufen in Hinblick auf die Automatisierung und prinzipielle Lauffähigkeit im Computer analysiert und verstanden werden (Eickelmann et al., 2019; Ziegenbalg, 2015; Schwätzer, 2018)

Auch mathematische Modellierungen zur Lösung realer Probleme eignen sich ggf. für eine algorithmische Beschreibung, wie etwa Verschlüsselungsverfahren der Kryptographie, was Einzug in den Mathematikunterricht finden kann. In diesem Zusammenhang ist auch ein interdisziplinärer und fächerübergreifender Mathematik- und Informatikunterricht denkbar (Hubwieser, 2007; Kortenkamp & Lambert, 2015).

Die Kombination von Daten und Algorithmen (Data Science) sollte im Mathematikunterricht thematisiert werden, da sie grundlegend für das Verständnis von Machine Learning *und Künstlicher Intelligenz ist.*

Ein Merkmal unserer heutigen – auf Informationen und ihrer Verarbeitung beruhenden – Gesellschaft ist der Einsatz von Algorithmen und algorithmischen Entscheidungssystemen, die auf *Big Data* basieren. Ein fundierter und kritischer Umgang mit diesen Themen – insbesondere auch vor dem Hintergrund aktueller Diskussionen um Tools wie ChatGPT – stellt damit eine aktuelle Herausforderung für Bürger:innen dar. Um dies im Sinne mathematischer Grundbildung prinzipiell verstehbar und damit auch kritisierbar zu machen, sollte der Mathematikunterricht die konzeptuellen Grundlagen damit verbundener und relevanter aktueller Themen (z. B. *machine learning* und *artificial intelligence*) behandeln. Hierfür erscheint eine Kompetenzentwicklung in der Kombination aus den Bereichen Daten und Datenanalyse (z. B. Clusteranalyse und Entscheidungsbäume), Wahrscheinlichkeit und Algorithmen notwendig (Biehler & Fleischer, 2021; Frischemeier et al., 2021; Kepner & Jananthan, 2018).

4 Personale digitale Bildung im Fach fördern

Der Mathematikunterricht sollte zum Mündigwerden durch *und* gegenüber *Mathematik auch unter Beachtung digitaler Perspektiven beitragen.*

In einer zunehmend mathematisch geprägten und gestalteten Welt werden zentrale gesellschaftliche Prozesse durch mathematische Verfahren festgelegt und gestaltet (z. B. Sitzverteilungsverfahren, Besteuerung, Rankings, u. v. m.). Hierbei können digitale mathematische Zugänge dazu beitragen, die dahinterliegenden Entscheidungsmöglichkeiten und Spielräume offen zu legen und diskutierbar zu machen (OECD, 2018b; Pohlkamp, 2021). Dies betrifft insbesondere auch das Verstehen algorithmischer Entscheidungssysteme, deren mathematische Grundlagen sowohl Algorithmen als auch Datenanalyseverfahren umfassen und die in vielen gesellschaftlichen Entscheidungsprozessen vorliegen, bei denen die Unterstützung künstlicher Intelligenz eingesetzt wird. So kann zu einem digitalen Mündigwerden *durch* Mathematik beigetragen werden.

Dazu ergänzend sind Aspekte des digitalen Mündigwerdens *gegenüber* Mathematik verstärkt relevant. In weiten Teilen des täglichen Lebens sehen sich Menschen mit automatisiert und computergestützt berechneten Handlungsempfehlungen konfrontiert. Die scheinbare Objektivität von Mathematik muss in diesem Zusammenhang thematisiert und kritisch reflektiert werden, um Grenzen der Beschreibung, Modellierung und Operationalisierung komplexer Zusammenhänge abschätzen zu können. Hierzu gehört insbesondere der im Rahmen gesellschaftlicher Transformationen zunehmende Einsatz von KI in vielen Lebensbereichen, für den Lernende und Lehrkräfte sensibilisiert werden sollten und dem sie nur durch mathematische Bildung kompetent begegnen können. Dies betrifft weitreichende und für die Teilhabe an unserer Gesellschaft relevante Aspekte, z. B. Profiling oder Vergabesysteme, die im Sinne einer Algorithmen-Ethik kritisch diskutiert werden sollen (Vieth & Wagner, 2017; Zweig, 2019, Stephan et al., 2021).

Der Mathematikunterricht sollte zum Mündigwerden für das Lernen von *Mathematik auch unter Beachtung digitaler Perspektiven beitragen.*

Die große Auswahl und zunehmende Verfügbarkeit von institutionell unabhängigen digitalen Lernangeboten auch im Fach Mathematik machen ein *digitales Mündigwerden für das Mathematiklernen* nötig – aber auch ein Mündigwerden *gegenüber dem Mathematikunterricht* möglich, der sich damit als konkurrenzfähig darstellen muss. Insbesondere „Open Educational Ressources“ auf verschiedensten Plattformen (z. B. Serlo, Wikipedia und YouTube) bieten die Chance für kostengünstige Zugänge zur Mathematik, die klassische Oligopole bei der Bereitstellung und Verbreitung von Bildungsmedien ergänzen (vgl. KMK, 2016b; Balcke & Bersch, 2019). Damit wird die Verfügbarkeit von Informationen zu mathematischen Inhalten zunehmend breiter und ist insbesondere nicht mehr nur auf den Unterricht beschränkt (Rat für kulturelle Bildung, 2018). Der Mathematikunterricht sollte die Schüler:innen daher dazu befähigen, ihren eigenen Lernprozess eigenständig und kompetent zu gestalten, indem er die Verwendung digitaler Medien und Werkzeuge thematisiert und so zum kompetenten und kriteriengeleiteten Auswählen geeigneter Tools (wie etwa Lernvideos, Apps, Werkzeuge, z. B. Korntreff & Prediger, 2021; Klinger & Walter, 2022) befähigt. Hier sind die in Abschnitt 1 beschriebenen digitalen Medien von Bedeutung, wie etwa Darstellungen und Darstellungswechsel im Rahmen dynamischer Geometriesoftware oder Datenexploration mithilfe geeigneter Tools (Biehler, Frischemeier & Podworny, 2016).

5 Lehrkräfteausbildung und -weiterbildung

Veränderungen im Mathematikunterricht durch Digitalisierung betreffen besonders auch die Professionalisierung von Lehrkräften.

Das Aufgabenspektrum von Lehrkräften erweitert sich mit Blick auf die oben ausgeführten vier Abschnitte erheblich. „Damit das Lehren und Lernen mit digitalen Medien fachlich sinnvoll und zielorientiert realisiert werden kann“ (KMK, 2016b, S. 29) spielen für die Professionalisierung von Lehrkräften vor allem die folgenden Aspekte eine wichtige Rolle:

- Eine zeitgemäße Lehrkräfteprofessionalisierung muss fachdidaktische Standards und Kriterien für die Auswahl und den unterrichtlichen Einsatz digitaler Lernangebote thematisieren und dabei das Zusammenspiel von analogen und digitalen Medien kriterial und nach dem Primat der Fachdidaktik reflektieren.
- Zudem müssen Lehrkräfte auf die Möglichkeiten zur Vermittlung digitaler Kompetenzen im Fach Mathematik und die Erarbeitung von fächerübergreifenden Schulcurricula zu digitalen Kompetenzen vorbereitet werden.
- Mit Blick auf die Digitalisierung müssen Lehrkräfte fachlich und didaktisch auf sich verändernde Inhalte und Leitideen im Lehrplan vorbereitet werden. Dies betrifft insbesondere die Bereiche Daten, Algorithmen und Data Science. Hierfür müssen fachbezogene Konzepte für die Lehrkräfteprofessionalisierung an den Universitäten und in Weiterbildungen ausgearbeitet, in den Bildungsgängen umgesetzt

sowie auf dieser Basis neue Unterrichtskonzepte mit Lehrkräften gemeinsam entwickelt und unterrichtlich erprobt werden.

- Lehrkräfte müssen für die veränderte gesellschaftliche Realität durch Digitalisierung sensibilisiert werden. Sie müssen die Notwendigkeit zur personalen Bildung mit dem Bildungsziel der (digitalen) Mündigkeit reflektieren und Ansätze kennen lernen, diese unterrichtlich umzusetzen.

Die vier beschriebenen Aspekte bedürfen der fachdidaktischen Forschung und Entwicklung und sind in Kooperation mit der Unterrichtspraxis und der zweiten Ausbildungsphase (weiter) zu entwickeln. Beispiele für Konzepte und Umsetzungen lassen sich vielfach in der Literatur finden (Bertelsmann Stiftung et al., 2018; Ebers et al., 2019; Walter & Rink, 2019; Eickelmann & Drossel, 2020; Arnold, 2020; Salle, Schumacher & Hattermann, 2021).

6 Handlungsfelder

In der Auseinandersetzung mit den obigen Perspektiven im Bezug zur Digitalisierung ergeben sich die folgenden Handlungsfelder für die Mathematikdidaktik:

- *Entwicklung und Erforschung von Lernumgebungen* mit digitalen und analogen Medien zum Aufbau (neuer) fachlicher, digitaler und personaler Kompetenzen.
- *Fachdidaktische Begleitung einer adäquaten ressourciellen Ausstattung von Schulen und Beteiligung bei der Entwicklung von fächerverbindenden Curricula zu digitaler Bildung*.
- *Entwicklung von Empfehlungen zur Überarbeitung bestehender Curricula* für eine zeitgemäße mathematische Bildung auch und insbesondere im Kontext der Digitalisierung.
- *Lehrkräfteprofessionalisierung und -fortbildung* in Hinblick auf den mathematikdidaktisch fundierten Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge beim Mathematiklernen. und auch in Hinblick auf die Förderung neuer mathematischer, digitaler und personaler Kompetenzen

Insbesondere ist zu betonen, dass in der Mathematikdidaktik international wie national zu vielen der genannten Aspekte Ergebnisse vorliegen, aber auch Desiderate formuliert werden können. Somit kann die Mathematikdidaktik ihren Beitrag zum stets fortschreitenden Forschungs- und Entwicklungsprozess im Kontext der digitalen Transformation leisten.

Literatur

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, *16*(3), 183–198.

Arnold, P. (2020). *Digitalisierung und Lehrkräftefortbildung*. Logos, Berlin.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274.

Balcke, D., & Bersch, S. (2019). Mathematik lernen mit Open Educational Resources (OER): Exemplarische Analysen von Angeboten der Serlo-Lernplattform. In E. Matthes, T. Heiland, & A. von Proff (Hrsg.), *Open Educational Resources (OER) im Lichte des Augsburger Analyse- und Evaluationsrasters (AAER): Interdisziplinäre Perspektiven und Anregungen für die Lehramtsausbildung und Schulpraxis* (S. 93–107). Bad Heilbrunn.

Ball, L., Drijvers, P., Ladel, S., Siller, H. S., Tabach, M., & Vale, C. (Hrsg.) (2018). *Uses of technology in primary and secondary mathematics education: Tools, topics and trends.* Springer.

Barcelos, T. S., Munoz, R., Villarroel, R., Merino, E., & Silveira, I. F. (2018). Mathematics learning through computational thinking activities: A systematic literature review. *Journal of Universal Computer Science*, *24*(7), 815–845.

Barzel, B., & Schreiber, C. (2017). Digitale Medien im Unterricht. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter, & C. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 200–215). Klett/Kallmeyer.

Ben-Zvi, D., & Makar, K. (Hrsg.). (2016). *The teaching and learning of statistics.* Springer International Publishing. DOI:10.1007/978-3-319-23470-0

Bertelsmann Stiftung, CHE Centrum für Hochschulentwicklung GMBH, Deutsche Telekomstiftung & Stifterverband für die deutsche Wirtschaft (Hrsg.) (2018). *Lehramtsstudium in der digitalen Welt. Professionelle Vorbereitung auf den Unterricht mit digitalen Medien?!* Online unter www.monitor-lehrerbildung.de/web/.content/Downloads/Monitor-Lehrerbildung_Broschuere_Lehramtsstudium-in-der-digitalen-Welt.pdf

Biehler, R. (2014). Leitidee Daten und Zufall – fundamentale Ideen aus Sicht der Statistik. In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sekundarstufe I und II* (S. 69–92). Klett Kallmeyer.

Biehler, R., & Fleischer, Y. (2021). Introducing students to machine learning with decision trees using CODAP and Jupyter Notebooks. *Teaching Statistics*, *43*(1), 133–142. DOI:10.1111/test.12279

Biehler, R., Frischemeier, D., & Podworny, S. (2016). Stochastische Simulationen mit TinkerPlots – Von einfachen Zufallsexperimenten zum informellen Hypothesentesten. *Stochastik in der Schule, 36*(1), 22–27.

Bönig, D., & Thöne, B. (2019). Digitale Medien in der universitären Lehramtsausbildung – konzeptionelle Überlegungen und Umsetzungsmöglichkeiten. In D. Walter, & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik* (S. 37–49). WTM-Verlag. DOI:10.37626/GA9783959871204.0.02

Brinda, T., Brüggen, N., Diethelm, I., Knaus, T., Kommer, S., Kopf, C., Missomelius, P., Leschke, R., Tilemann, F., & Weich, A. (2020). Frankfurt-Dreieck zur Bildung in der digital vernetzten Welt. Ein interdisziplinäres Modell. In T. Knaus, & O. Merz (Hrsg.), *Schnittstellen und Interfaces. Digitaler Wandel in Bildungseinrichtungen* (S. 157–167). kopaed. DOI:10.25656/01:22117

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (Hrsg.). (2014). *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development.* Springer.

Drijvers, P. (2019). Head in the clouds, feet on the ground – A realistic view on using digital tools in mathematics education. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 163–176). Springer. DOI:10.1007/978-3-658-24292-3_12

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Ebers, P., Peters-Dasdemir, J., Thurm, D., & Wagener, O. (2019). Der Herausforderung der Digitalisierung im Mathematikunterricht in Fortbildungen begegnen. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 281–294). Springer. DOI:10.1007/978-3-658-24292-3_20

Eichler, A., & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall*. Springer. DOI:10.1007/978-3-658-00118-6

Eickelmann, B., Bos, W., Gerick, J., Goldhammer, F., Schaumburg, H., Schwippert, K., Senkbeil, M., & Vahrenhold, J. (2019). *ICILS 2018 #Deutschland: Computer- und informationsbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im zweiten internationalen Vergleich und Kompetenzen im Bereich Computational Thinking*. Waxmann.

Eickelmann, B., & Drossel, K. (2020). *Lehrer* innenbildung und Digitalisierung-Konzepte und Entwicklungsperspektiven.* Verlag Barbara Budrich.

Egger, G. (2018). Digitale Grundbildung und Mathematik: Ergänzung, Unterstützung oder Konkurrenz. *R&E-SOURCE*, journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/565

Etzold, H. (2020). Klötzchen (6.0) [App]. apps.apple.com/de/app/kl%C3%B6tzchen/id1027746349, Erstveröffentlichung: 2015.

Frederking, V., & Romeike, R. (Hrsg.) (2022). *Fachliche Bildung in der digitalen Welt - Digitalisierung, Big Data und KI im Forschungsfokus von 15 Fachdidaktiken.* Waxmann.

Frischemeier, D., Biehler, R., Podworny, S., & Budde, L. (2021). A first introduction to data science education in secondary schools: Teaching and learning about data exploration with CODAP using survey data. *Teaching Statistics, 43*(S1), 182–189. DOI:10.1111/test.12283

Frischemeier, D., & Schnell, S. (2021). Statistical investigations in primary school – the role of contextual expectations for data analysis. *Mathematics Education Research Journal, 35*, 217–242. DOI:10.1007/s13394-021-00396-5

GDM (2017). *Die Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft: Eine Chance für den fachdidaktisch reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht.* madipedia.de/images/6/6c/BMBF-KMK-Bildungsoffensive_PositionspapierGDM.pdf

GFD (2018). *Fachliche Bildung in der digitalen Welt. Positionspapier der Gesellschaft für Fachdidaktik*. www.fachdidaktik.org/wp-content/uploads/2018/07/GFDPositionspapier-Fachliche-Bildung-in-der-digitalen-Welt-2018-FINAL-HP-Version.pdf

Hickmott, D., Prieto-Rodriguez, E., & Holmes, K. (2018). A scoping review of studies on computational thinking in K–12 mathematics classrooms. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*(1), 48–69. DOI:10.1007/s40751-017-0038-8

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education*, *(153)*, 103897. DOI:10.1016/j.compedu.2020.103897

Hubwieser, P. (2007). *Didaktik der Informatik*. Springer. DOI:10.1007/978-3-540-72478-0

Huhmann, T. (2013). *Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung.* Springer.

Kepner, J., & Jananthan, H. (2018). *Mathematics of big data*. MIT Lincoln Laboratory Series.

Klinger, M., & Walter, D. (2022). How users review frequently used apps and videos containing mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *29*(1), 25–35.

Klose, R. (2022). *Mathematische Begriffsbildung – PriMaPodcasts im bilingualen Kontext.* Waxmann.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Luchterhand.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Luchterhand.

KMK (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Wolters Kluwer.

KMK (2016a). *Kompetenzen in der digitalen Welt*. Beschluss der KMK vom 8. 12. 2016. URL: www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/2016_12_08-KMK-Kompetenzen-in-der-digitalen-Welt.pdf (Abruf am 27. 1. 2021)

KMK (2016b). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz.* www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf (Abruf am 27. 1. 2021)

KMK (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik: Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. Beschluss der KMK i. d. F. vom 23. 6. 2022. www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf (Abruf am 8. 12. 2023)

Korntreff, S., & Prediger, S. (2021). Verstehensangebote von YouTube-Erklärvideos – Konzeptualisierung und Analyse am Beispiel algebraischer Konzepte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*, 281–310. DOI:10.1007/s13138-021-00190-7

Kortenkamp, U., & Lambert, A. (2015). Wenn …, dann … bis … Algorithmisches Denken (nicht nur) im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, *188*, 2–9.

Krauthausen, G. (2012): *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule.* Springer Spektrum.

Krauthausen, G. (2020). Tablets ante portas – Innovation oder/und Déjà-vu. In B. Brandt, L. K. Bröll, & H. Dausend (Hrsg.), *Digitales Lernen in der Grundschule II – Aktuelle Trends in Forschung und Praxis* (S. 40–59). Waxmann.

Krüger, K., Sill, H. D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer.

Ladel, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz: zur Bedeutung für das Mathematiklernen im Anfangsunterricht.* Kovač.

Leuders, T. (2019). Mathematik erkunden und verstehen mit unterrichtsintegrierten Lern-Apps – Fachdidaktische Kriterien für die kognitive Aktivierung und Verstehensunterstützung. In A. Büchter (Hrsg.), *Mathematik wirklich verstehen: Mit digitalen Werkzeugen zeitgemäßen Mathematikunterricht erlebbar machen* (S. 219–231). Springer.

Lewalter, D., Diedrich, J., Goldhammer, F., Köller, O., & Reiss, K. (Hrsg.). (2023). *PISA 2022. Analyse der Bildungsergebnisse in Deutschland.* Waxmann.

Lindmeier, A. (2018). Digitale Medien im Mathematikunterricht: Welche Rolle spielt die Fachdidaktik im Innovationsprozess? In G. Pinkernell, & F. Schacht (Hrsg.), *Digitales Lernen im Mathematikunterricht* (S. 1–14). Franzbecker.

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern (2018). *Rahmenplan Digitale Kompetenzen*. www.bildung-mv.de/schule-digital/rahmenplan-digitale-kompetenzen/

OECD (2019). PISA 2018 *Assessment and analytical framework.* OECD Publishing. DOI:10.1787/b25efab8-en

OECD (2018a). *PISA 2021 mathematics framework (second draft).* OECD Publishing.

OECD (2018b). *The future of education and skills: Education 2030. The future we want.* OECD Publishing.

Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., & Walter, D. (2022). Mathematische Bildung in der digitalen Welt. Die digitale Transformation im Fokus der Mathematikdidaktik. In V. Frederking, & R. Romeike (Hrsg.), *Fachliche Bildung in der digitalen Welt*. Waxmann.

Pohlkamp, S. (2021). *Normative Modellierung im Mathematikunterricht: Bildungspotenzial, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen.* Universität Aachen. DOI:0.18154/RWTH-2021-08443

Rat für Kulturelle Bildung (2018). *Jugend/youtube/kulturelle Bildung: Repräsentative Umfrage unter 12- bis 19-Jährigen zur Nutzung kultureller Bildungsangebote an digitalen Kulturorten (Horizonte 2019).* www.bosch-stiftung.de/sites/default/files/publications/pdf/2019-06/Studie_Jugend%20Youtube%20Kulturelle%20Bildung%202019.pdf

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2020). Learning fractions with and without educational technology: What matters for high-achieving and low-achieving students? *Learning and Instruction*, (*65*), 101264. DOI:10.1016/j.learninstruc.2019.101264

Rink, R., & Walter, D. (2020). *Digitale Medien im Matheunterricht – Ideen für die Grundschule.* Cornelsen.

Salle, A., Schumacher, S., & Hattermann, M. (2021). *Mathematiklernen* mit *digitalen Medien* an der *Hochschule.* Springer.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM*, *48*(6), 827–842. DOI:10/gf52sd

Schwätzer, U. (2018). *Programmieren in der Grundschule: Erfahrungen – Scratch-Codes – Tipps & Tricks.* CreateSpace Independent Publishing Platform.

Stephan, M., Register, J., Reinke, L., Robinson, C., Pugalenthi, P., & Pugalee, D. (2021). People use math as a weapon: Critical mathematics consciousness in the time of COVID-19. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(3), 513–532. DOI:10.1007/s10649-021-10062-z

Tondeur, J., van Braak, J., & Valcke, M. (2007). Curricula and the use of ICT in education: Two worlds apart? *British Journal of Educational Technology*, *38*(6), 962–976.

Tulodziecki, G. (2016). Konkurrenz oder Kooperation? Zur Entwicklung des Verhältnisses von Medienbildung und informatischer Bildung. *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung*, *25*, 7–25.

Urff, C. (2012). *Das interaktive Rechendreieck*. www.lernsoftware-mathematik.de

Vieth, K., & Wagner, B. (2017). *Teilhabe, ausgerechnet. Wie algorithmische Prozesse Teilhabechancen beeinflussen können*. Bertelsmann-Stiftung. DOI:10.11586/2017027

Vuorikari, R., Kluzer, S., & Punie, Y. (2022). DigComp 2.2: The digital competence framework for citizens – With new examples of knowledge, skills and attitudes. *JRC Publications Repository,* 128415. DOI:10.2760/115376

Walter, D., & Rink, R. (Hrsg.). (2019). *Digitale Medien in der Lehrerbildung Mathematik. Konzeptionelles und Beispiele für die Primarstufe* (Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe, Bd. 5). WTM-Verlag.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35. DOI:10.1145/1118178.1118215

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der DMV*, *4*(2). DOI:10.1515/dmvm-1996-0214

Weigand, H.-G., & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht*. Spektrum Akademischer Verlag.

Ziegenbalg, J. (2015). Algorithmik. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 303–329). Springer. DOI:10.1007/978-3-642-35119-8_11

Zweig, K. (2019). *Ein Algorithmus hat kein Taktgefühl. Wo künstliche Intelligenz sich irrt, warum uns das betrifft und was wir dagegen tun können.* Heyne.

Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
bescherer@ph-ludwigsburg.de

Carina Büscher (geb. Zindel), Universität zu Köln
carina.buescher@uni-koeln.de

Katja Lengnink, Universität Gießen
katja.lengnink@math.uni-giessen.de

Guido Pinkernell, Pädagogische Hochschule Heidelberg
pinkernell@ph-heidelberg.de

Frank Reinhold, Pädagogische Hochschule Freiburg
frank.reinhold@ph-freiburg.de

Florian Schacht, Universität Duisburg-Essen
florian.schacht@uni-due.de

Christof Schreiber, Universität Gießen
christof.schreiber@math.uni-giessen.de

Daniel Walter, Technische Universität Dortmund
daniel.walter@math.tu-dortmund.de

Damit rechnet niemand!

Sechs Leitgedanken zu Implikationen und Forschungsbedarfen zu KI-Technologien im Mathematikunterricht

Nils Buchholtz, Sebastian Schorcht, Lukas Baumanns, Judith Huget, Norbert Noster, Benjamin Rott, Hans-Stefan Siller und Daniel Sommerhoff

Aktuelle Diskussionen zum Thema Künstliche Intelligenz (KI) sind auch für das schulische Lehren und Lernen von Bedeutung, und somit auch aus dem Mathematikunterricht bzw. dem Lehren und Lernen von Mathematik nicht mehr wegzudenken. Die mathematikdidaktische Forschungscommunity ist bereits aktiv geworden, wie beispielsweise das Diskussionsforum auf der GDM-Tagung im März 2024 (Sommerhoff et al. 2024) zeigte. Im Juni fand zudem an der Universität Würzburg ein KI-Vernetzungstreffen mit Teilen der wissenschaftlichen Community statt.[1] Während auf der GDM-Tagung vor allem ein Austausch von Erfahrungen und Forschungsansätzen mit dem Thema im Zentrum stand und das Vernetzungstreffen Expertinnen und Experten auch aus benachbarten Disziplinen in die Diskussion integrierte„ soll es nun darum gehen, Implikationen und Forschungsbedarfe zu identifizieren, um gezielte Weiterentwicklungen in der mathematikdidaktischen Forschung anzuregen.

Die Vielfalt an KI-Technologien und deren Potenzial für spezialisierte Anwendungen im Bildungsbereich haben uns dazu bewogen, in einem gemeinsamen Ansatz die Relevanz Künstlicher Intelligenz für das Lehren und Lernen speziell von Mathematik und die Mathematikdidaktik näher zu beleuchten und einzuordnen. Unser Ansatz besteht darin, verschiedene Perspektiven zusammenzuführen, um das Feld zu strukturieren sowie einen möglichst breiten Konsens über Implikationen und aktuelle Forschungsbedarfe zu bilden. Dabei ist vorweg zu betonen, dass das Thema KI sehr vielfältig ist und begrifflich verschiedene Facetten aufweist. Wir klären daher zunächst im nächsten Abschnitt die Begrifflichkeiten und widmen uns anschließend der Bedeutung sowie den Herausforderungen von KI-Technologien für das schulische Lehren und Lernen von Mathematik. Gängigen Angebot-Nutzungs-Modellen (z. B. Helmke, 2009) folgend, erscheinen uns strukturell dabei vor allem zwei unterschiedliche Perspektiven relevant. Diese umfassen einerseits die Nutzung von Künstlicher Intelligenz im Rahmen der Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler und andererseits der Einsatz von KI zum Schaffen des Lernangebots, d. h. dem Unterrichten von Mathematik durch die Lehrkräfte. Wir formulieren sechs Leitgedanken, die sich auf aktuelle Einsatzmöglichkeiten von KI-Technologien im Kontext des Lehrens und Lernens beziehen und diskutieren jeweils Chancen und potenzielle Risiken, sowie Perspektiven und Forschungsbedarfe, die sich für die mathematikdidaktische Forschung ergeben. Dieser Zusammentrag kann bei der Fülle an wissenschaftlichen und nicht-wissenschaftlichen Publikationen, die sich in den letzten Monaten in Bezug zu diesem Thema ergeben hat, keinen Anspruch auf Vollständigkeit (etwa im Sinne eines Literaturreviews) stellen. Er soll vielmehr die Forschungsgemeinschaft zur Diskussion einladen.

Was sind KI-Technologien? – Künstliche Intelligenz im Allgemeinen

Der Einsatz von Künstlicher Intelligenz im Bildungsbereich umfasst ein breites Spektrum an verschiedenen Technologien und Anwendungsfällen, so dass der Begriff „KI“ definitorisch nicht eindeutig ist (vgl. Abbildung 1). Dies hat zur Folge, dass es in der Diskussion um die Bedeutung dieser Technologie nicht „eine“ oder „die“ KI gibt, sondern viele spezialisierte Verwendungen und Technologien, die den Unterricht in der einen oder anderen Weise beeinflussen können, die eine Beschreibung auf allgemeiner Ebene aber erschweren. Wir orientieren uns pragmatisch im Folgenden am Begriff „KI-Technologien“ zur Beschreibung dieser Vielfalt von technologischen Anwendungen und grenzen davon sprachlich den Spezialfall „generativer KI“ als aktuell unterrichtlich hoch relevante Art der KI-Technologie ab.

Grundlage der begrifflichen Auseinandersetzung ist das Forschungsfeld zur Künstlichen Intelligenz, das sich mit der Entwicklung und Erforschung von Systemen befasst, die intelligentes menschliches Verhalten simulieren. Dabei umfassen diese Systeme eine Vielzahl von Techniken und Modellen, die für unter-

[1] www.mathematik.uni-wuerzburg.de/didaktik/aktuelles/single/news/ki-symposium-im-bereich-der-didaktik-der-mathematik/

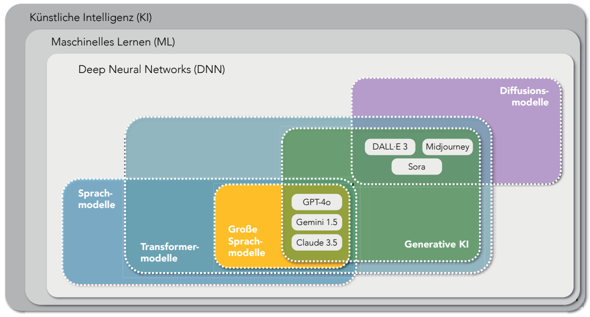


Abbildung 1. Einordnung aktueller, generativer KI (angelehnt an Svendsen, 2023)

schiedliche Aufgaben eingesetzt werden, von der Bilderkennung bis hin zur Sprachverarbeitung. Digitale Anwendungen wie die automatisierte Rechtschreibprüfung oder Schreibassistenten und Übersetzungsprogramme wie DeepL nutzen beispielsweise KI, um Texte auf Fehler zu überprüfen, zu übersetzen und Korrekturvorschläge zu machen.

Eine Schlüsseltechnologie innerhalb der KI ist das Maschinelle Lernen (ML). ML-Algorithmen ermöglichen es Computern, aus bestehenden Daten Entscheidungen zu lernen und bisher nicht bewertete Daten zu klassifizieren. So können z. B. Muster in großen Datensätzen erkannt und auf dieser Basis Vorhersagen oder Empfehlungen getroffen werden. Im Bildungsbereich können ML-basierte Empfehlungssysteme personalisierte Lerninhalte vorschlagen, die auf den Interessen und Fortschritten der Lernenden basieren. Auch die frühzeitige Identifikation von Bedarfen, auf die adaptiv reagiert werden kann, ist ein Anwendungsbeispiel. So werden ML-Algorithmen beispielsweise in bestimmten Formen von Learning Analytics genutzt, auch um individuelle Lernpfade von Schülerinnen und Schülern zu bestimmen (vgl. Hershkovitz et al., 2024) und das Lernen personalisierter zu gestalten. Learning Analytics nutzt dynamische Informationen über Lernende und Lernumgebungen, indem sie diese bewertet, erhebt und analysiert, um Lernprozesse, Lernumgebungen und pädagogische Entscheidungen in Echtzeit zu modellieren, vorherzusagen und zu optimieren (Ifenthaler, 2015).

Eine spezialisierte Unterkategorie des Maschinellen Lernens sind Deep Neural Networks (DNN). Diese mehrschichtigen Netzwerke aus Knoten (in Anlehnung an das menschliche Gehirn Neuronen genannt) sind in der Lage, komplexe Muster in umfangreichen Datensätzen zu erkennen. DNNs bilden die Grundlage für viele moderne KI-Anwendungen, darunter Sprach- und Bilderkennungssysteme. Ein Spezialgebiet sind Sprachmodelle, die speziell für die Verarbeitung und Erzeugung menschlicher Sprache entwickelt wurden. Sie können Texte (zu einem gewissen Grad) verstehen, generieren und übersetzen. Besonders hervorzuheben sind hier die Transformer-Modelle, die auf einer Architektur basieren, die es ermöglicht, lange Abhängigkeiten in Texten zu verarbeiten und kontextuell relevante Antworten zu erzeugen (Generative Pretrained Transformer, GPT). Zu den fortschrittlichsten Sprachmodellen zählen derzeit die großen Sprachmodelle (Large Language Models, LLMs) wie GPT-4 bzw. GPT-4o, Gemini 1.5 oder Claude 3.5, auf denen u. a. auch ChatGPT basiert. Diese Modelle sind anhand riesiger Datensätze darauf trainiert, menschenähnlichen Text zu generieren und vielfältige Aufgaben wie Textzusammenfassungen, Übersetzungen und Dialogführung zu übernehmen. Ihre besondere Stärke liegt in der Fähigkeit, große Mengen an Textdaten zu verarbeiten und auf dieser Basis kohärente und sinnvolle Antworten zu liefern. Ein weiteres spezialisiertes KI-Modell sind Diffusionsmodelle, die zur Generierung von visuellen und audiovisuellen Inhalten verwendet werden (Schorcht et al., 2024). Bekannte Beispiele sind DALL·E 3, Midjourney oder Sora. Diese Modelle können aus einfachen Textbeschreibungen komplexe Bilder und Videos erstellen und finden Anwendung in kreativen und medialen Bereichen. Multimodale Künstliche Intelligenz kombiniert diese verschiedenen Datentypen wie Text, Bild, Audio und Video. Dazu werden oft mehrere KI-Modelle zur Verarbeitung unterschiedlicher Daten genutzt und zur Generierung eines kohärenten Outputs miteinander verknüpft, wie dies beispielsweise ChatGPT-4o leistet.

Sechs Leitgedanken zu Implikationen und Forschungsbedarfen zu KI-Technologien im Mathematikunterricht

Im Folgenden wollen wir unter sechs Leitgedanken die Einsatzmöglichkeiten von KI-Technologien im schulischen Lehren und Lernen von Mathematik und in der Lehrerausbildung entfalten und diese Anwendungen kurz anhand von Chancen und potenziellen Risiken diskutieren.

Nutzen von KI-Technologien aus der Perspektive von Schülerinnen und Schülern

Leitgedanke 1: KI-Technologien ermöglichen Lernenden spezifische Zugänge zu mathematischen Inhalten.

Damit KI-Technologien für mathematische Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern nutzbar gemacht werden können, sollten KI-unterstützte Lernangebote domänen- bzw. inhaltsspezifisch entwickelt werden.

Hierbei ergibt sich unter anderem eine interessante Forschungsperspektive insbesondere auch für die stoffdidaktische Forschung zur Strukturierung und Anordnung von mathematischen Lerninhalten unter Berücksichtigung von Aspekten des Zugänglichmachens ohne zu verfälschen (Kirsch, 1977). Unter derartige Anwendungsbereiche von KI fällt etwa die funktionale Nutzung von multimodalen generativen KI-Tools (wie Gemini 1.5 oder GPT-4o) in digitalen Lernumgebungen, die Sprachen erkennen und übersetzen können oder Texte, Bilder, Graphen, symbolische Terme, Gleichungen oder Tabellen und Diagramme generieren können (siehe zur Erstellung von Vektorgrafiken auch Helfrich-Schkarbanenko, 2023). Sie lassen sich perspektivisch zum einen zur Erstellung verschiedener Darstellungen mathematischer Inhalte im Unterricht nutzen (Maddigan & Susnjak, 2023) und ermöglichen den aktiven Wechsel von Repräsentationen, welcher mathematische Lernprozesse unterstützen kann (Katter & Huget, 2024). Zum anderen ermöglicht der vereinfachte sprachliche Zugang durch KI-Tools wie z. B. durch den (momentan noch angekündigten) GPT-4o voice mode, dass Schülerinnen und Schüler mit der generativen KI in natürlicher Sprache nahezu ohne Unterbrechung kommunizieren können. Damit kommt neben den verschiedenen generierbaren Repräsentationsformen vor allem der sprachlichen Einbettung von mathematischen Lerninhalten absehbar im Unterricht, aber auch außerhalb des Unterrichts eine noch bedeutendere Rolle zu. Die generative KI könnte hier als entsprechender „Resonanzraum" zur Etablierung neuer Formen der Kommunikation über Mathematik und zum Abbau von Barrieren und damit zur Erstellung von inklusiven Lernangeboten genutzt werden.

KI-Technologien bieten zudem die Möglichkeit der automatisierten Erstellung didaktisch aufbereiteter Musterlösungen (worked-out-examples) mathematischer Aufgaben sowie passgenauer Lernhilfen und Scaffolding-Maßnahmen (Jia et al., 2024; Pardos & Bahndari, 2024; Pham Van Long et al., 2023). Diese können Schülerinnen und Schüler beim selbstständigen Bearbeiten von Mathematikaufgaben als Orientierung und Unterstützung dienen und somit den Lernprozess fördern. Eine Untersuchung von Gilles (2024) befasste sich beispielsweise mit der Fähigkeit von ChatGPT, Lösungswege für Routineaufgaben im Bereich quadratischer Gleichungen zu generieren. Hierfür wurden 60 von ChatGPT erstellte Aufgabenbearbeitungen analysiert, die unter Verwendung verschiedener Prompt-Techniken erstellt wurden. Die Ergebnisse zeigten, dass ChatGPT in der Lage war, die Lösung der Aufgabe zufriedenstellend in eine Abfolge von Lösungsschritten zu gliedern und dabei gestufte Hinweise zu geben. Dies deutet darauf hin, dass generative KI das Potenzial hat, Schülerinnen und Schüler beim eigenständigen Bearbeiten von Mathematikaufgaben durch die Bereitstellung strukturierter Lösungswege zu unterstützen. Es ließ sich im Versuch zusätzlich auch erreichen, dass eine vollständige Lösung der Aufgabe nicht vorweggenommen wird und durch die Lernenden selbst geleistet werden muss (Gilles, 2024). Auch die Fehlerrate bei der Erstellung mathematischer Lernhilfen kann durch die Anwendung spezifischer Prompt-Techniken weiter reduziert werden (Pardos & Bahndari, 2024).

Derartige auf der Erstellung von strukturierten Lernhilfen beruhenden Anwendungen von KI-Technologien erscheinen insbesondere für einen Unterricht geeignet, der stark auf dem selbstregulierten Lernen der Schülerinnen und Schüler basiert. Dies erfordert daher – ähnlich wie schon in der Diskussion um Smartphone-Apps wie z. B. Photomath – das Entwickeln und Beforschen adäquater Lernumgebungen und Aufgabenstellungen (Klinger, 2019). Hier ist beispielsweise auch an die methodische und technisch-unterstützte Weiterentwicklung von traditionellen Unterrichtsbestandteilen wie Übungsphasen zu denken. Die Nutzung von KI-Technologien zur Erstellung adaptiver, auf die individuellen Vorkenntnisse der Lernenden abgestimmter Lernhilfen erfordert zusätzlich seitens der Lehrkraft hinreichende diagnostische Kompetenzen. Nur wenn die Lehrkraft in der Lage ist, die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler zutreffend einzuschätzen und diagnostische Entscheidungen, die beispielsweise durch Learning Analytics bereitgestellt werden, zu validieren und zu nutzen, kann sie ein KI-unterstütztes Lernangebot zielgerichtet an die Bedürfnisse der Lernenden anpassen. Dies setzt voraus, dass Lehrkräfte über fundiertes Wissen bezüglich der Erhebung und Interpretation diagnostischer Informationen verfügen und dieses Wissen effektiv mit den Möglichkeiten der KI verknüpfen können.

Leitgedanke 2: KI-Technologien können eine Akzentuierung der Schwerpunktsetzungen in der Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen *bewirken.*

Die Unterstützung von mathematikspezifischen Denk- und Arbeitsweisen wie etwa des Problemlösens, Modellierens oder Beweisens durch KI-Technologien (Helfrich-Schkarbanenko, 2023; SWK, 2024) könnte langfristig zu einer Weiterentwicklung und Neubewertung von prozessbezogenen mathematischen Tätigkeiten im Unterricht führen. Beispiele für derartige Veränderungen aus den professionellen Tätigkeiten von Mathematikerinnen und Mathematikern umfassen etwa schon jetzt das technologisch unterstützte Arbeiten mit Beweisgenerierungs- und -überprüfungssystemen wie LEAN (Hanna et al., 2024), die zukünftig durch generative KI verstärkt werden könnten (Open AI, 2022), auch wenn die Übertragung von menschlichen Beweisen in maschinelle Formen generell schwierig ist. Für das geometrische Beweisen – eine für KI-Sprachmodelle derzeit fast unmögliche Aufgabe – belegten Trinh et al. (2024) im Fachmagazin *Nature* allerdings kürzlich wegweisende Leistungen des KI-Programms AlphaGeometry beim Lösen von Aufgaben der internationalen Mathematikolympiade (IMO). Diese Entwicklungen könnten langfristig auch die Bedeutung der prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen im schulischen Unterricht beeinflussen, da die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein werden, bestimmte mathematische Prozesse gemeinsam mit künstlicher Intelligenz durchzuführen, ähnlich wie dies in der Vergangenheit durch die Einführung des Taschenrechners und digitaler Mathematik-Werkzeuge geschehen ist.

Zum Beispiel betrifft dies das Problemlösen. Wird das Arbeiten mit mathematischen Problemen durch die Unterstützung mit generativer KI vereinfacht und die Schülerinnen und Schüler können der KI Fragen zu komplexen Problem stellen, sie um Erklärungen bitten oder anhand von Schritt-für-Schritt-Lösungen eigene Lösungsansätze erstellen, dann wird es für sie noch wichtiger, mathematische Probleme präzise zu formulieren, zu identifizieren und über selbstregulative Fähigkeiten zu verfügen, um den kollaborativen, teils computerbasierten Problemlöseprozess zu überwachen (siehe z. B. Urban et al., 2024 in einer Studie mit Studierenden). Dies liegt daran, dass die Effektivität und Genauigkeit von KI-Technologien maßgeblich von der Klarheit und Genauigkeit der gestellten Fragen abhängt, wodurch sich die Schwerpunktsetzung in der Kompetenzvermittlung verändert. Denkbar ist, dass mit Hilfe von Künstlicher Intelligenz auch bisher in der Schule nicht behandelte Klassen von Problemen bearbeitet werden können, die z. B. komplexere Darstellungen oder das Finden von Mustern in großen Anzahlen von Objekten erfordern (z. B. Helfrich-Schkarbanenko, 2023). In Lernumgebungen, die durch generative KI unterstützt werden, könnten daher die Entwicklung und Anwendung neuer KI-bezogener Heurismen (die z. B. auf dem Verarbeiten großer Datenmengen mit maschinellem Lernen beruhen) an Bedeutung gewinnen (Helfrich-Schkarbanenko, 2023; Michalewicz & Fogel, 2004). Schülerinnen und Schüler sollten als Ausdruck moderner prozessbezogener Kompetenzen zusätzlich aber auch fachspezifische Werkzeugtechniken (z. B. Prompt-Techniken bzw. Techniken zur Optimierung der Mensch-KI-Interaktion) erwerben, um generative KI als Werkzeug des mathematischen Problemlösens (aber auch des Modellierens und des Beweisens) nutzen zu können. Hier sehen wir Potenzial für die Erforschung von langfristigen Effekten, die die Einführung von generativer KI in den Schulunterricht auf die Kompetenzentwicklung und die Weiterentwicklung von Curricula bereithält (vgl. Deutscher Ethikrat, 2023). Zusätzlich sollte darauf geachtet werden, dass der Einsatz von generativer KI beim mathematischen Arbeiten nicht dazu führt, dass Schülerinnen und Schüler die Motivation und die Fähigkeiten verlieren, komplexere Aufgaben, deren Lösungen nicht unmittelbar mit Hilfe von KI gefunden werden können, selbst zu lösen (Deutscher Ethikrat, 2023).

Leitgedanke 3: Der Einsatz von KI-Technologien im Mathematikunterricht sollte altersangemessen *fokussiert werden.*

Nicht außer Acht gelassen werden darf, dass der unterrichtliche Einsatzes von KI-Technologien ethische, rechtliche und technologische Risiken birgt, z. B. in Bezug auf den Datenschutz, die Verletzung der Privatsphäre und den Verlust von Autonomie (SWK, 2024; Deutscher Ethikrat, 2023). Diese Risiken sind insbesondere auch vor dem Hintergrund der Altersangemessenheit des Einsatzes zu erwägen, wie z. B. das Impulspapier der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission (2024) betont, das insbesondere die Textproduktion mit generativer KI in den Blick nimmt und vom Einsatz großer Sprachmodellen im Primarstufenbereich abrät. Auch die Empfehlungen der UNESCO legen eine Altersgrenze von 13 Jahren für den Einsatz von generativer KI im Unterricht fest (Miao, Holmes & UNESCO, 2023), sie richten sich allerdings nach dem von Open AI angegebenen und auf der U.S.-amerikanischen Gesetzgebung beruhenden Mindestalter zur Nutzung von ChatGPT. Andererseits lassen sich intelligente Tutorsysteme (ITS), wie z. B. Subkraki zur schriftlichen Subtraktion (Zeller & Schmid, 2017) auch im Primarbereich als sinnvolle ergänzende Unterstützung im mathematischen Lernprozess der Schülerinnen und Schüler einsetzen. Insbesondere durch die Möglichkeiten der Sprachein- und -ausgabe bei generativen Sprache-zu-Text und Text-zu-Sprache KI-Modellen ist die Eingabe auch durch Schülerinnen und Schüler möglich, die noch keine hinreichende Schreib- und Lesekompetenz ausgebildet haben. Der Zugriff auf generative KI scheint daher prinzipiell für junge Schülerinnen und Schüler in absehbarer Zukunft möglich und könnte auch in diversen digitalen Lernumgebungen umgesetzt werden. Eine pseudonymisierte Texteingabe ist durch DSGVO-konforme KI-Einbindungen, wie sie etwa fobizz (fobizz.com) für den schulischen Bereich anbietet, möglich und die Plattform ist nach eigenen

Angaben rechtlich ohne Altersbeschränkung nutzbar. Es bleibt abzuwarten, ob derartige Angebote um die direkte Spracheingabe erweitert werden, insbesondere vor dem Hintergrund der potenziellen Gefahr des Klonens von Stimmen. Für die Grundschule scheint es also – anders als bei digitalen Medien und Werkzeugen – daher derzeit noch eine offene Frage zu sein, inwieweit KI-Technologien im Mathematikunterricht bereits eingesetzt werden können, und hier sehen wir die mathematikdidaktische Community gefordert, diese Frage aus wissenschaftlichen und pädagogischen Perspektiven zu erörtern.

Forschung zum Erwerb mathematischer Basiskompetenzen im Grundschulbereich unter den Bedingungen des Einsatzes von KI erscheint uns daher erforderlich, um fundierte wissenschaftliche Entscheidungen über den Einsatz bzw. die Einsatzbedinungen von KI-Technologien im Mathematikunterricht der Grundschule, aber auch in den weiterführenden Schulformen treffen zu können. Eine zu klärende Frage in dieser Hinsicht ist beispielsweise, ob und wie weit der Kompetenzerwerb der Schülerinnen und Schüler durch technisches Auslagern von mathematischen Tätigkeiten an (generative) KI positiv oder negativ beeinträchtigt wird. Für den Sekundarstufenbereich kann unter der Voraussetzung, dass bereits hinreichende mathematische Kompetenzen erworben wurden, die Nutzung von generativer KI im Mathematikunterricht erwogen werden. Dieser sollte jedoch immer in eine kritische Reflexion eingebettet werden, u. a. in Bezug auf den Datenschutz oder die Funktionsweise der Technologie und die Problematik, die sich für das Fach Mathematik, das stark auf Aspekten wie Strenge, Eindeutigkeit und mathematischer Korrektheit beruht, aus „Datenhalluzinationen" von KI-Modellen ergibt (Buchholtz et al., 2023). Entsprechende Teile der Community sind also gefordert, unter diesen Bedingungen altersgerechte Formen von fachspezifischen KI-Anwendungen mitzudenken und die Möglichkeiten und Grenzen ihrer verantwortbaren Anwendung vor dem Hintergrund ethischer und pädagogischer Richtlinien zu diskutieren.

Einsatz von KI-Technologien aus der Perspektive von Lehrkräften

Leitgedanke 4: KI-Technologien können Lehrkräfte bei der Diagnose und Bewertung mathematischer Leistungen *unterstützen, es ergeben sich jedoch auch (neue) Verantwortlichkeiten.*

Neue Formen der Individualisierung durch den Einsatz von KI-Technologien werden möglich durch die grundlegende Bereicherung der Individualdiagnostik, die die Technologie bereithält. Dies geschieht etwa, wenn die Analyse von Schülerlösungen und die Identifizierung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht in enger Ersetzung der Lehrkraft – d. h. für einen genau bestimmten Lehr- bzw. Lernabschnitt (Deutscher Ethikrat, 2023) – automatisiert werden, z. B. im intelligenten Tutorsystem (ITS) Subkraki zur schriftlichen Subtraktion (Zeller & Schmid, 2017). Lehrkräfte können dabei z. B. durch KI-basierte Lernplattformen oder ITS mit Lernprozessdaten wie der Bearbeitungsdauer von Aufgaben oder des Vorliegens eines bestimmten konzeptuellen Fehlertyps unterstützt werden (siehe etwa bereits das Beispiel eines nicht-KI-basierten interaktiven Schulbuchs von Hoch, 2020); diese ermöglichen ihnen wertvolle diagnostische Einblicke in die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler. Zusätzlich ermöglicht die (momentan noch angekündigte) Echtzeit-Verarbeitung von Videodaten oder Bildschirmaufnahmen bei multimodalen KI-Modellen eine Direkt-Lernassistenz einzelner Schülerinnen und Schüler, die auch adaptiv auf Lernausgangslagen und Fehler eingehen kann (Khan Academy, 2024). Lehrkräfte können also bei der Individualdiagnostik eine Entlastung erfahren, müssen allerdings über die entsprechenden Kenntnisse und Fähigkeiten verfügen, um Lernprozessdaten auf eine hinreichende Transparenz und Validität zu überprüfen (z. B. in Bezug auf, welche Daten eingegangen sind) und sie effizient und kritisch-reflektiert für die individuelle Unterstützung der Lernenden und Feedback zu nutzen. Gleichzeitig müssen sie die teilweise autonom arbeitenden KI-Lernassistenten der Schülerinnen und Schüler im Blick behalten. Hinsichtlich der Diagnose von Schülerfehlern und Fehlvorstellungen mathematischer Inhalte durch KI besteht aktuell noch großer Forschungsbedarf, denn noch können generative KIs wie ChatGPT mit der Bilderkennung handschriftliche Schülerrechnungen nicht ausreichend zuverlässig beurteilen, was in einem Versuch zur Fehlererkennung im Bereich der arithmetischen Basiskompetenzen z. B. zu vermehrten fehlerhaften Diagnosen von Schülerfehlern in der schriftlichen Multiplikation führte (Weber, 2024).

Eine ähnliche Verantwortlichkeit betrifft auch den Umgang mit Lernprozessdaten vor dem Hintergrund der Bewertung von Leistungen. Es besteht ein gewisses Potenzial zur KI-basierten Unterstützung von Lehrkräften bei der Leistungsmessung, wenn Schülerantworten zu mathematischen Aufgaben (die z. B. durch Lernplattformen bereitgestellt werden) teil-automatisiert bewertet werden können (Kasneci et al., 2023). Unter anderem ermöglicht die Unterstützung durch KI die Berücksichtigung einer großen Anzahl von Einzelleistungen und personalisierter Lernleistungen bei der Bewertung, wodurch die formative Funktion der Leistungsmessung insgesamt stärker berücksichtigt werden kann (Luzano, 2024). Dies könnte zu der Hoffnung Anlass geben, dass eine „objektivierte" Leistungsmessung möglich wird. Andererseits birgt eine stärker datengetriebene und KI-unterstützte Leistungsmessung das Risiko, dass standardisierte Aufgaben und Rechenfertigkeiten überbetont werden, da viele KI-Technologien vor allem prozedurale mathematische Fähigkeiten akkurat überprüfen (Luzano, 2024; Rasila et al., 2015). Dies könnte zu Nachteilen bei der Berücksichtigung des konzeptuellen Verständnisses mathematischer Inhalte führen, da viele KI-Technologien vor allem prozedurale mathematische Fähigkeiten überprüfen (Luzano, 2024; Rasila et al., 2015). Eine weitere Gefahr bei der Bewertung mathematischer Leistungen durch KI ist nicht zuletzt, dass die in Bewertungsinstrumenten verwendeten Algorithmen des maschinellen Lernens unbeabsichtigt Verzerrungen in den Daten, auf denen sie trainiert wurden, unterliegen (Baker & Hawn, 2021). Wenn zum Beispiel Trainingsdaten hauptsächlich aus Beispielen aus einer bestimmten demografischen Gruppe bestehen, könnten KI-Technologien Schülerinnen und Schüler aus anderen Gruppen ungenau bewerten. Der Umgang mit algorithmischen Verzerrungen und die Gewährleistung von Fairness bei KI-unterstützten Bewertungen ist somit entscheidend für die Wahrung der Chancengleichheit in der mathematischen Bildung (Luzano, 2024). Lehrkräfte müssen also bezüglich der schulischen Leistungsmessung die Möglichkeiten sowie ethischen und rechtlichen Grenzen des Einsatzes von KI-Technologien kennen und dürfen Leistungsbewertungen nicht einfach automatisieren. Aus ethischer Perspektive besteht ein breiter Konsens darüber, dass die abschließende Bewertung von Schülerleistungen immer in menschlicher Hand bleiben sollte, wie auch gegenwärtige Rahmenpapiere zum Einsatz von KI im Bildungsbereich betonen (U.S. Department of Education, 2023; SWK, 2024). Auch die im Sommer 2024 in Kraft tretende und nachhaltig Geltung beanspruchende EU-Verordnung zur Künstlichen Intelligenz (KI-VO) stuft KI-Systeme, die in der allgemeinen oder beruflichen Bildung zur Bewertung von Lernergebnissen eingesetzt werden können, aufgrund möglicher Diskriminierungen bereits als hochriskant ein, so dass Lehrkräfte über die rechtliche Rahmenbedingungen informiert sein sollten.

Leitgedanke 5: KI-Technologien können Lehrkräfte bei der Individualisierung mathematischer Lernprozesse *unterstützen und potenziell entlasten.*

Künstliche Intelligenz besitzt das Potenzial, Lehrkräfte bei der Entwicklung individualisierter Lernumgebungen zu unterstützen und Unterricht inklusiv zu gestalten. So können Lehrkräfte z. B. mit generativer KI effizient Aufgabenformulierungen an die individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anpassen oder individuelle Lernprozessdaten aus KI-gestützten Lernplattformen und ITS nutzen, um personalisierte Lernpfade zu erstellen (Clements & Samara, 2004; Simon, 1995). Diese Möglichkeiten der KI-gestützten Individualisierung mathematischen Lernens und die sich daraus möglicherweise ergebene Entlastung von Lehrkräften sollten empirisch beforscht und von der Fachdidaktik auch konzeptionell begleitet werden. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, inwieweit durch Maschinelles Lernen und Deep Neural Networks generierte Lernpfade, die auf der Mustererkennung großer Datenmengen (möglicherweise Millionen von Trainingsdaten) basieren, tatsächlich personalisierte Vorschläge für individuelle Lernwege liefern können (Engelbrecht & Borba, 2023). Es gilt kritisch zu hinterfragen und empirisch zu prüfen, ob solche KI-generierten Lernpfade das Lernen einzelner Schülerinnen und Schüler angemessen fördern können oder ob sie lediglich auf Gruppenmustern basieren und somit die individuellen Bedürfnisse und Fähigkeiten der Lernenden möglicherweise nicht ausreichend berücksichtigen. Eine sorgfältige Evaluation der durch KI bereitgestellten Lernpfade ist daher unerlässlich, um sicherzustellen, dass diese tatsächlich einen Zugewinn für das individuelle Lernen bieten und nicht zu einer Vereinheitlichung führen. Hierbei müssen sowohl die technischen Möglichkeiten als auch die pädagogischen Implikationen der KI-gestützten Lernpfadgenerierung kritisch reflektiert werden, um eine bestmögliche Unterstützung für das Lernen jedes einzelnen Schülers und jeder einzelnen Schülerin zu gewährleisten. So dürfen sich Lehrkräfte nicht leichtfertig einfach auf die vorgeschlagenen Lernpfade der KI verlassen, sondern müssen die Lernpfade nach eigener Einschätzung fortwährend den Lernfortschritten der Schülerinnen und Schüler anpassen (Simon, 1995). Gleichzeitig bietet die Nutzung von KI-Technologien durch Lehrkräfte aber auch die Chance, ein adaptives Angebot an Lerninhalten und -materialien zu erstellen und direktes, auf didaktischen Kriterien basierendes formatives Feedback an jede Schülerin und jeden Schüler zu geben, was Lehrkräfte im Alltag entlasten kann, wie Haverkamp (2024) und Brüggemann (2024) anekdotisch berichten. Forschungsbedarf besteht also darin, herauszufinden, auf welche KI-basierten Individualiserungsformen Lehrkräfte für den Mathematikunterricht zurückgreifen, wie stark der wahrgenommene Faktor der Entlastung ist und inwieweit durch KI individualisierte und adaptiv gestaltete Lernumgebungen und Hilfestellungen von den Schülerinnen und Schülern angenommen werden und letztlich lernförderlich sind.

Die Verfügbarkeit der neuen Versionen generativer KI wie z. B. das große Sprachmodell GPT-4o und das angekündigte GPT-5 dürften die Akzente der Individualisierung noch stärker in Richtung individueller sprachgesteuerter KI-Lernassistenten verschieben (Khan Academy, 2024) und damit noch deutlicher in Richtung einer direkten Schüler-KI-Interaktion. Unter anderem ermöglichen Echtzeit-Gespräche und -Übersetzungen beim Unterrichten sprachheterogener Lerngruppen einen reibungslosen Sprachwechsel im Unterricht und eröffnen damit neue Gestaltungsmöglichkeiten für die Berücksichtigung von Mehrsprachigkeit und konzeptioneller Mündlichkeit beim Mathematiklernen. Um das Potenzial von generativer (Sprache-zu-Sprache) KI für den (sprachsensiblen) Mathematikunterricht daher voll auszuschöpfen und die sich durch die zunehmend in Konkurrenz zur Lehrkraft tretende KI verändernde Rolle von Lehrkräften in diesem Mathematikunterricht zu klären, bedarf es ebenfalls weiterer Forschung (siehe Dilling et al., 2024). Die Unterstützungsmöglichkeiten für mehrsprachige Schülerinnen und Schüler bei der Bewältigung spezifischer Herausforderungen im Erwerb der mathematischen Fach- und Bildungssprache durch sprachgesteuerte KI erfordert Forschungsbemühungen und die Entwicklung passender Lernumgebungen.

Leitgedanke 6: KI-Technologien können (angehende) Lehrkräfte im Erwerb und in der Ausübung von Planungs-, Reflexions- und Analysekompetenzen unterstützen

In ihrer Unterrichtsplanung achten erfahrene Lehrkräfte auf eine optimale Passung zwischen dem Lernstand der Schülerinnen und Schüler und den Lerninhalten (Beck et al., 2008; König & Rothland, 2022). Lehramtsstudierenden, Lehrkräften im Vorbereitungsdienst und Lehrkräften auf frühen Karrierestufen (z. B. auch Seiteneinsteigerinnen und Seiteneinsteigern) mangelt es allerdings oft noch an Erfahrung und Routine, Unterrichtsstunden adaptiv zu planen und Lerneinheiten über einen längeren Zeitraum zu strukturieren. Zusätzlich kann auch die Auswahl passender Lernmaterialien im Rahmen der Unterrichtsvorbereitung eine Herausforderung darstellen (Thurn, 2019). Generative KI-Technologien können hier als digitale Assistenz-Werkzeuge genutzt werden, um angehende Lehrkräfte in organisatorischer Hinsicht zu unterstützen, wie erste Studien beschreiben (Baytak, 2024; Karaman & Goksu, 2024), auch wenn die Qualität der erstellten Unterrichtsplanungen je nach technischem Modell noch variiert.

Auch einige der Autorinnen und Autoren des Beitrags haben konkret Lehramtsstudierenden ChatGPT als dialogische KI-Assistenz bei der Unterrichtsplanung und bei der Anpassung von Mathematikaufgaben zur Verfügung gestellt (Buchholtz & Huget, in Vorbereitung; Huget & Buchholtz, 2024; Peters & Schorcht, 2024). Es erwiesen sich bei der Unterrichtsplanung in eng definierten Prompt-Settings insbesondere Rückfragen, die die generative KI innerhalb des Planungsdialogs an die Studierenden stellte (z. B. nach stofflichen Lernzielen, methodischer Gestaltung oder didaktischen Prinzipien, die berücksichtigt werden sollten) als besonders wertvoll für die Vermittlung unterrichtsplanungsbezogener Kompetenzen. Die gestellten Fragen unterstützten die Studierenden darin, ihre eigenen Planungen kritisch zu reflektieren und zu optimieren, was sich als essentiell für die Entwicklung planungsbezogener Kompetenzen und die Förderung von Reflexionsprozessen erwies.

Da der Mathematikunterricht selbst u. a. durch die Qualität des Lehr-Lern-Materials bestimmt wird, rückt auch die Generierung von Unterrichtsmaterialien und Aufgaben als Anwendungsfeld von generativer KI in den Blick. Sowohl angehende als auch praktizierende Lehrkräfte können beispielsweise Mathematikaufgaben vor dem Hintergrund der Lernvoraussetzungen von Schülerinnen und Schülern so verändern, dass Aufgabenmerkmale wie das kognitive Anforderungsniveau, der Lebensweltbezug oder der Bezug zur Fachsprache variiert, womit eine höhere Zugänglichkeit im Rahmen inklusiver Lernangebote erreicht werden kann. Auch hier kann generative KI als „Gesprächspartner" im Planungsprozess dienen und Rückmeldungen geben. Hieraus ergibt sich auch weiterer Forschungsbedarf hinsichtlich der Frage, welche Impulse – z. B. spezifische Arten von Fragen, die große Sprachmodelle in Hinblick auf die Planung von Unterricht oder die Aufgabenvariation stellen – sich als besonders förderlich für den Erwerb von Lehrerkompetenzen erweisen. Auch muss geklärt werden, welche praktische Validität KI-unterstützte Unterrichtsplanungen und generiertes Unterrichtsmaterial aufweisen, da davon auszugehen ist, dass die sehr großen Mengen an Trainingsdaten der KI-Modelle Verzerrungen in Richtung standardisierter (oft lehrerzentrierter) Unterrichtsplanungen und -materialien bedingen. Im Sinne eines „garbage in, garbage out"-Prinzips ist zudem zu hinterfragen, inwieweit die für das Training von aktuellen KI-Tools genutzten Daten beispielsweise den Grad der kognitiven Aktivierung von Aufgaben hinreichend berücksichtigen, und wie gut bzw. schlecht die resultierende KI entsprechend in der Bewertung von kognitiver Aktivierung sein kann.

Zusätzlich erscheint die Nutzung von KI-Technologien bei der Analyse von Unterrichtsvideos ein wertvolles Werkzeug in der Lehrerausbildung. Die Integration von Videoanalysetools in multimodale KI-Modelle, die direkte Sprachausgaben ermöglichen (z. B. GPT-4o), könnte ein innovatives interaktives und selbstreguliertes Lernformat für die Lehrerausbildung bereithalten, das die Reflexions- und Analysekompetenzen der angehenden Lehrkräfte stärkt (Tarantini, 2023). Denkbar sind hier etwa Szenarien der automatisierten Szenenerkennung (z. B. zur Gestaltung von Unterrichtseinstiegen, zu Lehrkräfteinterventionen oder zum Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht), bei der die KI detaillierte Beschreibungen des Unterrichts liefert und die Aufmerksamkeit der angehenden Lehrkräfte gezielt auf Unterrichtshandlungen lenkt. Basierend auf den Inhaltsanalysen generativer KI ließen sich erneut geeignete Reflexionsfragen stellen, die die angehenden Lehrkräfte dazu bringen, eigene Handlungsalternativen zu entwickeln, oder Best-Practice-Modelle mit dem im Video gezeigten Unterricht zu vergleichen. Erste empirische Studien zur KI-basierten Erfassung von Merkmalen der Unterrichtsqualität, die auf der Verarbeitung bestehender Forschungsdaten beruhen, existieren hierzu bereits (Hou et al., 2024). Allerdings steht die potenzielle Verarbeitung von Videodaten von Unterricht bei diesem Forschungsansatz in Bezug auf die Erfassung von Aufmerksamkeitsmerkmalen oder affektiven Variablen im Klassenraum aus ethischer Hinsicht berechtigterweise in der Kritik (Deutscher Ethikrat, 2023).

Fazit

Unsere sechs Leitgedanken verdeutlichen die vielfältigen Möglichkeiten, aber auch die Herausforderungen, die mit dem Einsatz von KI-Technologien im Mathematikunterricht und in der professionellen Arbeit von Mathematiklehrkräften einhergehen. Es zeigt sich, dass KI-Technologien nicht als Ersatz für menschliche Kreativität und Expertise betrachtet werden sollten, sondern vielmehr als neues Werkzeug, das Lehrkräften im Zusammenspiel mit ihren mathematikdidaktischen Fähigkeiten neue Möglichkeiten für das Lehren, sowie Schülerinnen und Schülern das Lernen von Mathematik eröffnen kann. Gleichzeitig ist es unerlässlich, die Technologie kritisch zu betrachten und ihren möglichen Nutzen, aber auch ihre Anwendungen und Risiken empirisch zu erforschen, um evidenzbasierte Entscheidungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts treffen zu können.

Da die Einsatzmöglichkeiten von KI sehr vielfältig sind, wird KI auf sehr vielen Ebenen Implikationen für die mathematikdidaktische Forschung und auch Lehre bereithalten. Dies umfasst auch die Forschung, in der KI beispielsweise im Kontext der Datenverarbeitung oder Manuskriptgenerierung genutzt werden kann und bereits wird. Wir haben uns in diesem Beitrag allerdings zunächst nur auf Implikationen und Forschungsbedarfe im Bereich des schulischen Lehrens und Lernens beschränkt. Eine zentrale Frage für uns als Community, die sich hierbei aber stellt, ist, inwieweit KI als eigenständiger Bereich in der Mathematikdidaktik zu behandeln ist – beispielsweise in einem Arbeitskreis – oder ob diese Technologie vielmehr als Querschnittsthema in bestehende Diskurse und Arbeitsgruppen integriert werden sollte.

Unabhängig davon ist es von großer Bedeutung, die Kompetenzen von Lehrkräften aller Schulstufen im Umgang mit KI im Mathematikunterricht in den Blick zu nehmen. Um die Chancen dieser Technologie für das Lehren und Lernen von Mathematik nutzbar zu machen, müssen Lehrkräfte befähigt werden, KI kritisch, reflektiert und innovativ einzusetzen und dabei sowohl ethische Gesichtspunkte als auch Aspekte des Datenschutzes zu berücksichtigen.

Der Kompetenzerwerb von Lehrkräften im Studium sollte daher Basiskompetenzen zum Umgang mit KI-Technologien im Allgemeinen sowie speziell für das Unterrichten des Fachs Mathematik umfassen. Dazu gehört einerseits die Fähigkeit, den Output von KI zu hinterfragen und inkorrekte Ergebnisse zu erkennen, andererseits aber auch die Kompetenz, generative KI didaktisch sinnvoll in den Unterricht zu integrieren. Darüber hinaus müssen ethische Aspekte als verbindliche Ausbildungsanteile in die Lehrerbildung aufgenommen werden, um sicherzustellen, dass der Einsatz von KI im Mathematikunterricht reflektiert und verantwortungsvoll erfolgt (siehe auch Hein et al., 2024).

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Integration von KI-Technologien in den Mathematikunterricht ein komplexes Thema ist, das einer differenzierten Betrachtung bedarf. Die hier vorgestellten Leitgedanken bieten einen ersten Rahmen für die weiteren Diskussionen und Forschungsansätze in diesem Bereich. Es gilt nun, die aufgeworfenen Fragen und Herausforderungen in einem interdisziplinären Dialog zwischen Fachdidaktik, Fach, Bildungswissenschaften, Informatik und Schulpraxis zu bearbeiten, um das Potenzial von KI-Technologien für das Lehren und Lernen von Mathematik optimal zu nutzen und gleichzeitig mögliche Risiken zu minimieren. Nur so kann sichergestellt werden, dass der Einsatz von KI im Mathematikunterricht einen echten Zugewinn für Lehrende und Lernende bietet und zu einer Verbesserung der Unterrichtsqualität beiträgt.

Literatur

Baker, R., & Hawn, A. (2021). Algorithmic bias in education. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 32*, 1052–1092. DOI:10.1007/s40593-021-00285-9

Baytak, A. (2024). The content analysis of the lesson plans created by ChatGPT and Google Gemini. *Research in Social Sciences and Technology, 9*(1), 329–350. DOI:10.46303/ressat.2024.19

Beck, E., Baer, M., Guldimann, T., Bischoff, S., Brühwiler, C., Müller, P., Niedermann, R., Rogalla, M., & Vogt, F. (2008). *Adaptive Lehrkompetenz. Analyse und Struktur, Veränderbarkeit und Wirkung handlungssteuernden Lehrerwissens*. Waxmann.

Brüggemann, J. (2024). *KI-gestütztes Feedback für mathematische Argumentationen mit Fiete*. mathemia.de/blog/2024-02-09-fiete/

Buchholtz, N., & Huget, J. (in Vorb.). Möglichkeiten für die Anwendung von ChatGPT für angehende Mathematiklehrkräfte – Von guten und schlechten Prompts. Erscheint in: *Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft Hamburg*.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 81–89. DOI:10.1207/s15327833mtl0602_1

Deutsche Telekom Stiftung (2021). *KI@Bildung: Lehren und Lernen in der Schule mit Werkzeugen Künstlicher Intelligenz.* www.telekom-stiftung.de/aktivitaeten/schule-und-ki

Deutscher Ethikrat. (2023). *Mensch und Maschine – Herausforderungen durch Künstliche Intelligenz*: *Stellungnahme*. www.ethikrat.org/fileadmin/Publikationen/Stellungnahmen/deutsch/stellungnahme-mensch-und-maschine.pdf

Dilling, F., Holten, K., Pielsticker, F. & Witzke, I. (2024). Aushandlungs- und Argumentationsprozesse fördern durch den Einsatz generativer KI-Sprachmodelle beim schulischen Mathematiklernen? Erste Einsichten und Perspektiven aus der Empirie. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 116*, 14–21.

Engelbrecht, J., & Borba, M. C. (2024). Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM Mathematics Education 56*, 281–292. DOI:10.1007/s11858-023-01530-2

Gilles, F. (2024). *ChatGPT als persönlicher Lernassistent? Entwicklung von Prompts zur Bereitstellung von Lernhilfen durch künstliche Intelligenz.* Unveröffentlichte Seminararbeit, Universität Hamburg.

Hanna, G., Larvor, B., & Yan, X. K. (2024). Using the proof assistant Lean in undergraduate mathematics classrooms. *ZDM Mathematics Education*. DOI:10.1007/s11858-024-01577-9

Haverkamp, H. (2024). Lernförderliches Feedback: Entlastung beim individuellen Feedback mit Fiete.ai. In A. König & J. Mosbach (Hrsg.), *Künstliche Intelligenz als Unterrichtsassistent. Wie KI-Tools das Lehrerleben erleichtern* (S. 30–31). Friedrich-Verlag.

Hein, L., Högemann, M., Illgen, K.-M., Stattkus, D., Kochon, E., Reibold, M.-G., Eckle, J., Seiwert, L., Beinke, J. H., Knopf, J., & Thomas, O. (2024). ChatGPT als Unterstützung von Lehrkräften: Einordnung, Analyse und Anwendungsbeispiele. *HMD Praxis der Wirtschaftsinformatik, 61*, 449–470 . DOI:10.1365/s40702-024-01052-9

Helfrich-Schkarbanenko, A. (2023). *Mathematik und ChatGPT. Ein Rendezvous am Fuße der technologischen Singularität*. Springer.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (Neubearb., 1. Aufl.). Kallmeyer.

Hershkovitz, A., Noster, N., Siller, H.-S., & Tabach, M. (2024). Learning analytics in mathematics education: The case of feedback use in a digital classification task on reflective symmetry. *ZDM Mathematics Education*. DOI:10.1007/s11858-024-01551-5

Hoch, S. (2020). Prozessdaten aus digitalen Schulbüchern als Instrument der mathematikdidaktischen Forschung. Theorie – Praxis – Empirie am Beispiel des Bruchzahlkonzepts. nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn:nbn:de:bvb:91-diss-20201218-1554567-1-1

Hou, R., Fütterer, T., Bühler, B., Bozkir, E., Gerjets, P., Trautwein, U., & Kasneci, E. (2024). Automated assessment of encouragement and warmth in classrooms leveraging multimodal emotional features and ChatGPT. arXiv:2404.15310

Huget, J., & Buchholtz, N. (2024). Gut gepromptet ist halb geplant – ChatGPT als Assistenten bei der Unterrichtsplanung nutzen. In A. König, & J. Mosbach (Hrsg.), *Praxisratgeber Künstliche Intelligenz als Unterrichtsassistent: Wie KI-Tools das Lehrerleben erleichtern* (S. 8–10). Friedrich-Verlag.

Ifenthaler, D. (2015). Learning analytics. In J. M. Spector (Hrsg.), *The SAGE encyclopedia of educational technology* (Bd. 2, S. 447–451). Thousand Oaks: Sage.

Jia, J., Wang, T., Zhang, Y., & Wang, G. (2024). The comparison of general tips for mathematical problem solving generated by generative AI with those generated by human teachers. *Asia Pacific Journal of Education, 44*(1), 8–28. DOI:10.1080/02188791.2023.2286920

Karaman, M. R., & Goksu, I. (2024). Are lesson plans created by ChatGPT more effective? An experimental study. *International Journal of Technology in Education (IJTE), 7*(1), 107–127. DOI:10.46328/ijte.607

Kasneci, E., Seßler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., … & Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, *103*, 102274.

Katter, V., & Huget, J. (2024, 6. März). *ChatGPT und quadratische Funktionen: Fachdidaktische Perspektiven und Anwendungen* [Vortrag]. 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Khan Academy (2024, 13. Mai). GPT-4o (Omni) math tutoring demo on Khan Academy [Video]. youtu.be/IvXZCocyU_M

Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik, 5(*2), 87–101.

Klinger, M. (2019). „Besser als der Lehrer!„ – Potenziale CAS-basierter Smartphone-Apps aus didaktischer und Lernenden-Perspektive. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitalisierung fachbezogen gestalten: Tagungsband der Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikun-*

terricht und digitale Werkzeuge vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Franzbecker.

König, J., & Rothland, M. (2022). Stichwort: Unterrichtsplanungskompetenz. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 25*, 771-–813. DOI:10.1007/s11618-022-01107-x

Luzano, J. (2024). Assessment in mathematics education in the sphere of artificial intelligence: A systematic review on its threats and opportunities. *International Journal of Academic Multidisciplinary Research, 8*(2), 100–104.

Maddigan, P., & Susnjak, T. (2023). Chat2VIS: Generating data visualizations via natural language using ChatGPT, Codex and GPT-3 large language models. *IEEE Access, 11*, 45181–45193. DOI:10.1109/ACCESS.2023.3274199

Maio, F., Holmes, W., & UNESCO (2023). Guidance for generative AI in education and research. UNESCO. DOI:10.54675/EWZM9535

Michalewicz, Z., & Fogel, D. B. (2004). *How to solve it: Modern heuristics*. Springer. DOI:10.1007/978-3-662-07807-5

Open AI. (2022). *Solving (some) formal math olympiad problems*. openai.com/index/formal-math/

Pardos, Z. A., & Bhandari, S. (2024). ChatGPT-generated help produces learning gains equivalent to human tutor-authored help on mathematics skills. *PLOS ONE, 19*(5). DOI:10.1371/journal.pone.0304013

Peters, F. & Schorcht, S. (2024, 4. März). GPT-Netzwerke im Task Design – Einsatz von Communicative KI-Agents als multiprofessionelles Team [Poster]. 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. DOI:10.13140/RG.2.2.16091.99362

Pham Van Long, P., Vu, D. A., Hoang, N. M., Do, X. L., & Luu, A. T. (2023). ChatGPT as a math questioner? Evaluating ChatGPT on generating pre-university math questions. In *Proceedings of the 39th ACM/SIGAPP Symposium on Applied Computing (SAC 2024)*. arXiv:2312.01661

Rasila, A., Malinen, J., & Tiitu, H. (2015). On automatic assessment and conceptual understanding. *Teaching Mathematics and Its Applications, 34*, 149–159. DOI:10.1093/TEAMAT/HRV013

Schorcht, S., Baumanns, L., Buchholtz, N., Huget, J., Peters, F., & Pohl, M. (2024). Lernt die KI nun Sehen und Zeichnen? Herausforderungen der Bildgenerierung und Bildinterpretation mit ChatGPT in der Mathematikdidaktik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 116*, 22–29.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114–145.

Sommerhoff, D., Lutz, T., & Rott, B. (2024). Künstliche Intelligenz in der Mathematikdidaktik. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024. 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. WTM

Svendsen, C. (2023). *ChatGPT – Hype oder bereits ein weiteres nützliches Werkzeug?* blog.24translate.de/chatgpt-hype-oder-bereits-ein-weiteres-nuetzliches-werkzeug

[SWK] Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz (2024). *Large Language Models und ihre Potenziale im Bildungssystem: Impulspapier der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz*. www.swk-bildung.org/content/uploads/2024/02/SWK-2024-Impulspapier_LargeLanguageModels.pdf

Tarantini, E. (2023). Reflective teacher education in the digital age. In D. Ifenthaler, D. G. Sampson, & P. Isaías (Hrsg.), *Open and inclusive educational practice in the digital world. Cognition and exploratory learning in the digital age* (pp. 213–231). Springer. DOI:10.1007/978-3-031-18512-0_13

Thurn, S. (2019). Lehrer als „Weltmeister im Komplexitätsmanagement“. *Pädagogik, 7–8* (2019).

Trinh, T. H., Wu, Y., & Le, Q. V. (2024). Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature, 625*, 476–482. DOI:10.1038/s41586-023-06747-5

Urban, M., Děchtěrenko, F., Lukavský, J., Hrabalová, V., Svacha, F., Brom, C., & Urban, K. (2024). ChatGPT improves creative problem-solving performance in university students: An experimental study. *Computers & Education, 215*, 105031. DOI:10.1016/j.compedu.2024.105031

U.S. Department of Education, Office of Educational Technology (2023). Artificial intelligence and the future of teaching and learning: Insights and recommendations. Washington, DC.

Weber, R. (2024). *Einsatzmöglichkeiten von künstlicher Intelligenz als Unterstützung von Mathematiklehrkräften bei diagnostischen Tätigkeiten.* Unveröffentlichte Masterarbeit, Universität Hamburg.

Wissenschaftsrat (2023). *Empfehlungen zur Lehramtsausbildung im Fach Mathematik.* Köln. DOI:10.57674/7epf-fp50

Zeller, C., & Schmid, U. (2017). Automatic generation of analogous problems to help resolving misconceptions in an intelligent tutor system for written subtraction. Vortrag auf der 24th International Conference on Case Based Reasoning, Atlanta, GA, 31th October – 2nd November 2016

Nils Buchholtz, Universität Hamburg
nils.buchholtz@uni-hamburg.de

Sebastian Schorcht, Technische Universität Dresden
sebastian.schorcht@tu-dresden.de

Lukas Baumanns, Technische Universität Dortmund
lukas.baumanns@tu-dortmund.de

Judith Huget, Universität Hamburg
judith.huget@uni-hamburg.de

Norbert Noster, Universität Würzburg
norbert.noster@uni-wuerzburg.de

Benjamin Rott, Universität zu Köln
brott@uni-koeln.de

Hans-Stefan Siller, Universität Würzburg
hans-stefan.siller@uni-wuerzburg.de

Daniel Sommerhoff, IPN Kiel
sommerhoff@leibniz-ipn.de

Exploring Mathematics Education in Various Countries

Interview with Alf Coles, Chair of the British Society for Research in Learning Mathematics

Sebastian Schorcht

General

Dear Alf, thank you for your willingness to participate in this interview. To start, could you tell us how the mathematics education research community is organised in your country?

We have a "Joint Mathematical Council" which brings together representatives of many professional and academic bodies concerned with mathematics and mathematics education in the UK. This body meets three times a year and will commission reports and engage with policy makers. Researchers are represented on this council through the British Society for Research into Learning Mathematics (BSRLM). I am the current Chair of BSRLM but am responding to these questions as an individual. For me, BSRLM is the key vehicle through which the research community is organised in the UK, although we have recognised that we have more work to do to extend our work across the whole UK.

I am of course biased, but I believe BSRLM is a precious organisation, cherished by researchers in this country and more widely. Its main activity is organising three, one day conferences a year. These are conferences where anyone can present their work and receive supportive but challenging feedback. One of BSRLM's strengths is its diversity and inclusivity. We will always have a wide range of presentations, including teachers, PhD students, Professors and each will be treated in the same way – with respectful critique. During COVID, we moved to online conferences and, since then, we have retained one day conferences each year in this mode (the other two being face to face). The online conference takes place in March each year and one of the reasons members seem to like it, is the opportunity for researchers from around the world to attend and contribute. So, anyone from Germany is more than welcome to join and attend and get involved. You can find more details about BSRLM here: bsrlm.org.uk/167399-2/

BSRLM also owns the journal Research in Mathematics Education. This began as a journal linked to our conferences but has now become a significant international publication. And, finally, BSRLM contributes to the "British Congress of Mathematics Education" (BCME), which takes place every four years and is a little like a version of ICME, run just in the UK, bringing together researchers, teachers, teacher educators and more.

Research Focus and Methods

Are there specific themes or issues that are particularly in focus in mathematics education research in your country?

I do not claim to have an overview and so will comment on those themes and issues that have taken my attention. When I was a teacher in secondary school, I introduced "mixed attainment" grouping for students in years 7 and 8 (age 11–13) in mathematics and, maybe because of this, I have been very interested in on-going research into mixed attainment teaching, being carried out by the Institute of Education (2024). In the UK, teaching of mathematics has generally been "setted", i.e., with children organised by prior attainment. You might well see children from the very start of school sitting on tables with peers who are judged to be of similar "ability". And we know that once you are in a set with other low attaining students, it is hard to get out. There are moves, encouraged by government, to have more mixed grouping practices and this is something I see as important, in terms of tackling inequalities of educational outcomes. As a country, we know that students' socio-economic background is a significant predictor of achievement. We also know from other countries that this need not be the case, and yet the problem has persisted through all attempts at change.

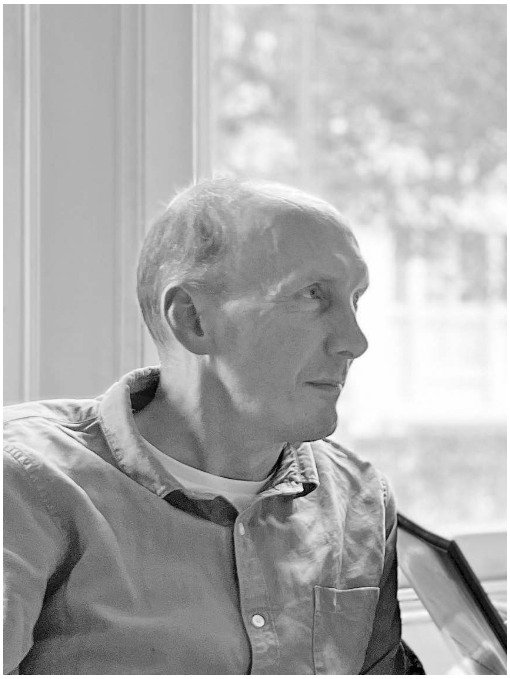


Foto: Nicola Turner

Alf Coles, Chair of BSLRM

On the theme of disadvantaged students, the University of Nottingham is just embarking on an ambitious longitudinal cohort study – to try to understand more about how to improve mathematics education for all students. I am on one of the advisory panels for this project, which is unique in my experience of mathematics education research, in its aim to follow students over seven years. You can find more details on the Website of Observatory for Mathematical Education (2024). I am excited by what we might learn.

And, to mention just one more theme, the University of Loughborough has an important "Centre for Mathematical Cognition" (2024), funded by a large government grant, which brings together mathematics educators and psychologists and cognitive scientists. One of their aims is to bring research results to schools and make research accessible, as well as linking with schools to discover their research priorities.

What challenges does the mathematics education research community in your country face?

University funding is in a parlous state, as a result of a freeze on student fees that has been in place for almost 10 years. University funding changed in 2012 to be largely paid for by individuals, with fees set at £ 9000 a year, for home students. These fees are paid via government loans that students pay back over a 30 or 40 year period, once they leave and their salary is over a threshold. The maximum fee that could be charged increased to £9250 in 2015 and has been stuck there ever since – it has become politically toxic to propose further rises. If you think about what has happened to University costs in that time, the result is a yearly squeeze on budgets – which many Universities try to offset by raising the proportion of international students. One knock on effect for researchers is that many are on temporary and precarious contracts.

How is collaboration between mathematics educators and teachers organized in your country to implement research findings into practice?

Recently our school inspectorate (Ofsted) wrote a "review of research" with the aim of relating what is known about good maths teaching to schools – with the implication they would be looking for the implementation of recommended practices when they visit schools. The review was roundly criticised, within the research community (e.g., see: Gilmore et al., 2021), for being more of a position paper – misrepresenting research results in order to push messages about the importance of knowledge and memorising procedures over any focus on understanding.

There are statements in the review pushing a narrow image of problem solving (limiting it to word problems), to take one example. And then, in a related document of advice to inspectors of schools, the review of research helps justify advice that, "demonstrating proof of 'understanding' will not guarantee that pupils learn useful facts, methods and strategies. Moments of understanding, no matter how powerful, are likely to be fleeting". In other words, inspectors are not to be focused on what students do, or do not, appear to understand, but rather on facts, methods and strategies.

This sounds quite unbelievable to write for an international audience. I think the UK is a cautionary tale of how education research findings can become weaponised for political purposes.

International Perspectives and Collaborations

To what extent do international research trends and discussions influence mathematics education in your country?

Certainly, PISA and TIMSS are taken seriously in the media and by politicians. Politicians look at other country's practices. We are in a time currently when there has been a lot of focus on how we might adopt elements of mathematics teaching practices from East Asia.

Educational Policy and Practice

Are there any special programs or initiatives focused on teacher training or professional development in mathematics?

For the first time we now have a mandated curriculum for teacher education in England – including suggested reading lists. Every teacher education provider recently had to re-apply for accreditation to continue offering teacher education – showing how they would implement this new curriculum. I see the move as further politicisation and removal of professional autonomy of teacher educators. There is an attempt here to shape the messages given to new teachers, along the same kind of lines as the "review" of research mentioned above.

More positively, the government has funded a network of "Maths Hubs" in England (NCETM, 2024). These are based in schools and have responsibility for organising professional development across primary and secondary sectors. Some of the programmes they run are quite inspiring. For instance, there is a programme of training in Mastery teaching at primary school, which is providing many teachers with quality training and also supporting peer led development within and across schools. Hubs need to implement some national programmes of training but also develop local initiatives, responding to needs.

What particular challenges will educational policy in your country have to face in the coming years?

Along with Universities, there is a crisis in school funding. Schools have faced real terms cuts over many years now. For the last two years, pay deals have been given to teachers, which have only been part funded by increases from government – the rest having to come from existing budgets. This has led to staffing cuts and a general sense of there not being the resources needed to provide all students with what they need. We used to have a large workforce of "teaching assistants" in schools, supporting students with the greatest needs – many schools have had to cut these roles to balance their budgets. Any new policies will need to address this fundamental issue.

How is teacher education structured in your country? How is the school education system structured in your country?

There are many routes to becoming a teacher – university courses but also courses run by schools. University courses tend to be 1 year post graduate degrees, in which 2/3rds of the year will be spent in a school. School based courses run along similar lines, but with more minimal University input.

Our schools are now largely run by private companies, called "Multi-Academy Trusts" (MATs). MATs have to follow the National Curriculum, but are free to set their own pay and conditions for teachers. The privatisation of education, at University and school level, has been a creeping reform over the last 20 years.

Future Perspectives

What trends or developments do you see as particularly promising or important for the future of mathematics education in your country?

I have personally been heartened by moves towards what I see as a "socio-ecological" turn, (or perspective, or movement) in mathematics education. This is a perspective taking seriously what is happening outside the classroom walls. I do see a lot of what happens in UK schools as essentially "business as usual" and I wonder if this is rational when, to quote a phrase from a friend, Liz de Freitas, there are boats on the streets of Nairobi. ICMI have commissioned a Study conference on "Mathematics Education and the Socio-Ecological" which I view as a sign of hope – see Coles & Le Roux (2024) if you would like to get involved. This conference will bring together work happening around the world and will, I am sure, make a strong case for curriculum reform, assessment reform, pedagogical reform.

What steps do you believe are necessary to further promote and improve research and practice in mathematics education in your country?

I believe strongly we need a de-politicised process for the development of the curriculum (and, with it, assessment and school inspection). I would like to see a permanent advisory council on education, with responsibility to research, plan and propose curriculum change and renewal. Change could then be rational, taking account of new research and able to respond to current global contexts, rather than being dictated by government ideologies.

Thank you, Alf, for taking the time to share your insights with us.

Literature

Center for Mathematical Cognition (2024). *Research-inspired maths learning*. www.lboro.ac.uk/research/cmc/

Coles, A. & Le Roux, K. (eds.) (2024). *The 27th ICMI Study "Mathematics Education and the Socio-Ecological": Addendum to the discussion document for the 27th ICMI study.* icmistudy27.sciencesconf.org

Gilmore, C., Trundley, R., Bahnmueller, J., & Xenidou-Dervou, I. (2021). How research findings can be used to inform educational practice and what can go wrong: The Ofsted Mathematics Research Review 2021. *Mathematics Teaching, 278*, 35–38. atm.org.uk/write/MediaUploads/Journals/MT278/12.pdf

Institute of Education (2024). *The student grouping study: Investigating the impact of setting and mixed-attainment grouping*. www.ucl.ac.uk/ioe/departments-and-centres/departments/curriculum-pedagogy-and-assessment/student-grouping-study-investigating-impact-setting-and-mixed-attainment-grouping

[NCETM] National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics (2024). *Maths Hubs: Leading Improvement in Maths Education across England.* www.ncetm.org.uk/maths-hubs/

Observatory of Mathematics Education (2024). *Welcome to the Observatory for Mathematical Education*. www.nottingham.ac.uk/education/observatory/observatory-for-mathematical-education.aspx

Alf Coles, University of Bristol
alf.coles@bristol.ac.uk

Sebastian Schorcht, Schriftführung der GDM
schriftfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

„Man kann nicht wissen, was etwas ist, ohne zu wissen, was es nicht ist.“

Studie zur Förderung von professionellen Kompetenzen angehender Grundschullehrkräfte zur kognitiven Aktivierung im Mathematikunterricht

Patricia Bourcevet und Heike Hahn

Einführung

Wie können professionelle Kompetenzen und professionelle Unterrichtswahrnehmung von angehenden Mathematik-Grundschullehrkräften zur kognitiven Aktivierung ihrer Schüler/innen gefördert werden? Diese Frage ist für die Lehramtsausbildung insofern von hoher Bedeutung, da die Unterrichtsqualitätsforschung zeigt, dass insbesondere Merkmale der Tiefenstruktur für das Lernen von Schüler/innen und ihre Leistungen relevant sind (Klieme, 2006; Kunter & Ewald, 2016). In der Tiefenstruktur konnten Merkmale guten Unterrichts zu den drei Basisdimensionen eines lernförderlichen Unterrichts verdichtet werden: Zu ihnen zählen eine effektive Klassenführung, eine konstruktive Lernunterstützung sowie die kognitive Aktivierung von Lernenden (u. a. Kunter & Ewald, 2016; Kunter & Voss, 2011; Klieme et al., 2006). Im Vergleich zu den anderen Basisdimensionen erscheint die Förderung von professionellen Kompetenzen und professioneller Unterrichtswahrnehmung zur kognitiven Aktivierung von Schüler/innen aufgrund von unterschiedlichen Unterrichtsinhalten und -zielen als besonders anspruchsvoll (Praetorius et al., 2018). Während professionelle Kompetenzen Wissen, Überzeugungen, Motivation und selbstregulative Fähigkeiten umfassen, wird mit professioneller Unterrichtswahrnehmung die Fähigkeit von (künftigen) Lehrpersonen beschrieben, unterrichtsrelevante Ereignisse zu identifizieren, wissensbasiert zu interpretieren und basierend auf den daraus gezogenen Rückschlüssen adäquate und effektive Handlungsalternativen zu entwickeln (Sherin & van Es, 2009). Bei der Ausbildung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften kommt dem Zusammenspiel von professionellem Wissen und professioneller Unterrichtswahrnehmung eine besondere Bedeutung zu.

Im Folgenden sollen die Ziele und die theoretische Rahmung einer aktuell laufenden Studie vorgestellt werden, die videobasierte mathematische Lernumgebungen mit dem Ziel der Förderung der professionellen Kompetenzen und der professionellen Unterrichtswahrnehmung zur kognitiven Aktivierung von Grundschullehramtsstudierenden im Bachelor-Studiengang untersucht. Hierzu wurden zwei videobasierte Lernumgebungen getreu dem Gedanken „Man kann nicht wissen, was etwas ist, ohne zu wissen, was es nicht ist.“ (Marton et al., 2017) entwickelt, bei denen das Analysieren des Lehrerhandels sowie die begründete Auswahl von Handlungsalternativen in Bezug auf die kognitive Aktivierung im Mittelpunkt stehen. In die Konzeption dieser Lernumgebung sind verschiedene theoretische Grundlagen eingeflossen, u. a. die Theorie des negativen Wissens (Oser & Spychinger, 2005) und Positionen des Konzeptlernens (Tennyson & Cocchiarella, 1986).

Die Studie ist im Rahmen des interdisziplinären Forschungsprojekts „Video.LinK“ (Videos in der Lehrer_innenbildung – Lehrerbildungsphasen in Kooperation) angesiedelt, welches an der Universität Erfurt und der Technischen Universität Dortmund (Prof. B. Gold und J. Bauersfeld) verortet ist. Ziel von „Video.LinK“ ist die Förderung von mathematikdidaktischen und pädagogisch-psychologischen Kompetenzen bei angehenden Lehrer/innen im Kontext einer videobasierten Lernumgebung und in Kooperation mit der zweiten Phase der Lehrerbildung.

Theoretische Rahmung

Professionelle Kompetenz von Lehrkräften umfasst das professionelle Wissen, Überzeugungen, motivationale Orientierungen und selbstregulative Fähigkeiten (Baumert & Kunter, 2006). Das professionelle Wissen als Bestandteil von professioneller Kompetenz ist deshalb von besonderer Bedeutung, da es Einfluss auf die Unterrichtsqualität und die Schülerleistungen hat (Baumert, et al., 2011). Im Verbund mit der professionellen Unterrichtswahrnehmung bedingt das professionelle Wissen das professionelle Handeln von Lehrkräften (Blömeke et al., 2015). Zum professionellen Wissen von Lehrkräften kommen situationsspezifische Fertigkeiten des professionellen Handelns hinzu (Blömeke et al., 2015), zu denen die professionelle Unterrichtswahrnehmung gehört.

Zur Förderung von professionellen Kompetenzen und der professionellen Unterrichtswahrnehmung von angehenden Lehrkräften werden seit einigen Jahren Videovignetten aus dem realen (Mathematik-)Unterricht genutzt. Unterrichtsvideos ermöglichen eine vertiefte Analyse von Unterrichtssituationen (Le Fevre, 2003), in denen verschiedene Perspektiven der Basisdimensionen von Unterrichtsqualität eingenommen werden können und deren Analyse ohne Handlungsdruck stattfinden kann. Dies wird dadurch möglich, dass Unterrichtsvideos die Komplexität von Unterricht abbilden (Miller & Zhou, 2007) und zugleich die Möglichkeit bieten, ausgewählte Sequenzen i. S. auffälliger oder besonderer Unterrichtssituationen zu erkennen, das Video zu pausieren und wiederholt anzuschauen (LeFevre, 2003). Die Analyse von Unterrichtsvideos fördert nachweislich die professionelle Unterrichtswahrnehmung (u. a. Hörter et al., 2020; Gaudin & Charlies, 2015; Gold et al., 2013). Dem Zusammenspiel von professionellem Wissen und professioneller Unterrichtswahrnehmung kommt bei der Ausbildung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften eine besondere Bedeutung zu, da das professionelle Wissen durch die professionelle Unterrichtswahrnehmung zur Performanz der Lehrkraft im Unterricht vermittelt wird (Schwarz et al., 2022). Es ist daher nicht verwunderlich, dass positive Zusammenhänge zwischen der professionellen Unterrichtswahrnehmung der Lehrperson und dem Verständnis des Unterrichtsinhaltes ihrer Schüler/innen bestehen (Roth et al., 2011). Da die professionelle Unterrichtswahrnehmung ein wissensbasierter Prozess ist und somit Rückgriff auf theoretisches Wissen erfordert, ist in Abhängigkeit vom Analysefokus ein spezifisches Wissen der Analysierenden notwendig (Stürmer et al., 2013).

Um die Fähigkeiten von (künftigen) Lehrpersonen zur kognitiven Aktivierung ihrer Schüler/innen zu fördern, bedarf es einer gezielten Auseinandersetzung mit dieser Basisdimension von Unterrichtsqualität. Mit dem im deutschen Sprachraum verbreiteten Terminus der kognitiven Aktivierung wird ein Unterricht charakterisiert, der Lernende zu einem vertieften Nachdenken, zu einer elaborierten Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt bzw. zur Weiterentwicklung (u.a. Baumert et al., 2010) und Reorganisation bestehender kognitiver Strukturen anregt. Dabei bilden herausfordernde Aufgaben (Stern et al., 2016) eine wichtige Komponente, da gerade im Mathematikunterricht Unterrichtsprozesse über Aufgaben initiiert und gesteuert werden. Diese in Unterrichtsprozesse eingebundenen Aufgaben stellen im Zusammenhang mit aktivierenden Lernformen wie beispielsweise dem Erklären von Lösungswegen oder Lösungsschritten, dem Herstellen von Bezügen zu den Äußerungen von Mitschüler/innen, dem Vergleichen zum Herausfinden von Gemeinsamkeiten und Unterschieden, dem Ziehen von Schlussfolgerungen und Finden von Verallgemeinerungen Phasen im Lernprozess sowie bei der Ergebnisreflektion dar, die im Mathematikunterricht zur kognitiven Aktivierung beitragen (u. a. Gabriel & Lipowsky, 2013, Lipowsky, 2015; Leuders & Holzäpfel, 2011; Stern et al., 2016). Studien zur kognitiven Aktivierung zeigen im Unterschied zu den beiden anderen Basisdimensionen eine hohe Variabilität in verschiedenen Unterrichtsstunden (Praetorius et al., 2014). Eine lernwirksame Gestaltung des Unterrichtes i.S. einer kognitiven Aktivierung bedarf daher eines hohen Maßes an Expertise, die u.a. vom Wissen beeinflusst wird, da das Wissen zentraler Bestandteil der Handlungskompetenz bildet.

Aufbauend auf Fähigkeiten zur professionellen Unterrichtswahrnehmung von Situationen im Lehr-Lern-Prozess, in denen eine kognitive Aktivierung erfolgt, ist das wissensbasierte Einschätzen von Handlungsalternativen wichtig und bildet einen Link zum tatsächlichen, späteren Unterrichtshandeln. Kersting et al. (2012) konnten in diesem Kontext zeigen, dass die Fähigkeit der (künftigen) Lehrperson, Handlungsalternativen in Bezug auf Unterrichtsvideoanalysen vorzuschlagen, positiv mit der Leistung der Schüler/innen im Mathematikunterricht zusammenhängt.

Prozesse des Kontrastierens und Vergleichens helfen in schulischen und akademischen Kontexten (Lipowsky et al., 2019), kennzeichnende Eigenschaften eines Begriffes bzw. eines Konzeptes zu erkennen. Das Vergleichen und Kontrastieren von Handlungsalternativen zu Unterrichtssequenzen aus dem Mathematikunterricht soll im Rahmen der Studie genutzt werden, um einen Verarbeitungsprozess bei den Studierenden anzuregen und mit Hilfe von Argumentationsprozessen ein vertieftes Verständnis der Basisdimension der kognitiven Aktivierung zu erreichen (a. a. O).

Eine weitere theoretische Bezugsperspektive stellt das Konzeptlernen dar. Neue Konzepte, wie dies die Basisdimension der kognitiven Aktivierung für künftige Lehrpersonen ist, können dann erfolgreich verinnerlicht werden, wenn verschiedene, kontrastierende Beispiele von Handlungsalternativen begründet bearbeitet werden (Tennyson & Cocchiarella, 1986). Das Bearbeiten von inkorrekten Beispielen, deren vorgeschlagene Handlungsalternative die kognitive Aktivierung weniger fördern, führt zu einem Lernzuwachs gemäß der

Theorie zum negativen Wissen, bei dem durch das Reflektieren von eher problematischen Beispielen ein umfassenderes Wissen aufgebaut werden kann (Oser & Spychinger, 2005). Dieses umfangreichere Wissen kann die Wahrscheinlichkeit gelungener Handlungen erhöhen und davor schützen, in Zukunft ähnliche wie im Beispiel der angebotenen Handlungsalternative angeführten „Fehler“ (als nicht zu empfehlende Vorgehensweise im weiteren Unterrichtsprozess) zu begehen, indem komplexere Zusammenhänge durch Kontrastierung des Richtigen/Empfehlenswerten und des Falschen/Nichtempfehlenswerten gegenübergestellt und eingeordnet werden können (Oser & Spychinger, 2005). Das Modell des Lernens durch den Vergleich von Fällen wurde in der Metaanalyse von Alfieri et al. (2013) aufgegriffen. Mit Hilfe dieses Modells kann bei Lernenden ein schematisches Verständnis über das Konzept – in diesem Falle der kognitiven Aktivierung im Mathematikunterricht am Beispiel einer konkreten Aufgabenstellung – aufgebaut werden, das ihnen hilft, ihr Wissen auf neue/andere mathematische Inhalte zu übertragen. Auch Gentner et al. (2003) stellte heraus, dass das Aneignen von Konzepten, wie es das professionelle Wissen zur kognitiven Aktivierung ist, durch das Analysieren von multiplen Beispielen erfolgreich gelingen kann. Verständnisunterstützend wirkt auch das Bearbeiten mehrerer Beispiele (Renkl, 2015). Sind Studierende überdies in der Lage, zwischen den angebotenen Handlungsalternativen Analogien zu erkennen, regt dies Lernende weiterhin an, das jeweilige Konzept zu verstehen (Hoffmann et al., 2022). Das Untersuchen von insbesondere inkorrekten Beispielen, in diesem Falle also die Handlungsalternativen mit wenig oder geringem Potenzial zur kognitiven Aktivierung, verlangt viel kognitive Anstrengung der Lernenden – dies führt zu einer verständlichen und komplexen kognitiven Repräsentation des zu lernenden Konzepts (Chillarege et al., 2003; Oser & Spychinger, 2005). Durch das Kontrastieren von positiven und weniger positiven bzw. negativen Beispiele für Handlungsalternativen erhalten die Studierenden folglich ein verbessertes schematisch-konzeptionelles Verständnis über das Konzept der kognitiven Aktivierung.

Ziele und Konzeption der Studie

Mit der momentan laufenden Studie soll die Frage überprüft werden, inwiefern das Vergleichen und Kontrastieren von Handlungsalternativen zu einer Unterrichtsszene aus dem Mathematikunterricht der Grundschule dazu beiträgt, das professionelle Wissen und die professionelle Unterrichtswahrnehmung zur kognitiven Aktivierung der Studierenden zu fördern. Es wird erwartet, dass die Arbeit mit positiven und weniger positiven bzw. negativen Beispielen für Handlungsalternativen einen höheren Lernzuwachs seitens der Studierenden fördert, als das Arbeiten mit ausschließlich positiven Beispielen.

Die Studie mit Grundschullehramtsstudierenden ist so angelegt, dass ihnen verschiedene Beschreibungen (Textvignetten) von Handlungsalternativen zu einem Videoausschnitt angeboten werden. Diese Handlungsalternativen beziehen sich auf Unterrichtsprozesse, die mit einem Videoausschnitt aus authentischem Mathematikunterricht gezeigt werden. Im Videoausschnitt wird eine Unterrichtsszene mit Potenzial zur kognitiven Aktivierung präsentiert, in der eine herausfordernde Aufgabe (u. a. Gabriel & Lipowsky, 2013; Riecke-Baulecke, 2017 mit Bezug auf Stern et al., 2016), z. B. ein Entdeckerpäckchen, bearbeitet wird. Das Video wird an der Stelle unterbrochen, in der sich ein aktivierendes Unterrichtsgespräch zur Erschließung des mathematischen Zusammenhanges anschließen oder eine Ergebnissicherung bzw. das Finden einer Verallgemeinerung folgen würde. Die in Textform vorgeschlagenen Handlungsalternativen setzen an die konkrete Unterrichtsszene an und sollen als mögliche Weiterführungen des Lehrerhandelns verstanden werden.

Während in der Versuchsgruppe mit kontrastierenden Fällen des weiteren unterrichtlichen Handelns gearbeitet wird, werden in der Kontrollgruppe Handlungsalternativen angeboten, die Möglichkeiten für ein weiteres kognitiv aktivierendes Vorgehen beschreiben. Somit wird von Teilnehmenden in der Kontrollgruppe erwartet, dass sie das Potenzial zur kognitiven Aktivierung anhand der Merkmale begründen, während die Versuchsgruppenteilnehmer*innen die Handlungsalternativen hinsichtlich gemeinsamer und unterscheidender Merkmale von kognitiver Aktivierung analysieren und einschätzen.

Der Theorie des Structure-Mapping (Gentner, 1983) und dem schlussfolgernden Denken (Klauer, 2014) folgend, werden in der Versuchsgruppe für jede Sequenz eine positive und eine weniger positive oder eher negative Handlungsalternative in Bezug auf ihr Potenzial zur Förderung der kognitiven Aktivierung der Schüler/innen zur gestellten Mathematikaufgabe angeboten. Studierende erhalten dazu den Auftrag, die beiden Handlungsalternativen in Bezug auf Merkmale der kognitiven Aktivierung miteinander zu vergleichen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede im vorgeschlagenen Vorgehen zu erkennen und im Hinblick auf die Effizienz bezogen auf die kognitive Aktivierung zu bewerten. Durch den Rückbezug auf das professionelle Wissen zu Merkmalen der kognitiven Aktivierung und das somit wissensbasierte Einschätzen der angebotenen Handlungsalternativen durch das Identifizieren von positiven Ansätzen und dem Kontrastieren der kognitiv aktivierenden mit weniger kognitiv aktivierenden Vorgehensweisen soll sowohl das professionelle Wissen als auch die professionelle Unterrichtswahrnehmung der Studierenden gefördert werden. In der Kontrollgruppe sollen demgegenüber zwei ausschließlich positive Handlungsalternativen bezogen auf die kognitive Aktivierung zur gleichen Unterrichtssequenz anhand der Merkmale eingeschätzt werden (Star & Rittle-Johnson, 2009). Somit liegt der Fokus in der Versuchsgruppe auf dem Vergleich von positiven und negativen Handlungsalternativen in Bezug auf die Merkmale von kognitiver Aktivierung, während in der Kontrollgruppe ausschließlich positive Handlungsalternativen bezogen auf die Merkmale kognitiver Aktivierung eingeschätzt werden.

Um Rückschlüsse auf die Wirkung der so konzipierten Lernumgebung auf die Entwicklung der professionellen Kompetenzen der Studierenden ziehen zu können, wird sowohl vor als auch nach der Intervention das professionelle Wissen sowie die professionelle Unterrichtswahrnehmung der Studierenden hinsichtlich der kognitiven Aktivierung erfasst. Das professionelle Wissen zur kognitiven Aktivierung wird mithilfe eines im Rahmen des Projekts „Video.LinK" selbst entwickelten Tests ermittelt. Dieser beinhaltet Fragen, die sich sowohl auf das deklarative Wissen zur kognitiven Aktivierung beziehen als auch auf dessen Anwendung. Hierzu schätzen Studierende Instruktionen einer Lehrkraft sowie die Qualität von Aufgaben hinsichtlich des Potenzials zur kognitiven Aktivierung ein. Weiterhin werden die Studierenden im Test mit einem Video aus dem Mathematikunterricht konfrontiert, welches sie zunächst in einer offenen Analyse hinsichtlich der kognitiven Aktivierung einschätzen sollen. Mithilfe dieser offenen Analyse des Videos soll die professionelle Unterrichtswahrnehmung der Studierenden erfasst werden. Hierzu identifizieren sie in dem Video relevante Unterrichtsereignisse bzgl. der kognitiven Aktivierung, beschreiben diese, interpretieren sie wissensbasiert und schlagen Handlungsalternativen für das Lehrerhandeln vor. Zur weiteren Erfassung der professionellen Unterrichtswahrnehmung und der Fähigkeit zur Anwendung des professionellen Wissens über Merkmale der kognitiven Aktivierung dienen geschlossene Fragen in Bezug auf die Umsetzung der kognitiven Aktivierung der im Video gezeigten Prozesse. Es wird erwartet, dass Studierende der Versuchsgruppe sowohl in den geschlossenen Fragen als auch bei der Videoanalyse besser abschneiden als die Studierenden der Kontrollgruppe.

Die Studie befindet sich momentan in der Erprobung. Im Rahmen der nächsten Jahrestagung der GDM werden Ergebnisse bzgl. der Förderung der professionellen Kompetenzen und der professionellen Unterrichtswahrnehmung zur kognitiven Aktivierung von angehenden Grundschullehrkräften vorgestellt.

Literatur

Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J., & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: A meta-analytic review. *Educational Psychologist, 48*(2), 87–113.

Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. DOI:10.1177/0022487108324554

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), 469–520. DOI:10.1007/s11618-006-0165-2.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M. & Tsai, Y.M. (2010). Teacher´s mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1),133–180. DOI:10.3102/0002831209345157.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV.* Waxmann.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R.J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift Für Psychologie, 223*(1), 3–13. DOI:10.1027/2151-2604/a000194.

Buchholtz, N., Kaiser, G. & Blömeke, S. (2014). Die Erhebung mathematikdidaktischen Wissens – Konzeptualisierung einer komplexen Domäne. *Journal für Mathematikdidaktik, 35*(1), 101–128. DOI:10.1007/s13138-013-0057-y.

Chillarege, K.A., Nordstrom, C.R. & Williams, K.B. (2003). Learning from Our Mistakes: Error Management Training for Mature Learners. *Journal of Business and Psychology, 17*, 369–385.

Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12–25.

Gabriel, K. & Lipowsky, F. (2013). Hochinferentes Rating: Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Lotz, F. Lipowsky, G. Faust (Hrsg.), *Dokumentation der Erhebungsinstrumente des Projekts „Persönlichkeits- und Lernentwicklung von Grundschulkindern" (PERLE) 3. Technischer Bericht* (pp. 405–422). GFPF.

Gaudin, C., & Chalies, S. (2015). Video viewing in teacher education and professional development: A literature review. *Educational Research Review,* 41–67.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science, 7*(2), 155–170.

Gentner, D., Loewenstein, J., & Thompson, L. (2003). Learning and transfer: A general role for analogical encoding. *Journal of educational psychology, 95*(2), 393.

Gold, B., Förster, S., & Holodynski, M. (2013). Evaluation eines videobasierten Trainingsseminars zur Förderung der professionellen Wahrnehmung von Klassenführung im Grundschulunterricht. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie.*

Jenßen, L., Lehmann, M., Laschke, Ch., Roesken-Winter, B. & Eilerts, K. (2023). Validierung eines Tests zur Erfassung des mathematikdidaktischen Wissens von Lehramtsstudierenden der Primarstufe. *Unterrichtswissenschaft*.

Hörter, P., Gippert, C., Holodynski, M., & Stein, M. (2020). Klassenführung und Fachdidaktik im (Anfangs-)Unterricht. Mathematik erfolgreich integrieren – Konzeption einer videobasierten Lehrveranstaltung zur Förderung der professionellen Unterrichtswahrnehmung. *HLZ – Herausforderung Lehrer*innenbildung, 3*(1), 256–282.

Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning. *American Educational Research Journal, 49*(3), 568–589.

Hoffmann, S., Aiassa, E., Angrish, M., Beausoleil, C., Bois, F. Y., Ciccolallo, L., Craig, P. S., De Vries, R. B. M., Dorne, J. L. C. M., Druwe, I. L., Edwards, S. W., Eskes, C., Georgiadis, M., Hartung, T., Kienzler, A., Kristjansson, E.A., Lam, J., Martino, L., Meek, B. & Tsaioun, K. (2022). Application of evidence-based methods to construct mechanism-driven chemical assessment frameworks. *Altex, 39*(3), 499–518.

Klauer, K. J. (2014). Training des induktiven Denkens – Fortschreibung der Metaanalyse von 2008. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 28*, 5–19.

Klieme, E. (2006). Empirische Unterrichtsforschung: Aktuelle Entwicklungen, theoretische Grundlagen und fachspezifische Befunde. Einführung in den Thementeil. *Zeitschrift für Pädagogik, 52*, 765–773.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projektes „Pythagoras“. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 127–146). Waxmann.

Kunter, M. & Ewald, S. (2016). Bedingungen und Effekte von Unterricht: Aktuelle Forschungsperspektiven aus der pädagogischen Psychologie. In N. McElvany, W. Bos, H. G. Holtappels, M. M. Gebauer & F. Schwabe (Hrsg.), *Bedingungen und Effekte guten Unterrichts* (pp 9–31). Waxmann.

Kunter, M. & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COAKTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COAKTIV* (pp. 85–113). Waxmann.

Le Fevre, D. M. (2003). Designing for teacher learning: Video-based curriculum design. *Advances in Research on Teaching, 10*, 235–258.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft, 39*, 213–230.

Lipowsky, F. & Bleck, V. (2019). Was wissen wir über guten Unterricht? – Ein Update. In U. Steffens & R. Messner (Hrsg.), *Unterrichtsqualität. Konzepte und Bilanzen gelingenden Lehrens und Lernens* (pp. 219–249). Waxmann.

Lipowsky, F. (2015). Unterricht. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (pp. 69–105). Springer.

Liposwky, F., Hess, M., Arend, J., Böhnert, A. Denn, A.-K., Hirstein, A. & Rzejak, D. (2019). Lernen durch Kontrastieren und Vergleichen – Ein Forschungsüberblick zu wirkmächtigen Prinzipien eines verständnisorientierten und kognitiv aktivierenden Unterrichts. In U. Steffens & R. Messner (Hrsg.), *Unterrichtsqualität. Konzepte und Bilanzen gelingenden Lehrens und Lernens* (pp. 373–402). Waxmann.

Lipowsky, F. & Hess, M. (2019). Warum es manchmal hilfreich sein kann, das Lernen schwerer zu machen - Kognitive Aktivierung und die Kraft des Vergleichens. In K. Schöppe & F. Schulz (Hrsg.), *Kreativität & Bildung – Nachhaltiges Lernen* (pp. 77–132). kopaed.

Marton, F., Kullberg, A. & Runesson Kempe, U. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?. *ZDM Mathematics Education 49*, 559–569.

Miller, K., & Zhou, X. (2007). Learning from classroom video: What makes it compelling and what makes it hard. In R. Goldmann, R. Pea, B. Barron, & S. J. Derry (Hrsg.), *Video research in the learning sciences* (pp. 321–334).

Oser, F., & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft: Zur Theorie des negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur*. Beltz.

Praetorius, A. K., Pauli, C., Reusser, K., Rakoczy, K. & Klieme, E. (2014). One lesson is all you need? Stability of instructional quality across lessons. *Learning and Instruction, 31*, 2–12.

Praetorius, A. K., Klieme, E., Herbert, B., & Pinger, P. (2018). Generic dimensions of teaching quality: The German framework of three basic dimensions. *ZDM, 50*(3), 407–426.

Renkl, A. (2015). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (pp. 3–24). Springer.

Riecke-Baulecke, T. (2017). Unterrichtsqualität. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Roesken-Winter, Chr. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (pp. 149–166). Klett Kallmeyer.

Roth, K. J., Garnier, H. E., Chen, C., Lemmens, M., Schwille, K., & Wickler, N. I. (2011). Videobased lesson analysis: Effective science PD for teacher and student learning. *Journal of Research in Science Teaching, 48*(2), 117–148.

Schwarz, B., Döhrmann, M., Blömeke S. (2022). Studien zur professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften – Das TEDS-Forschungsprogramm im Überblick. In N. Buchholtz, B. Schwarz & K. Vorhölter (Hrsg.), *Initiationen mathematikdidaktischer Forschung*. Springer Spektrum.

Sherin, G. M., & Van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of teacher education*, *60*(1), 20-37.

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*(4), 408–426.

Stern, E., Schalk, L. & Schumacher, R (2016): Lernen. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Roesken-Winter, Chr. Selter (Hrsg.), *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (pp. 106–120). Klett Kallmeyer.

Stürmer, K., Könings, K. D., & Seidel, T. (2013). Declarative knowledge and professional vision in teacher education: Effect of courses in teaching and learning. *British Journal of Educational Psychology, 83*(3), 467–483.

Tennyson, R. D. & Cocchiarella, M. J. (1986). An Empirically Based Instructional Design Theory for Concept Teaching. *Review of Educational Research, 36*, 40–71.

Voss, T., Kunter, M. & Baumert, J. (2011). Assessing teacher candidates´ general pedagogical/psychological knowledge: Test construction and validation. *Journal of Educational Psychology, 103*(4), 952–969.

Patricia Bourcevet, Universität Erfurt
patricia.calies@uni-erfurt.de

Heike Hahn, Universität Erfurt
heike.hahn@uni-erfurt.de

Bayerischer Modellversuch zur nachhaltigen Förderung von rechenschwachen Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe

Annalisa Steinecke und Volker Ulm

Einleitung

Ein beträchtlicher Anteil an Schülerinnen und Schülern zeigt in der Primarstufe gravierende Lernschwierigkeiten beim Erwerb des Basisstoffs der Arithmetik (Gaidoschik et al., 2021). Dieses Phänomen wird unterschiedlich bezeichnet: Während sich die GDM beispielsweise auf die Umschreibung *besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen* verständigt hat (ebd.), wird innerhalb des bayerischen Schulsystems derzeit der Begriff *Rechenschwäche* verwendet. Gemäß Gaidoschik et al. (2021) manifestieren sich die spezifischen Schwierigkeiten in drei zentralen Inhaltsbereichen des arithmetischen Basisstoffs. Rechenschwäche ist demnach ein gravierender Mangel an Verständnis für natürliche Zahlen, für das dezimale Stellenwertsystem und für die Rechenoperationen. Der Mangel kann dabei in einem, in zwei oder in allen drei genannten Bereichen vorliegen und ist insofern „gravierend", als dass er durch undifferenziertes Weiterlernen im regulären Unterricht nicht überwunden werden kann (Steinecke & Ulm, 2025).

Die Verständnisdefizite beziehen sich in erster Linie auf die Lerninhalte der Jahrgangsstufen 1 und 2. Dennoch ist Rechenschwäche auch ein Thema für die Sekundarstufe, denn „aus ‚rechenschwachen' GrundschülerInnen werden nun einmal, sofern die Schwierigkeiten nicht (was viel zu selten geschieht) im Grundschulalter überwunden werden, ‚rechenschwache' SekundarstufenschülerInnen" (Gaidoschik, 2008). Gaidoschik et al. (2021) betonen, dass die für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen charakteristischen Denkweisen, Defizite und Strategien, die sich im Grundschulalter zeigen, bei Jugendlichen in der Sekundarstufe gleichermaßen anzutreffen sind (u. a. Krajewski & Ennemoser, 2010; Moser Opitz, 2013). Da der Mathematikunterricht der Sekundarstufe inhaltlich auf dem Unterricht der Primarstufe aufbaut, sind rechenschwache Schülerinnen und Schüler nach dem Übertritt in weiterführende Schulen erheblich daran gehindert, die vielfältigen Lernziele des Mathematikunterrichts (etwa zu negativen Zahlen, Brüchen, Termen oder Funktionen) zu erreichen.

Durch eine spezifische Förderung zum Umgang mit natürlichen Zahlen kann rechenschwachen Lernenden allerdings substanziell geholfen werden, die bestehenden Lernlücken zu schließen (u. a. Moser Opitz et al., 2017; Wissmann et al., 2013). Eine gezielte Förderung schafft somit Voraussetzungen dafür, dass rechenschwache Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe erfolgreich weiterlernen können.

Bundesweit gibt es mittlerweile viele bewährte Ansätze, in deren Rahmen Kinder und Jugendliche bei der Überwindung der besonderen Schwierigkeiten zielgerichtet unterstützt werden (u. a. Prediger et al., 2019; Knöppel & Pielsticker, 2023). Besonders umfassende Arbeit wird zum Beispiel im Programm *Mathe sicher können* geleistet (DZLM, o. J.). Im vorliegenden Beitrag wird ein Modellversuch aus Bayern vorgestellt, der seit 2021 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus in Kooperation mit der Universität Bayreuth durchgeführt wird.

Zielsetzung und Struktur des Bayerischen Modellversuchs

Für die Primarstufe wurden durch das Bayerische Kultusministerium seit 2017 rund 100 sogenannte „Förder- und Beratungsstellen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Lernen von Mathematik" eingerichtet. Hier arbeiten Grundschul- und Förderlehrkräfte am Nachmittag mit rechenschwachen Kindern der Jahrgangsstufen 1 bis 4. Die Diagnostik und Förderung erfolgen in der Regel im Einzelsetting. Die Lehrkräfte leisten dies im Rahmen von Anrechnungsstunden, also als Teil ihrer regulären Unterrichtsverpflichtung. Aufgrund der begrenzten Personalressourcen erhalten an den Förderstellen aktuell etwa 10 % der bayerischen Grundschülerinnen und Grundschüler mit Rechenschwäche einen Förderplatz (Ulm & Schwarm, 2020).

Auf einen Impuls des Bayerischen Landtags hin wurden die spezifischen Fördermaßnahmen im Jahr 2021 auf weiterführende Schulen ausgeweitet: Im Zuge eines Modellversuchs soll die diagnosebasierte Förderung von rechenschwachen Lernenden nachhaltig im Schulsystem der Sekundarstufe verankert werden.

Nachdem der Modellversuch zunächst mit 20 Schulen aus Franken begonnen wurde, wurde das Projekt im April 2023 auf 40 Schulen in allen Regierungsbezirken Bayerns ausgedehnt. Im Schuljahr 2023/24 umfasst das Schulnetzwerk zwanzig Mittelschulen, zehn Realschulen und zehn Gymnasien, an denen Förderstrukturen zur Überwindung der besonderen Schwierigkeiten bei Rechenschwäche etabliert werden. Die Förderung richtet sich dabei an rechenschwache Schülerinnen und Schüler aus Jahrgangsstufe 5; pro Schule werden etwa sechs Kinder gefördert. Den Schulen der ersten Gruppe wurde hierfür ein Budgetzuschlag in Höhe von jeweils zwei Wochenstunden vom Staatsministerium zur Verfügung gestellt. Die Schulen der zweiten Gruppe nutzen für den Förderunterricht hingegen zwei Unterrichtseinheiten aus dem schuleigenen Stundenbudget. Für die schulübergreifende Leitung und Koordination des Modellversuchs ist die Autorin des vorliegenden Artikels verantwortlich.

Fortbildung der beteiligten Lehrkräfte

Zur Überwindung der besonderen Schwierigkeiten muss mit den Lernenden auch in der Sekundarstufe an den grundlegenden Inhalten der Arithmetik – also an Lerninhalten der Grundschul-Mathematik – gearbeitet werden. Die hierfür notwendigen fachdidaktischen Grundlagen zur Diagnostik und Förderung erwerben die Lehrkräfte zunächst in Fortbildungsveranstaltungen, die jeweils im ersten Halbjahr ihrer Teilnahme am Modellversuch von der Universität Bayreuth angeboten werden, sowie durch die Lektüre von Fachliteratur.

Aus jeder am Modellversuch teilnehmenden Schule werden mindestens zwei Mathematiklehrkräfte als „Förderexpert:innen“ ausgebildet, die fortan für die Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schüler zuständig sind. Wäre pro Schule nur eine Lehrkraft beteiligt, so würde die aufgebaute Expertise an dieser Schule vollkommen verloren gehen, wenn diese Lehrkraft die Schule verlässt oder andere Aufgaben an der Schule übernimmt. Dadurch hätte die Schule eventuell Probleme, die Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schülern weiter anzubieten. Wenn mindestens zwei Lehrkräfte pro Schule teilnehmen, ermöglicht dies außerdem kollegiale Kooperation an der eigenen Schule.

Ein zentrales Element des Modellversuchs stellt der regelmäßige gemeinsame Austausch im Schulnetzwerk dar. Um den Lehrkräften nach Beginn der eigenen Förderarbeit ausreichend Gelegenheit für die Reflexion ihrer Erfahrungen zu geben und ihnen weitere Impulse zur Thematik Rechenschwäche anzubieten, finden pro Schulhalbjahr zwei bis drei Netzwerktreffen statt – sowohl schulartübergreifend als auch schulartspezifisch, sowohl online als auch in Präsenz. Bei diesen Veranstaltungen werden erprobte Konzepte und Materialien diskutiert, untereinander ausgetauscht und gemeinsam weiterentwickelt. Wenn Schulen zwei Jahre lang Förderung angeboten haben, zielen die Treffen insbesondere darauf ab, Wege zur nachhaltigen Sicherung der aufgebauten Strukturen und zur Dissemination der Expertise zu entwickeln.

Diagnostik von Rechenschwäche im Modellversuch

Um förderbedürftige Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der Sekundarstufe zu identifizieren, sind diagnostische Verfahren notwendig, die von Lehrkräften im regulären Unterrichtsalltag durchgeführt werden können. Zu diesem Zweck wurde an der Universität Bayreuth das sogenannte *Bayreuther Testpaket zur Erfassung von Rechenschwäche im Mathematikunterricht* (Steinecke & Martin, 2022) entwickelt. Es umfasst zwei aufeinander abgestimmte diagnostische Verfahren, die in zwei aufeinander folgenden Schritten durchgeführt werden: Mit dem produktorientierten *Bayreuther Rechentest (BRT)* werden zunächst die potenziell rechenschwachen Schülerinnen und Schüler ermittelt. Anhand der prozessorientierten *Bayreuther Förderdiagnostik (BFD)* wird in diagnostischen Interviews anschließend weiter erkundet, welche spezifischen Verständnisschwierigkeiten diese Kinder haben.

Diese Kombination aus einem standardisierten Screening-Verfahren und einem leifadengestützten Einzel-Interview wird im Modellversuch jeweils zu Beginn des Schuljahres in Jahrgangsstufe 5 durchgeführt. Dies bietet den Lehrkräften Unterstützung hinsichtlich der folgenden beiden Fragen:

- Welche Schülerinnen und Schüler haben besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und benötigen eine spezifische Förderung?
- Welche individuellen Schwierigkeiten haben diese Schülerinnen und Schüler?

Neben der Identifikation der förderbedürftigen Lernenden gewinnen die Lehrkräfte mithilfe des Bayreuther Testpakets somit auch tiefgreifende Einsichten in die individuellen Denk- und Arbeitsweisen dieser Kinder, sodass sie passgenaue Fördermaßnahmen konzipieren und die Fördergruppen sinnvoll zusammenstellen können.

Die Testaufgaben des Bayreuther Rechentests und der Bayreuther Förderdiagnostik überprüfen gemäß der obigen Begriffsdefinition von Rechenschwäche das

Verständnis für natürliche Zahlen, für das Stellenwertsystem und für die Rechenoperationen. Damit man die Erkenntnisse aus beiden Diagnoseverfahren leicht zueinander in Bezug setzen kann, besitzen beide Verfahren die gleiche inhaltliche Struktur: Aufgaben mit gleicher Nummer fokussieren in beiden Verfahren jeweils denselben Lerninhalt.

Das Bayreuther Testpaket steht für die pädagogische Diagnostik in der Schule kostenfrei zur Verfügung. Die zugehörige Handreichung sowie alle Dokumente, die für die Durchführung und Auswertung benötigt werden, finden sich auf der Homepage rechenschwaeche.uni-bayreuth.de.

Förderung bei Rechenschwäche im Modellversuch

Organisatorische Gestaltung der Förderung

Auf der Grundlage der durchgeführten Diagnostik wird den Erziehungsberechtigten rechenschwacher Schülerinnen und Schüler empfohlen, ihre Kinder für den Zusatzunterricht im Rahmen des Modellversuchs anzumelden, damit die Verständnisdefizite aufgearbeitet werden können. Die Fördermaßnahme ist dabei bislang auf die Jahrgangsstufe 5 beschränkt; die Erfahrungen aus der Schulpraxis zeigen jedoch, dass der einjährige Förderzeitraum im Fall von besonders gravierenden Rechenschwierigkeiten nicht ausreicht, um die Lernlücken zu schließen.

Um einerseits möglichst viele Kinder unterstützen und andererseits möglichst individualisierte Fördereinheiten realisieren zu können, erfolgt die Förderung weitestgehend in Kleingruppen. Die Organisation des Förderunterrichts obliegt dabei den beteiligten Schulen: Während die meisten Schulen zusätzliche Unterrichtseinheiten am Nachmittag anbieten („Rechen-AG"), finden die Förderstunden an anderen Schulen am Vormittag statt. Die Kinder dürfen hierzu etwa den regulären Mathematikunterricht oder den Unterricht in anderen Fächern verlassen.

Vonseiten der Universität Bayreuth wurde den Schulen empfohlen, die Förderstunden der beiden Förderexpert:innen zeitgleich durchzuführen. So können die Lehrkräfte je nach Bedarf zwischen den folgenden Phasen wechseln:

- Die beiden Lehrkräfte unterrichten alle Kinder gemeinsam im Team-Teaching.
- Jede Lehrkraft unterrichtet einen Teil der Fördergruppe.

Die Fördergruppen können auf diese Weise von Termin zu Termin bzw. sogar innerhalb einer Förderstunde unterschiedlich zusammengestellt werden. Insbesondere kann eine Lehrkraft zeitweise auch mit einem einzelnen Kind arbeiten, während die andere Lehrkraft die übrigen Kinder unterrichtet. Das umgesetzte Modell schafft also Flexibilität beim Fördern und intensiviert nicht zuletzt die Zusammenarbeit der beiden Förderexpert:innen.

Inhaltliche Gestaltung der Förderung

Sowohl in der Primar- als auch in der Sekundarstufe fokussieren mathematikdidaktisch fundierte Förderansätze auf das Bearbeiten (bzw. nachträgliche Aufarbeiten) der drei eingangs genannten Bereiche des arithmetischen Basisstoffs (u. a. Gaidoschik et al., 2021; Moser Opitz et al., 2017; Prediger et al., 2019). Die Förderstunden verfolgen demnach das Ziel, Verständnis für natürliche Zahlen, für das Stellenwertsystem und für die Rechenoperationen aufzubauen. Eine wertvolle Hilfestellung bieten hierbei unter anderem die umfassenden Diagnose- und Fördermaterialien des Programms *Mathe sicher können* (Selter et al., 2017), die fast alle beteiligten Schulen für den Förderunterricht nutzen. Das Konzept basiert auf drei didaktischen Prinzipien: Die Förderung wird verstehensorientiert, diagnosegeleitet und kommunikationsfördernd gestaltet (DZLM, o. J). Insbesondere werden in den Förderstunden Arbeits- und Veranschaulichungsmittel als Verstehenshilfe (Gaidoschik et al., 2021) eingesetzt, um die Entwicklung von tragfähigen Grundvorstellungen zu unterstützen. Gemäß dem Vierphasenmodell von Wartha & Schulz (2011) werden anfängliche Materialhandlungen nach und nach verinnerlicht und zugunsten mentaler Vorstellungen abgelöst.

An den Realschulen und Gymnasien, an denen die Schülerinnen und Schüler oft weniger gravierende Lernrückstände aufweisen, erproben die Lehrkräfte zudem auch weitere Konzepte: Sie versuchen, die arithmetischen Grundlagen möglichst verbunden mit dem aktuellen Lernstoff aufzuarbeiten, etwa bei der Behandlung von negativen Zahlen, Größen und Einheiten oder Termen und Gleichungen. Dieser Zugang bietet den Kindern Unterstützung bei der Bewältigung von Lernhürden sowohl aus der Primar- als auch der Sekundarstufe und besitzt unmittelbaren Bezug zum regulären Mathematikunterricht und den Leistungserhebungen.

Neben der fachlichen Förderung, die auf das Aufarbeiten der mathematischen Lernrückstände abzielt, widmen sich die Lehrkräfte der emotionalen Stabilisierung der betroffenen Kinder, denn Schülerinnen und Schüler mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen „erleben sich früh als mathematisch inkompetent und unfähig, die an sie gestellten Anforderungen zu erfüllen" (Gaidoschik et al., 2021). In den Förderstunden wird deshalb ganz bewusst ein „geschützter Raum“ geschaffen, in dem Ängste, Sorgen und Nöte offen thematisiert und Selbstwirksamkeitserfahrungen ermöglicht werden. Eine am Projekt beteiligte Gymnasiallehrerin berichtet beispielsweise:

> Für mich zählt die emotionale Stärkung der Kinder im Fach Mathematik zu den größten Gewinnen der Fördermaßnahme. Die Kinder lernen, dass sie nicht dumm sind, sondern nur *noch* nicht alle Fähigkeiten in Mathematik besitzen. Meiner Meinung nach hilft die Förderung enorm, dem *fixed mindset* ‚In Mathe war ich schon immer schlecht und kann auch nichts daran ändern‘ entgegen zu wirken.

Die Rückmeldungen der beteiligten Lehrkräfte, der geförderten Schülerinnen und Schüler sowie ihrer Eltern bringen übereinstimmend zum Ausdruck, dass die Kinder gerne an der Fördermaßnahme teilnehmen und den individualisierten Unterricht in Kleingruppen als Unterstützung empfinden.

Ausblick

In den nächsten Jahren wird die Universität Bayreuth weitere Schulen der Sekundarstufe dabei begleiten, Expertise im Umgang mit rechenschwachen Schülerinnen und Schülern zu entwickeln und entsprechende Förderstrukturen zu etablieren. Die beteiligten Lehrkräfte erproben dabei auch Ansätze, bei der die Förderung im Rahmen von Binnendifferenzierung im regulären Mathematikunterricht umgesetzt wird.

Literatur

DZLM – Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (o. J.). *Mathe sicher können, Projektinfos*. mathe-sicher-koennen.dzlm.de/node/318.

Gaidoschik, M. (2008). „Rechenschwäche“ in der Sekundarstufe: Was tun? *Journal für Mathematikdidaktik, 29*(3/4), 287–291.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der *Mitteilungen der GDM, 47*(111S).

Knöppel, J., & Pielsticker, F. (2023). Projekt Diagnosesprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der GDM*, *115*, 29–33.

Krajewski, K., & Ennemoser, M. (2010). Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe. *Empirische Pädagogik*, *24*(4), 353–370.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (2. Aufl.). Haupt.

Moser Opitz, E., Freesemann, O., Grob, U., Prediger, S., Matull, I., & Hussmann, S. (2017). Remediation for Students with Mathematics Difficulties: An Intervention Study in Middle Schools. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 724–736.

Prediger, S., Fischer, C., Selter, C., & Schöber, C. (2019). Combining material- and community-based implementation strategies for scaling up: The case of supporting low-achieving middle school students. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(3), 361–378.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Hrsg., 2017). *Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Förderbausteine Natürliche Zahlen.* Cornelsen.

Steinecke, A., & Martin, M. (2022). Bayreuther Testpaket zur Erfassung von Rechenschwäche im Mathematikunterricht. *Mathematikdidaktik im Kontext*, *8*.

Steinecke, A., & Ulm, V. (2025). *Rechenschwäche in der Sekundarstufe. Spezifische Schwierigkeiten verstehen, erkennen und überwinden.* Cornelsen Skriptor.

Ulm, V., & Schwarm, M. (2022). Kindern mit Rechenschwäche helfen. Eine Studie zur Arbeit der Förder- und Beratungsstellen für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Lernen von Mathematik in Bayern. *Mathematikdidaktik im Kontext*, *7*.

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. *Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen.* Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN).

Wissmann, J., Heine, A., Handl, P., & Jacobs, A. M. (2013). Förderung von Kindern mit isolierter Rechenschwäche und kombinierter Rechen- und Leseschwäche: Evaluation eines numerischen Förderprogramms für Grundschüler. *Lernen und Lernstörungen*, *2*(2), 91–109.

Annalisa Steinecke, Universität Bayreuth
annalisa.steinecke@uni-bayreuth.de

Volker Ulm, Universität Bayreuth
volker.ulm@uni-bayreuth.de

Théorie des Situations (TDS)

Guy Brousseau auf Deutsch

Rudolf Sträßer

Vor mehr als dreißig Jahren wurden bereits „20 Jahre französische Mathematikdidaktik“ gefeiert (vgl. Artigue et al.1994) und dabei vor allem die beiden Protagonisten Gerard Vergnaud und Guy Brousseau. Die Arbeiten von Guy Brousseau sind in der Folge und bis heute immer wieder zitiert worden und haben die Entwicklung der Disziplin Mathematikdidaktik beeinflusst – was sich unter anderem durch die Verleihung einer Felix-Klein-Medaille durch die Internationale Mathematik-Unterrichtskommission (früher „IMUK“, heute eher unter „ICMI“ bekannt) im Jahre 2003 ausdrückte. Im Februar 2024 ist Guy Brousseau im Alter von 91 verstorben – und so trifft es sich gut, dass sein Werk nun auch in deutscher Sprache zugänglich ist. Zwar war bereits 1986 ein Text auf Deutsch von Guy Brousseau erschienen (Brousseau, 1986), doch hat sich seitdem die von ihm mitbegründete „Théorie des Situations (TDS)“ fortentwickelt. In einem von Guy Brousseaus Tod unabhängigen Kontext ist eine Übersetzung entstanden, in der wesentliche Aspekte seiner „TDS“ dargestellt werden. Dieser Text geht auch über einige Gesichtspunkte der seit Langem vorhandenen autorisierten Übersetzung seiner Texte ins Englische (vgl. Brousseau, 1997) hinaus. Annie Bessot hatte zu Beginn der 2000er Jahre in Grenoble einen Doktoranden-Kurs zur TDS gehalten und diesen kürzlich noch einmal überarbeitet, um eine Übersetzung ins Englische und Spanische vorzubereiten. Ein glücklicher Zufall hat dann dazu geführt, dass der Text auch ins Italienische und ins Deutsche übersetzt wurde. Dieser Text ist nun über das Internet frei verfügbar. Man findet die Übersetzung ins Deutsche unter der URL hal.science/hal-04500955 (vgl. auch Bessot 2024 im Literaturverzeichnis).

In dieser Übersetzung werden (in der Reihenfolge der Bearbeitung) folgende Themen behandelt: Nach einem Vorwort zur Entstehung des Textes wird zunächst erläutert, was in Brousseaus Verständnis unter dem Lernen in einer *didaktischen Situation* zu verstehen ist. Es folgen zwei Abschnitte, in denen grundlegende theoretische Begriffe der Théorie des Situations (im Folgenden kurz: „TDS“) erklärt werden. Zum einen geht es um den *didaktischen Vertrag*, der die impliziten Rechte und Pflichten von Schülern und Lehrern in Bezug auf unterrichtete Objekte des mathematischen Wissens darstellt und in (meist impliziten) Verhandlungen zwischen Lernenden und Lehrenden über das Wissen entsteht. So entwickelt sich ein spezifisches Verständnis von Unterricht, aber auch von den Brüchen dieses didaktischen Vertrages. Zum anderen wird das Konzept der *adidaktischen Situation* entwickelt, genauer: welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eine Situation als adidaktisch erlebt werden kann, und welche Elemente der Situation im *Milieu* (einem weiteren zentralen Begriff der TDS) modelliert werden. Es folgt das Beispiel einer A-priori-Analyse einer didaktischen Situation, nämlich der in der französischen Didaktik wohlbekannten Situation „Vergrößern eines Puzzles“. An einer Definition und entsprechenden Beispielen wird der Begriff der *didaktischen Variablen* eingeführt, um dann beispielhaft das Lernen in einer „gewöhnlichen“ Unterrichtssituation zu analysieren und verschiedene Arten von Wissen und verschiedene Arten von adidaktischen Situationen zu unterscheiden. Es folgt eine Definition des Begriffes der *grundlegenden Situation*, der in einer A-priori-Analyse der Situation „Das Spiel des Rennens nach n“ beispielhaft erläutert und mit dem Begriff des *Informationssprungs* angereichert wird. Ergänzungen zu den Themen „Entwicklung (‚*Dévolution*‘)“ und „*Institutionalisierung*“ von Wissen bzw. Kenntnissen beschließen den Text, der noch um eine Bibliographie und drei Anhänge erweitert wird. In den Anhängen setzt sich der Text mit dem Zeichnen mit Hilfe von Instrumenten auseinander und illustriert so die von Guy Brousseau mitbegründete Théorie des Situations (TDS).

Schon an dieser Inhaltsbeschreibung lässt sich ermessen, dass mit diesem Text eine umfassende Darstellung der Théorie des Situations (TDS) geleistet wird, die sich vorzüglich als Information über diese bedeutende Strömung französisch-sprachiger Mathematikdidaktik eignet. Man kann diesen Text aber auch als Hommage an einen Kollegen lesen, der sich um die Entwicklung einer Theorie der Mathematikdidaktik verdient gemacht hat und dessen Gedanken nun für Personen gut zugänglich sind, die sich die Lektüre eines Fach-Textes in französischer Sprache nicht zumuten können oder wollen.

Literatur

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., & Tavignot, P. (Hrsg.). (1994). *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France – Hommage à Guy Brousseau et Gerard Vergnaud.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bessot, A. (2024). *Einleitung zur Theorie der Situationen. Grundlegende Konzepte der Mathematikdidaktik*. Übersetzung von Rudolf Sträßer mit Hilfe des automatischen Übersetzers DeepL. hal.science/hal-04500955 (englische Version: hal.science/hal-04500947, französisches Original: hal.science/hal-04473846)

Brousseau, G. (1986). Forschungstendenzen der Mathematikdidaktik in Frankreich. *Journal für Mathematikdidaktik*, *7*(2/3), 95–120.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics [Hrsg.: Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V.].* Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Rudolf Sträßer, Justus-Liebig-Universität Gießen und Australian Catholic University (ACU) Brisbane
rudolf.straesser@math.uni-giessen.de

Alle haben Klötze gelegt – und nun?

Über den Beitrag der Mathematikdidaktik zum Inklusionsdiskurs

Angela Musan-Berning

Ausklang im Mini-Symposium „Inklusiver Mathematikunterricht – fachbezogene Designs und empirische Studien“ am Ende der GDM-Tagung 2024. Die abschließende Frage: „Wo steht die Mathematikdidaktik aktuell in Hinblick auf das Thema Inklusion?“ wird kontrovers diskutiert: Brauchen wir noch ein Mini-Symposium oder gar einen Arbeitskreis, der sich damit beschäftigt, wie ein inklusiver Mathematikunterricht angelegt werden kann, der die Teilhabe aller Kinder sichert und gleichzeitig fachliche Strukturen vermittelt? Oder ist es nicht tatsächlich so, dass zu dieser Thematik schon zahlreiche Forschungsergebnisse vorliegen und sie damit vollumfänglich in der Mathematikdidaktik angekommen ist?

Der zuletzt genannten Einschätzung möchte ich als Mathematikdidaktikerin und Grundschullehrerin mit langjähriger Unterrichtserfahrung an einer inklusiven Schwerpunktschule widersprechen. Natürlich hat es in der Mathematikdidaktik zahlreiche Anstrengungen gegeben, den seit 2009 rechtskräftig in unserem Schulsystem verankerten Anspruch auf inklusive Beschulung für das Fach Mathematik mit Leben zu füllen. Das belegt die wachsende Zahl an Forschungsprojekten und Publikationen zu dem Themenkomplex.

Allerdings ist nicht überall Inklusion drin, wo Inklusion drauf steht. Auch auf der diesjährigen GDM-Tagung musste ich feststellen, dass auf den von mir bevorzugt aufgesuchten Vorträgen zu inklusivem Mathematikunterricht mitunter nicht einmal die Frage nach der Zusammensetzung der Schülerschaft beantwortet werden konnte. Zahlreiche in den letzten Jahren publizierte Beiträge versprechen, einen „Mathematikunterricht für alle“ zu unterstützen. Hier werden jedoch häufig nur die Belange von Kindern mit dem Förderschwerpunkt Lernen berücksichtigt (Oechsle, 2020, S. 62 ff.); Kinder mit anderen sonderpädagogischen Schwerpunkten wie z. B. Geistige Entwicklung werden häufig nicht mitgedacht.[1]

Hier besteht die Gefahr, dass der mathematikdidaktische Diskurs der schulischen Realität und damit den Lernbedürfnissen der betroffenen Kinder in dreierlei Hinsicht nicht gerecht wird:

Verlangsamungen versus Abweichungen beim Lernen

In Fachdiskussionen wird die in inklusiven Klassen beobachtbare Unterschiedlichkeit der Kinder in den allermeisten Fällen als eine lineare Fortsetzung der in Regelklassen sowieso vorhandenen Heterogenität betrachtet. Schwierigkeiten beim Rechnenlernen werden dann auf einem Kontinuum verortet, auf dem vor allem unterschiedliche Lerngeschwindigkeiten berücksichtigt werden müssen. In der Literatur über Kinder mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung wird in den meisten Fällen eine stark verlangsamte Entwicklung angenommen, die nach ausgedehnten Übungsphasen, zusätzlichen Erklärungen und gewissen didaktischen Reduktionen z. B. bei der Zahlraumerweiterung verlangt; die prinzipielle Anwendbarkeit des bewährten Methodenrepertoires wird jedoch nicht in Frage gestellt.

Diese Sichtweise verdeckt aber den Blick dafür, dass qualitative Sprünge zu beachten sind, wenn man Kinder mit intellektuellen Beeinträchtigungen berücksichtigen will. Materialien aus dem Regelunterricht können möglicherweise zunächst nicht zum Einsatz kommen, wenn Kinder keinerlei Zugang zu symbolischen Darstellungsweisen finden können, wenn sie als *three-knower* (Sarnecka & Carey, 2008) nur im Zahlenraum bis drei über einen Kardinalzahlbegriff verfügen oder wenn

[1] Meine Ausführungen treffen wohl auf die allermeisten Schüler und Schülerinnen mit den sonderpädagogischen Schwerpunkten Körperliche Entwicklung, Sehen, Hören und Geistige Entwicklung zu. Ich beziehe mich im Folgenden auf die letztgenannte Gruppe, da ich ihre Situation aufgrund meines Forschungsprojektes am besten kenne.

sie die Kraft der Fünf nicht nutzen können, weil ihre simultane Zahlerfassung auf zwei oder drei Elemente begrenzt ist (Zimpel, 2016, S. 122). Die Entwicklung auf den verschiedenen Lernpfaden erfolgt häufig in unterschiedlichem Tempo, so dass ein Profil dissoziierter Entwicklungsverläufe entsteht (Musan-Berning, 2022, S. 215). Dass hier individuelle, entwicklungsgerechte Zugänge vonnöten sind und auch geschaffen werden können, steht außer Frage; allerdings liegen außer punktuellen Unterrichtsvorschlägen m. W. noch keine erprobten, die gesamte Grundschulzeit umfassenden Konzepte vor. Eine systematische Berücksichtigung eines abweichendes Aufmerksamkeitsumfangs weisen nur wenige Ansätze auf (Rieckmann, 2022; Musan-Berning, 2022).

Einzelförderung versus Lernen am Gemeinsamen Gegenstand

In Hinblick auf einen inklusiven Mathematikunterricht ist der fachdidaktische Diskurs aktuell fest dem Paradigma des Gemeinsamen Gegenstands verpflichtet, der Verwirklichung eines gemeinsamen Unterrichts vor allem durch Natürliche Differenzierung z. B. mit Hilfe substantieller Aufgaben. Die dahinterstehende Logik erscheint einleuchtend: Um die Teilhabe aller Schüler und Schülerinnen zu gewährleisten, wird die ganzheitliche Erarbeitung von Themen präferiert, „bei der sich Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus in natürlicher Weise ergeben“ (Krauthausen & Scherer, 2016, S. 49). Durch eine niedrige Eingangsschwelle und einen hohen Aufforderungscharakter sollen alle Kinder gleichermaßen angesprochen werden und einen Zugang zu den komplexen Lernangeboten finden, der ihren Fähigkeiten entspricht. Die Lösungsversuche werden individuell dokumentiert und in gemeinsamen Gesprächen der Klassengemeinschaft zugänglich gemacht, diskutiert und weiterentwickelt. Mit der Annahme, dass dies allen Kindern möglich ist, bleiben jedoch die kommunikativen Einschränkungen und das mögliche Fehlen eines tragfähigen Zahlbegriffs bei Kindern mit intellektuellen Beeinträchtigungen unbeachtet.

Siegemund nimmt mit Bezug auf die Literaturlage vor allem die fehlende Rückkopplung an die Lernvoraussetzungen der betroffenen Kinder in den Blick:

> Die meisten publizierten Aufgaben mit natürlicher Differenzierung erfordern [...] Lernvoraussetzungen, die von vielen SuS mit dem FgE [Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung, MB] nicht erbracht werden. Außerdem stellt diese Methode erhöhte Anforderungen im Bereich der Selbststeuerung, welche gerade SuS mit dem FgE besonders schwerfällt. (Siegemund, 2018, S. 153)

Dies gilt auch für den angestrebten Austausch über unterschiedliche Bearbeitungswege und Lösungen, der Lernenden mit eingeschränkten rezeptiven und expressiven Sprachkompetenzen bestenfalls schwerfällt, oft jedoch weit außerhalb ihrer Möglichkeiten liegt.

Wie genau soll Sonja über Zahlenhäuser sprechen, wenn sie Ende Klasse 2 noch keine Ziffer erkennen kann? Wie kann Daniel an dem gemeinsamen Gespräch teilhaben, wenn ihm das Zählen von mehr als vier Elementen noch nicht sicher gelingt? Welcher Kardinalzahlbegriff kann für alle Kinder zugrunde gelegt werden, wenn Sally die vor ihr liegenden sechs Bären als „Blau, blau, blau, blau, blaublau, blau“ „zählt“? Und Joris bis zu zehnmal angesprochen werden muss, bevor er auf eine Aufgabenstellung oder Frage reagiert? Keins dieser Kinder verfügt über das Fingerrechnen als dem vermeintlich „ersten wichtigen Schritt“ hin zum Zahlverständnis (Wessolowski & Martignon, 2012, S. 58), keins von ihnen kann den Term $1+1$ mit Plättchen nachlegen (Musan-Berning, 2022). In welcher Sprache also soll der gemeinsame Austausch über mathematische Lösungsversuche erfolgen? Wie lange werden diese Kinder bereit sein, den Gesprächen ihrer Mitschüler und Mitschülerinnen über Lösungsansätze zu lauschen, wenn ihnen jegliches Handwerkzeug dafür fehlt – die mathematikbezogene Sprache ebenso wie ein basales Verständnis von Zahlen, Mengen und wechselnden Repräsentationsformen?

Entwicklungsorientierung versus Orientierung am Curriculum

Tatsächlich werden die Lernbedürfnisse von Kindern mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung in der Praxis oft nachrangig behandelt: Die Lehrperson legt – häufig unter Rückgriff auf das verwendete Lehrwerk – die Unterrichtsinhalte fest und entscheidet erst in einem zweiten Schritt, welche Modifikationen für Schülerinnen und Schüler mit intellektuellen Beeinträchtigungen vorgenommen werden können. Die für sie eingeplanten nächsten Lernschritte folgen weder ihrem eigenen Lerntempo, noch schließen sie an ihre individuellen Entwicklungsverläufe an; stattdessen sind sie durch das curricular vorgegebene Voranschreiten im Regelunterricht determiniert (Oechsle, 2020, S. 50).

Damit genügt die Lehrperson zwar scheinbar der Vorstellung von einem gemeinsamen Unterricht, jedoch nicht dem Anspruch der einzelnen Kinder auf einen

> ihnen gemäßen langfristig angelegten entwicklungsorientierten Unterricht, der nicht in partikuläre und fragmentarische – wenn auch in der einzelnen Stunde passend differenzierte – Angebote zerlegt ist. (Ratz, 2017, S. 178)

Diese Kinder haben den Zahlbegriff ja gerade nicht beiläufig in informellen Lernsituationen erworben, wie andere Kinder es ganz selbstverständlich im Vorschulalter tun (Baroody, 1999, S. 89). Entsprechend erscheint es wenig aussichtsreich zu hoffen, dass dies von allein geschieht, wenn sie ohne weitere systematische Instruktionen mit entsprechenden Inhalten konfrontiert werden (zur Effektivität von direkten Instruktionen bei Kindern mit intellektuellen Beeinträchtigungen vgl. z. B. Hudson, Rivera & Grady, 2018).

Möglicherweise löst die Lehrperson sich jedoch auch von der „verkrampften, angstmachenden Fixierung auf den gemeinsamen Gegenstand“ (Wocken, 1998, S. 51) und setzt auf eine konsequent auf den Entwicklungsstand des jeweiligen Kindes ausgerichtete Förderung, die mit dem Unterrichtsgeschehen in der Klasse wenig oder nichts zu tun hat. So oder so werden in vielen Fällen auf eine gemeinsame Einführungsstunde auf der enaktiven Ebene Unterrichtsphasen folgen, in denen alle Kinder mehr oder weniger selbstständig an unterschiedlichen Inhalten arbeiten, für die Lehrperson häufig begleitet von dem nagenden Gefühl der eigenen Unzugänglichkeit, weil die Verwirklichung einer Arbeit am Gemeinsamen Gegenstand wieder nicht gelungen ist.

Der Beitrag der Mathematikdidaktik zur Umsetzung des Inklusionsanspruchs

Hier ist ein substantieller Beitrag der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung gefragt, die ausreichend konkrete, umfassende, über einzelne, handlungsorientierte Vorhaben hinausgehende Unterrichtsvorschläge vorlegen müsste, um die Lehrpersonen zu entlasten und bei der Umsetzung des Inklusionsanspruchs zu unterstützen: Tag für Tag, Thema für Thema, Kind für Kind.

Ohne einen engen Austausch mathematikdidaktischer, sonderpädagogischer und entwicklungspsychologischer Expertise erscheint die Weiterentwicklung einer fachbezogenen Inklusionsdidaktik wenig aussichtsreich. Es mangelt jedoch nicht nur an Gelegenheiten, über die Forschungsinhalte anderer Bezugsdisziplinen ins Gespräch zu kommen, sondern mitunter wohl auch an der Bereitschaft anzuerkennen, dass es mit den Bordmitteln der Mathematikdidaktik alleine nicht möglich ist, für die betroffene Schülerschaft Unterrichtsvorschläge zu erarbeiten, die besondere Entwicklungsbedingungen in den Blick nehmen.

So können wir zwar mathematikdidaktisch durchdachte, auf genauen fachlichen Analysen beruhende und an den *state of the art* anknüpfende Angebote für Kinder mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung entwerfen. Ob diese sich im Unterricht und in der Förderung bewähren, hängt jedoch nicht nur davon ab, ob die oben benannten Besonderheiten in den Entwicklungsverläufen und in der Informationsverarbeitung berücksichtigt werden. Gleichzeitig müssen auch angemessene Interventionen als Reaktion auf ungünstige motivationale Voraussetzungen, Verhaltensstörungen und unerwartetes Verhalten, also nicht aufgabenbezogene Aktivitäten unterhalb der Schwelle zu Verhaltensauffälligkeiten, vorgenommen werden.

Unerwartetes Verhalten begleitet mathematische Lösungsversuche von Kindern mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt geistige Entwicklung wie eine Art Grundrauschen und wird vor allem durch mangelnde Inhibition, hohe Ablenkbarkeit und Beeinträchtigungen in den Bereichen Aufmerksamkeit und Arbeitsgedächtnis hervorgerufen. Für sich betrachtet sind dies kleine Störungen, die jedoch eine zersetzende kumulative Wirkung entfalten und zu wachsenden Irritationen, Informationsverlusten und möglicherweise sogar zu einem kompletten Ausstieg aus der Aufgabenbearbeitung führen können (Musan-Berning, 2022, S. 276). Auch diese Besonderheit sollte bei der Unterrichtsplanung zumindest in Betracht gezogen werden, so dass die *cognitive load* – die Belastung des Arbeitsgedächtnisses z. B. durch Aufgabenstellung und methodische Entscheidungen – möglichst geringgehalten wird (Kuhl, Hecht & Euker, 2016, S. 54 ff.).

Zu viel Komplexität für eine Wissenschaftsdisziplin? Offensichtlich nicht für eine Lehrperson, die gleichzeitig zwei oder drei Kinder mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung in ihrer inklusiven Klasse unterrichtet und von der zu Recht fachlich korrekte Analysen, eine inklusionssensible Haltung, entwicklungspsychologisches Know-How, eine motivierende und anschlussfähige Methodenwahl und nicht zuletzt ein besonnenes Krisenmanagement erwartet wird, wenn alles nicht klappt wie geplant.

Um es noch einmal auf den Punkt zu bringen: Es geht an dieser Stelle nicht (nur) darum, fehlende Unterrichtskonzepte einzufordern, die einen sehr genauen Blick auf die tatsächlich vorhandenen Fähigkeiten und Entwicklungspotentiale der Schülerinnen und Schüler mit dem sonderpädagogischen Schwerpunkt Geistige Entwicklung einschließen. Es geht vor allem darum anzuerkennen, dass die Mathematikdidaktik sich keineswegs in ausreichendem Maße an dem Thema Inklusion abgearbeitet hat, sondern dass es weitreichender Anstrengungen und eines intensiven Austauschs mit weiteren Bezugsdisziplinen bedarf, bevor die Bringschuld der Forschung gegenüber den Akteuren in der Schulpraxis eingelöst werden kann. Von einem „Mathematikunterricht für alle“ sind wir derzeit noch weit entfernt.

Literaturverzeichnis

Baroody, A. J. (1999). The development of basic counting, number, and arithmetic knowledge among children classified as mentally handicapped. *Research in Mental Retardation*, *22*, 51–103. DOI:10.1016/S0074-7750(08)60131-7

Hudson, M. E., Rivera, C. J., & Grady, M. M. (2018). Research on mathematics instruction with students with significant cognitive disabilities: Has anything changed? *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities, 43* (1), 38–53. DOI:10.1177%2F1540796918756601

Korff, N. (2018). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe. Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen* (3. Aufl.). Schneider-Verlag Hohengehren.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2016). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule* (2. Aufl.). Klett/Kallmeyer.

Kuhl, J., Hecht, T., & Euker, N. (2016). Grundprinzipien des Unterrichts und der Förderung von Kindern und Jugendlichen mit intellektueller Beeinträchtigung – Entwicklungs-, Ressourcen- und Lebensweltorientierung. In J. Kuhl & N. Euker (Hrsg.), *Evidenzbasierte Diagnostik und Förderung von Kindern und Jugendlichen mit intellektueller Beeinträchtigung* (S. 39–64). Hogrefe.

Musan-Berning, A. (2022). *Rechnen lernen mit der Kraft der kleinen Zahl. Zahlbegriffserwerb und Förderung von Kindern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung*. WTM.

Oechsle, U. (2020). *Mathematikunterricht im Kontext von Inklusion. Fallstudien zu gemeinsamen Lernsituationen.* Springer Spektrum.

Ratz, Ch. (2017). Inklusive Didaktik für den Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In E. Fischer & Ch. Ratz (Hrsg.), *Inklusion. Chancen und Herausforderungen für Menschen mit geistiger Behinderung* (S. 172–191). Beltz Juventa.

Rieckmann, T. (2022). *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht. Eine Studie zur Entwicklung eines Lernmaterials für Personen mit Besonderheiten in der Simultanerfassung.* Springer VS.

Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition, 108*, 662–674. DOI:10.1016/j.cognition.2008.05.007

Siegemund, S. (2018). Entwicklung schriftsprachlicher und mathematischer Kompetenzen im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. *Lernen und Lernstörungen*, *7*(3), 147–158.

Wessolowski, S., & Martignon, L. (2012). Kommentar aus einer Perspektive der Mathematikdidaktik. Kommentare zu Moeller & Nuerk (2012). *Lernen und Lernstörungen*, *1*(1), 57–58.

Wocken, H. (1998). Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 37–52). Juventa.

Zimpel, A. F. (Hrsg.) (2016). *Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können. 2000 Personen und ihre neuropsychologischen Befunde*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Angela Musan-Berning, Hamburg
musan-berning@t-online.de

Didactics without borders

Antonella Perucca

I believe that you have always been good at mathematics in school. This is good, but it also means that you have not directly faced the challenges that weaker pupils face. To do so, you have to change the subject (because higher mathematics is a different kind of learning challenge). A didactical experiment that I did on myself and which I found truly instructive in multiple ways was self-learning the basics of Chinese. By this I mean reading and writing Chinese characters, for example “Hello!” is 你好！ and not only its pinyin transcription “Nǐ hǎo!”.

Didactical choices

We may all agree that the first character to be learned is the simplest one, the number one “Yī” (pronounced eee), which is just one horizontal stroke 一.

Next come the characters two 二 and three 三, where you also have to pay attention to the length of the horizontal strokes. So far so good. What comes next?

You might be motivated to learn the character four 四 (with the new stroke types that it involves). Other texts show you the character for king 王, others the character for person 人.

My favorite choice is the character ten 十. It is a character with only two straight strokes. It teaches you the vertical stroke and that you need to do the horizontal stroke first. It is an important and common word, closely related to the words you already know. Last but not least it already allows you to make compound words: 十二 (twelve) 二十 (twenty) and also 三十一 (can you guess which number this is?).

To be honest, I have not made up my mind as which are “the most basic 100 characters”, or a truly convenient order in which to present them. There are various considerations that come into play. And there is much which is a matter of taste. For example, I do like the idea of learning the characters king 王 and jade 玉 together to interiorize their similarity, and it is efficient learning a character as a variation of a known character. But somehow I don’t like the idea of learning the characters middle 中 and skewer 串 together. Indeed, the former character is basic and important (it is also part of the word China) while the second has no appeal to me and I’d rather postpone it.

Didactical material

Beyond books there are websites, learning apps, videos and online courses. I encourage you to explore them and reflect on what makes you progress. I have enjoyed texts with valuable information on strokes, and some memorization trick, and games involving a fast recognition of characters, beyond the invaluable dictionaries that draw characters progressively and also recognize characters that you write.

I have also experienced a very pleasant online course. In fact, I could get full score in the multiple choice tests after the explanation videos because for example I was temporarily able to distinguish an apple, a banana, and an orange (苹果、香蕉、橙子) however I have not learned those characters properly because they were disconnected from my characters’ understanding core.

I was in need of progressive learning with deep understanding, and I ended up collecting puzzle pieces from various sources.

This learning experience was instructive also because I became a struggling pupil. I experienced motivational shots and feelings of “unfairness”, and I realized how much one needs “trust” to support learning efforts. Moreover, I have experienced different (and sometimes unpredictable) learning outcomes, ranging from a vague memorization to a true interiorization.

These days we may dream of tailored didactical tools that can replace the best teacher. I (almost) believe in this dream, however we do have to allow for different learning tastes and we do have to pin down all there is to know. In particular, we must identify hidden prerequisites. Moreover, we need a graph collecting difficulties and interdependencies. The pupil may then explore the learning labyrinth in a custom way. No matter the path, it is technically possible to get exercises that only make use of the knowledge that the pupil has previously acquired.

New developments may sooner than expected revolution the way we teach and learn mathematics, and my message is also an encouragement towards a holistic view of didactics in order to develop the tools of the future.

Antonella Perucca, University of Luxembourg
antonella.perucca@uni.lu

Verstehen der Reellen Zahlen

Ein Weg zur KI

Hanns Sommer

Einführung

Verständlich machen bedeutet, Vorstellungsbilder zu erzeugen, aus denen der intendierte Sachverhalt sichtbar wird. Der Begriff des Beweises in der Mathematik kann in diesem Sinne als die Verständlich-Machung von Sätzen der Mathematik verstanden werden. Er erfordert:

- Die Herstellung eines Verstehenshorizonts und
- das Erkennen des intendierten Sachverhalts in diesem.

Wir haben in Sommer (2023) diese Methode zum Verstehen von Aussagen der Zahlentheorie verwendet; um aber auch die reellen Zahlen ($\mathscr{R}$) erfassen zu können, müssen wir sie erheblich erweitern. Diese Erweiterung wird uns einerseits die prinzipiellen Unterschiede zwischen dem Verstehenshorizont für die natürlichen Zahlen und demjenigen für die reellen Zahlen aufzeigen, und andererseits werden wir erkennen, dass damit genau das Verstehen erfasst wird, das wir zur Entwicklung und zum Einsatz von Werkzeugen der Künstlichen Intelligenz (KI) benötigen.

Einführung in die Mengenlehre

Die Grundideen zum Verständnis der reellen Zahlen wurden von Georg Cantor mit der Mengenlehre bereitgestellt. Im Gegensatz zur Zahlentheorie, in der Unendliches als *Potentiales* aufgefasst wird, führt Cantor das *aktual Unendliche* in die Mathematik ein. Während im ersten Falle der Existenzbegriff auf das Sichtbare im finit konstruierten Bild beschränkt ist, postuliert man für das aktual Unendliche, dessen Existenz auch dann, wenn im Bilde nur eine Prozedur dargestellt werden kann, die dieses erzeugt, ohne dass es selbst konkret erscheint. Für die natürlichen Zahlen ($\mathscr{N}$) ergibt dies, als potential unendliche Menge die Darstellung $\mathscr{N} := 1, 2, 3, 4, \ \ldots\ldots$, wobei die Punkte in ein Unendliches verweisen, das nicht fassbar ist und dem als Nicht-Konkretisiertem kein weiterer Wert angefügt werden kann. In der Auffassung von $\mathscr{N}$ als aktual Unendlichem wird mit dem Bild ‚$1, 2, 3, 4, \ \ldots\ldots$', $\mathscr{N}$ als vollständig dargestellt vorgestellt, so dass man sich dieses Bild um die Buchstaben $a, b, c, \ldots z$ erweitert vorstellen kann, zum Bild ‚$1, 2, 3, 4, \ \ldots\ldots a, b, c, \ldots z$'.

Axiome der Mengenlehre. Cantor erklärt eine *Menge M* als *eine beliebige Zusammenfassung von Elementen zu einem Ganzen*, wobei entscheidbar ist, ob ein Element e zu M gehört ($e \in M$) oder ob e nicht zu M gehört ($e \notin M$).

Für Mengen M, N wird definiert:

$$N \subseteq M :\Longleftrightarrow (m \in N \Rightarrow m \in M).$$

Die Mengenlehre wird beschrieben durch *Axiome zur Konstruktion von Mengen*: Sind M, N Mengen und ist $\eta()$ eine Eigenschaft der Elemente, so existiert die Aussonderungsmenge:

$$M_\eta := \left\{m \in M \text{ mit } \eta(m) \text{ ist wahr}\right\}$$

und somit

$$M - N := \{m \in M | m \notin N\}$$

und

$$M \cap N := \{m | m \in M \text{ und } m \in N\},$$

die Vereinigungsmenge

$$M \cup N := \{m | m \in M \text{ oder } m \in N\},$$

die Paarmenge

$$M \times N$$

und die Potenzmenge

$$P(M) := \{N | N \subseteq M\}.$$

Eine besondere Rolle spielt das *Auswahlaxiom*, das die Auswahl eines Elements m aus beliebigen Mengen ($M \neq \emptyset$) sichert:

Auswahlaxiom. Zu jeder Menge nicht-leerer Mengen $\{M_i\}_{i \in I}$ *existiert eine Menge* $\bar{M}$, *die jeweils genau ein Element* m_i *aus jeder dieser Mengen* M_i *enthält.*

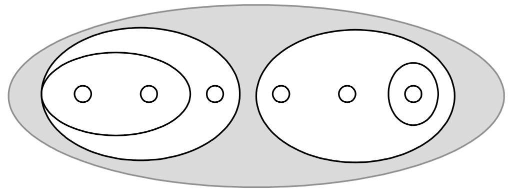


Abbildung 1. Ein System von Mengen

Die Auswahl der Elemente m_i wird dabei nicht konkret spezifiziert, sondern nur postuliert, und ist damit für unsere bildliche Anschauung nicht eindeutig. Wir können sagen: Durch eine Auswahl der Elemente durch das Auswahlaxiom wird eine *Sichtweise auf das Mengensystem* $\{M_i\}_{i\in I}$ eingeführt, die dieses konkretisiert. Verschiedene Sichtweisen entsprechen unterschiedlichen Auffassungen.

Während es für das potential Unendliche nur eine einzige Charakterisierung gibt, war Cantors bedeutende Entdeckung, dass mit dem aktual Unendlichen mehrere Größen- oder Mächtigkeitsklassen existieren. Cantor definiert:

$$M \text{ ist gleich mächtig zu } N (M \equiv N).$$
$$\iff \text{Es gibt eine Bijektion } \Psi : M \to N.$$

Eine Grundvorstellung zur Mengenlehre. Analog zur Veranschaulichung der Aussagen über $\mathcal{N}$ (Sommer, 2023), können wir uns vorstellen, dass wir ausgehend von einer Grundstruktur mit unendlichen vielen Elementen (z. B. $\mathcal{N}$) diese mit den Konstruktionsaxiomen der Mengenlehre fortlaufend um neugebildete Mengen erweitern, wobei auch Mengen als Mengenelemente zugelassen sind. (Vgl. Abbildung 1, in der Umrandetes zu Mengen zusammengefasst ist.) Da wir diese Konstruktionsschritte *der Reihe nach* ausführen, entsteht, wie bereits Skolem festgestellt hat, ein Modell der Mengenlehre, dessen Objekte der Menge $\mathcal{N}$ bijektiv zugeordnet werden können. (Außerdem gilt hier $M \notin M$.)

Um Aussagen in unserem Modell der Mengenlehre zu beweisen, benötigen wir konkrete Vorstellungen, in denen wir eine Bestätigung der Aussagen erkennen können. Zur Konkretisierung führen wir im Bild darstellbare Prozeduren ein, die aber kein konkretes Bild der beschriebenen Objekte liefern, da sie das Auswahlaxiom verwenden.

In der Mengenlehre ist in manchen Fällen auch erkennbar, dass ein Sachverhalt nicht im Bild darstellbar ist.

Argument zur Nichtexistenz. Es kann vorkommen, dass mit den Konstruktionschritten oder Prozeduren, die zur Darstellung eines Objekts notwendig sind, im Bild eine zusätzliche Information mitentsteht, die der Existenz des Objekts widerspricht.

Mit diesem Argumentationsschema kann z. B. die Existenz einer Menge aller Mengen (der Allmenge) ausgeschlossen werden. Man betrachte Abbildung 1 mit den schwarz eingezeichneten, bisher erzeugten Mengen und füge nun anschließend, in diesem Bild, die grau gezeichnete Allmenge ein. Dann erkennt man sofort, dass die eingefügte Allmenge gar keine Allmenge ist, da sie sich selbst nicht als Element enthält.

Um die Mengen geordneter darstellen zu können, verwenden wir den

Wohlordnungssatz. Auf jeder Menge M kann eine totale Ordnung $<$ so eingeführt werden, dass zu jeder Teilmenge von M bezüglich $<$ ein kleinstes Element existiert.

Routine zur Definition von ‚<‘:

Initialisierung: $M_0 := M, M_1 = \emptyset$
DO WHILE ($M_0 \neq \emptyset$):
Wähle mit dem Auswahlaxiom $m \in M_0$ und definiere $m_1 < m$ für alle $m_1 \in M_1$,
Entferne m aus M_0 und setze $M_1 := M_1 \cup \{m\}$,
ENDDO

Aufgrund der Auffassung vom aktual Unendlichen wird mit dieser Routine die Totalordnung ‚<‘ auf ganz M eingeführt. Wir können uns – wegen des Wohlordnungssatzes – Mengen als Ketten ihrer Elemente vorstellen. Zum Beispiel:

$$\underbrace{(123\dots123\dots)}_{1}\underbrace{(123\dots123\dots)}_{2}$$
$$\underbrace{(123\dots123\dots)}_{3\dots.}\dots\dots\dots123\dots$$

Verschiedene Sichtweisen für Aussagen über die Grundvorstellung. Wir diskutieren die Existenz einer bijektiven Abbildung ψ zwischen einer Menge M mit $M \equiv \mathcal{N}$ und ihrer Potenzmenge $P(M)$.

M können wir als $\{m_1, m_2, \dots\}$ veranschaulichen, aber um Bilder herzustellen, aus denen wir obige Frage beantworten können, müssen zwei Prozeduren zur Repräsentation der nicht konkret vorstellbaren Objekte betrachtet werden:

P_A erzeugt Mengen von $P(M)$

$$M \equiv \frac{1}{2}M =: M^{(1)} \xrightarrow{\psi} \begin{cases} M_1 \\ M_2 \\ \dots \end{cases} \quad \hat{M} := M - \frac{1}{2}M$$

$$M \equiv \frac{1}{2}\hat{M} =: M^{(2)} \rightarrow \begin{cases} M^k \\ M^l \\ \dots \end{cases} \quad \hat{M} \leftarrow \hat{M} - \frac{1}{2}\hat{M}$$

$$M \equiv \frac{1}{2}\hat{M} =: M^{(i)} \rightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad \hat{M} \leftarrow \hat{M} - \frac{1}{2}\hat{M}$$

Abbildung 2. Konstruktion von ψ

- Eine Prozedur P_ψ zur Herstellung einer injektiven Abbildung $\psi : M \to P(M)$ und
- eine Prozedur P_A zur Auswahl der Elemente aus $P(M)$.

Wir nehmen zunächst P_A als konkret spezifiziert an und beschreiben damit die Bildung von P_ψ (unsere Konstruktion folgt derjenigen zum Banach-Tarski Paradoxon, 1924): $\frac{1}{2}M$ sei die Menge, die durch Auswahl jedes zweiten Elements aus M entsteht. In Abbildung 2 ist die Prozedur P_ψ dargestellt.

Erster Schritt. Zunächst werden die Elemente von $M^{(1)} := \frac{1}{2}M$ Elementen von $P(M)$ zugewiesen, die von P_A erzeugt werden. Wegen $M^{(1)} := \frac{1}{2}M \equiv M$ entspricht dies einer Menge der Mächtigkeit von M, der Elemente von $P(M)$ zugewiesen wurden. Durch die Bezeichnungsänderung sind aber die Elemente aus $\hat{M} := (M - \frac{1}{2}M)$ noch unverbraucht, d. h. noch nicht für die Zuweisung verwendet worden.

Nächster Schritt. Sei i' das Element, das in der Indizierungsmenge I auf i folgt.

In diesem Schritt werden die Elemente von $M^{(i')} := \frac{1}{2}\hat{M}$ zugewiesen, wobei wegen $M^{(i')} := \frac{1}{2}\hat{M} \equiv M$ wieder ein Block von der Mächtigkeit von M neuen Elementen aus $P(M)$ zugewiesen wurde und eine Menge der Mächtigkeit M der Elemente von $\hat{M} - \frac{1}{2}\hat{M}$ noch als unverbraucht zurückbleiben.

Wir ändern nun die Bedeutung von $\hat{M}$ und bezeichnen die Menge der unverbrauchten Elemente $\hat{M} - \frac{1}{2}\hat{M}$ wieder mit $\hat{M}$; anstelle des Folgeindex i' schreiben wir wieder i.

Mit den Bezeichnungsänderungen kann der *Nächste Schritt* erneut ausgeführt werden, womit wieder ein Block der Mächtigkeit von M Elementen aus $P(M)$ Urbilder in M findet. Die Spezifikation von ψ stoppt, falls die Prozedur P_A keine weiteren Elemente mehr in $P(M)$ findet, mit $\psi(\mathring{M}) \equiv P(M)$ für $\mathring{M} \subset M$.

Bemerkungen zur Prozedur P_ψ. Jedes $M^{(i)}$ und $\hat{M}$ hat die Mächtigkeit von M bzw. $\mathscr{N}$, gleichgültig wie oft der ‚nächste Schritt' ausgeführt wird. Der Index i der Prozedur P_ψ hängt von $P(M)$ bzw. von P_A ab. Andere Auswahlfunktionen könnten in $P(M)$ weitere Elemente sichtbar machen. Wegen der vorausgesetzten Konstruierbarkeit der Objekte kann ja auch $P(M)$ tatsächlich nicht ‚mehr' Darstellungsdetails aufweisen, als in $\mathscr{N}$-vielen Schritten erzeugbar sind.

Für die folgende Betrachtung nehmen wir an, es sei P_ψ vollständig spezifiziert vorgegeben, und wir suchen dazu passend P_A. Um die Elemente von $P(M)$ zu beschreiben, verwenden wir deren charakteristische Funktionen $\epsilon_i : M \to \{0, 1\}$, d. h. $M_i \subset M$ ist beschrieben durch $M_i := \{m_j \in M \text{ mit } \epsilon_i(j) = 1\}$.

In Abbildung 3 ist sowohl die Zuweisung ψ der Elemente m_i von M zu diesen charakteristischen Funktionen ϵ_i angegeben, als auch die Spezifikation der Mengen M_i durch die Funktionen ϵ_i.

Man erkennt sofort, dass die Teilmenge $\bar{M} \subset M$ mit $\bar{\epsilon}(i) := 1$ für $\epsilon_i(i) = 0$ und $\bar{\epsilon}(i) := 0$ für $\epsilon_i(i) = 1$ keinem Element von $P(M)$ zugewiesen wurde. Da für alle i: $\bar{\epsilon}(i) \neq \epsilon_i(i)$ gilt.

Wird P_ψ als erste Prozedur vorgegeben, so ergibt die Teil-Darstellung von P_A mit Abbildung 3 eine neue Teilmenge von M, ohne Urbild bezüglich ψ in M.

Mit dem *Argument zur Nichtexistenz* erkennen wir daher, dass hier eine Bijektion $\psi : M \to P(M)$ nicht existiert.

In Abbildung 3 entsteht $P(M)$ mit einer Ordnungsstruktur, die von M durch ψ auf $P(M)$ induziert wird

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{M} \\
\downarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{Darstellung von } P(M) \\
\begin{array}{ccccc}
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & \dots
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \dots \end{array}\right\} \xrightarrow{\psi}
\begin{array}{ccccc}
\epsilon_1(1) & \epsilon_1(2) & \epsilon_1(3) & \epsilon_1(4) & \dots \\
\epsilon_2(1) & \epsilon_2(2) & \epsilon_2(3) & \epsilon_2(4) & \dots \\
\epsilon_3(1) & \epsilon_3(2) & \epsilon_3(3) & \epsilon_3(4) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & &
\end{array}
$$

Abbildung 3. Diagonalisierung zur Konstruktion von $\bar{M}$

und die verschieden ist von derjenigen in Abbildung 2. Die zusätzliche Struktur, die entsteht, wenn wir zuerst P_ψ vorgeben und dann erst P_A spezifizieren, ermöglicht das Diagonalisierungsargument für dieses P_A, auch in einer Vorstellungswelt, die nur aus abzählbar vielen Objekten besteht. Da P_A oder P_ψ aber nicht konkret spezifiziert sein müssen, sind deren Werte nicht notwendigerweise im Bild darstellbar und somit ist die Realisierung der Abbildungen 2 und 3 nicht garantiert. Unsere Überlegungen zeigen eine schwache Form des *Satzes von Paul Cohen* (2002):

> Der Mächtigkeitsbegriff ist durch die Axiome der Mengenlehre nicht eindeutig konkretisiert.

Die reellen Zahlen

Das Verstehen der reellen Zahlen ($\mathscr{R}$) und ihre ‚*Andersartigkeit*' zu den natürlichen Zahlen ($\mathscr{N}$) ist mit den Grundvorstellungen zur Mengenlehre möglich. Die Elemente von $\mathscr{R}$ sind Grenzwerte in $\mathscr{Q}$, die mit verschiedenen Anschauungsweisen entstehen. Jedes $r \in \mathscr{R}$ basiert auf einer nicht notwendigerweise konkretisierten Auswahlfunktion. Die Axiome von $\mathscr{R}$ fixieren daher nur die Menge der Aussagen für die so konstruierten Objekte, nicht aber deren Konstruktion selbst. Beispielhaft betrachten wir hier nur zwei der vielen Konstruktionsmöglichkeiten für reelle Zahlen, es gibt viele weitere, häufig über den Begriff der Cauchy-Folgen (Weiss, 2015):

(A) $\mathscr{R} \equiv \mathscr{DS} :=$ Menge der Dedekind'schen Schnitte in den rationalen Zahlen ($\mathscr{Q}$), wobei ein Element x in $\mathscr{DS}$ beschrieben wird durch: $x \equiv (\underline{U}, \overline{U})$ mit $\underline{U}, \overline{U} \subset \mathscr{Q}$ und für alle $y \in \underline{U}, z \in \overline{U}$ gilt: $y < z$.

- Jede der folgenden Auswahlfunktionen aus Intervallen in $\mathscr{Q}$ ergibt ein x:

  (Initialisierung:)
  Wähle $q_{u,1} \in \mathscr{Q}$ und $q_{o,1} \in (q_{u,1}, q_{u,1} + 1)$.

  (Schritt $i \to i+1$:)
  Wähle: $q_{u,i+1} \in (\max\{q_{u,i}, q_{o,i} - \frac{1}{i}\}, q_{o,i})$ und $q_{o,i+1} \in (\max\{q_{u,i+1}, q_{o,j} - \frac{1}{i}\}, q_{o,j})$

  Definiere: $\underline{U} := \bigcup_{i=1}^{\infty}\{q \in \mathscr{Q} | q < q_{u,i}\}$, und $\overline{U} := \bigcup_{i=1}^{\infty}\{q \in \mathscr{Q} | q > q_{0,i}\}$.

(B) $\mathscr{R} \equiv \mathscr{DB} :=$ Menge der unendlichen Dualbrüche, wobei ein Dualbruch beschrieben wird durch: $\pm n, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \dots$ mit $n \in \mathscr{N} \cup \{0\}$ und $\epsilon_i \in \{o, 1\}$, und für kein $j \in \mathscr{N}$ gilt $1 = \epsilon_j = \epsilon_{j+1} = \epsilon_{j+2} = \dots$

- Die Elemente von $\mathscr{DB}$ entstehen durch eine Auswahl aus $\{0, 1\}$ für jede Ziffer, wobei $, \dots 0111 \dots$ ersetzt wird durch $, \dots 1000$.

Aus Darstellung (B) erkennen wir direkt:

> $\mathscr{R}$ ist gleich mächtig zu $P(N)$ oder den Abbildungen von $\mathscr{N}$ nach $\{0, 1\}$, denn die Menge der ausgeschlossenen Dualbrüche, zu denen ein $j \in \mathscr{N}$ existiert mit $1 = \epsilon_j = \epsilon_{j+1} = \epsilon_{j+2} = \dots$, ist gleich mächtig zu $\mathscr{Q}$ bzw. $\mathscr{N}$.

Zu den reellen Zahlen gibt es also verschiedene Möglichkeiten der Konkretisierung und diese *Nichteindeutigkeit der Konkretisierung von* $\mathscr{R}$ hat die Konsequenz, dass der Nachweis von unterschiedlichen Aussagen über $\mathscr{R}$ häufig unterschiedliche Darstellungen von $\mathscr{R}$ erforderlich macht.

Betrachten wir als Beispiel den

Zwischenwertsatz. Sei $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ *stetig mit* $f(-1) = -1$ *und* $f(1) = 1$, *dann existiert* $x \in (0, 1)$ *mit* $f(x) = 0$.

Wird $\mathscr{R}$ mittels $\mathscr{DS}$ dargestellt, so ergibt $x = (\underline{U}, \overline{U})$ mit $\underline{U} := \{y \in \mathscr{Q}$ mit $y < -1$ oder für alle $z \in [-1, 1]$ mit $z < y$ gilt: $f(z) < 0\}$ und $\overline{U} := \mathscr{Q} - \underline{U}$ einen Wert x mit $f(x) = 0$.

In $\mathscr{DB}$ wäre dagegen die Lösung x selbst approximativ nicht spezifizierbar, da für eine nicht konkretisierte Funktion f nicht entschieden werden kann, ob diese nicht bereits vor dem Erreichen eines Schnittpunkts die Achse berührt hat.

Während x *in der Sprache* $\mathscr{DS}$ *niedergeschrieben werden kann, ist dies in* $\mathscr{DR}$ *unmöglich.*

Die Nichteindeutigkeit der Konkretisierung von $\mathscr{R}$ überträgt sich auf Theorien, die auf $\mathscr{R}$ begründet sind, z. B. auf die Integrationstheorie, mit dem

Lebesque-Integral und dem dazu inkompatiblen Cauchy-Hauptwert-Integral, oder auf die *Theorie der partiellen Differentialgleichungen*. Da letztere in der Physik besonders wichtig ist, wollen wir uns ein Beispiel aus der Hydrodynamik genauer ansehen:

Das Verhalten einer inkompressiblen Strömung wird beschrieben durch die Navier-Stokes'schen Gleichungen:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\mathrm{I}} = \underbrace{-(\vec{u}\nabla)\vec{u}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\nu\nabla^2\vec{u}}_{\mathrm{IV}} \tag{1}$$

($\vec{u}$ beschreibt die Strömungsgeschwindigkeit, ρ die Dichte, p den Druck und ν die Zähigkeit der Flüssigkeit.)

In anschaulichen Begriffen bedeutet diese Gleichung:

I. die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}$ in einem Punkt $\vec{x}$ wird bewirkt durch
II. den Transport von Teilen der Strömung aus Nachbarpunkten zum Punkt $\vec{x}$ und
III. der Druck-Wirkung auf die Strömungsteile im Punkt $\vec{x}$ und
IV. der Difussion oder Vermischung der Teilchengeschwindigkeiten in einer kleinen Umgebung des Punktes $\vec{x}$.

Die Navier-Stokes-schen Gleichungen sind damit eine mathematische Darstellung lokal beschreibbarer Phänomene in der Flüssigkeit oder das Ergebnis einer *lokalen Sichtweise*. Sie sind mit der Operator-Splitting-Methode oder direkt durch Verwendung der angegebenen Veranschaulichung und der Lattice-Boltzmann-Methode approximativ lösbar.

Die Lösungen der Navier-Stokes'schen Gleichung zeigen aber nicht alles, was wir über turbulente Strömungen wissen können. Kolmogoroff hat zur Herleitung seines Wirbelzerfallsgesetzes eine *globale Sichtweise* verwendet. Er betrachtet Wirbel als *Selbststabilisierende Strukturen* und postuliert ein *Analogie-Gesetz:*

> Große Wirbel verhalten sich gegenüber mittelgroßen Wirbeln völlig analog wie mittelgroße Wirbel sich gegenüber kleinen Wirbeln verhalten.

Kolmogoroff's Herleitung des Wirbelzerfallsgesetzes aus dem Analogie-Gesetz macht uns nochmals die *Bedeutung der Sichtweisen* für die Theorien, die auf $\mathscr{R}$ basieren, deutlich. Wir werden im Folgenden feststellen, dass auch zur Entwicklung und zum Einsatz der Werkzeuge der Künstlichen Intelligenz die Entwicklung von Sichtweisen eines der wichtigsten Hilfsmittel darstellt.

Verstehenshorizonte der KI

In der Mengenlehre und in den Theorien, die auf $\mathscr{R}$ basieren werden Aussagen dadurch begründet, indem sie mittels geeigneter Sichtweisen in Korrespondenz gesetzt werden zu finit Konzipiertem, das dann diese Begründung liefert (vgl. Abbildung 4). Paul Cohen (2002) schreibt:

> The only reality we truly comprend is that of our own experience ... The laws of the infinite are extrapolations of our experience with the finite.

Durch die Erschaffung geeigneter Anschauungen wird sichergestellt, dass mit der Prozedur von Abbildung 4 das Bestätigung findet, was entweder mathematisch interessante Theorien liefert, oder dem Beobachteten, in der realen Welt entspricht. Das Verstehen der Mathematik erlaubt verschiedene Auffassungen. Wir können $\mathscr{R}$ als ‚größer' wie $\mathscr{N}$ oder als ‚andersartig' zu $\mathscr{N}$ auffassen. Im ersten Falle erhalten wir Cantors Mächtigkeitsordnung und im zweiten Falle ein Verständnis dafür, warum Aussagen der Theorien, die auf $\mathscr{R}$ basieren, mehrere Sichtweisen zu ihrer Begründung benötigen.

Die Konzipierung eines Verstehenshorizonts ist aber auch ein Grundproblem der KI. Dies wird im Beitrag von Schorcht et al. (2024) verdeutlicht. Um sicher einen Text in eine Bilddarstellung umzusetzen, müssten wir in der Lage sein, ChatGPT mitzuteilen, in welchem Verstehenshorizont dieses Bild eingebettet sein soll. Dafür aber gibt es keine eindeutig spezifizierte Kommunikationsmöglichkeit, denn die Spezifikation einer solchen würde die Generalität von ChatGPT stark einschränken. Wir müssen daher, zu jedem *Werkzeug mit Genereller Künstlicher Intelligenz*, auf einer übergeordneten Ebene einen Verstehenshorizont schaffen,

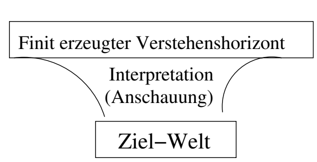


Abbildung 4. Ziel-Welt sind Mengen, $\mathscr{R}$ oder eine Computer-Hardware

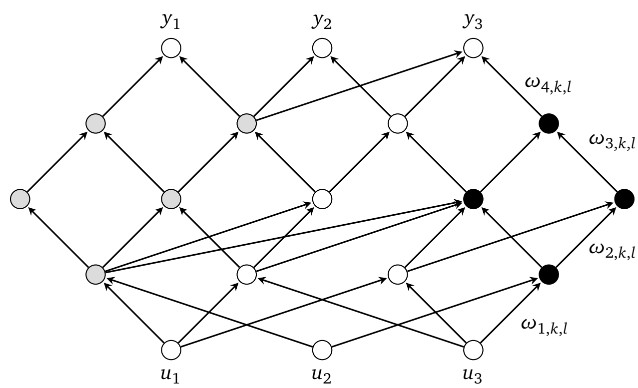


Abbildung 5. Neuronales Netz aufgefasst als Gruppen

der uns das Werkzeug verstehbar macht, ohne dieses vollständig zu erfassen. Das was wir erfassen, bleibt immer auch von unserer Sichtweise abhängig.

Beispielhaft wollen wir diese Methode am Verstehen der Lernfähigkeit eines Neuronalen Netzes darstellen (Sommer & Kroll, 2023). Das Netz erhält Lernbeispiele

$$\left\{(\vec{u}_j, \vec{y}_j) \text{ mit } j = 1, \dots K\right\}, \text{ mit } \vec{u}_j \in \mathscr{R}^{n_0} \quad \text{und } \vec{y}_j \in \mathscr{R}^{n_L}.$$

Für die Werte, n_{ik}, die in den Knoten des Netzes gespeichert werden, gilt das Gleichungssystem:

$$n_{(i+1),k} = f\left(\sum_{l=1}^{\rho_i} \omega_{i,k,l} \times n_{i,l} + \alpha_{i+1,k}\right),$$

wobei f und $\rho_i \in \mathscr{N}$ geeignet vorgegeben werden.

Lernen bedeutet, dass das Netz durch Auffinden geeigneter Leitwerte $\omega_{i,k,l}$, eine Funktion $(\vec{u}_j \to \vec{y}_{Netz,j})$ realisiert, die $\vec{y}_{Netz,j} \approx y_j$ erfüllt. Das Lernen des Netzes wird üblicherweise mit dem Back-Propagation-Algorithmus durchgeführt.

Um den Lernprozess des Netzes anschaulich zu erfassen, betrachten wir Abbildung 5 für das Lernbeispiel $(\vec{u}_i, \vec{y}_i)$ mit der folgenden Sichtweise:

- Das Netz wird aufgefasst als Menge unterschiedlicher Knoten-Gruppen.
- Der Lernalgorithmus wählt die grauen Akteure aus, die den größten Beitrag bezüglich aller Gruppen zur Darstellung des Lernbeispiels $(\vec{u}_i, \vec{y}_i)$ leisten.
- Die Zuleitungen zur gewählten grauen Gruppe werden für $\vec{u}_i$ verstärkt und diejenigen zu den anderen schwarzen Gruppen abgeschwächt.
- die Anpassung der ausgewählten grauen Gruppe an das Lernbeispiel $(\vec{u}_i, \vec{y}_i)$ und an zu diesem ähnliche Beispiele wird verbessert, wohingegen die anderen schwarzen Gruppen zum Erlernen anderer Lernbeispiele frei bleiben.

Unsere Argumentation zeigt, dass die Fähigkeit zur Entwicklung von Sichtweisen, nach dem Vorbild der Mathematik, für die KI unverzichtbar ist. Wissen, auch dasjenige das die KI liefert, ist nicht absolut, es muss bezüglich einem Verstehenshorizont begründet sein. Aber welche Denkweisen der Mathematik machen die KI verstehbar? Unser Beitrag soll zur Diskussion dieser Frage anregen.

Danksagung. Mein Dank gilt Vincent J. Sommer und Friedrich T. Sommer für hilfreiche Diskussionen.

Literatur

Banach, S. & Tarski, A. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math., 6*, 244–277.

Cohen, P. (2002). The discovery of forcing. *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32*(4), 1071–1100.

Schorcht, S, Baumanns, L., Buchholtz, N., Huget, J., Peters, F. & Pohl, M. (2024). Lernt die KI nun Sehen und Zeichnen? Chancen und Herausforderungen der Bildgenerierung und Bildinterpretation mit ChatGPT für die mathematische Forschung. *Mitteilungen der GDM, 116*, 22–29.

Sommer, H. (2023). Verstehen der Zahlen. *Mitteilungen der GDM, 115*, 39–43.

Sommer, H. & Kroll, A. (2023). Zum Einsatz von KI-Methoden zur Lösung von Problemen der Regelungstechnik. *Proceedings: 33. Workshop Computational Intelligence*. Berlin, 23.–24. November 2023.

Weiss, I. (2015). *The real numbers – A survey of constructions*. arXiv:1506.03467v1

Hanns Sommer, Universität Kassel
hjsommer@uni-kassel.de

Fragen nach dem zweiten Pisa-Schock

Jens Weitendorf

Zur Kompetenzorientierung und Aufgabenöffnung

Nach dem ersten Pisa-Schock gab es erhebliche Veränderungsvorschläge für den Mathematikunterricht. Diese bezogen sich im Wesentlichen auf die Kompetenzorientierung, das heißt, nicht mehr die Inhalte, sondern der Erwerb der Kompetenzen sollten im Vordergrund stehen. Daneben wurde das Öffnen von Aufgaben angestrebt. Offensichtlich haben diese Veränderungen nicht zu dem erwünschten Erfolg geführt. Daraus ergibt sich doch zwangsläufig die Frage, ob die Kompetenzorientierung der richtige Weg war. Es kann natürlich auch sein, dass es an der mangelnden Umsetzung gelegen hat. Gibt es diesbezüglich Untersuchungen? Eine weitere Forderung war die Öffnung von Aufgaben. Ich habe damals selbst an einer Fortbildung teilgenommen, in der in Arbeitsgruppen Aufgaben geöffnet werden sollten. Dies geschah auch zunächst. Die Aufgaben wurden dann aber im Laufe der weiteren Diskussion wieder geschlossen, weil Kolleginnen und Kollegen die Befürchtung hatten, dass die Korrektur zu offener Aufgaben schwierig und zu aufwendig sei. Man hätte dann ähnliche Probleme bei der Korrektur wie im Deutschunterricht. Eine weitere Frage stellt sich meines Erachtens, inwieweit sich offene Aufgaben für Vergleichstests eignen. Dies ist eine wichtige Frage im Hinblick auf das Zentralabitur, für das ja das Verfassungsgericht die Vergleichbarkeit[1] gefordert hat.

Zur Digitalisierung

Weitere Fragen beziehen sich auf die geforderte Digitalisierung der Schulen. Was bedeutet diese im Hinblick auf den Mathematikunterricht? Es gab mal im Jahre 2001 eine Veröffentlichung von Herget, Heugl, Kutzler und Lehmann (2001) zur Frage, welche handwerklichen Rechenkompetenzen im CAS-Zeitalter unverzichtbar sind. Es gab damals einen Aufschrei, aber bis heute keine konkreten Antworten auf den Vorschlag. Wäre es nicht an der Zeit zu klären, welche inhaltlichen Konsequenzen sich daraus für den Mathematikunterricht ergeben? Die Einführung des wissenschaftlichen Taschenrechners hat unter anderem dazu geführt, dass Rechenschieber und Logarithmentafeln keine Relevanz mehr haben. Was bedeutet das für die Weiterentwicklung der digitalen Medien? Der Medienkonsum unter Jugendlichen ist immens. Reinhard Oldenburg (2024) hat in seinem *Zeit*-Artikel auf die Gefahr hinsichtlich der Erklärvideos hingewiesen. Daneben sind die Schülerinnen und Schüler den Wahrheiten des Internets im Grunde genommen hilflos ausgeliefert. Die damit verbundenen Probleme werden durch den Einsatz künstlicher Intelligenz noch erheblich verstärkt. Sollte nicht auch der Mathematikunterricht, wo es möglich ist, einen Beitrag dazu leisten, Schülerinnen und Schüler in die Lage zu versetzen, den Wahrheitsgehalt von Internetmeldungen zu überprüfen? Dies ist sicher nur in einem geringen Umfang möglich, wäre aber ein erster Ansatz. So ist es zum Beispiel möglich, Grafiken in Systeme dynamischer Geometrie zu übertragen und so durch elektronisches Messen Größenverhältnisse zu überprüfen. Das wäre sicher eine andere Ausrichtung des Mathematikunterrichts.

Die drei Grunderfahrungen nach Winter

In vielen Veröffentlichungen wird auf diese drei Grunderfahrungen (Winter, 1995) verwiesen. So dienen sie auch als Grundlage für die Entwicklung der Bildungsstandards, die nach dem ersten Pisa-Schock Grundlage des Mathematikunterrichts geworden sind (Blum et al., 2006). Das heißt, auch die oben diskutierten Kompetenzen haben neben den inhaltlichen Leitideen und den Anforderungsbereichen als Basis diese drei Grunderfahrungen. Eher nicht diskutiert wurde bisher, inwieweit sich die konkreten Inhalte des Mathematikunterrichts eignen, dass die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, wirklich sol-

[1] Genaueres findet man zum Beispiel im Deutschen Schulportal der Robert Bosch Stiftung: Bildungswesen → Wie das Abitur in Zukunft vergleichbarer werden soll.

che Erfahrungen zu machen. Auch scheint mir unklar zu sein, inwieweit diese Grunderfahrungen im jetzigen Unterricht umgesetzt werden. Da die Pisa-Studie ja international angelegt ist und sich die Grunderfahrungen eher auf Deutschland beziehen, ist nicht zu erwarten, dass diese Bestandteil der Aufgaben in der Pisa-Studie sind.

Ziel des Abiturs

Es steht ja die Forderung im Raum, dass das Abitur die Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzen soll, ein mathematisch naturwissenschaftliches Studium aufzunehmen. Es ist bekannt, dass es in Bezug auf die Fähigkeiten in diesem Bereich erhebliche Kritik von Seiten der Universitäten gibt. Auf der anderen Seite ist der Anteil der Schülerinnen und Schüler, die ein solches Studium aufnehmen, eher gering. So ergibt sich doch die Frage, wie sollte die mathematische Bildung von jemand, der nicht ein solches Studium aufnimmt, beschaffen sein. Ergibt sich daraus nicht die Konsequenz schon eine Trennung in der Sek. II hinsichtlich einer späteren Ausrichtung vorzunehmen? Für Schülerinnen und Schüler, die später kein mathematisch naturwissenschaftliches Studium aufnehmen wollen, könnte das bedeuten, zum Beispiel Stochastik, Logik (manchmal hilfreich für Argumentationen), Wachstumsprozesse usw. in den Vordergrund zu stellen. Termumformungen wie zum Beispiel Polynomdivision usw. sind für diese Gruppe sicher nicht motivierend.

Schlussbemerkung

Wäre es nicht Aufgabe der GDM bzw. ihrer Mitglieder, sich mehr hinsichtlich der Inhalte und deren Umsetzung im Mathematikunterricht zu engagieren? Dies scheint, wenn man die Entwicklung von KI bedenkt, erforderlicher denn je. So sollten doch die Auswirkungen von Computeralgebrasystemen und dynamischer Geometriesoftware inhaltlich diskutiert und umgesetzt werden, bevor KI in den mathematischen Schulalltag integriert wird. Auch die Ergebnisse der letzten Pisa-Studie sollten Anlass genug sein, über die Inhalte eines zukünftigen Mathematikunterrichts zu diskutieren.

Literatur

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 21). Cornelsen.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B. & Lehmann, E. (2001). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU Journal*, *54*(8), 458–464.

Oldenburg, R. (2024). Die Position: Am Pisa-Debakel sind auch die Lehrenden schuld. *DIE ZEIT 4*, 18. Januar 2024, 34.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *61*, 37–46.

Jens Weitendorf, ehemals Gymnasium Harksheide, IQSH
JWeitendorf@t-online.de

Neues aus der Nachwuchsvertretung

Ömer Arslan, Lisa Birk, Marco Böhm, Theresa Büchter und Franziska Tilke

Die Nachwuchsvertretung der GDM besteht aus einem Team von engagierten Nachwuchswissenschaftler:innen. Auf der letzten GDM Jahrestagung in Essen haben vier Mitglieder die Nachwuchsvertretung verlassen, für deren tatkräftige Unterstützung in den letzten Jahren wir uns ganz herzlich bedanken möchten: Lukas Baumanns, Julia Joklitschke, Norbert Noster und Franziska Peters. Theresa Büchter ist auf dem Frühjahrstreffen zur neuen Sprecherin gewählt worden und bildet nun mit Gerrit Loth das neue Sprechenden-Duo. Wir möchten Franziska Tilke für ihren Einsatz als Sprecherin danken. Ergänzt wird das Team der Nachwuchsvertretung durch die beiden neuen Mitglieder, Stephanie Kron und Charlott Thomas, wir freuen uns auf die zukünftige Zusammenarbeit.

In diesem Beitrag berichten wir vor allem von dem Nachwuchstag der GDM, der unser jährliches Präsenz-Event ist, und weiteren Angeboten im Laufe des Jahres. Der Nachwuchstag eignet sich ideal für das Ankommen in der GDM und das Vernetzen mit anderen Nachwuchswissenschaftler:innen.

Nachwuchstag der GDM Jahrestagung 2024 in Essen

Die erste GDM Jahrestagung ist für jede:n ein besonderes Erlebnis: zum ersten Mal ein Poster vorzustellen, einen Vortrag vor großem Publikum zu halten oder sich über seine wissenschaftliche Arbeit mit bis dato Fremden zu unterhalten, führt nicht nur zu großer Vorfreude, sondern sorgt meist auch für viel Ungewissheit über das, was dort wohl kommen mag. An dieser Stelle hat es sich die Nachwuchsvertretung zur Aufgabe gemacht, den neuen Nachwuchswissenschaftler:innen den Start zu erleichtern und bereits vor offiziellem Tagungsbeginn ein möglichst passgenaues Angebot geschaffen.

In Essen ging es nach der Begrüßung am Sonntagmittag für die 100 Teilnehmenden direkt mit Workshops zu Themen wie Umgang mit Literatur, wissenschaftlichem Schreiben oder erstmalig auch Open Science weiter. Die Mitglieder der Nachwuchsvertretung berichten von ihren Erfahrungen und gaben neuen Input, bevor die neuen Nachwuchswissenschaftler:innen selbst gefragt waren. So galt es beim Workshop Poster gestalten, Exemplare von vergangenen Tagungen auf ihre Stärken und Schwächen zu analysieren, bevor eine Postersession simuliert wurde. Einen Vortrag vorzubereiten und vor der eigenen Arbeitsgruppe zu proben ist eine Sache, ihn vor Menschen zu halten, die einen selbst und das eigene Thema nicht kennen, ist eine ganz andere Herausforderung. Daher bestand für alle die Möglichkeit, diese Situation im Rahmen eines Probevortrages zu erfahren, sich Tipps für den eigentlichen Vortrag während der Tagungswoche abzuholen und sich auf mögliche Fragen vorzubereiten.

Wissenschaftliches Arbeiten lebt darüber hinaus vom Austausch über die eigene Forschung. Durch methodische und thematische Networking-Runden konnten Gleichgesinnte gefunden werden, mit denen sich die Teilnehmenden während der Tagung und auch darüber hinaus vernetzen konnten. Dieser Austausch konnte beim gemeinsamen Abendessen am Sonntag sowie dem traditionellen Kneipenabend des Nachwuchses am Dienstag weiter fortgeführt werden.

Im Laufe der Promotion kommt es immer wieder zu Situationen, in denen man an sich und seiner Arbeit zweifelt. Dass dies völlig normal ist und es bei allen Höhen und Tiefen gibt, zeigten zum Abschluss des Nachwuchstages Dr. Nicola Haas und Prof. Dr. Andreas Büchter. Beide erzählten von ihren eigenen Erfahrungen und machten dem Nachwuchs Mut für die eigene Promotionszeit. Mit diesen bestärkenden Worten endete die Aufwärmphase und für die neuen Nachwuchswissenschaftler:innen ging es am Montagmittag schließlich los mit der ersten GDM Jahrestagung, die vielen hoffentlich positiv in Erinnerung bleiben wird.

Ein besonderer Dank gilt abschließend Prof. Dr. Andreas Büchter, Dr. Nicola Haas sowie dem Team aus Essen, welche die Nachwuchsvertretung tatkräftig bei der Organisation und Durchführung des Nachwuchstages unterstützt haben.

Nachwuchstag der GDM Jahrestagung 2025 in Saarbrücken

Da nach der Tagung bekanntlich vor der Tagung ist, ist die Planung für den kommenden Nachwuchstag am 2. und 3. März 2025 in Saarbrücken bereits in vollem Gange. Bitte haltet euch den Termin schon jetzt frei und gebt ihn an neue Mitarbeitende weiter. Mit Rückblick auf den Nachwuchstag in Essen und einer ersten Evaluation wird es ein paar Änderungen im kommenden Programm geben.

Neu im Angebot wird ein Workshop zum Thema *KI in der Forschung nutzen* sein. In diesem werden die Vorzüge von KI-Tools für unterschiedliche Forschungstätigkeiten aufgezeigt, aber auch Grenzen diskutiert. Die Workshops *wissenschaftliches Schreiben, Vorträge halten, Selbst- und Zeitmanagement, Umgang mit Literatur* und *Open Science* bleiben weiterhin im Angebot. Der Workshop *Poster gestalten* wird nicht mehr am Nachwuchstag angeboten, sondern wird bereits vor der Tagung als Online-Workshop (ein Termin wird rechtzeitig bekanntgegeben) stattfinden, sodass alle Interessierten die Gelegenheit haben, sich bereits vor der Einreichung eines Posters über eine gute Postergestaltung, Do's und Don't's zu informieren. Um der Vielzahl an Einzelvorträgen, aber auch weiteren Vortragsarten auf der GDM Jahrestagung gerecht zu werden, wird der Zeitrahmen für Probevorträge erhöht. Außerdem wird eine Probe-Postersession ebenfalls ihren Platz im Nachwuchsprogramm bekommen.

In allen wichtigen lokalen Belangen arbeitet das Planungsteam des Nachwuchstages eng mit dem GDM-Planungsteam aus Saarbrücken zusammen. Hierfür sprechen wir unseren Dank aus! Wir freuen uns schon jetzt auf alle neuen Nachwuchswissenschaftler:innen, die den Weg in die Mathematikdidaktik gefunden haben und am Nachwuchstag teilnehmen wollen!

Angebote der Nachwuchsvertretung zwischen den GDM-Jahrestagungen

Abgesehen vom Nachwuchstag organisieren wir zwischen den GDM-Jahrestagungen verschiedene Online-Angebote im Rahmen des Net(t)workings. Diese bieten über das Jahr verteilt die Möglichkeit für inhaltlichen Input und zum Netzwerken. Über alles können Sie sich und könnt ihr euch auf der GDM-Homepage aktuell informiert halten (https://didaktik-der-mathematik.de/nachwuchs/). Auf mehr Details zu diesen Angeboten kann man sich in der nächsten Ausgabe von „Neues aus der Nachwuchsvertretung“ in den nächsten GDM Mitteilungen freuen.

Karrierewege nach der Promotion

Am Ende der Promotion und auch schon in den Phasen davor stellen sich viele Nachwuchswissenschaftler:innen immer wieder Fragen zu ihrem zukünftigen Karriereweg – geht es für mich in der Wissenschaft weiter, führt mich mein Weg an die Schule oder verschlägt es mich in einen ganz anderen Bereich? Mit einer mathematikdidaktischen Promotion stehen uns viele verschiedene Karrierewege offen, die allerdings häufig im Verborgenen bleiben, wenn sie nicht unmittelbar an die Schule oder die Universität führen. Um einen Überblick über all diese Möglichkeiten zu geben, hat sich die AG Karrierewege der Nachwuchsvertretung zum Ziel gesetzt, verschiedene Karrierewege mit einer mathematikdidaktischen Promotion abzubilden und somit jungen Wissenschaftler:innen einen Einblick in potenzielle (auch außerwissenschaftliche) berufliche Laufbahnen zu geben.

Haben Sie einen Weg in Ihrer persönlichen Karrierelaufbahn eingeschlagen, der vielleicht noch im Verborgenen liegt? Haben oder hatten Sie einen Beruf inne, der auf den ersten Blick außerhalb der Mathematikdidaktik liegt? Haben Sie beispielsweise in Ministerien, in Schulbuchverlagen, in der Wirtschaft, … eine Anstellung gefunden? Dann würden wir uns freuen, wenn Sie Kontakt zu uns aufnehmen würden (Mail an lisa.birk@uni-muenster.de), um auch Ihre Erfahrungen teilen zu können. Wir freuen uns auf spannende Einblicke und bedanken uns im Voraus.

Nachwuchskonferenz 2024

Neben den Angeboten, welche wir als Nachwuchsvertretung selbst planen und gestalten, gibt es außerdem die GDM-Nachwuchskonferenz. Diese findet einmal im Jahr statt und wird von wechselnden Standorten geplant und ausgerichtet. Die Nachwuchsvertretung ist hier bei der Standort-Suche beteiligt, die weitere Planung liegt dann jedoch in den Händen der jeweiligen Standorte. Die diesjährige Nachwuchskonferenz findet vom 9. bis 13. September 2024 im Sport- und Bildungszentrum Malente statt und wird vom IPN Kiel mit Prof. Dr. Daniel Sommerhoff ausgerichtet. Die einwöchige Konferenz bietet dem Nachwuchs in der GDM die Möglichkeit, Einsichten in die Mathematikdidaktik und Bildungsforschung zu gewinnen, sich im Bereich wissenschaftlicher Methoden weiterzubilden, neue Anregungen für das eigene Qualifikationsvorhaben zu erlangen und sich untereinander auszutauschen und zu vernetzen.

Anregung und Feedback

Wir freuen uns stets über Feedback und Anregungen zu unserem Engagement als Nachwuchsvertretung. Gerne nehmen wir auch Vorschläge für Angebote für

Workshop-Beiträge auf kommenden Jahrestagungen der GDM oder auch außerhalb der Konferenzen als Online-Angebot entgegen. Auch über Interesse, die Nachwuchskonferenz auszurichten, freuen wir uns stets. Bei Interesse können Sie und könnt ihr uns sehr gern unter folgender E-Mail-Adresse kontaktieren: nachwuchsvertretung@didaktik-der-mathematik.de

Ömer Arslan, Universität Duisburg-Essen
oemer.arslan@uni-due.de

Lisa Birk, Universität Münster
lisa.birk@uni-muenster.de

Marco Böhm, Universität Koblenz
mboehm@uni-koblenz.de

Theresa Büchter, Universität Kassel
tbuechter@mathematik.uni-kassel.de

Franziska Tilke, Universität Münster
f.tilke@uni-muenster.de

Protokoll der Mitgliederversammlung der GDM am 7. 3. 2024 im Rahmen der GDM Jahrestagung in Essen

Zeit: 15.00 Uhr bis 17.26 Uhr

Der erste Vorsitzende Reinhard Oldenburg begrüßt die Teilnehmenden zur Mitgliederversammlung.

Zunächst bittet Reinhard Oldenburg um eine Schweigeminute zum Gedenken an die seit der letzten Mitgliederversammlung verstorbenen Kollegen:

- Heinrich Abel
- Kurt Peter Müller
- Friedhelm Padberg
- Hans-Dieter Rinkens
- Winfried Roppel
- Wilhelm Schipper
- Gerd Walther

TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Gegen das im Heft 116 der *Mitteilungen der GDM* (S. 76–80) enthaltene Protokoll der digitalen GDM Mitgliederversammlung vom 10. 5. 2023 werden keine Einwände erhoben. Die ebenfalls im Heft 116 der *Mitteilungen der GDM* (S. 80) abgedruckte Fassung der Tagesordnung wird ohne Änderungen beschlossen.

TOP 2: Bericht des Vorstands

2.1 Aktuelles aus Vorstand und Beirat

Reinhard Oldenburg berichtet über die seitens des Vorstands wahrgenommenen Termine:

- 2023/24 Monatliche digitale Sitzungen des Vorstands gemeinsam mit der Geschäftsführung (seit 4/2023 Franziska Sommerlade, seit 9/2023 Vertretung durch Fabian Rösken, verlängert bis Mitte Juni 2024)
- 8. 5. 2023 Mitgliederversammlung der GFD
- 5. 5. 2023 Gemeinsame Sitzung von Vorstand und Beirat
- 10. 11. 2023 Gemeinsame Sitzung von Vorstand und Beirat (digital)

Im Rahmen der gemeinsamen Sitzung von Vorstand und Beirat am 10. 11. 2023 wurde Kerstin Gerlach als Herausgeberin wiedergewählt. Im Rahmen der gemeinsamen Sitzung von Vorstand und Beirat am 3. 3. 2024 wurde von den *JMD* Herausgebenden verkündet, dass Kerstin Gerlach und Dominik Leiß als *JMD*-Herausgebende Ende 2024 ausscheiden werden. Als Nachfolge wurden Silke Ruwisch und Alexander Salle gewählt.

2025 findet die GDM-Jahrestagung in Saarbrücken statt, 2026 in Wuppertal. Es wird immer noch nach einem Austragungsort für 2027 gesucht. Reinhard Oldenburg bittet darum, dass sich interessierte Standorte an den Vorstand wenden.

2.2 Forschungs- und Nachwuchsförderung

Stefan Ufer berichtet, dass der DFG Antragsworkshop in DFG Antragsprogramm umbenannt wurde und nun gemeinsam von Vertretungen der GDM, GDCP und GI DDI durchgeführt wird. Der Grund für die Umbenennung wird durch eine Neustrukturierung erklärt. So werden die Anträge nicht nur im Rahmen eines mehrtätigen Feedback-Workshops diskutiert, sondern über sechs Monate vom ersten Abstract über die Antragsskizze bis hin zum vollständigen Antragsentwurf begleitet. Trotz des erhöhten Arbeitsaufwands ist das Interesse an diesem Programm aus allen drei Fachgesellschaften sehr hoch. Aktuell werden 18 Vorhaben (davon 8 aus der GDM) in Form eines Antragsentwurfs ausgearbeitet. Es gibt bereits Nachfragen für die Teilnahme am Folgeprogramm.

Theresa Büchter, als neu gewählte Sprecherin der Nachwuchsvertretung, stellt das vielfältige Programm des GDM Nachwuchses vor. Sie berichtet zunächst von dem gut angenommenen Nachwuchstag im Rahmen der GDM Tagung 2024 in Essen mit etwa 100 Teilnehmenden am Sonntag und Montag. Es konnte ein vielfältiges

Angebot, bestehend aus Workshops, Aktivitäten zum gegenseitigen Kennenlernen sowie thematischem und methodischem Networking, zusammengestellt werden. Ferner fand eine Talkrunde mit Dr. Nicola Haas und Prof. Dr. Andreas Büchter statt. Im Rahmen des PostDoc Programms wurden ein Workshop zum wissenschaftlichen Publizieren mit Aiso Heinze, ein Karriereforum mit Raja Herold-Blasius, Solveig Jensen und Daniel Walter sowie ein Workshop für DFG-Anträge mit Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski angeboten. Zur Vorbereitung der GDM Nachwuchstage, die im Rahmen der GDM Tagung 2025 in Saarbrücken stattfinden werden, wurde eine AG gegründet.

Das digital stattfindende Net(t)-Working-Programm für Doktorand:innen und PostDocs wird weitergeführt. So sind für Ende April 2024 eine Fragerunde zur Promotion mit Hedwig Gasteiger, Ende Mai eine Infoveranstaltung zu Berufungsverfahren mit Annika Dreher und Timo Leuders sowie Ende Juni ein Vortrag zum Thema Forschungsgegenstände und -ziele mit Tobias Rolfes geplant. Die genauen Termine und weitere Informationen zu diesen Veranstaltungen werden über die Mail-Verteiler des GDM Nachwuchses bekannt gegeben.

Weiterhin weist Theresa Büchter auf die Möglichkeit hin, mit den Vertrauensprofessor/innen Hedwig Gasteiger und Rudolf Sträßer bei Bedarf in Kontakt zu treten.

In 2024 übernimmt das IPN in Kiel die Ausrichtung der GDM Nachwuchskonferenz. Diese wird vom 9. bis zum 13. September 2024 in Bad Malente stattfinden. Die Nachwuchskonferenz 2025 wird durch die LMU München und die TU München gemeinsam organisiert. Für 2026 wird noch nach einem ausrichtenden Standort gesucht. Bei Interesse kann die GDM Nachwuchsvertretung gerne direkt angesprochen werden.

Daniel Sommerhoff gibt – stellvertretend für das Planungskomitee – Einblicke in den aktuellen Planungsstand zur GDM-Nachwuchskonferenz vom 9. bis zum 13. September 2024 in Bad Malente. Im Fokus werden unterschiedliche Forschungsmethoden stehen. Vier Hauptvorträge und etwa 20 Workshops werden sich diesem Schwerpunkt widmen. Ferner werden Round-Tables und Einzelberatungen angeboten.

Stefan Ufer verkündet, dass die GDM Nachwuchskonferenz vom 15. bis 19. September 2025 in Neuhaus (Schliersee) ausgerichtet wird. Die Anmeldung wird in etwa einem Jahr vom März bis Juni 2025 möglich sein.

Als Vorsitzende der GDM Förderpreisjury berichtet Silke Ruwisch über den Auswahlprozess für die Vergabe des Förderpreises 2024. Bis Juli 2023 wurden elf Dissertationen zur Begutachtung eingereicht, darunter vier kumulative Dissertationen. Nach einer ersten Begutachtungsrunde wurden fünf Dissertationsschriften auf eine „Shortlist“ gesetzt, darunter vier kumulative Dissertationen. Für den Förderpreis 2024 wurde schlussendlich eine Monographie vorgeschlagen. Die Auswahlkriterien für die Begutachtung der einzelnen Dissertationen werden von Silke Ruwisch transparent dargestellt.

Den TOP 2.2 abschließend berichtet Susanne Prediger aus dem DFG Fachkollegium, dem Team der Herausgebenden der *Educational Studies in Mathematics*, der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der KMK (SWK) sowie dem bundesweiten Programm QuaMath.

Das DFG Fachkollegium 109-2 (Erziehungswissenschaft und Bildungsforschung, Allgemeine und fachbezogene Lehr-Lernforschung) setzt sich aus insgesamt neun Mitgliedern zusammen, darunter in der Regel zwei aus den Fachdidaktiken. Bis April 2024 sind dies Elke Sumfleth und Susanne Prediger. Neugewählt ab April 2024 sind Mirjam Steffensky und Ulrich Riegel aus den Fachdidaktiken sowie Anand Pant, Mareike Kunter, Georg Breidenstein, Carla Schelle, Elmar Souvignier, Rita Massala und Bettina Fritzsche. Darüber hinaus gibt Susanne Prediger einen Überblick über die Antrag- und Bewilligungssummen für DFG Projekte in den Jahren 2014 bis 2022 und weist darauf hin, dass die Bewilligungsrate bei 22,8 % liegt, neuerdings 75 %-Stellen gefördert werden und bei Antragsstellung die Reisemittel für die Projektmitarbeitenden mitbeantragt werden müssen. Zudem entkräftet Susanne Prediger einige Mythen, die sich rund um die Antragsstellung in den letzten Jahren verhärtet haben. Vielmehr haben Projekte vor allem dann Erfolg, wenn sie stringent durchdacht und kohärent in der Argumentation sind. Begutachtet werden die Anträge immer von einer Person aus der entsprechenden Fachdidaktik und nicht – wie oftmals vermutet – vor allem von Expert:innen aus der Psychologie. Graduiertenkollegs, Forschungsgruppen und Sonderforschungsbereiche (SFB) brauchen extrem viel Vorarbeit, sodass Susanne Prediger empfiehlt, dass sich an diese Anträge nur Personen heranwagen, die schon erfolgreich DFG Projekte eingeworben haben. Zusammenfassend schlussfolgert Susanne Prediger, dass es sich lohnt, einen DFG Antrag zu stellen, denn es gibt ein sehr profundes Feedback zu Projektplänen noch vor dem Start und auch in zweiten und dritten Überarbeitungsschleifen, wissenschaftliche Anerkennung sowie flexibles Geld mit wenig Verwaltungsaufwand.

Aus dem Team der Herausgebenden der *Educational Studies in Mathematics* berichtet Susanne Prediger, dass die Einreichung und auch der Erfolg von Artikeln aus Deutschland stetig steigen. Diese Entwicklung ist zu begrüßen, da die Zeitschrift immer noch den höchsten Impact Factor in der Mathematikdidaktik hat und somit die Forschung aus Deutschland auch international wahrgenommen werden kann.

Aus der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der KMK (SWK) gibt Susanne Prediger bekannt, dass die Bildungssteuerung immer mehr die Forschungsfundierung sucht. Somit sind seit der Gründung der SWK im Mai 2021 drei Gutachten (Digitalisierung, Sicherung von Basiskompetenzen in der Grundschule sowie Lehrkräftebildung) erschienen. Ein weiteres Gutachten zur Sicherung von Basiskompetenzen in der Sek I (nicht nur auf die Unterrichtsfächer Deutsch und Mathematik, sondern auch auf Fremdsprachen, NaWi, digitalisierungsbezogene Kompetenz und den Übergang zum Beruf bezogen) ist aktuell in Arbeit und soll Ende 2024 erscheinen. Diese Gutachten zeigen kurzfristige Wirkungen, da die Medien diesen Gutachten stets Aufmerksamkeit schenken. Mittelfristige Wirkungen sind durch die bildungspolitische Aufmerksamkeit erkennbar, und langfristige Wirkungen zeigen sich erst, wenn die Empfehlungen nach und nach umgesetzt werden.

Aus dem DZLM teilt Susanne Prediger mit, dass das Projekt QuaMath gestartet ist. Aktuell werden die Multiplizierenden qualifiziert. Im Schuljahr 2024/25 beginnt die Arbeit mit den Lehrkräften. Diese und weitere Informationen zum Projekt können dem Heft 116 der *Mitteilungen der GDM* (S. 49–61) entnommen werden.

2.3 Gemeinsame Kommission Übergang Schule–Hochschule

Christina Drücke-Noe informiert stellvertretend für den Sprecher Reinhard Hochmuth über die Aktivitäten der gemeinsamen Kommission „Übergang Schule–Hochschule". Seit der letzten GDM Mitgliederversammlung hat es sechs Sitzungen dieser Kommission gegeben, davon drei in Präsenz. In diesen Treffen verständigten sich alle Vertretenden der DMV, MNU und GDM über die Aufgaben und Ziele der Übergangskommission. Diese Verständigung war insofern notwendig, da die Arbeitsgrundlage der Kommission seit 2013 nicht mehr angepasst worden ist. Die Diskussionen zielten insbesondere auf die Fokussierung aktueller Aktivitäten und die notwendige Erhöhung des Impacts der Kommission mit dem Anliegen, die Kommissionsaktivitäten auf sämtliche Hochschulzugangsberechtigungen und Studiengänge mit mathematischem Grundlagenstudium auszuweiten. So wurden die Themen „Was bedeutet ‚Studierfähigkeit'?" und „Gestaltung der Studieneingangsphase" innerhalb der Kommission bereits intensiv diskutiert. Die Diskussion soll aber auch im Rahmen einer Tagung, die vom 19. 2. 2025 bis zum 21. 2. 2025 an der Universität Hannover stattfinden wird, fortgesetzt werden. Weiterhin wird die Webseite der Kommission aktuell neu gestaltet und der engere Austausch mit der Kommission Lehrkräftebildung angestrebt.

2.4 Gemeinsame Kommission Lehrkräftebildung

Florian Schacht gibt als Vorsitzender der Kommission Lehrkräftebildung Auskunft über die Aktivitäten des letzten Jahres. Am 11. 11. 2023 wurde das gemeinsame Positionspapier der DMV, GDM und MNU zum Thema „Lehrkräftemangel" veröffentlicht. Das Papier ist ebenfalls im Heft 116 der *GDM-Mitteilungen* veröffentlicht. Ferner berichtet Florian Schacht, dass am 4. 3. 2024 ein Diskussionsforum zum Thema „Professionalisierung im Kontext des Lehrkräftemangels im Fach Mathematik (GKL)" im Rahmen der GDM-Tagung mit reger Beteiligung stattgefunden hat. Für 2024 ist ein Symposium zum Thema Lehrkräftemangel im Fach Mathematik geplant. Es wird angestrebt, die bewährte Arbeit der Kommission durch regelmäßige Treffen sowie die Vorbereitung und Ausbringung weiterer Stellungnahmen fortzusetzen.

2.5 Bericht Schriftführung

Daniela Götze gibt Einblicke in den Stand und die Entwicklung der Mitgliederzahlen. Zum 6. 3. 2024 kann der Verein 1240 Mitglieder verzeichnen. Das sind 27 Mitglieder weniger als im Vorjahr. Die Mitglieder werden aufgerufen, die eigenen Mitgliederdaten aktuell zu halten. Bezüglich der Mitteilungen der GDM weist Daniela Götze darauf hin, dass die Arbeitskreisleitungen laut Satzung einmal pro Jahr über die Aktivitäten des Arbeitskreises zu berichten haben und diese Berichte in den Mitteilungen der GDM veröffentlicht werden. Die Schriftführerin bedankt sich zudem bei allen Autorinnen und Autoren, denn insbesondere in den Rubriken „Magazin" und „Digitales Lehren und Lernen" wurden im Jahr 2023 viele interessante Beiträge eingereicht. Gerne können die GDM-Mitglieder Wünsche für weitere Themenschwerpunkte an die Schriftführung richten.

TOP 3: Bericht des Kassenführers und der Kassenprüferin

Carina Büscher verliest den Kassenbericht für das Geschäftsjahr 2023. Einnahmen in Höhe von 102 300 €

standen Ausgaben in Höhe von 99 762 € gegenüber. Zum 31. 12. 2023 befanden sich 130 714,40 € auf dem Konto der GDM. Dem Vorstand der GDM ist durchaus bewusst, dass das Vereinsguthaben weiterhin abgeschmolzen werden muss. Für das Jahr 2024 wird in der Finanzplanung daher ein Saldo von etwa 40 000 € unter dem Vorbehalt, dass die Mitgliederversammlung einer Beitragssenkung für 2024 zustimmt, vorgesehen.

Bericht der Kassenprüferin
Gabriela Schürch berichtet:

Der Jahresabschluss per 31. 12. 2023 der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM) wurde vom 27. 2. bis 28. 2. 2024 in Luzern geprüft. Überprüft wurden alle Kontoauszüge von 2023, alle Belege des überprüften Zeitraumes, alle Einnahmen und Ausgaben auf rechnerische und sachliche Richtigkeit, alle Unterlagen über Forderungen und Verbindlichkeiten sowie das Kassenbuch und die Buchhaltung.

Ergebnis der Überprüfung:

- Alle Belege waren vollständig vorhanden. Sie wurden chronologisch, übersichtlich und nachvollziehbar nachgewiesen.
- Erforderliche Auskünfte wurden umfassend erteilt.
- Alle Ein- und Ausgaben waren vollständig, rechnerisch und sachlich richtig und nachvollziehbar dokumentiert.
- Alle Unterlagen über Forderungen und Verbindlichkeiten wurden vollzählig nachgewiesen und entsprechen den buchhalterischen Anforderungen.

Finanzbestände des Vereins:

- Anfangsbestand per 1. 1. 2023: 128 175,82 €
- Endbestand per 31. 12. 2023: 130 714,40 €

Unter Beachtung des Ergebnisses wird der Mitgliederversammlung die Entlastung des Vorstandes empfohlen.

TOP 4: Entlastung des Vorstandes

Susanne Prediger beantragt die Entlastung des Vorstandes. Der Entlastung wird einstimmig zugestimmt.

TOP 5: Festsetzung der Mitgliedsbeiträge

Der Vorstand schlägt für das Beitragsjahr 2024 eine Reduktion der Mitgliedsbeiträge um 20 % für regulär zahlende Mitglieder und 50 % für ermäßigte Mitglieder vor.

Susanne Prediger macht den Vorschlag, dass die ermäßigten Mitgliedsbeiträge von Mitarbeitenden mit einer maximal 50 %-Stelle auf Mitarbeitende mit einer maximal 75 %-Stelle ausgeweitet werden sollen. Da unklar ist, wie viele Nachwuchswissenschaftler:innen dies betrifft, lässt der GDM Vorstand durch die Nachwuchsvertretung prüfen, wie hoch der Anteil der Mitarbeitenden mit einer 75 %-Stelle ist, sodass eine Auswirkung dieser Ermäßigungseinräumung für die Gesamtbilanz geprüft werden kann.

Anselm Strohmaier empfiehlt, Möglichkeiten zur Ausgabe des Vereinsvermögens zu finden. Reinhard Oldenburg bittet um konkrete Vorschläge, wie das Geld vereinskonform ausgegeben werden kann, denn auch der Vorstand hat sich diesbezüglich bereits einige Gedanken gemacht und z. B. Nachwuchskonferenzen etc. großzügig unterstützt. Stefan Ufer bekräftigt die Bestrebungen, Geld auszugeben, statt Mitgliedsbeiträge zu reduzieren.

Die Mitgliederversammlung stimmt über den Vorschlag des Vorstands für die oben genannte Reduktion der Mitgliedsbeiträge in 2024 ab. Mit fünf Enthaltungen und einer Gegenstimme wird die vom Vorstand vorgeschlagene Reduktion angenommen.

TOP 6: Wahlen: 2. Vorsitzende/r; Schriftführung; Beirat und Kassenprüfer/in

Folgende Positionen sind zu besetzen: 2. Vorsitzende/r; Schriftführung; Beirat und Kassenprüfer/in

2. Vorsitz
Katja Lengnink kann nach sechs Amtsjahren nicht wiedergewählt werden. Somit muss die Position des zweiten Vorsitzes neu besetzt werden. Florian Schacht schlägt Marita Friesen vor. Sie hat sich in den letzten Jahren sehr für die GDM engagiert, da sie in diversen Arbeitskreisen aktiv mitgewirkt hat, im Beirat tätig ist und sich für den GDM Nachwuchs einsetzt. Marita stellt sich der Mitgliederversammlung kurz vor.

Es gibt keine weiteren Vorschläge. Marita Friesen wird gewählt (191 ja, 3 nein und 6 Enthaltungen). Sie nimmt die Wahl dankend an.

Schriftführung
Silke Ruwisch schlägt Sebastian Schorcht vor. Sie betont, dass Sebastian Schorcht viele Jahre für den GDM Nachwuchs aktiv tätig war. Für die GDM-Schriftführung scheint er durch seine bekannte Verlässlichkeit sehr geeignet. Sebastian Schorcht stellt sich ebenfalls der Mitgliederversammlung kurz vor.

Es gibt keine weiteren Vorschläge. Sebastian Schorcht wird gewählt (195 ja, 0 nein und 2 Enthaltungen). Er nimmt die Wahl dankend an.

Kassenprüfer/in
Bärbel Barzel schlägt Gabriela Schürch als Kassenprüferin vor (Wiederwahl). Frau Schürch wird mit 187 Ja-Stimmen und vier Enthaltungen gewählt. Sie nimmt die Wahl dankend an.

Beirat
In 2024 sind fünf Beiratspositionen zu wählen. Zudem ist die Position von Marita Friesen nachzubesetzen, sodass sechs freie Positionen im GDM Beirat neu zu besetzen sind. Aus den Reihen der Mitgliederversammlung werden folgende Personen für den GDM Beirat vorgeschlagen und mit entsprechenden Stimmzahlen (in Klammern) gewählt: Theresa Büchter (168), Nils Buchholtz (137), Gilbert Greefrath (121), Marcus Nührenbörger (126), Elisabeth Rathgeb-Schnierer (138), Frank Reinhold (86) sowie Hans-Stefan Siller (61). Hans-Stefan Siller ist somit nicht gewählt. Die sechs gewählten Personen (Büchter, Buchholtz, Greefrath, Nührenbörger, Rathgeb-Schnierer, Reinhold) nehmen die Wahl dankend an.

TOP 7: GDM Jahrestagung 2025 in Saarbrücken

Melanie Platz informiert über die 58. GDM Jahrestagung, die vom 2. bis 7. März 2025 in Saarbrücken stattfinden wird. Die Lehrstühle der Mathematikdidaktik der Universität des Saarlandes laden hierzu herzlich ein. Während dieser Tagung wird die GDM ihr fünfzigjähriges Jubiläum feiern, denn 1975 wurde die GDM während der Jahrestagung in Saarbrücken gegründet. Dieses Jubiläum soll unter dem saarländischen Motto „Großes entsteht immer im Kleinen“ in Saarbrücken gefeiert werden.

TOP 8: Zeitschriften

Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)

Dominik Leiß berichtet stellvertretend für das gesamte Team der JMD Herausgebenden über die Entwicklungen des JMD. Es werden detaillierte Einblicke in die Anzahl der eingereichten, akzeptierten, abgelehnten, zurückgezogenen sowie internationalen Beiträge im Jahr 2023 gegeben. Auch wenn die Anzahl der Einreichungen und Publikationen aktuell als ausreichend eingestuft werden kann, so sind aus Sicht der Herausgebenden mehr Einreichungen wünschenswert. Erfreulicherweise sind die Downloadzahlen nochmals deutlich gestiegen. Die GDM Mitglieder werden aufgerufen, die im Journal für Mathematikdidaktik erschienen Beiträge in eigenen Veröffentlichungen zu zitieren. Die Umstellung auf CAP (Continuous Article Publishing) wurde 2023 umgesetzt. Hierdurch wird jeder fertige Artikel unmittelbar einem Issue zugewiesen, hat dadurch zwar keine fortlaufenden Seitenzahlen mehr, kann aber sofort von allen Indexing Services unmittelbar verarbeitet und zitiert werden. Ebenso wurde 2023 auf das Double-Blind-Begutachtungsverfahren umgestellt und die Autor:innenhinweise wurden dementsprechend angepasst. Dominik Leiß bedankt sich abschließend insbesondere bei allen Gutachtenden, denn um die Prozesse für die Publizierenden verlässlich gestalten zu können, sind die Herausgebenden auf die Unterstützung und Expertise der Gutachtenden angewiesen.

8.1 ZDM

Gabriele Kaiser berichtet, dass in 2024 eine neue Organisationsstruktur, bestehend aus Editor-in-chief und zwei Associate Editors, umgesetzt wurde. Editor-in-chief ist aktuell Gabriele Kaiser (Deutschland) und die beiden Associate Editors sind Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski (Deutschland) und Roza Leikin (Israel). In 2025 wird Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski die Tätigkeit als Editor-in-chief übernehmen, und Gabriele Kaiser wechselt in die Funktion als Associate Editor. Der Impact Factor des ZDM ist in 2023 erneut gestiegen und lag bei 3.0 (zum Vergleich 1.256 (2020), 1.616 (2021), 2.481 (2022)). Dies ist der zweithöchste Impact Factor unter den mathematikdidaktischen Zeitschriften im zweiten Jahr und bestätigt die international bedeutende Stellung dieser Zeitschrift. Weiterhin gibt Gabriele Kaiser einen Überblick über länderspezifische Einreichungen und Veröffentlichungen der letzten vier Jahre. Zudem werden die inhaltlichen Schwerpunkte der in 2023 veröffentlichten sowie für die Jahre 2024, 2025 und 2026 geplanten Themenhefte vorgestellt. Es wird ab 2024 eine neue Art von Special Issues mit dem Thema „Reviews on important themes in mathematics education“ herausgegeben von Gabriele Kaiser und Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski geben. Um den Austausch und die Diskussion über die Special Issues zu erhöhen, werden seit 2023 regelmäßig Webinare zu den einzelnen Special Issues abgehalten, in denen die Autor:innen ihre Artikel kurz vor- und zur Diskussion stellen. Aufnahmen dieser Webinare können über die Webseite des ZDM aufgerufen werden.

8.2 Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis

Gilbert Greefrath berichtet über die Entwicklungen der Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis. Insgesamt kann das Jahr 2023 als erfolgreiches Jahr der Artikeleinreichung verbucht werden. Das Herausgebendenteam arbeitet weiterhin intensiv daran, die Anforderungen an die ZMFP-Artikel „auszuschärfen“, sodass die eingereichten Artikel die Brücke zwischen Forschung und Praxis gut herstellen können. Ferner wurde die Satzung der Zeitschrift im Jahr 2023 verabschiedet und der Beirat um weitere Personen insbesondere aus der Praxis erweitert.

8.3 mathematica didactica

Benjamin Rott informiert, dass der Umzug der Zeitschrift *mathematica didactica* auf die neue Homepage abgeschlossen ist, über die Artikel auch eingereicht werden können. In 2024 wird es ein Themenheft mit dem Titel „Mathematiklehren und -lernen an Hochschulen“ (herausgegeben von Andreas Büchter und Alexander Salle) geben. Es wird voraussichtlich im Juni 2024 erscheinen. Für 2025 ist ein Themenheft mit dem Titel „Data Literacy“ (herausgegeben von Markus Vogel und Katja Lengnink) geplant, welches im Sommer 2025 erscheinen soll. Selbstverständlich können über die Themenhefte hinaus jederzeit freie Artikel eingereicht werden.

8.4 Der Mathematikunterricht

Reinhard Oldenburg berichtet stellvertretend für Hans Hummenberger. Die Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* erscheint viermal im Jahr und verfolgt das Ziel, eine Verbindung zwischen Wissenschaft, Fachdidaktik und Unterricht zu reflektieren und lebendig zu halten. Die Beiträge können elementarmathematische und fachdidaktische Analysen bis zu Fragen gymnasialer Unterrichtsmethodik adressieren. Die Zeitschrift bietet damit eine Plattform für die universitäre Fachdidaktik und wichtige Anregungen für Mathematiklehrkräfte an Gymnasien, die ihre Unterrichtspraxis reflektieren und vom höheren Standpunkt aus betrachten wollen.

8.5 MNU Journal

Im MNU Journal – so berichtet Sebastian Kuntze – werden unterrichtspraktische Beiträge veröffentlicht, die auch (zielgruppengerecht) forschungsbasiert angelegt sein dürfen. Auch wenn das MNU Journal mit Themenheften arbeitet (sechs pro Jahr), können auch freie Beiträge eingereicht und aufgenommen werden. Folgende Themenhefte sind bereits geplant: Heterogenität und Individualisierung; Experimentieren analog und digital gestützt; Lernen im Wettbewerb im Unterricht der MINT-Fächer; Rohstoffe, Werkstoffe, Ressourcen sowie Ästhetik, Genuss & MINT. Für Rückfragen oder bei Interesse an einer Beitragseinreichung kann Sebastian Kuntze kontaktiert werden.

TOP 9: Verschiedenes

Es gibt keine Meldungen.

Reinhard Oldenburg schließt die Sitzung um 17.26 Uhr.

Protokoll: Daniela Götze

Daniela Götze, TU Dortmund
daniela.goetze@tu-dortmund.de

Arbeitskreis: Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik

Bremen, 14.–15. 3. 2024

Gabriele Kaiser

Der Arbeitskreis Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik hat seine Jahrestagung am 14. und 15. März 2024 an der Universität Bremen durchgeführt, organisiert von Prof. Dr. Maike Vollstedt und ihrer Arbeitsgruppe. An der Tagung nahmen 38 Wissenschaftler*innen aus verschiedenen deutschen Universitäten teil. Es wurden folgende Vorträge gehalten und intensiv diskutiert:

Kristin Litteck, Tobias Rolfes und Aiso Heinze (IPN Kiel)
Der Einfluss spezifischen Vorwissens auf den Erwerb von Wissen zum Ableitungsbegriff

Ausgangspunkt des Vortrags waren Prozess-Objekt-Theorien, in denen das Wissen zu mathematischen Begriffen in operationale und strukturelle Wissensanteile gegliedert wird, wobei idealerweise operationales Wissen vor strukturellem Wissen erworben werden sollte, um möglichst tiefgehendes Begriffswissen zu erlangen. Im Vortrag wurde über zwei Studien berichtet, in denen die Struktur des Begriffswissens zum Ableitungsbegriff als zentralen Begriff der Oberstufenmathematik erforscht wurde. Aufbauend auf den Erkenntnissen dieser Studien wurde eine weitere Studie mit $N = 527$ Schülerinnen und Schülern der Einführungsphase zur Oberstufe durchgeführt, in der der Einfluss von spezifischem mathematischem Vorwissen auf den Erwerb von operationalem und strukturellem Wissen zum Ableitungsbegriff untersucht wurde. Die Vortragenden wiesen darauf hin, dass die Ergebnisse dieser drei Studien zeigten, dass der Erwerb von Wissen zum Ableitungsbegriff insgesamt sehr anspruchsvoll ist. Schülerinnen und Schüler haben dabei insbesondere Schwierigkeiten mit operationalen Wissensanteilen, welche gleichzeitig auch besonders vielfältiges mathematisches Vorwissen aus der Sekundarstufe I erfordern. Die Studie ist abgeschlossen, die Ergebnisse sind allerdings noch nicht publiziert. Insgesamt ist das Projekt noch nicht abgeschlossen, da noch eine letzte Studie für Herbst 2024 ansteht.

Maike Vollstedt (Universität Bremen) und Nils Buchholtz (Universität Hamburg)
Vergleich von Likert und Q: Das Potenzial von zwei verschiedenen Ansätzen zur Untersuchung der Überzeugungen von Lehramtsstudierenden in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik

Ausgangspunkt des Vortrags ist die statistische Auswertung von Likert-Skalen als weit verbreitete Methode zur Untersuchung der Überzeugungen (zukünftiger) Lehrkräfte in Bezug auf das Lehren und Lernen von Mathematik. Dieser Ansatz wird jedoch auch kritisch hinterfragt. Im Vortrag wurde daher die Q-Methode vorgestellt, in der die Teilnehmer*innen gebeten werden, Aussagen in Beziehung zueinander zu setzen, indem sie sie in einem Q-Sort anordnen und ihre Sortierung erläutern. Anschließend werden die Sortierungen aller Teilnehmer*innen statistisch ausgewertet, um verschiedene Arten von Sortierungen (Faktoren) zu ermitteln. Im Vortrag wurden erste Ergebnisse einer Studie vorgestellt, in der Lehramtsstudierende an einer Likert-Skala-Umfrage teilgenommen haben und dann dieselben Items in einer Q-Sortierung zugeordnet haben. Die Ergebnisse der Analysen mit der Verwendung der Likert-Skalen zeigten, dass die angehenden Lehrkräfte in erster Linie konstruktivistische Ansichten vertraten. Die Ergebnisse der Q-Methoden zeigen Unterscheidungen hinsichtlich der subjektiven Sichtweise der Proband*innen auf. Damit wird deutlich, dass die Q-Methodik einen vielversprechenden Ansatz darstellt, um die Subjektivität der Überzeugungen von Gruppen von (zukünftigen) Lehrkräften detaillierter zu beschreiben.

Stanislaw Schukajlow (Universität Münster), Janina Krawitz (Universität Paderborn), Alexander Westhölter (Universität Münster), Katharina Wiehe (Universität Münster) und Katrin Rakoczy (Universität Gießen)

Offene Modellierungsaufgaben in einem selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht – Effekte auf Leistungen und Motivation

Ausgangspunkt des Vortrags waren Charakteristika offener Modellierungsaufgaben, deren Ziel im Unterricht es ist, Schülerinnen und Schüler darauf vorzubereiten, ihr mathematisches Wissen im Alltag und im Beruf anzuwenden. Ein charakteristisches Merkmal offener Modellierungsaufgaben ist, dass nicht alle erforderlichen Informationen für eine Lösung gegeben sind. Vor dem Hintergrund der Forschungen zum mathematischen Modellieren, zu offenen Aufgaben und selbständigkeitsorientierten Lehr-Lern-Formen wurden Ergebnisse von Studien aus dem Projekt Offene Modellierungsaufgaben in einem selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht (OModA-Projekt) vorgestellt. Dabei wurde untersucht, welche Auswirkungen (1) eine speziell auf die Anforderungen offener Modellierungsaufgaben zugeschnittene Instruktion (Instruktionsstudie) sowie (2) der Unterricht mit offenen Modellierungsaufgaben (Unterrichtsstudie) auf kognitive und motivationale Variablen haben.

Christian Leukel, Timo Leuders und Juliane Leuders (Pädagogische Hochschule Freiburg)

Dekodierung räumlicher Proportionen durch somatosensorisches Feedback bei sehenden und sehbehinderten Kindern – Welche Wege könnten bei der Forschung zu Bewegung und Mathematiklernen sinnvoll sein?

Ausgangspunkt des Vortrags waren Ergebnisse aus dem Bereich von „Embodied cognition“, in denen eine enge Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und Bewegung aufgezeigt wird. Ziel des Vortrags war es, Forschung in der Schnittstelle zwischen Mathematik und Motorik zu motivieren, insbesondere unter der Perspektive des Nutzens für mathematische Inhalte. Im Vortrag wurden Ergebnisse einer aktuellen Studie zu sensomotorischen Repräsentationen in Bezug zu Proportionen vorgestellt, in der untersucht wurde, ob sehende Kinder und sehbehinderte Kinder räumliche Proportionen anhand somatosensorischer Informationen unterscheiden können. Im Vortrag wurden die besseren Leistungen der sehbehinderten Kinder verglichen mit denen der sehenden Kinder dargestellt.

Im Vortrag wurde darauf hingewiesen, dass auf der Basis dieser Erkenntnisse nun in einem nächsten Schritt die Überprüfung des didaktischen Nutzens des natürlichen Zugangs zu Proportionen im Mathematikunterricht sein könnte. Insgesamt machen diese Studie und weitere aktuelle Forschung deutlich, auf welche Weise die Vortragenden die empirische Forschung zu Mathematiklernen und Bewegung weiterentwickeln möchten.

Timo Kosiol und Stefan Ufer (LMU München)

Technologiebezogene fachdidaktische und fachliche Kompetenzen von Mathematik-Lehrkräften messen – Vorstellung eines Testinstruments und Ergebnisse zur Struktur

Ausgangspunkts des Vortrags war die steigende Bedeutung digitalen Medien im Schulunterricht und damit die wichtige Rolle technologiebezogene Professionswissen von Lehrkräften. In der im Vortrag vorgestellten Studie wurde das TPaCK-Framework (Technological Pedagogical and Content Knowledge) als eines des am weitesten verbreiteten Theorierahmens eingesetzt. Im Vortrag wurde das Design eines Testinstruments vorgestellt, mit dem mathematikspezifische Dimensionen von TPaCK (CK, PCK, TCK und TPCK) als situiertes Wissen in einem breiten Spektrum von authentischen Situationen gemessen werden. Das Testinstrument wurde entwickelt, um interindividuelle Unterschiede im mathematikspezifischen Professionswissen von Lehrkräften zu messen und die Beziehungen zwischen den verschiedenen Dimensionen des TPaCK-Frameworks zu analysieren. Im Vortrag wurden Designprinzipien beschrieben, die aus der Theorie und während der Entwicklung in mehreren Zyklen abgeleitet wurden und die zur validen Entwicklung ähnlicher Instrumente beitragen können. Des Weiteren wurde Evidenz für die Reliabilität der Dimensionen, Objektivität der Kodierung und Validität für die beabsichtigte Verwendung des Testinstruments berichtet. Im letzten Teil wurden Ergebnisse von Modellvergleichen vorgestellt zur Frage, ob das mit dem Messinstrument gemessene TPCK als integrativ oder transformativ anzusehen ist. Untersucht wurden dazu $N = 409$ angehende und aktive Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe. Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass das Instrument für die Messung der vier TPaCK-Komponenten geeignet ist und dass eine transformative Sichtweise TPCK besser beschreibt als eine integrative Sichtweise. Abschließend wurden im Vortrag Implikationen der Ergebnisse und einen Ausblick auf die weitere Nutzung des Instruments diskutiert.

Des Weiteren wurde ein Kurzvortrag von Hoang Nguyen (Universität Münster) zum *Vergleich des Einflusses dynamischer und statischer Visualisierungen auf die Ausbildung von Grundvorstellungen zur Ableitung* gehalten.

Am Abschluss der Tagung, auf der viele intensive Diskussionen stattgefunden haben, wurde der nächste Tagungsort festgelegt. Andreas Schulz und Karolin Maskos von der Pädagogischen Hochschule in Zürich werden die Tagung ausrichten, und zwar vom Donnerstag, 9. Oktober 2025, um 10 Uhr, bis Freitag, 10. Oktober 2025, maximal bis 14 Uhr. Die Tagung wird in Schloss Au in Zürich stattfinden.

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Arbeitskreis: Stochastik

Fuldatal, 1.–3. 12. 2023 / Einladung zur Herbstagung 2024[1]

Karin Binder und Tobias Rolfes

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Stochastik fand vom 1. bis 3. Dezember 2023 mit etwa 35 Teilnehmenden wie bereits im letzten Jahr in der Reinhardswaldschule im Fuldatal (Nähe Kassel) statt. Der thematische Schwerpunkt des Treffens lautete in diesem Jahr „Statistical Literacy in Zeiten von Fake News“.

Die Tagung begann am Freitagabend mit einem anregenden Auftaktvortrag von Sören Christensen (CAU Kiel) – passend zum thematischen Schwerpunkt: „Achtung: Stochastik“. Im lebendigen Vortrag von Sören Christensen wurden zahlreiche Beispiele manipulativer medialer Statistiken vorgestellt und auch in der Nachsitzung noch intensiv weiterdiskutiert.

Am Samstag und Sonntag folgten schließlich acht angemeldete Vorträge sowie die Vorstellung von sieben Postern, die sich mit unterschiedlichen stochastischen oder kombinatorischen Inhalten beschäftigen und ein breites Repertoire methodischer Herangehensweisen abdeckten. Nachfolgend ein Überblick über die Vorträge und Poster.

Vorträge

1. *Jan Herzog (TU Darmstadt)*
   Entwicklung eines Diagnoseinstruments zu Statistical Literacy bei Abiturient*innen: Entwurf und erste Ergebnisse
2. *Theresa Büchter (U Kassel), Nicole Steib (U Regensburg), Karin Binder (U München), Katharina Böcherer-Linder (U Freiburg), Andreas Eichler (U Kassel), Stefan Krauss (U Regensburg) & Markus Vogel (PH Heidelberg)*
   Wie man Bayesianisches Denken mit verschiedenen Visualisierungen trainieren kann
3. *Saskia Schreiter & Markus Vogel (PH Heidelberg)*
   Lokale vs. globale Sicht von Schüler*innen auf Datenverteilungen: Eine klassenstufenübergreifende Analyse mittels Eye-Tracking
4. *Rolf Biehler, Yannik Fleischer & Susanne Podworny (U Paderborn)*
   Einführung in Entscheidungsbäume mit Datenkarten: Lebensmitteldaten als Modelle nutzen
5. *Norbert Henze (KIT)*
   Das Problem der Alliierten mit deutschen Panzern oder: Wie schätzt man einen Populationsumfang?
6. *Michael Haverkamp (U Greifswald)*
   Entwicklung und Erforschung einer Lernumgebung zur Binomialverteilung nach dem Prinzip der ‚Verstehensorientierung‘
7. *Joachim Engel (PH Ludwigsburg)*
   Statistical Literacy als Resilienz im Informationsökosystem
8. *Karsten Lübke (FOM Hochschule)*
   Statistiken hinterfragen mit Hilfe des Mnemonik MOMENT mal!

[1] Dieser Beitrag ist bereits in der Zeitschrift *Stochastik in der Schule* als Erstveröffentlichung erschienen.

Poster

1. *Marie-Theres Brehm (U Bremen)*
   Entscheidungen treffen im Stochastikunterricht – eine Design-Based Research Studie zur Förderung von Risikokompetenz
2. *Maria-Josep Freixanet (Nelson-Mandela-Schule Berlin)*
   Luftverschmutzung: Eine Untersuchung über drei Jahrgänge hinweg
3. *Laura Geldermann & Katrin Rolka (U Bochum)*
   Verstehensorientierung durch Darstellungsvernetzung am Beispiel des arithmetischen Mittels
4. *Lena Jäger (U Bielefeld)*
   Aspekte des frühen probabilistischen Denkens junger Kinder im Alter von 4–6 Jahren
5. *Michael Rößner & Karin Binder (U München)*
   Wie gut gelingt Lernenden das Ausfüllen von Vierfeldertafel und Co.?
6. *Charlott Thomas (U Potsdam)*
   Analyse von Rechengeschichte von Studierenden zur Fakultät
7. *Nele Spillner (U Münster)*
   Muster im Zufall argumentierend erforschen: Entwicklung und Erforschung einer potenzialfördernden Lernumgebung zum stochastischen Denken am Ende der Grundschule

In der Sitzung des Arbeitskreises Stochastik wurde in diesem Jahr Tobias Rolfes als neuer Sprecher gewählt. Susanne Schnell hatte das Amt als Sprecherin zuvor seit 2018 für fünf Jahre übernommen. Wir bedanken uns ganz herzlich bei ihr für ihr unermüdliches Engagement für den Arbeitskreis!

Wir freuen uns, dass trotz des Schneechaos und zahlreicher ausfallender Züge alle Tagungsteilnehmer:innen gesund von der Herbsttagung zurückgekehrt sind.

Zum Abschluss dieses Berichtes möchten wir Sie gerne zur Herbsttagung im Jahr 2024 einladen: Die nächste Herbsttagung findet vom 22.–24. 11. 2024 in der IN VIA Akademie in Paderborn statt. Eine Anmeldung zur Tagung kann bis zum 1. September 2024 per E-Mail an karin.binder@lmu.de erfolgen. Insbesondere Promovierende aus dem Bereich der Stochastik sind herzlich eingeladen, sich mit einem Beitrag (Vortrag oder Poster) an der kommenden Herbsttagung zu beteiligen.

Weitere Informationen zum konkreten Programmablauf, die genauen Kosten und alle weiteren Informationen erhalten Sie – wie gewohnt – über die Mailingliste des Arbeitskreises oder auch über unsere Website stochastik.didaktik-der-mathematik.de/herbsttagung/.

Für die Aufnahme in den Mail-Verteiler des Arbeitskreises schicken Sie bitte einen entsprechenden Hinweis an die oben genannte E-Mail-Adresse.

Wir freuen uns auf eine anregende Tagung in Paderborn.

Karin Binder und Tobias Rolfes
(Sprecher:innen des Arbeitskreises Stochastik)

Karin Binder
karin.binder@lmu.de

Tobias Rolfes
rolfes@math.uni-frankfurt.de

Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Essen, 7. 3. 2024

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

Wieder einmal im Rahmen einer GDM-Jahrestagung traf sich der GDM-Arbeitskreis „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ am 7. März 2024 in Essen. Die Beteiligung an diesem Frühjahrstreffen war wegen parallel stattfindender Sitzungen anderer Arbeitskreise recht gering. Gleichwohl füllten Berichte und Kurzvorträge das Programm.

Tagungen und Sitzungen des Arbeitskreises

Der Arbeitskreis steht vor dem 10-jährigen Jubiläum. Eine Übersicht verdeutlicht die Zusammenkünfte in der Vergangenheit und in der absehbaren Zukunft.

- 11. 2. 2015 Gründungssitzung Basel
  2./3. 10. 2015 1. Tagung Budapest
- 10. 3. 2016 Sitzung Heidelberg
  7./8. 10. 2016 2. Tagung Budapest
- 28. 2. 2017 Sitzung Potsdam
  30. 8.–1. 9. 2017 3. Tagung Budapest
- 5. 3. 2018 Sitzung Paderborn
  21./22. 9. 2018 4. Tagung Budapest
- 4. 3. 2019 Sitzung Regensburg
  20./21. 9. 2019 5. Tagung Budapest
- 2020 ./.
- 2. 3. 2021 Sitzung Online
  1./2. 10. 2021 6. Tagung Online
- 22. 4. 2022 7. Tagung Online
  29. 8. 2022 Sitzung Frankfurt
- 28./29. 9. 2023 8. Tagung Budapest
- 7. 3. 2024 Sitzung Essen
  27./28. 9. 2024 9. Tagung Online
- 2025 Sitzung Saarbrücken
  2025 10. Tagung Budapest
- 2026 Sitzung Wuppertal

Berichte in den GDM-Mitteilungen

Regelmäßig hat der Arbeitskreis über seine Aktivitäten berichtet (Tagungen und Sitzungen, Veröffentlichungen mit Bezug zu ungarischen mathematikdidaktischen Traditionen, Erarbeitung von Konzepten für den Mathematikunterricht in Ungarn, Verbesserung der Situation der Mathematikdidaktik als selbständige Wissenschaft in Ungarn, Zusammenarbeit in Forschungsprojekten und Publikationen in Ungarn und in deutschsprachigen Ländern).

- Bericht in der Ausgabe 100, Februar 2016, S. 84–86
- Bericht in der Ausgabe 101, Juli 2016, S. 54–55
- Bericht in der Ausgabe 102, Januar 2017, S. 38–40
- Bericht in der Ausgabe 103, Juli 2017, S. 59
- Bericht in der Ausgabe 104, Februar 2018, S. 79–80
- Bericht in der Ausgabe 106, Januar 2019, S. 39–41
- Bericht in der Ausgabe 107, Juli 2019, S. 68–69
- Bericht in der Ausgabe 108, Februar 2020, S. 72–74
- Bericht in der Ausgabe 109, Juli 2020, S. 99–101
- Bericht in der Ausgabe 111, August 2021, S. 89–91
- Bericht in der Ausgabe 112, Februar 2022, S. 69–71
- Bericht in der Ausgabe 113, August 2022, S. 92–93
- Bericht in der Ausgabe 116, Februar 2024, S. 89–92

Kurzvorträge

Die internationale Fachtagung CERME 13 fand vom 10. bis zum 14. Juli 2023 in Budapest statt. Dazu gab es eine illustrative Prtäsentation:

Zsuzsanna Jánvári and Csaba Csapodi
Report on the CERME13 Conference – through the eyes of the LOC

Die Ausrichtung dieses Kongresses war für die ungarische Mathematikdidaktik eine große Ehre.

Von großer Bedeutung ist in Ungarn die Erneuerung des nationalen Lehrplans in Mathematik. Dazu gab es Erläuterungen:

Zsuzsanna Jánvári und Ödön Vancsó: ***Der neue nationale Lehrplan und die Möglichkeiten des entdeckenden Mathematikunterrichts***

Dem Thema widmete sich auch ein Poster auf der GDM-Tagung.

Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ im WTM-Verlag Münster

Fünf Bände liegen bisher vor:

Band 1: *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren*. 308 Seiten, 20 Beiträge, 26 Autorinnen und Autoren aus 4 Ländern
Band 2: *Komplexer Mathematikunterricht. Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht*
392 Seiten, 22 Beiträge, 27 Autorinnen und Autoren aus 6 Ländern
Band 3: *Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken*
420 Seiten, 23 Beiträge, 36 Autorinnen und Autoren aus 5 Ländern
Band 4: *Mathematische Zeitschriften und Wettbewerbe für Kinder und Jugendliche*
398 Seiten, 22 Beiträge, 34 Autorinnen und Autoren aus 5 Ländern
Band 5: *Mathematik und mathematisches Denken. Ansprüche und Anforderungen vor, in und nach der Schule*
452 Seiten, 21 Beiträge, 30 Autorinnen und Autoren aus 4 Ländern

Im Erscheinen ist ein weiterer Band:

Band 6: *Mathematikdidaktische Impulse aus Vergangenheit und Gegenwart*

Und geplant sind folgende Bände:

Band 7: *Schlüssel zum Erfolg: Kognitive und metakognitive Prozesse beim Verstehen von Mathematik*
Band 8: *Zum Erklären von Mathematik in Wort, Bild und Zeichen*
Band 9: *Grenzen überqueren, Horizonte erweitern: Mathematikdidaktik im Crossover mit anderen Disziplinen*

Gabriella Ambrus, Eötvös Loránd Universität Budapest
ambrus.gabriella@ttk.elte.hu

Johann Sjuts, Universität Osnabrück
sjuts-leer@t-online.de

Das war die Jahrestagung der GDM 2024

„Mathematikdidaktik – Gestern. Heute. Morgen.“

Fabian Rösken

In der Woche vom 4.–8. 3. 2024 fand die 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik unter dem Motto „Mathematikdidaktik – Gestern. Heute. Morgen.“ an der Universität Duisburg-Essen statt. Nach der Verschiebung der vorangegangenen Jahrestagung in den Sommer 2022, wurde sich darauf geeinigt, 2023 keine Jahrestagung abzuhalten und wieder in den gewohnten Rhythmus zurückzukehren. So konnte im März 2024 die Tagung am Campus Essen ausgerichtet werden und die mathematikdidaktische Community zusammenbringen. Die allein 770 Anmeldungen zur Jahrestagung zeigen erneut die Bedeutsamkeit dieser Zusammenkunft für den deutschsprachigen Raum und darüber hinaus. In 585 Beiträgen (siehe Tabelle 1) wurden zentrale Themen der Mathematikdidaktik und interdisziplinäre Ansätze vorgestellt und diskutiert. Wir danken den Hauptvorträgen, die dem wissenschaftlichen Programm eine exzellente Rahmung geboten haben: Prof. Dr. Lulu Healy (King's College London, UK), Prof. Dr. Marcus Nührenbörger (Universität Münster), Prof. Dr. Heike Roll (Universität Duisburg-Essen) und Prof. Dr. Sebastian Geisler (Universität Potsdam). Die Tagung wurde traditionell mit weiteren Angeboten, wie einem umfangreichen Nachwuchsprogramm, sozialen Events wie dem Eröffnungs- und Gesellschaftsabend, Ausflügen, sowie dem Fortbildungstag für Erzieher:innen und Lehrer:innen bereichert.

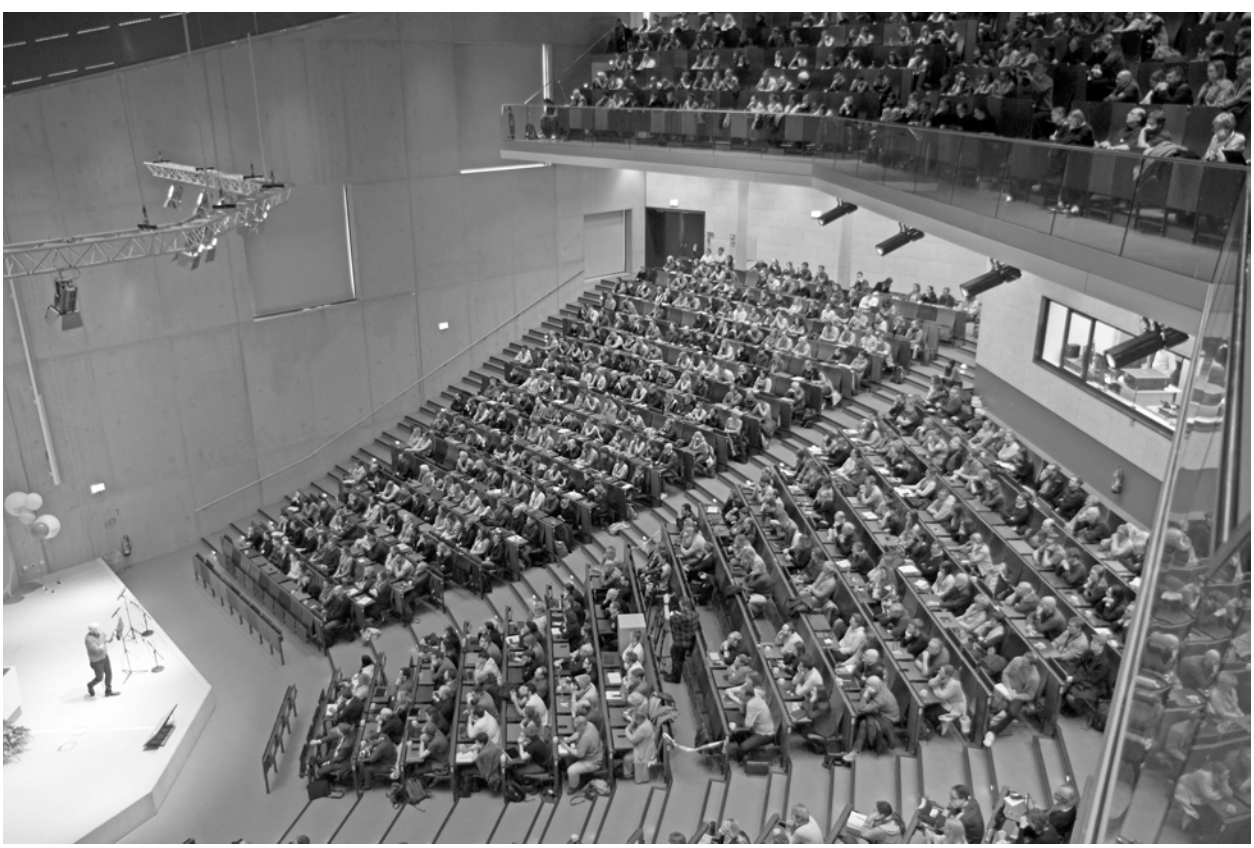


Foto: Lukas Spitzer/GDM

Gemeinsame Eröffnung des ErLe-Tags

Tabelle 1. Beiträge auf der 57. Jahrestagung der GDM

Beitragsformat	Anzahl
Haupt- und Fokusvorträge	5
Einzelvorträge	263
Kurzvorträge	67
Beiträge in 20 Minisymposien	110
Poster	66
Diskussionsforen	4
Arbeitskreistreffen	16
ErLe-Workshops (Fokus Mathematik)	54 (33)

Nachwuchsprogramm

Auch der Nachwuchstag (3.–4. 3. 2024) war ein voller Erfolg. Wieder waren 100 Plätze für Nachwuchswissenschaftler:innen am Anfang ihrer Promotion verfügbar. Diese waren schnell ausgebucht und es gab erneut eine lange Warteliste. Bereits am Sonntag vor Beginn der eigentlichen Tagung wurde ein breit gefächertes Programm zu promotionsrelevanten Themen angeboten, wie dem Halten von Vorträgen, dem Gestalten von Postern, dem Umgang mit Literatur oder auch dem Selbst- und Zeitmanagement. Der wissenschaftliche Nachwuchs hatte ebenfalls die Möglichkeit, den eigenen GDM-Vortrag zunächst in diesem Setting zu proben und gemeinsam zu optimieren. Dieses Angebot wurde wieder umfangreich wahrgenommen. Das Knüpfen erster Kontakte in der mathematikdidaktischen Community konnte in methodischen und fachlichen Networkingrunden geschehen. Das Programm wurde am Montag fortgesetzt und schloss mit einer Talkrunde zum Umgang mit Schwierigkeiten während der Promotion und wie eine gute Work-Life-Balance aufgebaut werden kann.

Auch das tagungsbegleitende Nachwuchsprogramm für fortgeschrittene Promovierende, Post-Docs und Junior-Profs wurde gut angenommen. Es thematisierte Antragsstellungen bei der DFG, erfolgreiches Publizieren in wissenschaftlichen Zeitschriften sowie ein Karriereforum für die Zeit nach der Promotion. Wir danken der Nachwuchsvertretung der GDM für die Ausgestaltung und Umsetzung des Programms und den Kolleg:innen, die sich die Zeit für den wissenschaftlichen Nachwuchs genommen haben.

Eröffnungs- und Gesellschaftsabend

Am Montag, 4. 3. 2024 wurde die 57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik eröffnet. Da der Eröffnungsabend in diesem Jahr zusammen mit der Postersession ausgetragen wurde, fand eine feierliche Eröffnung der Tagung bereits bei der Begrüßung statt. Nach einleitenden Worten von Prof. Dr. Barbara Albert, der Rektorin der Universität Duisburg-Essen, und Prof. Dr. Jan Kohlhaase, dem Dekan der Fakultät Mathematik, wurde die Tagung vom ersten Vorsitzenden der GDM, Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, eröffnet. Das Ganze fand mit musikalischer Untermalung eines Oktetts mit Mitglieder:innen der mathematikdidaktischen Community unter der Leitung von Constanze Pitz statt. Am Montagabend kamen etwa 660 Tagungsgäste in einer lockeren Atmosphäre mit Snacks, Getränken und einer Live-Jazzband zur Postersession zusammen. Da es am Eröffnungsabend kein weiteres inhaltliches Rahmenprogramm gab, wurde der GDM-Förderpreis für herausragende Dissertationen an Dr. Anna Körner am Mittwoch überreicht.

Der Gesellschaftsabend am Donnerstag, 7. 3. 2024, im Forum Q2 des thyssenkrupp Quartiers bildete den Höhepunkt des tagungsbegleitenden Rahmenprogramms. Der Abend wurde eingeleitet durch eine kurze

Verleihung des GDM-Förderpreises an Dr. Anna Körner durch den ersten Vorsitzenden Prof. Dr. Reinhard Oldenburg

GDM-Ehrenmitglied Prof. Dr. Werner Blum

Fotos: Lukas Spitzer/GDM

Fotos: Lukas Spitzer/GDM

Einblick in den Gesellschaftsabend

Talkrunde unter der Moderation von Prof. Dr. Bärbel Barzel mit Prof. Dr. Pedro José Marrón, dem Prorektor für Transfer, Innovation & Digitalisierung an der Universität Duisburg-Essen und Dr. Philipp Eisenhardt, dem Head of HR Segment Decarbon Technologies von thyssenkrupp. Vor insgesamt 600 angemeldeten Tagungsteilnehmenden wurde Prof. Dr. Werner Blum die Ehrenmitgliedschaft für besondere Verdienste um die Mathematikdidaktik überreicht, und es wurde der WAXMANN-Posterpreis verliehen. Abgerundet wurde der Abend mit einem Gala-Dinner und der musikalischen Darbietung der Band FooF, die zahlreiche Gäste auf die Tanzfläche lockte.

ErLe-Tag 2024 – Kongress „MINT-Unterricht der Zukunft“

Am Dienstag, 5. 3. 2024, fand erneut der ErLe-Tag statt, an dem sich alles um Erzieher:innen und Lehrer:innen dreht. Dieses Jahr freuten wir uns über die enge Zusammenarbeit mit QUA-LiS NRW und konnten gemeinsam den ErLe-Tag als Kongress „MINT-Unterricht der Zukunft: Ein Kongress von Sinus und GDM“ ausrichten. Diese Kooperation hat dazu geführt, dass über 635 interessierte Erzieher:innen und Lehrer:innen die zahlreichen Workshops und Vorträge rund um die mathematische und naturwissenschaftliche Bildung in Kindertagesstätten, Grundschulen und weiterführenden Schulen besuchen konnten.

Als besonderes Highlight besuchten alle Gäste des ErLe-Tages gemeinsam mit den Teilnehmenden der GDM-Jahrestagung einen Eröffnungsvortrag von Prof. Dr. Harald Lesch und Dr. Cecilia Scorza unter dem Titel „Klima 2024 – kippt nun alles?“ zu den Themen Klimawandel, erneuerbare Energien und deren unterrichtliche Umsetzung.

An dieser Stelle möchten wir uns herzlich bei den zahlreichen Workshopleitenden sowie Einzel- und Kurzvorträgen mit Praxisbezug für ihren Einsatz bedanken! Wir sind zuversichtlich, dass der ErLe-Tag auch auf den kommenden Jahrestagungen wieder eine breite Partizipation erfährt.

Fabian Rösken im Namen des lokalen Organisationsteams der GDM 2024 in Essen, Universität Duisburg-Essen
gdm2024@uni-due.de

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

1. Vorsitz
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Universität Augsburg
Universitätsstraße 14
86159 Augsburg
Tel.: 0821 598-2494
vorsitzender@didaktik-der-mathematik.de

2. Vorsitz
Prof. Dr. Marita Friesen
Heidelberg School of Education
Bergheimer Straße 104
69115 Heidelberg
Tel.: 06221 477-6755
covorsitzende@didaktik-der-mathematik.de

Kassenführung
Jun.-Prof. Dr. Carina Büscher (geb. Zindel)
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstraße 2
50931 Köln
Tel: 0221 470-6378
kassenfuehrerin@didaktik-der-mathematik.de

Schriftführung
Prof. Dr. Sebastian Schorcht
Technische Universität Dresden
Institut für Erziehungswissenschaft
Weberbau
Weberplatz 5
01217 Dresden
Tel. 051 463-34038
schriftfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

Geschäftsführung
Fabian Rösken,
geschaeftsfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

Bankverbindung
Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg
IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00,
BIC GENODEF1GBF

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.
DMV/GDM-Geschäftsstelle
c/o WIAS
Mohrenstraße 39
10117 Berlin

Homepage der GDM
www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

Verleger
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.

Herausgeber
Prof. Dr. Sebastian Schorcht (Anschrift s. o.)

Umschlag
Yurananth Amlumyong, Frankfurt am Main

Grafische Gestaltung und Satz
Christoph Eyrich, Berlin

Druck
Oktoberdruck GmbH, Berlin

Der Bezugspreis der *Mitteilungen der GDM* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.

Neuerscheinungen

im WTM-Verlag

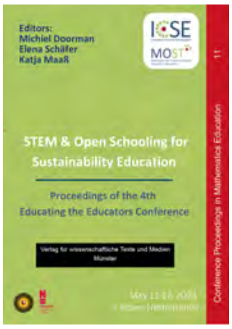
1. Halbjahr 2024

stein-wtm@outlook.de

Fon: +49 (0) 172 534 09 00

www.wtm-verlag.de

E. Baschek, M. Fetzer, R. Klose, C. Schreiber & E. Söbbeke (Hrsg.): Sprachlich-kulturelle Ressourcen im Mathematikunterricht der Primarstufe.
Band 1 der Reihe *MaRLen – Mehrsprachigkeit als Ressource beim Lernen von Mathematik nutzen.*
Münster: WTM-Verlag 2024, DIN A5, ca. 160 Seiten, davon 14 farbig.
Print: ISBN 978-3-95987-285-0: 34,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-286-7: 31,90 €



M. Doorman, E. Schäfer & K. Maaß (eds.): STEM & Open Schooling for Sustainability Education. Proceedings of the 4th 'Educating the Educators' Conference
Band 11 der Reihe *Conference Proceedings in Mathematics Education*
Münster: WTM-Verlag 2024, DIN A5, ca. 210 S.
Print: ISBN 978-3-95987-273-7 35,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-304-8 Open Access

K. J. Fuchs: Das Genetische und Bezugswissenschaftliche Prinzip
Münster: WTM-Verlag 2024, DIN A5, ca. 310 S. Print: ISBN 978-3-95987-291-1: 45,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-292-8: 41,90 €

J. Haarmann, N. Harsch, F. Haupts, M. Jungwirth, J. Marks, Y. Noltensmeier (Hrsg.): Wegmarken für eine zeitgemäße Lehrkräftebildung – Konzeptionelle Ansätze im Fokus. Tagungsband des 16. Bundeskongresses der Zentren für Lehrer*innenbildung
Band 9 der Reihe *Schriften zur allgemeinen Hochschuldidaktik*
Münster: WTM-Verlag 2024, ca. 160 S., 17 cm x 24 cm
Print: ISBN 978-3-95987-283-6: 24,90 €
Ebook: ISBN 978-3-95987-284-3: 22,90 €

C. Heil & D. Bönig (Hrsg.): Mathematische Begegnungen mit Kindern schätzen lernen. Festschrift für Silke Ruwisch
Band 9 der Reihe *Festschriften der Mathematikdidaktik*
Münster: WTM-Verlag 2024, DIN A5, ca. 175 S., davon viele farbig
Print: ISBN 978-3-95987-237-9: 34,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-238-6: 31,90 €

J. Kaiser: Ästhetik mathematisch potenziell begabter sechs- bis achtjähriger Kinder. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zur Relevanz und Förderung ästhetischer Bildung im mathematischen Anfangsunterricht
Band 15 der Reihe Schriften zur mathematischen Begabungsforschung WTM-Verlag: Münster 2024, ca. 530 Seiten, davon 54 farbig., DIN A5
Print: ISBN 978-3-95987-297-3: 75,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-298-0: 68,90 €

S. Pohlkamp, T. Hamann, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink (Hrsg.): Mathematische Bildung neu denken. Andreas Vohns erinnern und weiterdenken.
Band 12 der Reihe *Conference Proceedings in Mathematics Education*
Münster: WTM-Verlag 2024, ca. 210 S. DIN A5
Print: ISBN 978-3-95987-205-8: 35,90 €
E-Book: ISBN 978-3-95987-206-5: Open Access

Martin Stein: Mathematik?? Wofür brauche ich das? (bearbeitete und erweiterte Neuauflage). Mathematische Anwendungsaufgaben aus Ausbildung und Prüfung für die Berufe Industriemechaniker/-in, Konstruktionsmechaniker/-in, Maschinen- und Anlagenführer/-in und 4 weitere Band 2 der Reihe *Mathematik und Beruf* Münster: WTM-Verlag 2024, ca. 160 S. DIN A5 Print: ISBN 978-3-95987-30: 28,90 €
Kein E-Book

M. Stein: Mathematik?? Wofür brauche ich das? Mathematische Anwendungsaufgaben aus Ausbildung und Prüfung für die Berufe Anlagenmechaniker/-in Sanitär-Heizung-Klima, Anlagenmechaniker/-in, Bauzeichner/-in, Elektroniker/-in für Betriebstechnik, Elektroniker/-in für Haus- und Gebäudetechnik und 4 weitere. Band 3 der Reihe *Mathematik und Beruf* Münster: WTM-Verlag 2024, 176 S. DIN A5 Print: ISBN 978-3-95987-301-7: 26,90 €
Kein E-Book

M. Stein: Wofür brauche ich das? Mathematische Anwendungsaufgaben aus Ausbildung und Prüfung für die Berufe Bäcker/-in, Fachverkäufer/-in im Lebensmittelhandwerk 3 Fachrichtungen , Fachmann/-frau für Restaurants und Veranstaltungsgastronomie, Fleischer/-in, Friseur/-in, Hotelfachmann / Hotelfachfrau, Koch / Köchin, Konditor/-in, Verkäufer/-in.
Band 4 der Reihe *Mathematik und Beruf.*
Münster: WTM-Verlag 2024, 160 S., DIN A5
Print: ISBN **978-3-95987-302-4: 25,90 €**
Kein E-Book