MGDM

Mitteilungen der Gesellschaft
für Didaktik der Mathematik

118

FEB
2025

Editorial: Goldstaub liegt in der Luft!

Liebe Mathematikdidaktik-Enthusiasten,
dieses Jahr ist ein goldenes Jahr. Unsere Gesellschaft für Didaktik der Mathematik feiert ihren 50. Geburtstag – oder sagen wir es poetisch: So manch einer feiert eine „Goldene Hochzeit“ mit der Mathematikdidaktik. Und wie es das Schicksal so will, kehren wir für dieses Jubiläum an den Ort zurück, wo einst alles begann: Saarbrücken, die Wiege unseres Vereins! Dies gibt einerseits Anlass zu einem Rückblick und andererseits auch einem Ausblick auf unsere Jahrestagungen. Der Austausch mit anderen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern macht Tagungen dieser Art für uns alle zu einem wertvollen Instrument der gegenseitigen Anregung und ermöglichen so eine intensive, vielperspektivische Auseinandersetzung mit dem eigenen Forschungsfeld. Umso wichtiger sind die Tagungen im laufenden Jahr, insbesondere für Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler in frühen Karrierestufen.

In den vergangenen 50 Jahren GDM-Jahrestagungen hatte jede Veranstaltung ihren besonderen Charme und ein außergewöhnliches Profil, das jeden Standort einzigartig macht. Ob die Sommertagung in Frankfurt oder die schneereiche GDMV in München – jede Tagung hatte ihr eigenes Kolorit, das die Erinnerungen prägt. Sicherlich fallen Ihnen noch weitere Beispiele ein, die in ihrer Gesamtheit einen unverwechselbaren individuellen Erfahrungsschatz ergeben. Apropos Erfahrungsschatz – unser unermüdlicher Geschäftsführer Fabian Rösken ist auf archäologischer Mission, um alle Tagungsdaten zusammenzutragen, konnte jedoch nicht alle Informationen ausfindig machen. Vielleicht erinnern Sie sich in Ihrem persönlichen Erfahrungsschatz noch an das ein oder andere Eckdatum, das Sie gerne in der Tabelle auf Seite 4 ergänzen möchten. Jeder neue Hinweis an uns ist willkommen und wird mit einer kleinen Aufmerksamkeit honoriert.

Ein Rückblick wäre nicht vollständig ohne einen Blick auf den Anfang: Die Gründung des Vereins fand am 12. und 13. März 1975 in Saarbücken statt. Wenn Sie dieser Tage über den Campus schlendern sollten, dann denken sie daran: Diese Wege sind auch schon namhafte Vertreterinnen und Vertreter wie Ursula Viet oder Heinz Griesel gegangen. Falls Sie Lust haben, in diese historischen Zeiten einzutauchen, schauen Sie gerne im Magazinteil des aktuellen Heftes nach. Dort habe ich eigens für die stille Lektüre das damalige Protokoll der Mitgliederversammlung abgedruckt.

Der Ausblick auf kommende Tagungen gestaltet sich ebenso lückenhaft wie unser Rückblick. Die Jahrestagungen haben sich in den letzten Jahren deutlich weiterentwickelt: Sie sind vielfältiger in ihrem Angebot geworden und weisen eine klare Struktur mit festen Programmpunkten auf. Der Nachwuchstag ist ebenso fester Bestandteil der Jahrestagung wie der lebhafte Gesellschaftsabend und die traditionelle Mitgliederversammlung. In letzterer werden wichtige Entscheidungen demokratisch getroffen. Von der Anpassung der Mitgliedsbeiträge bis zur Etablierung einer Geschäftsführung – die Mitgliederversammlung garantiert allen GDM-Mitgliedern ein Stimmrecht bei diesen richtungsweisenden Entscheidungen. Zudem informiert sie über aktuelle Entwicklungen unserer Zeitschriften und Finanzen. Wir hoffen auch in diesem Jahr auf eine rege Beteiligung aller Mitglieder. Die entsprechende Einladung finden Sie in diesem Heft. Auch Nicht-Mitglieder sind herzlich willkommen, allerdings ohne Stimmrecht. Auf der Versammlung erfahren Sie auch die Austragungsorte der nächsten Tagungen und welches besondere Kolorit Sie Ihrem individuellen Erfahrungsschatz hinzufügen dürfen – eine Teilnahme versteht sich obligatorisch.

Viel Freude an der Lektüre des aktuellen Hefts

Sebastian Schorcht
Schriftführung der GDM

In diesem Heft

Arbeitskreise

Tagungsberichte

Personalia

Umschlagfoto: Shamblen Studios, Unsplash

Informationen gesucht

Können Sie die Informationen ergänzen? (Vgl. Seite 1)

	2024 Duisburg-Essen	2023 [ent-fallen]	2022 Frankfurt a. M.	2021 Lüneburg	2020 Würzburg	2019 Regensburg	2018 Paderborn	2017 Potsdam	2016 Heidelberg	2015 Basel
Besonderheit			August	online GDM-Monat	online Oktober		3. GDMV			
Anmeldungen	766		666			703	1224	639		~700
Einzelvorträge	263		226	0	258	223	661	201	106	
Kurzvorträge	67		51	0	46	56	0	86		
Minisymposien	20		20	12	14	16	51	14	14	16
Vorträge in Minis.	110		107	72	72	85	396	70	58	
Poster	66		49	13	45	43	32	42	40	21
Diskussionsforen	4		4	4	1	0	0	0		
Arbeitskreistreffen	16		14	11	18	10	17	16	4	15
ErLe-Workshops	54		21	0	0	11	12	22		
Lehrkräfte & Erzieher	635		163	0	0	60	97	130		~150
Nachwuchstag	100		100			105			65	
Eröffnungsabend	653		450	0	0		856	300		
Gesellschaftsabend	600		500	0	0		767	600		

Grußwort des 1. Vorsitzenden

Zitationen zieren den Zitierten, und so mag John P. A. Ioannidis stolz darauf sein, dass er laut Google Scholar mehr als dreimal so häufig zitiert wurde wie Darwin oder Einstein, und Newton überflügelt er gar um das 20-fache. Sie sehen also wie falsch das Bauchgefühl über die Relevanz wissenschaftliche Erkenntnisse liegen kann, wenn man es mit objektiven Maßen wie der der Zitationszahl vergleicht. Unter den über 400 Arbeiten, die er im Peer Review Verfahren veröffentlicht hat, nimmt die Arbeit „Why Most Published Research Findings Are False“ Platz 1 ein. Man ist natürlich sofort versucht zu fragen, ob hier ein Russell-Paradoxon vorliegt, die Arbeit möglicherweise zu der Menge gehört, über die sie spricht. Dem ist nicht so. Der Autor bedient sich nämlich einer auch in unserer community weit verbreiteten Identifizierung, nämlich „Forschung = empirische Forschung“. Sein Text ist aber mathematischer Natur und mit dieser einfachen Typentheorie löst sich das vermeintliche Paradoxon auf. Dieser kurze Ausflug in die Logik war auch schon das mathematisch anspruchsvollste an diesem Grußwort. Die Publikation liest sich erstaunlich leicht: Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Vierfeldertafeln und ein bisschen Modellierung reichen aus. Hätte ich die Arbeit gekannt, als ich noch Lehrer war, wäre ich versucht gewesen, sie von Beschulten lesen zu lassen. Ioannidis betrachtet Fehler erster und zweiter Art auf dem üblichen Signifikanzniveau, macht ein paar Annahmen über Publikations-Bias und insbesondere dem Anteil der wahren Beziehungen an allen testbaren Beziehungen. Mit etwas Mittelstufen-Algebra ausgerechnet ergibt sich das Ergebnis, das im Titel verkündet wird. Ein Ergebnis, das wesentlich zur Replikationskrise in Medizin und Psychologie geführt hat. Die Zahl der Replikationsstudien in der Mathematikdidaktik ist immer noch gering, obwohl es ein eigenes Journal dafür gibt. Zugegeben sind exakte Replikationen auch langweilig, interessanter wäre, die gleichen Konstrukte mit anderen Methoden zu erheben. Wie entsteht aus den vielen Einzelergebnissen ein konsistentes Gesamtbild? Vermutlich gar nicht: Je größer eine Theorie ist, desto größer ist die Gefahr, dass sie widersprüchlich ist. Trotzdem sollten wir uns bemühen, die vielen falschen Einzelergebnisse zu einem richtigen Gesamtbild zusammenzusetzen.

Mit diesen Gedanken verabschiede ich mich an dieser Stelle von Ihnen. Im nächsten Heft wird ein/e neue/r Vorsitzende/r Sie begrüßen. Es war mir eine Freude und Ehre, hier ein paar Dinge aufzuschreiben, die vielleicht unterhaltsam und vielleicht auch anregend waren.

Reinhard Oldenburg
1. Voritzender der GDM

KI und Ethik im Klassenzimmer

Melanie Platz und Christine Plote

Künstliche Intelligenz (KI) hat in den letzten Jahren tiefgreifende Veränderungen in allen Bereichen der Gesellschaft ausgelöst. Besonders die Einführung von ChatGPT Ende 2022 markierte einen Wendepunkt: Erstmals sind KI-Technologien für eine breite Öffentlichkeit zugänglich. Die Möglichkeit, KI intuitiv zu nutzen – mit einem Computer fast wie mit einem Menschen zu ‚sprechen' – weckt Begeisterung und bietet enorme Chancen, wirft jedoch ethische und gesellschaftliche Fragen auf.

Dieser Beitrag untersucht die historische Entwicklung, den aktuellen ‚Hype' und ethische Kriterien für KI, insbesondere generativer KI im Schulkontext. Wir laden Lesende dazu ein, die Potenziale und Herausforderungen von KI kritisch zu hinterfragen und konstruktiv über deren sinnvollen Einsatz zu diskutieren.

Künstliche Intelligenz – keine Erfindung der Neuzeit

Obwohl KI meistens als Innovation der Neuzeit gilt, gibt es schon seit der Antike Ideen, künstliches Leben zu erschaffen (z. B. Spitzer, 2023). So beschrieb Homer in der Ilias, wie der Gott Hephaistos goldene Dienerinnen erschuf, die eigenständig denken und handeln konnten. Im 17., 18. und 19. Jahrhundert entwickelten Pioniere wie Leibniz, Babbage, Lovelace und Boole mathematische, logische und technische Grundlagen für die Idee intelligenter Maschinen. Turing führte diese Ansätze im 20. Jahrhundert weiter, indem er die Berechenbarkeit formalisierte und die Frage stellte, ob Maschinen denken können.

Als Geburtsstunde der Bezeichnung ‚Künstliche Intelligenz' gilt das ‚Summer Research Project on Artificial Intelligence', das 1956 am Dartmouth College in New Hampshire (USA) stattfand (z. B. Buxmann & Schmidt, 2021). Die Bezeichnung ist jedoch umstritten, denn, obwohl das Thema vielfach diskutiert wurde, existieren bisher nur individuelle Konzepte, statt einer kohärenten Definition (Vieweg, 2023).

Ein Ziel von KI ist es, Maschinen mit Fähigkeiten zu versehen, die intelligentem (menschlichen) Verhalten ähneln (Kaplan & Haenlein, 2019), und Intelligenz außerhalb des menschlichen Gehirns zu schaffen (Buxmann & Schmidt, 2021). Dazu scheint die zeitlose Definition von Elaine Rich (1983) bis heute passend, da sie philosophische Debatten um die Bedeutung von ‚Künstlich' und ‚Intelligenz' vermeidet, wie sie häufig im Vordergrund stehen: “Artificial Intelligence (A.I.) is the study of how to make computers do things at which, at the moment, people are better.” (S. 1).

Mit der Prägung der Bezeichnung ‚Künstliche Intelligenz' waren noch keine Anwendungen geschaffen. Erst die drastisch wachsende Rechenleistung moderner Computer, Fortschritte bei künstlichen neuronalen Netzen und Deep Learning (u. a. Hintons Backpropagation-Algorithmus 1986) und das Konzept des ‚Trainierens' von Algorithmen an großen Datenmengen (z. B. der Datensatz ImageNet, der in den 2010er Jahren schnelle Fortschritte im Machine Learning ermöglichte), machten generative KI möglich – wobei die nötigen ‚Big Data' erst durch das Internet verfügbar wurden (Ertel, 2021).

Ende 2022 brachte OpenAI mit ChatGPT – scheinbar aus dem Nichts – eine für alle frei verfügbare KI-Anwendung auf den Markt. „Seit dem 30. November 2022 kann jeder mit KI herumspielen und selbst erleben und herausfinden, was KI kann. Die meisten Leute waren völlig geplättet – um es vorsichtig auszudrücken" (Spitzer, 2023, S. 16). Bereits zwei Monate nach der Veröffentlichung zählte die Preview-Version 100 Millionen aktive Nutzende: „Wahrscheinlich ist keine moderne Technologie gleichzeitig so verführerisch und verstörend wie generative KI. Die Emotionen kochten hoch beziehungsweise über." (Baker, 2024, S. 31). ‚KI' und ‚ChatGPT' wurden fortan häufig synonym verwendet.

Die Grundidee von ChatGPT ist nicht neu. Schon Jahre früher hatte es Chatbots gegeben, die allerdings auf verhältnismäßig wenig Interesse stießen. Wenn man außerdem bedenkt, dass ChatGPT „noch nicht einmal der beste Bot seiner Art, zumindest nicht in den ersten Versionen", war (Baker, 2024, S. 43), drängt sich die Frage auf: Was hat ChatGPT so schnell so erfolgreich gemacht?

Niedrige Einstiegshürden, intuitive Bedienung, die freie Verfügbarkeit und die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten spielten sicherlich eine große Rolle. Hinzu kam, dass, nach Jahren ohne bahnbrechende Technik-Revolutionen (der ‚iPhone-Moment' lag bereits 15 Jahre zurück) ChatGPT auf ein Publikum traf, das neue Technologien mit Begeisterung aufnahm (Spitzer, 2023).

Ein Schlüssel zum Erfolg von ChatGPT liegt in unserer Neigung, sprachliche Zeichenketten als sinnvolle menschliche Äußerungen wahrzunehmen und ihnen Absicht sowie eine verantwortliche Person zuzuschreiben (Bender et al., 2021). Diese Vermenschlichung zeigte sich auch 1966, als Weizenbaum den Chatbot ELIZA entwickelte, der eine Gesprächstherapeutin simulierte. Weizenbaum sah ELIZA als ‚witziges Programm' und war entsetzt, als Psychiater auf einem Kongress ernsthaft erwogen, den Bot in ihrer psychotherapeutischen Arbeit einzusetzen (Krauthausen, 2020). „Ich war wirklich fassungslos und mir drängte sich die Frage auf, welches Selbstverständnis ein Psychiater haben musste, um die Idee zu entwickeln, einen wesentlichen Teil seiner Arbeit einer Maschine zu übergeben?" (Weizenbaum & Wendt, 2006, S. 95, zit. n. Krauthausen, 2020, S. 47).

Was macht Künstliche Intelligenz (nicht) ethisch?

Unmittelbar nach dem Launch von ChatGPT wurde neben Begeisterung für die neue Technologie auch erste Kritik laut, und Stellungnahmen erschienen.

Im März 2023 forderten Expertinnen und Experten in einem offenen Brief des US-Instituts ‚Future of Life' eine sechsmonatige Entwicklungspause für KI (Future of Life, 2023). Im Mai warnte das ‚Center for AI Safety' vor existenziellen KI-Risiken (CAIS, 2023). Unter den Unterzeichnern der Briefe waren Tesla-Gründer Elon Musk und OpenAI-CEO Sam Altman. Kritiker wie Emily Bender sehen diese Warnungen als Ablenkung von reellen, akuten Problemen generativer KI und vermuten in den offenen Briefen den Versuch, kleinteilige Regulierung zu verhindern (Süddeutsche Zeitung, 2023).

Generative KI stärkt die Macht von Konzernen wie Google, Amazon, Facebook, Apple und Microsoft (kurz: GAFAM), so ein Vorwurf. ‚Big Tech' verfügt über die nötigen Ressourcen, um KI-Anwendungen im großen Stil zu entwickeln. Dafür nutzen sie enorme Datenmengen aus dem Netz und ihrer Nutzer. OpenAI kann bspw. laut AGB jede Information, die in einen ChatGPT-Dialog eingegeben wird, analysieren und für das Training von KI-Modellen nutzen (Baker, 2004).

> Hier gilt: Je größer die verfügbaren Corpora sind, desto besser wird die Leistung der zugehörigen KI werden. Erneut bietet der Größenvorteil der Plattformen und der nahezu unbegrenzte Zugang zu Daten eine unschlagbare Ausgangsposition für Big Tech. (Andree, 2023, S. 100)

Stochastisches Geplapper

2021 erschien ein Paper, das die Risiken und Verantwortlichkeiten großer Sprachmodelle und der umfangreichen Datensätze, auf denen sie basieren, untersuchte: ‚On the Dangers of Stochastic Parrots: Can Language Models Be Too Big?' (Bender et al., 2021). Die Autorinnen prägten die Bezeichnung ‚stochastische Papageien', um zu illustrieren, dass Sprachmodelle Textsequenzen auf Basis ihrer Trainingsdaten wahrscheinlichkeitsbasiert kombinieren, ohne echtes Verständnis für die Bedeutung ihrer Ergebnisse (S. 616 f.). Bekannt wurden zwei der Autorinnen, Dr. Timnit Gebru und Dr. Margaret Mitchell, Gründerinnen und Leiterinnen von Googles KI-Ethikabteilung, auch, weil sie aufgrund des kritischen Artikels von ihrem Arbeitgeber Google entlassen wurden (Ryan et al., 2024). ‚On the Dangers of Stochastic Parrots' wurde zu einem Referenzpunkt in der Diskussion über Risiken und Verantwortlichkeiten im Umgang mit generativer KI und gleichzeitig ein Symbol für die Spannungen zwischen Ethik und wirtschaftlichem Druck in der KI-Industrie.

Einige Kritikpunkte an großen KI-Modellen sind nach Bender et al. (2021) und der UNESCO (Miao & Holmes, 2023):

- *Ungerechtigkeit:* Viele KI-Modelle werden für die Bedürfnisse derjenigen entwickelt, die bereits die meisten Privilegien in der Gesellschaft haben. Diesen Punkt greift auch die SWK (2024) in Bezug auf ein schulisches Umfeld auf: „Problematisch ist, dass LLM nicht für alle Lernenden gleichermaßen zugänglich sind. [...] Für Lernende mit niedrigem sozio-ökonomischem Hintergrund stellen finanzielle Hürden durch private Anbieter und mangelnde Unterstützungsmöglichkeiten durch die Eltern eine Zugangsbarriere dar." (S. 17).
- *‚Verunreinigte' Trainingsdaten, Bias (Verzerrung) und Diskriminierung – „Size Doesn't Guarantee Diversity"* (Bender et al., 2021, S. 613): Vorurteile und algorithmische Biases können diskriminierende Inhalte und soziale Ungleichheiten reproduzieren und verstärken, mit problematischen Folgen für benachteiligte Gruppen. Beispiel: Werden für das KI-Training Daten von Reddit verwendet, einer Plattform mit überwiegend männlicher Nutzerbasis in den USA, kann dies geschlechtsspezifische Verzerrungen fördern, die sich in Folgeversionen fortsetzen. Die Intransparenz von Trainingsdaten wird zunehmend kritisch, da KI-generierte Inhalte das Internet ‚verunreinigen' und realistischere Deep Fakes entstehen. „Im Bildungskontext ist die Frage nach der Datengrundlage und deren transparenter Veröffentlichung besonders relevant" (SWK, 2024, S. 9).
- *Mangelnde Erklärbarkeit und Transparenz:* Die Funktionsweise von KI-Modellen ist oft intransparent, ihre Algorithmen schwer erklärbar. Diese ‚Black-Boxes' erschweren die Bewertung von Quellen und

Qualität KI-generierter Inhalte – ein kritisches Problem angesichts der Gefahr von Fehlinformationen, Desinformation, Halluzinationen und Biases.

- *Fehlinformationen, Halluzinationen und Manipulationsgefahr:* KI-Modelle bergen das Risiko, falsche Inhalte zu generieren, die von Nutzenden ungeprüft übernommen werden. Dies kann gezielt für Desinformation oder Manipulation missbraucht werden und stellt eine potenzielle Bedrohung für persönliche Sicherheit und demokratische Prozesse dar.
- *Abhängigkeit, Verlust menschlicher Kreativität:* KI-Systeme können eine unkritische Verwendung fördern, wodurch eigenständiges Denken und kreative Prozesse in den Hintergrund geraten. Insbesondere im Bildungsbereich besteht die Gefahr, dass Lernende und Lehrpersonen zunehmend passiv auf KI-Lösungen zurückgreifen, anstatt aktiv Probleme zu lösen. Dies könnte langfristig die Entwicklung von Kreativität und kritischem Denken beeinträchtigen.
- *Schutz geistigen Eigentums:* Generative KI-Modelle wie ChatGPT werden oft ohne Zustimmung der Urheber/innen auf großen Datenmengen aus dem Internet trainiert, darunter Texte, Bilder, Videos, Code und persönliche Daten. Mechanismen zum Schutz von Urheberrechten oder zur Entschädigung fehlen weitgehend. Nutzende können Urheberrechte nur geltend machen, wenn sie wesentliche menschlich-gestalterische Beiträge nachweisen.
- *Mangelnde Nachhaltigkeit:* KI-Modelle sind äußerst ressourcenintensiv. Allein das Training eines BERT-Basismodells verbraucht so viel Energie wie ein Transatlantikflug und verursacht erhebliche CO_2-Emissionen. Zusätzlich erfordert die Kühlung der Rechenzentren enorme Wassermengen, oft in Regionen mit knappen Wasserressourcen.
- *Arbeitsbedingungen:* Betrieb und Wartung von KI-Modellen basieren oft auf menschlicher Arbeit, etwa für Datenannotationen oder Inhaltsmoderation. Diese Aufgaben werden häufig in Billiglohnländern unter schlechten Bedingungen ausgeführt. Gleichzeitig konzentrieren sich die wirtschaftlichen Vorteile der KI-Entwicklung auf wenige große Tech-Konzerne, während benachteiligte Regionen und Arbeitskräfte kaum davon profitieren.
- *Kulturelle Perspektiven:* Es besteht die Gefahr einer einseitigen kulturellen Prägung, da die Inhalte von den Ländern oder Konzernen dominiert werden, die die KI entwickeln und trainieren.
- *Auch in der Geschwindigkeit der Entwicklung von KI* wird eine Gefahr gesehen, da diese schneller als die Anpassung der nationalen Rechtsvorschriften geschieht.

Es lässt sich folgern:

> In no other field is the ethical compass more relevant than in artificial intelligence. These general-purpose technologies are re-shaping the way we work, interact, and live. [. . .] AI technology brings major benefits in many areas, but without the ethical guardrails, it risks reproducing real world biases and discrimination, fueling divisions and threatening fundamental human rights and freedoms. (Ramos, Assistant Director-General for Social and Human Sciences of UNESCO, o. J.)

Die Diskussion um generative KI wirft grundlegende ethische Fragen auf, die eng mit den Werten unserer Gesellschaft verbunden sind. Um diese besser zu verstehen, lohnt es sich zunächst ein paar ethische Grundlagen zu betrachten.

Ethischer Rahmen und ethische KI

Nach Vieweg (2023, S. 10) ist Ethik „die philosophische Disziplin, die sich mit der Frage nach den Kriterien für gute und schlechte Handlungen beschäftigt.“ Diese Frage ist kontextabhängig und in einer vielfältigen Gesellschaft schwer universell zu beantworten. Dennoch bietet Ethik als Theorie der gelebten Moral Orientierung für konkretes Handeln (Vieweg, 2023).

Ein strukturiertes Set aus Prinzipien, Werten und Leitlinien unterstützt dabei, komplexe ethische Fragestellungen systematisch zu analysieren und Handlungsoptionen zu bewerten. Ethische Rahmen als Satz von Leitlinien, die sicherstellen, dass Entscheidungen und Handlungen von KI-Systemen in Übereinstimmung mit sozialen, rechtlichen und moralischen Normen stehen, werden zu diesem Zweck entwickelt (Dignum, 2019).

Für den Deutschen Ethikrat (2023) steht bei der Beurteilung von KI eine zentrale Frage im Fokus: Erweitert oder vermindert der Einsatz von KI die menschliche Autorenschaft und die Bedingungen für verantwortliches Handeln? Diese Perspektive unterstreicht die Notwendigkeit, KI nicht nur technisch, sondern auch ethisch fundiert zu bewerten.

Dafür bietet die Definition der Europäischen Kommission (2022, S. 11) Orientierung: „Ethische KI bezeichnet die Entwicklung, Einführung und Nutzung von KI-Systemen, die ethischen Normen, Ethikgrundsätzen und damit verbundenen Grundwerten gerecht werden.“ Der EU AI Act (2024) ergänzt diese Perspektive, indem er ‚KI-Systeme‘ in Art. 3 als maschinengestützte Systeme definiert, die autonom aus Eingaben Ergebnisse ableiten und Entscheidungen treffen, die virtuelle oder physische Umgebungen beeinflussen. Der AI Act basiert auf dem Konzept der ‚vertrauenswürdigen KI‘, das auf vier Grundsätzen beruht:

1. Transparenz und Nachvollziehbarkeit;
2. Fairness: keine Diskriminierung aufgrund von Geschlecht, Alter, ethnischen oder sozialen Merkmalen, religiösen oder politischen Überzeugungen oder anderen Eigenschaften;
3. Robustheit: resilient gegenüber Fehlern und Angriffen;
4. Sicherheit: keine physischen oder virtuellen Schäden verursachen.

Die UNESCO (2021) führt Werte und ethische Prinzipien wie Privatsphäre, Transparenz, Erklärbarkeit und Nicht-Diskriminierung ein, die bei der Entwicklung und Anwendung von KI respektiert werden müssen. Dies soll dazu beitragen, digitale Transformation so zu gestalten, dass sie die Menschenrechte fördert und zu den nachhaltigen Entwicklungszielen der UN beiträgt.

Von ethischen Grundsätzen zur Regulierung

ChatGPT traf 2022 auf einen weitgehend unregulierten Markt. Dies ermöglichte zwar die rasante Verbreitung der Anwendung. Gleichzeitig führte der Hype um ChatGPT die Notwendigkeit einer angemessenen Regulierung von KI-Technologien vor Augen und brachte Diskussionen darüber in die breitere Öffentlichkeit.

Bereits 2017 hatte das Europäische Parlament Regeln für Robotik und KI gefordert, um wirtschaftliches Potenzial auszuschöpfen und Sicherheitsstandards zu gewährleisten (EU, 2017). Eine Chance für Europa (Delvaux, 2017), da Normen Rechtssicherheit geben, was wirtschaftliche Risiken senkt und Investitionen in KI-Technologien ermöglicht (Vieweg, 2023). Auch der KI Bundesverband (2023) sieht in einem klaren Rechtsrahmen Chancen, ‚KI Made in Europe' zu stärken, warnt jedoch, dass das Gesetz Europas Wettbewerbsfähigkeit gegenüber den USA und China schwächen könnte.

Aus ethischer Sicht ist es zumeist keine Frage, ob eine Technologie wie generative KI feste Korridore braucht, innerhalb derer sie sicher agieren kann. Mittelstadt et al. (2024) argumentieren, dass LLM menschenrechtliche Prinzipien wie Würde, Gleichheit und Meinungsfreiheit beeinträchtigen können, wenn sie ohne angemessene Kontrollen eingesetzt werden, und plädieren für gesetzliche Regelungen, die menschenrechtliche Prinzipien in den Mittelpunkt stellen.

Der EU AI Act ist geprägt von den Werten der EU-Grundrechtecharta – Nichtdiskriminierung, Transparenz, Verantwortlichkeit und Datenschutz. Am 1. August 2024 in Kraft getreten, ist er die weltweit erste umfassende Regulierung für KI. Er regelt den Einsatz von KI-Systemen in der EU durch einen risikobasierten Ansatz, der je nach Risikoklasse unterschiedliche Anforderungen stellt. Im Bildungssektor stuft der AI Act nahezu alle KI-Systeme als Hochrisiko-Anwendungen ein. Bspw. dürfen Lehrkräfte die Bewertung von Schülerleistungen weder vollständig noch teilweise an KI-Systeme abgeben.

Wie streng die Vorschriften durchgesetzt werden, und ob Unternehmen wie OpenAI Urheberrechtsklagen oder milliardenschwere Geldstrafen drohen, ist noch unklar. Die EU hat Unternehmen, Wissenschaftler/innen und andere Akteure aufgefordert, an der Ausarbeitung des Regelwerks mitzuwirken. Auch Vertreter großer Tech-Konzerne sollen sich beworben haben. Kritiker fürchten, dass diese die Vorgaben verwässern könnten, um strenge Regulierungen zu verhindern (Coulter, 2024).

KI in Schule und Mathematikdidaktik

Die Potenziale von ChatGPT & Co. für die Bildung wurden schnell untersucht und offene Fragen zu den Auswirkungen diskutiert, etwa ob es ‚Schummeln' ist, wenn Schüler/innen ChatGPT zum Verfassen von Arbeiten nutzen. Einige Bundesländer reagierten früh mit Handreichungen und Fortbildungen.

Im März 2023 veröffentlichte der Deutsche Ethikrat die Stellungnahme ‚Mensch und Maschine – Herausforderungen durch Künstliche Intelligenz'. Der umfangreiche Bericht untersucht vier zentrale Anwendungsbereiche, darunter auch die schulische Bildung (Deutscher Ethikrat, 2023).

2024 veröffentlichte die Ständige Wissenschaftliche Kommission der Kultusministerkonferenz ein Impulspapier zu ‚Large Language Models und ihre Potenziale im Bildungssystem'. Sie gibt Anregungen für Unterricht und Forschungsaufgaben und diskutiert Erprobungsphasen, domänenspezifische Tools, den altersgemäßen Einsatz, Prüfungskultur, Rahmenbedingungen, Integration in Lernplattformen und Entwicklung von Commons-Lösungen (SWK, 2024). Die ‚Handlungsempfehlung für die Bildungsverwaltung zum Umgang mit Künstlicher Intelligenz in schulischen Bildungsprozessen', die die KMK im Oktober 2024 beschloss, baut auf diesen Impulsen der SWK auf und konkretisiert Handlungsmaßnahmen. Ziel ist eine gemeinsame Position und abgestimmte Schritte für den Einsatz von KI in Schulen (KMK, 2024). Beide Papiere betonen die Wichtigkeit, die ethischen und rechtlichen Fragen des Einsatzes von KI zu klären und das damit verbundene technologische Wissen bereits in der Primarstufe zu vermitteln (ICT-Literacy bzw. Lernen über KI).

Es überrascht nicht, dass das Thema KI auch in der Mathematikdidaktik-Community zunehmend auf Interesse stößt. In mehreren Veranstaltungen wird das Thema aufgegriffen (u. a. beim KI-Symposium in Würzburg 2024 oder bei GDM Jahrestagungen), in Special

Abbildung 1. Haus der ethischen KI (grau hinterlegt; Vieweg, 2023, S. 252) mit den Ethischen Leitlinien für Lehrkräfte (weiß hinterlegt; Europäische Kommission, 2022, S. 19 f.) (eigene Darstellung)

Issues mathematikdidaktischer Journals und in den *Mitteilungen der GDM* (z. B. Hischer, 2023; Buchholtz et al., 2023, Schorcht et al., 2023 oder Dilling et al., 2024). Im Bereich der Primarstufe griff u. a. die Herbsttagung des AK Grundschule das Thema auf (Kortenkamp, 2024). Auch Aspekte der KI-Ethik wurden in den *Mitteilungen der GDM* erwähnt (z. B. Buchholtz et al., 2024; Bescherer et al., 2024).

Jedes Fach, auch Mathematik, soll zur Entwicklung von Kompetenzen für ein Leben in der digitalen Welt beitragen (KMK, 2016). Mathematik eignet sich besonders, da viele KI-Grundlagen auf elementarisierbaren mathematischen Konzepten basieren (z. B. Platz, im Druck). Auch Bescherer et al. (2024) greifen dies auf:

> Der Mathematikunterricht sollte zum Mündigwerden durch und gegenüber Mathematik auch unter Beachtung digitaler Perspektiven beitragen. [...] Hierzu gehört insbesondere der im Rahmen gesellschaftlicher Transformationen zunehmende Einsatz von KI in vielen Lebensbereichen, für den Lernende und Lehrkräfte sensibilisiert werden sollten und dem sie nur durch mathematische Bildung kompetent begegnen können. Dies betrifft weitreichende und für die Teilhabe an unserer Gesellschaft relevante Aspekte, z. B. Profiling oder Vergabesysteme, die im Sinne einer Algorithmen-Ethik kritisch diskutiert werden sollen [...]. (Bescherer et al., 2024, S. 10)

Ethische KI?

Vieweg (2023) beschreibt die Dimensionen ethischer KI mithilfe der Metapher des ‚Hauses der ethischen KI‘ (s. Abb. 1). Ziel ist die Schaffung nachhaltigen Wohlstands für die Gesellschaft. KI soll eine Vernetzung ermöglichen, die Würde und Aufstiegschancen für alle sichert. Dafür müssen Begünstigte mit Zugang zu Kapital und Wissen ihre treuhänderische Verantwortung gegenüber Schwächeren wahrnehmen.

Die ‚Ethischen Leitlinien für Lehrkräfte über die Nutzung von KI und Daten für Lehr- und Lernzwecke‘ der Europäischen Kommission definieren Anforderungen, die KI-Systeme im Bildungsbereich erfüllen müssen. Zu den sieben Anforderungsbereichen bieten Leitfragen Lehrkräften Orientierung und regen zur Reflexion ihrer beruflichen Praxis an (Europäische Kommission, 2022). Abb. 1 verknüpft diese Anforderungen mit dem Konzept des ‚Hauses der ethischen KI‘.

An dieser Stelle lohnt sich eine Reflexion der bisherigen Ausführungen. Mithilfe der besprochenen Werte und Rahmenbedingungen kann die Leserin/der Leser ein eigenes kleines Ethik-Audit durchführen und beurteilen, ob ChatGPT oder ein anderes KI-System ihrer/seiner Ansicht nach in die Gruppe der ethischen KI-Anwendungen eingeordnet werden kann. Die Bewertung ist nicht immer einfach, da nach außen oft alles geordnet erscheint – Vorsicht vor ‚Ethics Washing‘: Wie beim ‚Green Washing‘ wird Ethik hier genutzt, um den Anschein einer ethischen KI zu erwecken, ohne substanzielle Theorie oder echte Umsetzung (Schultz et al., 2024).

Schlüsselkompetenzen für die nächste Generation

Fengchun Miao, Leiter der Unit for Technology and AI in Education, UNESCO, formulierte folgende treffende Antwort auf die Frage, welche Rolle Kinder in der Mensch-KI-Interaktion einnehmen sollen (Miao, 2024): Wir wollen für unsere Kinder, dass sie

- kritische KI-Bürger, keine KI-Süchtigen,
- verantwortungsbewusste Nutzer von KI, nicht Deepfake-Verbreiter,
- Mitgestalter von KI-Werkzeugen, nicht nur passive Nutzer,
- Anführer der nächsten KI-Generationen, nicht nur Konsumenten

werden.

Genau dieses Ziel sollten wir verfolgen. Viele Organisationen haben entsprechende Empfehlungen und Rahmen definiert. Noch vor der Veröffentlichung von ChatGPT wurde von der UNESCO 2021 die ‚Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence' verabschiedet. Dort wird die Vermittlung von KI-Literalität an alle Gesellschaftsschichten betont:

> Member States should work with international organizations, educational institutions and private and non-governmental entities to provide adequate AI literacy education to the public on all levels in all countries in order to empower people and reduce the digital divides and digital access inequalities resulting from the wide adoption of AI systems. (UNESCO, 2021, S. 33)

Im schulischen Bereich soll dies auch in Deutschland umgesetzt werden:

> Für das „Lernen über KI" sind neben einer grundlegenden informatischen Bildung – insbesondere über KI sowie über ihre Wirkungsweisen – auch die Klärung ihrer ethischen und rechtlichen Rahmenbedingungen bei Lehrkräften, Schülerinnen und Schülern sowie in der Bildungsadministration selbst erforderlich. [. . .] Die Länder werden bei künftigen Anpassungen ihrer Bildungspläne und curricularen Vorgaben aller Fächer und Schulstufen in allen Schularten informatische Kompetenzen sowie Kompetenzen für die Bildung in der digitalen Welt auch im Hinblick auf die Herausforderungen durch KI integrieren. (KMK, 2024, S. 5)

Zur Frage, welche Kompetenzen zu einer KI-Literalität beitragen, hat die UNESCO 2024 einen KI-Kompetenzrahmen für Schüler/innen (Miao & Shiohira, 2024; siehe Tab. 1) und einen für Lehrpersonen (Miao & Cukurova, 2024; siehe Tab. 2) veröffentlicht.

Die vier Aspekte definieren zentrale KI-Kompetenzen, die Lernende zu verantwortungsvollen Nutzenden und Mitgestaltenden machen und sie auf ihre Rollen in der nächsten KI-Generation vorbereiten sollen. Die drei Entwicklungsstufen fördern zunehmende Beherrschung und ethisches Bewusstsein im Umgang mit KI, wobei Ethik global und lokal verstanden und angewendet werden soll. Praktische Anregungen hierzu bieten z. B. Payne (2019) mit einem Lehrplan zur KI-Ethik für die Mittelstufe, Kersting et al. (2019) mit verständlichen Erklärungen zur KI, Noack und Sanner (2023) mit interaktiven Projekten sowie das Sprachmodell SoekiaGPT (www.soekia.ch), das die Funktionsweise von Textgeneratoren wie ChatGPT verdeutlicht.

Mit zunehmender Integration von KI im Bildungsbereich muss auch die Professionalisierung von Lehrkräften gestärkt werden, um Schüler/innen angemessen zu unterrichten. Die KMK empfiehlt, entsprechende Kompetenzen systematisch in Fachwissenschaften, Fachdidaktiken und Bildungswissenschaften zu integrieren (KMK, 2024). Ergänzend fordert sie ethische Leitlinien, basierend auf denen der Europäische Kommission (2022) sowie den Maßstäben des Deutschen Ethikrats (Deutscher Ethikrat, 2023).

Die Europäische Kommission (2022) nennt in ihren ‚Ethischen Leitlinien für Lehrkräfte über die Nutzung von KI und Daten für Lehr- und Lernzwecke' potenzielle Indikatoren, die im Rahmen des Europäischen

Tabelle 1. KI-Kompetenzrahmen für Schüler/innen (übersetzt aus dem Englischen aus Miao & Shiohira, 2024, S. 19)

Kompetenzaspekte	Stufen der Entwicklung		
	Verstehen	Anwenden	Erstellen
Menschenzentrierte Denkweise	Menschliches Handeln	Menschliche Verantwortung	Gesellschaft im Zeitalter von KI
Ethik der KI	Gelebte Ethik	Sichere und verantwortungsbewusste Nutzung	Ethik durch Design
KI-Techniken und -Anwendungen	KI-Grundlagen	Anwendungskenntnisse	Erstellung von KI-Werkzeugen
KI-System-Design	Problemuntersuchung	Architekturdesign	Iterations- und Rückkopplungsschleifen

Tabelle 2. KI-Kompetenzrahmen für Lehrpersonen (übersetzt aus dem Englischen aus Miao & Cukurova, 2024, S. 22)

Aspekte	Entwicklung		
	Erwerben	Vertiefen	Erstellen
Menschenzentrierte Denkweise	Menschliches Handeln	Menschliche Verantwortung	Soziale Verantwortung
Ethik der KI	Ethische Prinzipien	Sichere und verantwortungsbewusste Nutzung	Ko-kreation ethischer Regeln
KI-Grundlagen und -Anwendungen	Grundlegende KI-Techniken und -Anwendungen	Anwendungskenntnisse	Erstellen mit KI
KI-Pädagogik	KI-unterstütztes Lehren	Integration von KI-Pädagogik	KI-gestützte pädagogische Transformation
KI für die berufliche Weiterentwicklung	KI für lebenslanges berufliches Lernen	AI zur Verbesserung des organisatorischen Lernens	KI zur Unterstützung des beruflichen Wandels

Kompetenzrahmens ‚DigCompEdu' berücksichtigt werden sollten. Die UNESCO ergänzt dies mit einem KI-Kompetenzrahmen für Lehrpersonen (Miao & Cukurova, 2024; siehe Tabelle 2), der Ethik als zentrale Komponente hervorhebt, und definiert zudem detaillierte curriculare Ziele und Lernziele für jeden der fünfzehn Kompetenzblöcke (Miao & Cukurova, 2024).

Fazit

Generative KI in ihrer heutigen Form ist nicht nur ein aktueller Trend, sondern eine Technologie, die unsere Gesellschaft langfristig prägen wird. Für die Gesellschaft im Ganzen wie auch für den schulischen Bereich bietet sie enorme Chancen, birgt aber auch große ethische Herausforderungen. Ein verantwortungsvoller Umgang mit KI erfordert nicht nur das Lernen *mit* KI, sondern auch ein fundiertes Lernen *über* KI, um Kindern einen dauerhaft souveränen und kritischen Umgang mit dieser sich ständig weiterentwickelnden Technologie zu ermöglichen.

Lehrpersonen spielen dabei eine Schlüsselrolle: Sie müssen nicht nur technologische Kompetenzen vermitteln, sondern auch die ethische Brille aufsetzen, um den Einsatz von KI zu reflektieren und Kinder auf ihre Rolle als mündige Erwachsene vorzubereiten. Dies ist eine anspruchsvolle Aufgabe, da sich die Technologien schnell weiterentwickeln und ständige Anpassungen erforderlich sind. Es ist jedoch eine Investition, von der sowohl die Entscheidungsträger von morgen als auch die Gesellschaft als Ganzes profitieren werden.

Literatur

Andree, M. (2023). *Big Tech muss weg!* Campus Verlag.

Baker, P. (2024). *ChatGPT für Dummies*. John Wiley & Sons.

Bender, E. M., Gebru, T., McMillan-Major, A., & Shmitchell, S. (2021). On the dangers of stochastic parrots: Can language models be too big? *Proceedings of the 2021 ACM conference on fairness, accountability, and transparency,* 610–623.

Bescherer, C., Büscher, C., Lengnink, K., Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., Schreiber, C. & Walter, D. (2024). Mathematische Bildung und Digitalisierung. *Mitteilungen der GDM, 117*, 6–14.

Buchholtz, N., Baumanns, L., Huget, J., Peters, F., Pohl, M. & Schorcht, S. (2023). Herausforderungen und Entwicklungsmöglichkeiten für die Mathematikdidaktik durch generative KI-Sprachmodelle. *Mitteilungen der GDM, 114*, 19–26.

Buchholtz, N., Schorcht, S., Baumanns, L., Huget, J., Noster, N., Rott, B., Siller, H.-S. & Sommerhoff, D. (2024). Damit rechnet niemand! *Mitteilungen der GDM, 117*, 15–24.

Buxmann, P., & Schmidt, H. (2021). *Künstliche Intelligenz.* Springer.

CAIS (2023). *Statement on AI Risk*. www.safe.ai/work/statement-on-ai-risk

Coulter, M. (2024). *Tech giants push to dilute Europe's AI Act*. Reuters. www.reuters.com/technology/artificial-intelligence/tech-giants-push-dilute-europes-ai-act-2024-09-20/

Delvaux, M. (2017). *Europäisches Parlament 2014–2019.* Bericht mit Empfehlungen an die Kommission zu zivilrechtlichen Regelungen im Bereich Robotik (2015/2103(INL)) A8-0005/2017, S. 9.

Deutscher Ethikrat (2023). *Mensch und Maschine – Herausforderungen durch Künstliche Intelligenz.* www.ethikrat.org/publikationen/stellungnahmen/mensch-und-maschine/

Dilling, F., Holten, K., Pielsticker, F. & Witzke, I. (2024). Aushandlungs- und Argumentationsprozesse fördern durch den Einsatz generativer KI-Sprachmodelle beim schulischen Mathematiklernen? *Mitteilungen der GDM, 116*, 14–22.

Dignum, V. (2019). *Responsible artificial intelligence*. Springer.

Ertel, W. (2021). *Grundkurs Künstliche Intelligenz*. Springer.

EU AI Act (2024). *Gesetz über künstliche Intelligenz (Verordnung (EU) 2024/1689), Fassung des Amtsblatts vom 13. Juni 2024.* Interinstitutionelle Akte: 2021/0106(COD)

Europäische Kommission (2022). *Ethische Leitlinien für Lehrkräfte über die Nutzung von KI und Daten für Lehr- und Lernzwecke.* Amt für Veröffentlichungen der Europäischen Union. data.europa.eu/doi/10.2766/494

EU (2017). Robotic and AI. www.europarl.europa.eu/news/de/press-room/20170210IPR61808/robotik-und-kunstliche-intelligenz-abgeordnete-fur-eu-weite-haftungsregelungen

Future of Life (2023). *Pause Giant AI Experiments: An Open Letter*. futureoflife.org/open-letter/pause-giant-ai-experiments/

Hischer, H. (2023). ChatGPT und Mathematikunterricht – eine didaktische Herausforderung? *Mitteilungen der GDM, 115*, 6–11.

Kaplan, A., & Haenlein, M. (2019). Siri, Siri, in my hand: Who's the fairest in the land? On the interpretations, illustrations, and implications of artificial intelligence. *Business Horizons, 62*(1), 15–25.

Kersting, K., Lampert, C., & Rothkopf, C. (2019). *Wie Maschinen lernen*. Springer.

KI Bundesverband (2023). *Position Paper on the EU AI Act.* ki-verband.de/wp-content/uploads/2023/04/PositionPaper_AI-Act_German-AI-Association_April2023.pdf

KMK (2016). *Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 8. 12. 2016). www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2016/Bildung_digitale_Welt_Webversion.pdf

KMK (2024). Handlungsempfehlung für die Bildungsverwaltung zum Umgang mit Künstlicher Intelligenz in schulischen Bildungsprozessen. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 10. 10. 2024). www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2024/2024_10_10-Handlungsempfehlung-KI.pdf

Kortenkamp, U. (2024). Wieviel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kernkompetenzen im Angesicht von KI. In Steinweg, A. S. (2024) (Hrsg.). *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2024* (S. 57–72). University of Bamberg Press.

Krauthausen, G. (2020). Tablets ante portas. In B. Brandt, L. Bröll, & H. Dausend (Hrsg.), *Digitales Lernen in der Grundschule II* (S. 40–50). Waxmann.

Miao, F. (2024). *AI competency frameworks for school students (under development).* Vortragsfolien.

Miao, F., & Cukurova, M. (2024). *AI competency framework for teachers.* UNESCO. unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000391104

Miao, F. & Holmes, W. (2023). *Guidance for generative AI in education and research*. UNESCO. unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693

Miao, F., & Shiohira, K. (2024). *AI competency framework for students.* UNESCO. unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000391105

Mittelstadt, B., Wachter, S., & Russell, C. (2024). The Unfairness of Fair Machine Learning: Leveling Down and Strict Egalitarianism by Default. *Michigan Technology Law Review, 30*(1), 3.

Noack, P. & Sanner, S. (2023). *Künstliche Intelligenz verstehen: Eine spielerische Einführung.* Rheinwerk Verlag.

Payne, B. H. (2019). *An ethics of artificial intelligence curriculum for middle school students*. MIT Media Lab. https://ec.europa.eu/futurium/en/system/files/ged/mit_ai_ethics_education_curriculum.pdf

Platz, M. (im Druck). Welche Auswirkungen hat KI auf die Internetsuche? Eine Lernumgebung für den Mathematikunterricht der Primarstufe. In M. Platz & A. Steffen-Delplanque (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe 2024. Beiträge zur 7. PriMaMedien-Sommertagung 2024 in Saarbrücken*. Band 12 der Reihe „Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe“. WTM-Verlag.

Ramos, G. (o. J.). *Ethics of Artificial Intelligence.* www.unesco.org/en/artificial-intelligence/recommendation-ethics

Rich, E. (1983). *Artifical Intelligence.* McGaw-Hill.

Ryan, M., Christodoulou, E., Antoniou, J., & Iordanou, K. (2024). An AI ethics 'David and Goliath': Value conflicts between large tech companies and their employees. *AI & SOCIETY, 39*(2), 557–572.

Schorcht, S., Baumanns, L., Buchholtz, N., Huget, J., Peters, F. & Pohl, M. (2023). Ask Smart to Get Smart: Mathematische Ausgaben generativer KI-Sprachmodelle verbessern durch gezieltes Prompt Engineering. *Mitteilungen der GDM, 115*, 12–23.

Schultz, M. D., Conti, L. G., & Seele, P. (2024). Digital ethicswashing: a systematic review and a process-perception-outcome framework. *AI and Ethics*, 1–14.

Spitzer, M. (2023). *Künstliche Intelligenz: Dem Menschen überlegen.* Droemer.

Süddeutsche Zeitung (2023). *Was hinter der lauten Warnung vor der KI-Apokalypse steckt.* www.sueddeutsche.de/wirtschaft/ki-kuenstliche-intelligenz-ausloeschung-menschen-open-ai-1.5892228

SWK (2024). *Large Language Models und ihre Potenziale im Bildungssystem.* Impulspapier der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der Kultusministerkonferenz. DOI:10.25656/01:28303

UNESCO (2021). *Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence.* unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381137

Vieweg, S. H. (2023). *KI für das Gute*. Springer.

Melanie Platz, Universität des Saarlandes
melanie.platz@uni-saarland.de

Christine Plote, Open Search Foundation e. V.
cp@opensearchfoundation.org

Wieso erkennt Alexa meine Stimme? Soundanalyse im Mathematikunterricht

Martin Vogt, Abrar Ahmed, Stefan Balke, Simone Bast und Saskia Laufer

„Musik ist für die Seele, was Gymnastik für den Körper." Dieses Zitat, welches Platon zugeschrieben wird (siehe etwa Musikschule Wertheim, o. D.), verdeutlicht die Bedeutung von Musik, aber auch Tönen, Sprache und Geräuschen in unserer Lebenswirklichkeit. Neben Texten (siehe Nonnenmann et al., 2023) und Bildern (Bast et al., 2022) ist *Sound* deshalb eine spannende Datenquelle für den Mathematikunterricht mit Bezug zur Lebenswirklichkeit der Lernenden und kann entsprechend gewinnbringend eingesetzt werden.

Dieser Beitrag stellt ein Lernarrangement bestehend aus 4 Lernsituationen vor. Grundlage für die Konzeption der Lernsituationen ist der Lehrplan für das berufliche Gymnasium in Rheinland-Pfalz für das Unterrichtsfach Mathematik (vgl. Pädagogisches Landesinstitut Rheinland-Pfalz, 2014) Konkret wird die Erlangung der Kompetenzen im Lernbereich 1 Denken in funktionalen Zusammenhängen ermöglicht. Inhaltlich bewegen sich die Lernsituationen im Bereich Nichtrationale Funktionen.

Die erste Lernsituation stellt die Grundlagen von Audiosignalen bzw. Tönen ins Zentrum der Betrachtung. Eine wichtige Erkenntnis aus diesem Einstieg in das Lernarrangement ist, dass unsere Wahrnehmung von Tönen „logarithmisch funktioniert". Die zweite Lernsituation fokussiert die mathematische Modellierung von Audiosignalen durch Sinusfunktionen. Im Rahmen der dritten Lernsituation erarbeiten sich die Lernenden diverse Tools zur Visualisierung, Analyse und Darstellung von Sound. Die abschließende vierte Lernsituation zeigt auf, wo Soundanalyse in der Praxis eine Rolle spielt. Der Blick auf verschiedene Anwendungsfälle verdeutlicht hier die Relevanz der Behandlung von Sound im Mathematikunterricht.

Audiogrundlagen: Oder warum unser Ohr logarithmisch ist

> Lernsituation 1: *„Guten Morgen." Wie jeden Morgen, begrüßt Alexa Sie freundlich. Aber nicht nur Alexa, auch Autos oder Handys können Sprache und Musik erkennen, Töne erzeugen oder Stimmen imitieren. Wie geht das? Oder konkreter: Was ist eigentlich ein Ton?*

Im Rahmen dieser ersten Lernsituation kann der Umgang mit Potenzen und Logarithmen eingeübt bzw. vertieft werden. Zusätzlich ist das Erkennen exponentiellen Wachstums Bestandteil der Lernsituation. Nicht zuletzt können Fachtermini, die im Zusammenhang mit der Sinusfunktion auftauchen, von den Lernenden herausgearbeitet werden.

Audiosignale, bzw. Töne, entstehen durch die Vibration oder Schwingung eines Objektes. Dabei kann es sich beispielsweise um die Vibration einer Gitarrensaite handeln, oder um die der menschlichen Stimmbänder. Durch diese Vibrationen werden Moleküle in der Luft in eine wellenförmige Bewegung gesetzt und erzeugen dadurch einen Ton (vgl. Sueur, 2018). Dieser verkörpert gewisse Eigenschaften, die ihn zu einem definierbaren und darstellbaren Objekt machen.

Eine wichtige Eigenschaft ist die oben erwähnte *Wellenbewegung*, die *periodisch* verläuft und graphisch einer Sinusfunktion ähnelt (vgl. Abschnitt „Audiodarstellung" unten). Zudem ist die *Lautstärke* eines Tons eine wichtige Charakteristik. Bezüglich der Sinuswellen gilt: Je höher die maximale Auslenkung der Welle ist, desto lauter ist ein Ton. Diese Auslenkung wird Amplitude genannt. Zuletzt kann anhand des periodischen Verlaufs des Tons seine *Frequenz* ω ermittelt werden. Diese wird in Hertz (Hz) gemessen und gibt an, wie viele Sinusperioden der Ton innerhalb einer Sekunde durchläuft. Sie ist der Kehrwert der Dauer einer Sinusperiode (T) (vgl. Wagner 2015):

$$\omega := \frac{1}{T}\,[\mathrm{Hz}]$$

Eine Frequenz von 2 Hz bedeutet also, dass in einer Sekunde genau zwei Perioden durchlaufen werden. Generell gilt, je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton und desto kürzer ist eine Periode auf dem Graphen. Bei der Analyse von Musiksignalen wird ausgenutzt, dass Frequenzen und Tonhöhen verknüpft werden können. So entspricht das in Abbildung 1 zu sehende C4 (technische Notation; deckt sich mit dem mittleren c′ auf einer Klaviertastatur) zum Beispiel einer Frequenz von 261,6 Hz und das eine Oktave höhere C5 der doppelten Frequenz von 523,2 Hz. Das eine weitere Oktave höhere C6 entspricht wieder der doppelten Frequenz, also 1046,4 Hz (vgl. Müller, 2015).

Abbildung 1 zeigt einen Ausschnitt einer Klaviertatstatur mit den Standardbezeichnungen der einzelnen Noten laut „MIDI-Notation“ (Musical Instrument Digital Interface). Die „MIDI-Nummer“ ordnet dabei jedem Ton von C0 bis G#9 (Gis 9) eine natürliche Zahl zwischen 0 und 127 zu (vgl. Dannenberg, 2006). C4 besitzt mit dieser Nummerierung beispielsweise die MIDI-Nummer 60 und der üblicherweise zum Stimmen von Instrumenten genutzte Kammerton A4 besitzt die MIDI-Nummer 69.

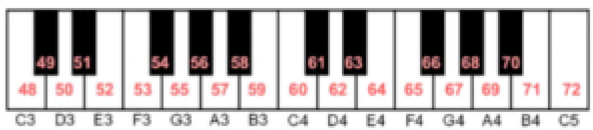


Abbildung 1. Klaviertastatur (www.audiolabs-erlangen.de/resources/MIR/FMP/C1/C1S2_MIDI.html, abgerufen am 4. 11. 2024)

Mithilfe dieser Informationen lässt sich die Mittenfrequenz jeder Taste auf der Klaviatur anhand der folgenden Formel berechnen (vgl. Müller, 2015):

$$\omega(p) = 2^{\frac{p-69}{12}} \cdot 440\,\mathrm{Hz}$$

Hierbei ist $\omega(p)$ die Frequenz der Note p, wobei p durch den Wert der MIDI-Nummer angegeben wird. Wir beziehen uns in dieser Formel auf das bereits erwähnte A4 mit der MIDI-Nummer 69 und der Frequenz 440 Hz. Da eine Oktave in der westlichen Notenschrift in der Regel aus zwölf Halbtönen besteht, sorgt der Divisor 12 im Exponenten dafür, dass eine Note, die eine Oktave höher ist, auch eine genaue Verdopplung in der Frequenz verursacht. Betrachten wir beispielsweise die Note A5 mit der MIDI-Nummer 81, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega(81) &= 2^{\frac{81-69}{12}} \cdot 440\,\mathrm{Hz} = 2^{\frac{12}{12}} \cdot 440 = 2 \cdot 440\,\mathrm{Hz}\\ &= 880\,\mathrm{Hz}\end{aligned}$$

An der Formel lässt sich schnell erkennen, dass Frequenzen exponentiell steigen. Die Note mit der Notation A2 hat die Frequenz 110 Hz. A3 entspricht 220 Hz, A4 440 Hz, A5 880 Hz, und so weiter. Allerdings hört es sich für uns Menschen so an, als wäre der Abstand zwischen A2 und A3 genauso groß wie der zwischen A3 und A4. Die menschliche Wahrnehmung von Tonhöhen ist also logarithmischer Natur (vgl. Müller, 2015).

Mathematische Modellierung von Tönen

Lernsituation 2: *Sie haben noch immer ein Lied im Kopf, welches Sie gestern zum ersten Mal im Radio gehört haben. Sie kennen den Namen nicht, aber zum Glück die Melodie. Sie summen das Lied und eine App, wie bspw. Google Search, nennt Ihnen daraufhin den Namen des Liedes. Dabei kommt Ihnen folgende Frage: Wieso kann ein Computer mein Summen erkennen? Wie kann Sound mathematisch modelliert werden?*

In dieser zweiten Lernsituation liegt der Fokus auf dem im Lehrplan ausgewiesenen Kompetenzbereich *Funktionale Zusammenhänge modellieren und kommunizieren*. Die Lernenden erstellen die Sinusfunktion zu einem vorgegebenen Audiosignal, indem sie die Werte für Amplitude, Frequenz und Phase im Rahmen einer mathematischen Modellierung an den Graphen anpassen. Für besonders interessierte Lernende kann hier ein Ausblick auf die Fourieranalyse stattfinden.

Die wohl bekannteste Darstellungsform von Tönen zeigt eine „Wellenform“ (vgl. Sueur, 2018). In dieser sind insbesondere die zeitlichen Verläufe, z. B. die sinusartige Vibration von Tönen, sichtbar. Sie ist beispielsweise in Sprachnachrichten verschiedener Messenger-Dienste zu sehen. Ein auf dem Klavier angeschlagenes C5 ist in Abbildung 2 einmal dargestellt.

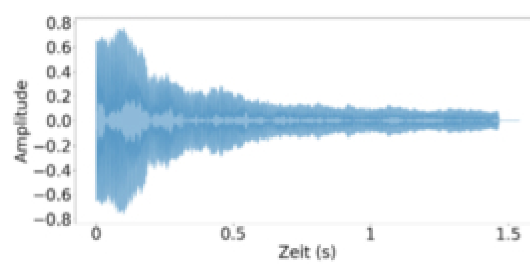


Abbildung 2. Ein auf dem Klavier angeschlagenes C5

Hier wird auf der x-Achse die Zeit in Sekunden angegeben und auf der y-Achse die Amplitude. Letztere wird im Verlauf des Tons kleiner, weil der Ton nach dem Anschlag abklingt und somit leiser wird. Da innerhalb weniger Sekunden mehrere hundert Perioden durchlaufen werden, erkennt man die eigentlichen Wellen dieser Form erst nach dem Heranzoomen in ein deutlich kleineres Zeitfenster (Abb. 3).

Wir erhalten eine wesentlich auseinandergezogene Darstellung eines kleinen Teils des Signals aus Abbildung 2. Weiterhin erkennen wir auf der x-Achse die Zeit in Sekunden und auf der y-Achse die Amplitude. Jedoch lässt sich aus dieser Darstellung noch mehr herauslesen: Wenn sich das periodische Signal in 0,01 Sekunden circa 5-mal wiederholt, dann wiederholt es sich in einer Sekunde ungefähr 500-mal. Wir haben es in diesem Fall also mit einer Frequenz von (etwas mehr) als 500 Hz zu tun. Tatsächlich ist in diesem Graphen der Ton C5 mit einer Frequenz von circa 523,2 Hz dargestellt. Mit unserer groben Abschätzung kamen wir demnach bereits ziemlich nah an das richtige Ergebnis heran.

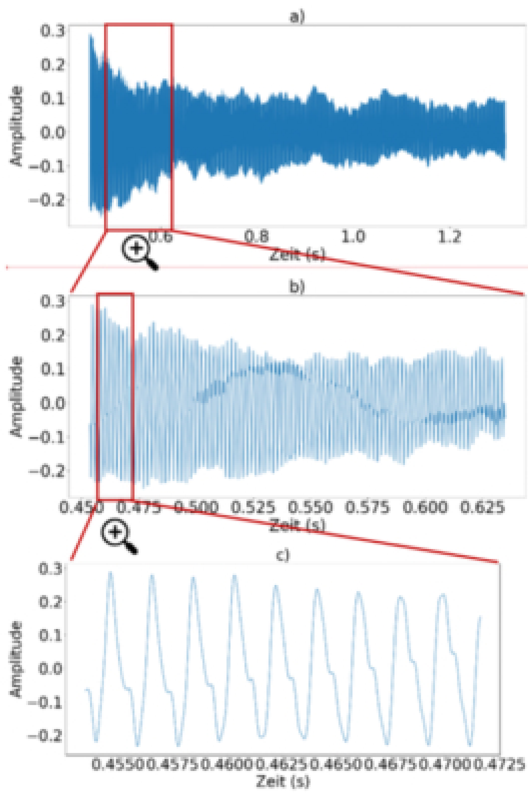


Abbildung 3. Klavier C5 – immer stärker werdender Zoom vom ersten (a) bis zum letzten (c) Graphen

Obwohl die Sinusform des Graphen in Abbildung 3c eindeutig erkennbar ist, lässt sich feststellen, dass es sich keinesfalls um eine „reine“ Sinusfunktion handeln kann. Diese würde schließlich wie in Abbildung 4 aussehen.

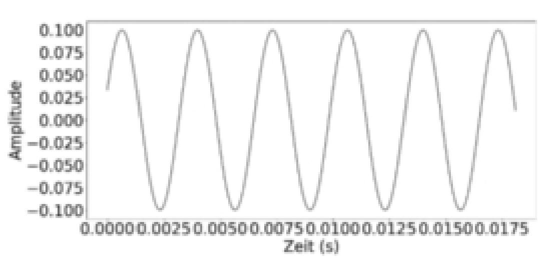


Abbildung 4. Reine Sinusfunktion mit einer Frequenz von 523,2 Hz

Das liegt daran, dass die meisten Töne keineswegs „reine“ Töne einer einzigen Frequenz sind. Eine auf einem Instrument gespielte Note ist deutlich komplexer und besteht aus mehreren Frequenzen, die auch nicht vom Anfang bis zum Ende des Tons gleichbleiben (vgl. Müller, 2015). Ein Ton kann daher als eine Art Überlagerung einzelner „reiner“ Töne, bzw. Frequenzen, gesehen werden. In Abbildung 3 spiegelt sich dies in den leicht unterschiedlichen Perioden wider. Mathematisch betrachtet handelt es sich also nicht um einen einfachen Sinusgraphen, sondern um den Graphen mehrerer aufaddierter Sinusfunktionen, wobei jede einzelne für eine bestimmte Frequenz steht.

Die tiefste in einem Ton vertretene Frequenz wird als Fundamentalfrequenz bezeichnet (vgl. Müller, 2015). Häufig ist sie auch die dominanteste Frequenz im Ton; etwa bei Saiteninstrumenten wie der Gitarre und dem Klavier. Sie bestimmt, als welche Note wir den Ton wahrnehmen. Neben der Fundamentalfrequenz können sowohl harmonische als auch unharmonische weitere Frequenzen im Ton vorkommen (die sog. Obertöne). Als harmonische Frequenz bezeichnen wir jede Frequenz, die aus der Multiplikation einer ganzen Zahl mit der Fundamentalfrequenz besteht (vgl. Müller, 2015). Beispielsweise stehen 261,6 Hz, 523,2 Hz und 784,8 Hz in einem harmonischen Verhältnis. Eine Frequenz, die nicht aus einer ganzzahligen Multiplikation mit der Fundamentalfrequenz gewonnen werden kann, wird als unharmonisch bezeichnet. Instrumente sind in der Regel so aufgebaut, dass sie nahezu ausschließlich harmonische Obertöne, also „Nebenfrequenzen“ produzieren (vgl. Müller, 2015).

Das Zählen von Periodendurchläufen ist nur für einfache Klänge ein schnelles Hilfsmittel. Sobald die Klänge komplexer werden oder durch weitere Instrumente überlagert werden, stößt diese Methode schnell an ihre Grenzen. In der Praxis wird daher die sogenannte Fourieranalyse verwendet, um Töne (oder im Allgemeinen Funktionen) in ihre Frequenzbestandteile zu zerlegen (vgl. Sueur, 2018). Hierbei werden Sinusfunktionen verschiedener Frequenzen mit dem zu testenden Signal verglichen. Passt eine Frequenz gut, bekommt sie einen hohen Wert zugewiesen. Normalerweise benötigt man für die vollständige Fourieranalyse Kenntnisse über den Umgang mit komplexen Zahlen (vgl. Müller, 2015). Da in diesem Fall aber mit Lernenden gearbeitet wird, die über dieses Wissen in der Regel nicht verfügen, wird hier eine vereinfachte Form des Vergleichens, bzw. Modellierens der Originalfrequenz vorgestellt. Zum Erstellen unserer Vergleichsfunktion wird das mathematische Modell einer Schwingung verwendet:

$$f(x) = A \cdot \sin\big(2\pi \cdot (\omega x - \varphi)\big)$$

Es steht dabei A für die Amplitude, ω für die Frequenz und φ für die sogenannte Phase, also die Verschiebung der Funktion entlang der x-Achse (vgl. Müller, 2015). Man kann nun die Parameter A, ω und φ variieren, um eine möglichst passende Sinusfunktion für den vorgegebenen Ton zu finden. Kriterien für die Ähnlichkeit einer Funktion sind hierbei beispielsweise eine gleiche Periodenlänge, gleiche Nullstellen, gleiche Amplitude und abschnittsweise Vorzeichengleichheit.

In Abbildung 5 wird das Signal aus Abbildung 3c mit den Sinusfunktionen verschiedener Frequenzen, Phasen und Amplituden verglichen. Dabei wird sich hier zunächst auf das Finden der Fundamentalfrequenz konzentriert, bevor Obertöne durch Addition hinzugefügt werden. Dazu verwenden wir die folgenden vier Funktionen:

$$f_a(x) = 0,1 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (300x - 0)\bigr)$$
$$f_b(x) = 0,1 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (523{,}2x - 0)\bigr)$$
$$f_c(x) = 0,1 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (523{,}2x - 0,55)\bigr)$$
$$f_d(x) = 0,28 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (523{,}2x - 0,55)\bigr)$$

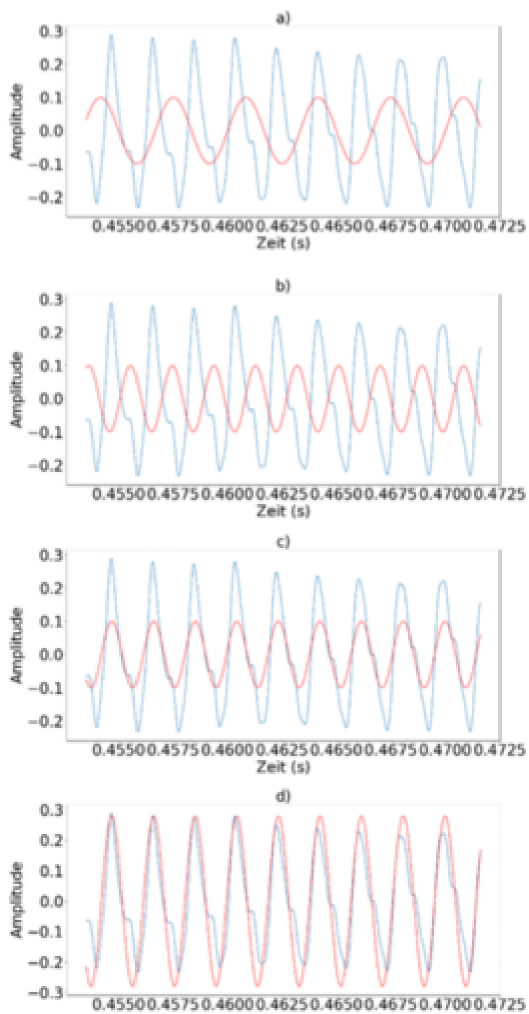


Abbildung 5. Vergleich des Signals aus Abbildung 3 mit den Sinusfunktionen $f_{\{a,b,c,d\}}$

Alle vier Abbildungen in Abbildung 5 zeigen in Blau das Originalsignal und in Rot die jeweils variierende Vergleichsfunktion. In Abbildung 5a ist die Frequenz (300 Hz) unpassend zum Signal und daher weist auch der Graph optisch keine Ähnlichkeit zum Signal auf. Im Gegensatz dazu wurde im Graphen von Abbildung 5b bereits die korrekte Frequenz gefunden, die allerdings gegensätzlich zum Originalsignal verläuft: Wenn das Originalsignal positiv ist, ist das Testsignal negativ und andersherum. Daher wird nun die richtige Phase gesucht. Diese ist in Abbildung 5c dargestellt. In Abbildung 5d wurde schließlich noch die Amplitude an das Originalsignal angepasst, um die optische Ähnlichkeit zu maximieren.

Die Information über die Frequenz hilft, weitere Obertöne zu finden. In Abbildung 6a wird zunächst eine weitere Funktion mit doppelter Frequenz (vgl. Abschnitt „Audiogrundlagen“) und halber Amplitude auf f_d addiert, da die zweite „Welle“ im Graphen deutlich kleiner aussieht. Es ist visuell erkennbar, dass die Phase dieses Obertons noch nicht gut eingestellt ist. Deswegen haftet die Erhöhung der zweiten Welle an der falschen Seite. Durch weiteres Ausprobieren kann die Phase angepasst werden. Abbildung 6b zeigt das Ergebnis mit einer Phasenverschiebung von $\varphi = 0{,}1$.

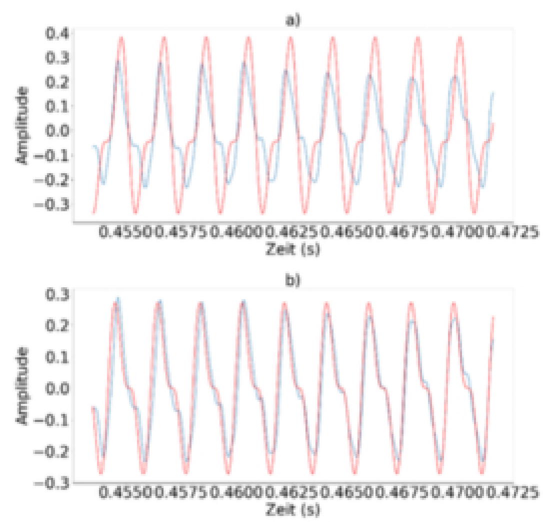


Abbildung 6. Addition weiterer Funktionen

Die Funktionsvorschriften zu den beiden Funktionen aus Abbildung 6 lauten im Ergebnis:

$$\begin{aligned} f(x) =& 0{,}28 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (523{,}2x - 0{,}55)\bigr) \\ &+ 0{,}14 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (2 \cdot 523{,}2x - 0{,}55)\bigr), \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} f(x) =& \Bigl(0{,}28 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (523{,}2x - 0{,}55)\bigr) \\ &+ 0{,}14 \cdot \sin\bigl(2\pi \cdot (2 \cdot 523{,}2x - 0{,}1)\bigr)\Bigr) \cdot 0{,}75. \end{aligned} \tag{b}$$

Der Faktor 0,75 am Ende von Funktionsvorschrift (b) trägt lediglich dazu bei, dass die Amplitude der gesamten Funktion weiterhin mit der des Originalsignals übereinstimmt. Auch er kann durch Ausprobieren ermittelt werden.

Abbildung 7 zeigt der Vollständigkeit halber das Ergebnis einer Fourieranalyse. Da es sich in der Regel um komplexwertige Amplituden handelt (dieser kodiert sowohl Frequenz, als auch Phase in einer komplexwertigen Zahl), wird hier das sog. Betragsspektrum gezeigt.

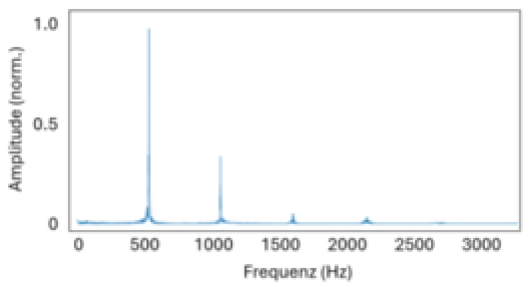


Abbildung 7. Betragsspektrum eines am Klavier gespielten C5

Auf der x-Achse in Abbildung 7 sind die Frequenzen von 0–3000 Hz abgebildet, während die y-Achse die Beträge der Amplituden angibt (normiert auf den höchsten Oberton). Es lässt sich ablesen, dass bei dem dargestellten Ton aus Abbildung 2 vor allem die Frequenzen 523,2 Hz, 1046,4 Hz, 1569,6 Hz und 2092,8 Hz vertreten sind. Erstere ist die am stärksten ausgeprägte Fundamentalfrequenz. Die anderen Frequenzen bilden die Obertöne und sind im Falle des Klaviersignals deutlich schwächer ausgeprägt als die Fundamentalfrequenz. In dieser Darstellungsform verlieren wir allerdings vollständig die Information über die zeitlichen Aspekte des gespielten Tons.

Die wohl bekannteste Darstellungsform, die sowohl zeitliche Aspekte als auch die Frequenz eines Tons angibt, ist das sogenannte Spektrogramm. Es handelt sich hierbei um eine Darstellung, die auf der x-Achse die Zeit betrachtet und auf der y-Achse die Frequenz angibt. Die Stärke der Frequenz lässt sich dann am Farbverlauf des Spektrogramms ablesen. In der Regel gilt: Je heller/deutlicher die Farbe ist, desto stärker ist die jeweilige Frequenz vertreten. Ein Beispiel für ein Spektrogramm des Tons C5 aus Abbildung 2 ist in Abbildung 8 aufgezeigt.

Ähnlich wie die Frequenzdarstellung zeigt das Spektrogramm besonders starke Frequenzausprägungen bei ganzzahligen Vielfachen der Hauptfrequenz 523,2 Hz. Außerdem lässt sich erkennen, dass beim perkussiven Anschlag der Klaviertaste (Hammer trifft Saite), also zu Beginn, sehr viele Frequenzen im Ton vertreten sind – wenn auch schwach (siehe Box 1 in Abbildung 8). Später dominieren die harmonischen Komponenten durch das Schwingen der Saite (siehe Box 2 in Abbildung 8), wobei diejenige(n) Frequenz(n)

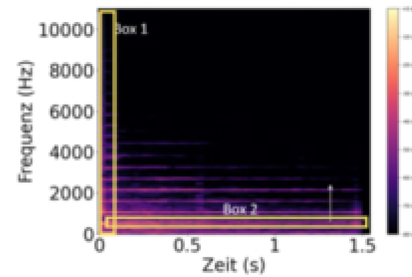


Abbildung 8. Betragsspektrogramm des Klaviertons C5

überwiegt/überwiegen, die zur Länge der Saite passt/passen.

Tools und Software

> Lernsituation 3: *Sie haben bereits viel im Internet zum Thema Sound recherchiert. Hierbei sind Ihnen immer wieder andere Darstellungsformen von Sound begegnet. Sie suchen nun nach Tools, die es Ihnen ermöglichen, Sound darzustellen und Ihre Erkenntnisse Ihren Freunden zu präsentieren.*

Diese dritte Lernsituation bewegt sich im Kompetenzbereich *Funktionale Zusammenhänge darstellen, analysieren und interpretieren*. Den Lernenden wird hier der Umgang mit diversen Tools zur Darstellung von Sound ermöglicht. IT-affine Lernende können eine Steigerung der Selbstwirksamkeit erreichen, indem sie mit diversen Programmiersprachen arbeiten, um Sound sichtbar zu machen.

Zum allgemeinen Verständnis ist es, ähnlich wie bei Bildern, wichtig, Töne nicht nur mathematisch darzustellen, sondern auch abspielen zu können. Im Idealfall gelingt es einer Lehrperson, ihren Lernenden den Zusammenhang zwischen Musik und Mathematik auch auf audiovisuelle Weise näherzubringen. Hierzu gibt es einige verschiedene Tools, die im Folgenden vorgestellt werden.

Zunächst können Audiosignale mithilfe von klassischen Programmiersprachen wie Python und R aufbereitet werden. So wurden beispielsweise alle Abbildungen, mit Ausnahme von Abbildung 1 mithilfe von Python erstellt. Der Code, der zur Erstellung der meisten Abbildungen genutzt wurde, basiert auf einer Vorlage auf Github (siehe Musicalkemist, o. D.). Mithilfe der Funktionen dieser Vorlage kann ein Audiosignal, beispielsweise eine von einem Klavier gespielte Note, importiert und das Signal auf verschiedene Weisen visuell dargestellt werden. Das Buch *Fundamentals of Music Processing using Python and Jupyter Notebooks* von Meinard Müller (2021) erklärt, wie Python hierzu verwendet werden kann. Wie auch R genutzt werden kann, erklärt unter anderem das Handbuch *Sound Analysis and Synthesis with R* von Jérôme Sueur (2018).

Neben diesen Programmiersprachen kann auch das Programm GeoGebra zur audiovisuellen Darstellung von Tönen verwendet werden. Unter folgendem Link (www.geogebra.org/m/tycxbu5U) kann zum Beispiel mit den Parametern verschiedener reiner Töne experimentiert werden, sodass die Schüler*innen schnell und spielerisch erkennen, wie die Veränderung von Tonhöhe und Amplitude den Graphen des Tons beeinflussen. Die Benutzeroberfläche des GeoGebra Tools ist in Abbildung 9 dargestellt.

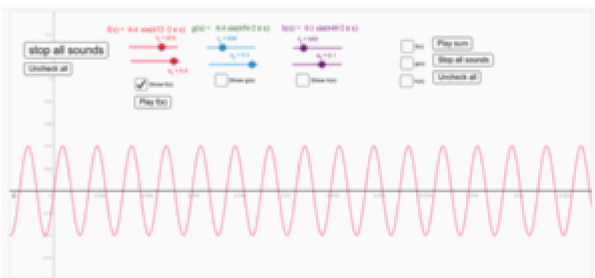


Abbildung 9. Benutzeroberfläche zum Experimentieren mit Sinusfunktionen in GeoGebra

Es können zudem mehrere Töne gleichzeitig abgespielt werden, um den Vergleich verschiedener Töne zu visualisieren. Dieses Tool eignet sich somit hervorragend dazu, den Lernenden einen Einstieg in die Tonanalyse zu bieten – insbesondere, wenn sie ein eigenes digitales Medium wie einen Computer oder ein Tablet zur Verfügung haben.

Zuletzt ist das Spektrogramm des Google Chrome Music Labs (musiclab.chromeexperiments.com/Spectrogram/) ein hervorragendes Tool, das sowohl als Einstieg als auch als Schluss genutzt werden kann. Anders als GeoGebra ermöglicht es dem Nutzer nicht nur den visuellen Vergleich verschiedener Töne, sondern auch den Vergleich verschiedener Instrumente, indem es ein Spektrogramm zeichnet. In Abbildung 10 werden beispielsweise die Frequenzen einer Trompete mit denen einer Harfe verglichen.

Das Spektrogramm des Google Chrome Music Labs ermöglicht es dem Nutzer zudem, selbst in das Gerätemikrofon zu sprechen und das Gesprochene in ein Spektrogramm zu übertragen. Das kann insbesondere dann interessant sein, wenn die Frage aufkommt, wie Alexa verschiedene Buchstaben identifizieren kann. Spricht man nämlich die fünf Vokale auf etwa gleicher Höhe und mit gleicher Lautstärke in das Mikrofon, so lassen sich im Spektrogramm bereits große Unterschiede erkennen. Die Mikrofonfunktion kann des Weiteren genutzt werden, um experimentell ein-, oder mehrstimmig zu singen. Auch hier kann die Veränderung vernommen und notiert werden.

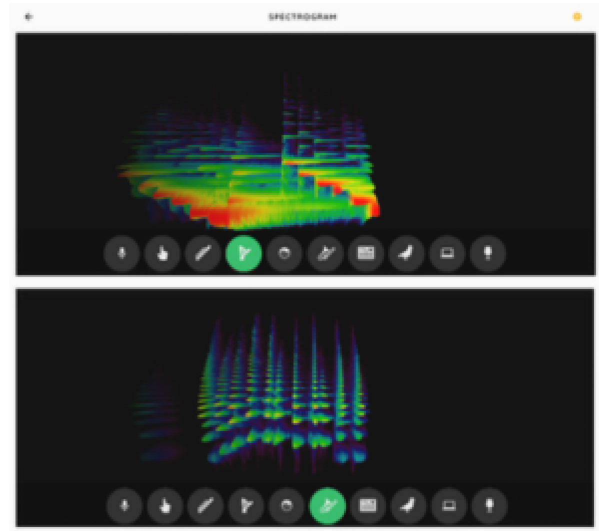


Abbildung 10. Spektrogramm einer Harfe (oben) und das einer Trompete (unten)

Die Entwicklung künstlicher Intelligenz und digitaler Medien hat neue Werkzeuge zum Abspielen, Erstellen und Analysieren von Sound hervorgebracht. Zahlreiche dieser Tools sind kostenfrei verfügbar, wie Google Chrome Music Labs und können somit leicht in den Unterricht integriert werden.

Ausblick

> *Lernsituation 4: Die Lampe in Ihrem Zimmer „summt“ auf einmal merkwürdig. Kurz darauf geht sie kaputt. Dabei kommt Ihnen eine Idee: Können Daten, wie Sound, verwendet werden, um festzustellen, ob Maschinen oder Bauteile bald kaputt gehen?*

Diese abschließende Lernsituation stellt den Blick über den Tellerrand dar und liefert schlussendlich Antworten auf die Frage: *Wofür brauche ich das überhaupt?*

Neben den vorgestellten Anwendungsfällen in der Analyse von Instrumenten und generell in der Musik, gibt es zahlreiche weitere, wie etwa im industriellen Umfeld. So versuchen Firmen, wie Porsche oder Philips, zum Beispiel die Produktentwicklung oder die Produktion mithilfe von Sound-Messdaten zu verbessern (siehe MHP, o. D.). Hierzu werden die Geräusche einer Maschine aufgezeichnet und analysiert. Das kann auch bei der Fehleranalyse von mechanischen Bauteilen geschehen, indem etwa gegen diese „geklopft“ wird. Ein intaktes Getriebe klingt dann beispielsweise anders als ein defektes. Da die Geräusche eines Motors periodische Elemente besitzen (durch das Drehen des Motors), können diese vielfach ebenfalls wie oben gezeigt als (wellenförmige) Zeitreihe dargestellt werden. Diese industriellen Anwendungen können sogar so weit gehen, zu versuchen vorauszusagen, wann eine Maschine kaputt geht, bevor diese kaputt gegangen ist. Das wird als Predictive Maintenance, also vorausschauende Wartung, bezeichnet (vgl. etwa Bousdekis, 2019). Im Idealfall können dadurch größere Schäden verhindert werden, oder es können bereits Ersatzteile bestellt werden, kurz bevor diese benötigt werden.

Darüber hinaus bietet die aufkommende Verbreitung allgemein zugänglicher generativer Modelle zur Erzeugung von Musik oder dem Klonen von Stimmen, wie Suno AI, die Möglichkeit, mit den Lernenden die Potenziale, aber auch die Gefahren (z. B. in Form von „Fake News“) zu diskutieren und ihre Wahrnehmung für diese zu schärfen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Datentyp Sound, neben Zahlen, Bildern und Texten, ebenfalls im Unterricht thematisiert werden sollte und die Möglichkeit für spannende Anwendungsfälle bietet.

Literaturverzeichnis

Bast, S., Vogt, M., & Wallerath, R. (2022). Autonomes Fahren – Ein Blick hinter die Kulissen der Mathematik der künstlichen Intelligenz. *GDM Mitteilungen, 112*, 7–10.

Bousdekis, A., Lepenioti, K., Apostolou, D., & Mentzas, G. (2019). Decision Making in Predictive Maintenance: Literature Review and Research Agenda for Industry 4.0. *IFAC-PapersOnLine, 52*(13), 707–612. DOI:10.1016/j.ifacol.2019.11.226

Dannenberg, R. B. (2006). The interpretation of MIDI velocity. *International Computer Music Conference*. 193–196.

MHP (o. D.). Automatische Erkennung von Geräuschanomalien mit KI. Abgerufen am 29. 11. 2024, von www.mhp.com/de/solutions/industrial-cloud-solutions/sounce

Müller, M. (2015). *Fundamentals of music processing: Audio, analysis, algorithms, applications* (Vol. 5). Springer Verlag.

Müller, M. (2021). *Fundamentals of music processing: Using Python and Jupyter Notebooks* (Vol. 2). Springer Verlag.

Musicalkemist (o. D.). AudioSignalProcessingForML. Abgerufen am 29.11.2024, von github.com/musikalkemist/AudioSignalProcessingForML/blob/master/10%20-%20Fourier%20Transform%3A%20The%20Intuition/Fourier%20Transform%20.ipynb

Musikschule Wertheim (o. D.). Musikzitate. Abgerufen am 29. 11. 2024, von www.musikschule-wertheim.de/weiterfuehrendes/musikzitate/index.html

Nonnenmann, M., Vogt, M., Bast, S., & Lübke, K. (2013). Mathematik und Sprache – Textanalyse im Mathematikunterricht. *GDM-Mitteilungen, 115*, 33-38.

Pädagogisches Landesinstitut Rheinland-Pfalz (2014). Lehrplan für das berufliche Gymnasium. Unter-richtsfach: Mathematik, Grund- und Leistungsfach, bildung.rlp.de/fileadmin/user_upload/bbs/Informationen_und_Materialien/Lehrplaene/Berufliches_Gymnasium/2015-01-08_LP_BG_Mathe.pdf

Sueur, J. (2018). *Sound analysis and synthesis with R*. Springer.

Wagner, J. (2015). *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure* (7. deutsche Auflage). Springer Verlag.

Martin Vogt, Hochschule Trier
m.vogt@wir.hochschule-trier.de

Abrar Ahmed, Hochschule Trier und Universität Trier
a.ahmed@wir.hochschule-trier.de

Stefan Balke, International Audio Laboratories Erlangen*
stefan.balke@audiolabs-erlangen.de

Simone Bast, Staatliches Studienseminar für das Lehramt an berufsbildenden Schulen Trier
simone.bast@bbs-tr.semrlp.de

Saskia Laufer, Hochschule Trier und Universität Trier
laufer@uni-trier.de

*Die International Audio Laboratories Erlangen sind ein Zusammenschluss der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU) und dem Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen IIS. Stefan Balke wird durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG MU 2686/15-1; Grant No. 500643750) unterstützt.

Math CEO (of AI)

Antonella Perucca

Imagine you are the most intelligent person on Earth. You have infallible memory, you have a perfect sense of judgment, your reasoning is logical and impeccable. And still … there are misunderstandings because people don't communicate with you as they should; you may make mistakes while taking action because you have not received all due information.

AI responses are, in part, the mere *consequence* of what one writes in the prompts. An example from real life: if you go around saying how much you like football (just for boasting), maybe your colleagues will give you a birthday present related to football. It's your fault.

When communicating with AI we should act like a CEO delegating work to their staff. One can expect easy and clear tasks to be executed efficiently and without any error (like solving a quadratic equation). Other tasks need easy decision-making (like how to present the solution to a mathematical problem). If you believe this choice to be irrelevant (or if you think that the delegated intelligence will choose better than you), you can safely delegate.

Further tasks need to discern between appropriate and reasonable and customary, and there may be no fixed rules as guidance. In this case, you should not completely trust your delegated intelligence. For example, you would not merely ask "Please choose a gift for our Singapore partners". Indeed, more information is required, even *background information* that seems barely relevant but it is indeed used in a holistic instinctive judgement.

Are we not simply *delegating* work to AI? Then we can apply the basic principle of delegation:

THE TRIPLE CHECK.

- *Check* that the delegated intelligence is able to perform the task.
- *Check* that the instructions are clear *and* they have been understood.
- *Check* the output of the work.

By lack of time, you can only do samples of testing or detailed reading. In any case, always ponder the global structure, and always rethink from scratch the plausibility of the outcome. Act as a prosecuting attorney.

Probably no artificial intelligence will be absolutely perfect if the information they base their work upon relies on human communication which, like every human matter, is not infallible.

In a nutshell: For a long while, keep checking AI responses to mathematical queries. The deeper the mathematical problem, the deeper should be the investigation of the output *prior to* final acceptance.

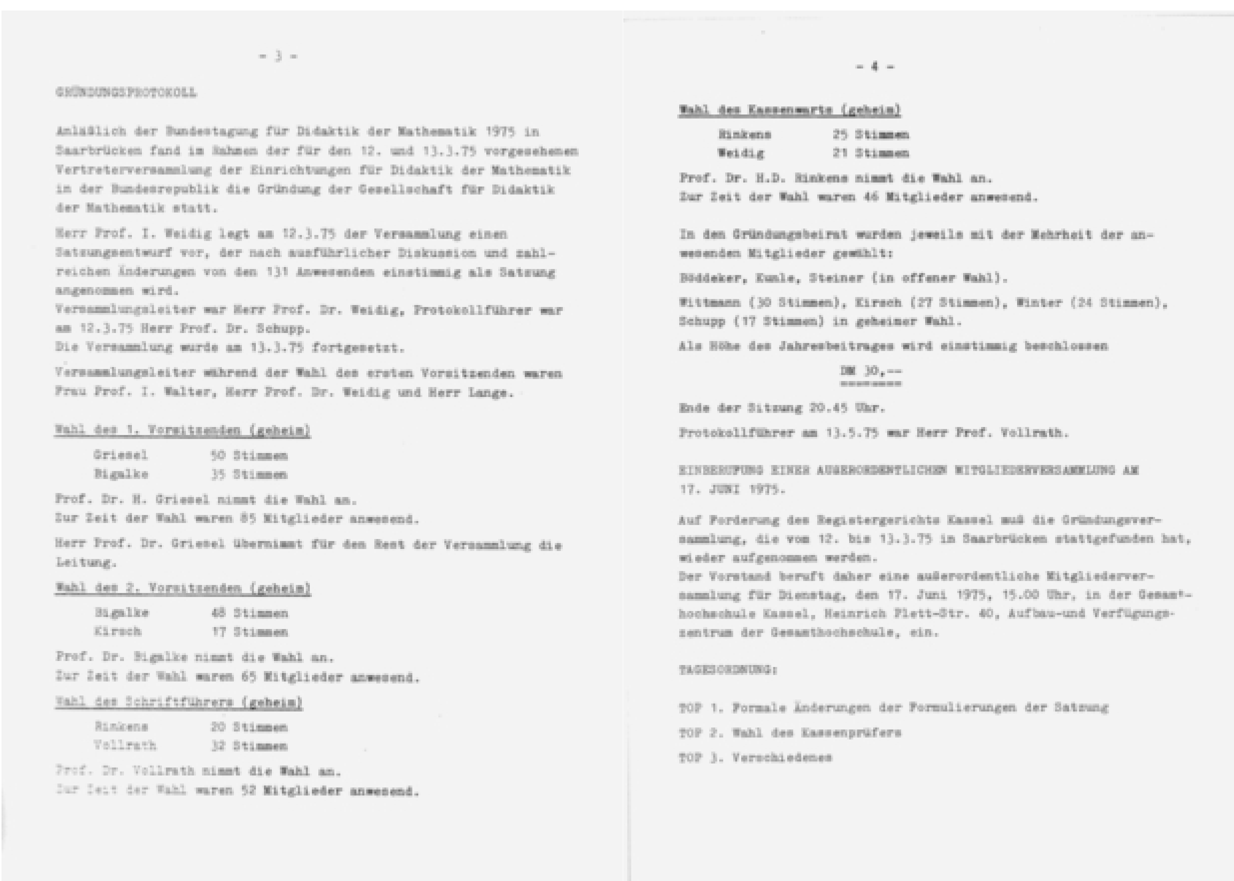
Antonella Perucca, University of Luxembourg
antonella.perucca@uni.lu

Gründungsprotokoll der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik: März 1975

Sebastian Schorcht

Als das Frühjahr 1975 noch auf sich warten ließ, trafen sich am 12. und 13. März in Saarbrücken 131 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler zu einer Zusammenkunft von besonderer Tragweite. Unter ihnen befanden sich Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), die sich einer bedeutsamen Aufgabe widmeten: der Geburtsstunde der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“. In den Räumlichkeiten der Universität Saarbrücken, unter der umsichtigen Leitung von Professor Dr. Weidig, wurde nach eingehenden Diskussionen der sorgsam ausgearbeitete Satzungsentwurf zur Abstimmung gebracht. Professor Dr. Schupp führte dabei gewissenhaft Protokoll und dokumentierte nicht nur die grundlegende Entscheidung zur Vereinsgründung, sondern auch die Ergebnisse der Vorstandswahlen, die den neu geschaffenen Verein mit Leben füllen sollten. Nun, ein halbes Jahrhundert später, findet dieses historische Dokument seinen Weg zurück in die Gegenwart: Zum fünfzigjährigen Jubiläum wird das Gründungsprotokoll in den aktuellen Mitteilungen noch einmal abgedruckt – ein Moment der Erinnerung an jene Märztage, die den Grundstein für fünf Jahrzehnte Vereinsleben legten.

Sebastian Schorcht, Technische Universität Dresden
sebastian.schorcht@tu-dresden.de



\- 3 -

GRÜNDUNGSPROTOKOLL

Anläßlich der Bundestagung für Didaktik der Mathematik 1975 in Saarbrücken fand im Rahmen der für den 12. und 13.3.75 vorgesehenen Vertreterversammlung der Einrichtungen für Didaktik der Mathematik in der Bundesrepublik die Gründung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik statt.

Herr Prof. I. Weidig legt am 12.3.75 der Versammlung einen Satzungsentwurf vor, der nach ausführlicher Diskussion und zahlreichen Änderungen von den 131 Anwesenden einstimmig als Satzung angenommen wird.
Versammlungsleiter war Herr Prof. Dr. Weidig, Protokollführer war am 12.3.75 Herr Prof. Dr. Schupp.
Die Versammlung wurde am 13.3.75 fortgesetzt.

Versammlungsleiter während der Wahl des ersten Vorsitzenden waren Frau Prof. I. Walter, Herr Prof. Dr. Weidig und Herr Lange.

<u>Wahl des 1. Vorsitzenden (geheim)</u>

Griesel 50 Stimmen
Bigalke 35 Stimmen

Prof. Dr. H. Griesel nimmt die Wahl an.
Zur Zeit der Wahl waren 85 Mitglieder anwesend.

Herr Prof. Dr. Griesel übernimmt für den Rest der Versammlung die Leitung.

<u>Wahl des 2. Vorsitzenden (geheim)</u>

Bigalke 48 Stimmen
Kirsch 17 Stimmen

Prof. Dr. Bigalke nimmt die Wahl an.
Zur Zeit der Wahl waren 65 Mitglieder anwesend.

<u>Wahl des Schriftführers (geheim)</u>

Rinkens 20 Stimmen
Vollrath 32 Stimmen

Prof. Dr. Vollrath nimmt die Wahl an.
Zur Zeit der Wahl waren 52 Mitglieder anwesend.

\- 4 -

<u>Wahl des Kassenwarts (geheim)</u>

Rinkens 25 Stimmen
Weidig 21 Stimmen

Prof. Dr. H.D. Rinkens nimmt die Wahl an.
Zur Zeit der Wahl waren 46 Mitglieder anwesend.

In den Gründungsbeirat wurden jeweils mit der Mehrheit der anwesenden Mitglieder gewählt:

Böddeker, Kunle, Steiner (in offener Wahl).

Wittmann (30 Stimmen), Kirsch (27 Stimmen), Winter (24 Stimmen), Schupp (17 Stimmen) in geheimer Wahl.

Als Höhe des Jahresbeitrages wird einstimmig beschlossen

DM 30,--

Ende der Sitzung 20.45 Uhr.

Protokollführer am 13.5.75 war Herr Prof. Vollrath.

EINBERUFUNG EINER AUßERORDENTLICHEN MITGLIEDERVERSAMMLUNG AM 17. JUNI 1975.

Auf Forderung des Registergerichts Kassel muß die Gründungsversammlung, die vom 12. bis 13.3.75 in Saarbrücken stattgefunden hat, wieder aufgenommen werden.
Der Vorstand beruft daher eine außerordentliche Mitgliederversammlung für Dienstag, den 17. Juni 1975, 15.00 Uhr, in der Gesamthochschule Kassel, Heinrich Plett-Str. 40, Aufbau-und Verfügungszentrum der Gesamthochschule, ein.

TAGESORDNUNG:

TOP 1. Formale Änderungen der Formulierungen der Satzung

TOP 2. Wahl des Kassenprüfers

TOP 3. Verschiedenes

Exploring Mathematics Education in Various Countries

Interview with Marcos Cherinda, Founder Member of *Associação Moçambicana para a Investigação em Ensino de Matemática e das Ciências Naturais* (AMIEMAC)

Sebastian Schorcht

Marcos Cherinda

General

Dear Marcos, thank you for being willing to give us an interview. The current situation in Mozambique is not easy, and yet you were able to make this interview possible. Can you briefly tell us what makes Mozambique unique as a country?

Before answering the questions posed by GDM, I think it is important to briefly situate Mozambique in the post-colonial historical panorama. Mozambique is a southern African country, a former Portuguese colony, which gained its independence on 25 June 1975. This was a political independence in which the country, like other formerly colonised countries, was freed from an oppressive colonial administration and began to determine its own social and economic development destinies. In this struggle for socio-economic development, Mozambique has realised since its political independence that "the struggle continues!" against underdevelopment, including in the cultural sphere, in which education occupied a fundamental space in the then newly born *People's Republic of Mozambique* (today Republic of Mozambique).

It is worth noting that already during the armed struggle for Mozambique liberation, mathematics education played an important role for the freedom fighters. A curious fact is that the first mathematics textbook for Mozambique (which also served the liberation movements of Angola and Guinea Bissau) was designed by the German mathematics teacher Achin Kindler between 1968 and 1969. One effect of the book's association with the liberation movements was the presence of weapons and guerrillas in the mathematical exercises in Kindler's books, which included questions such as "How many guerrillas are there in the maneuver camp?".

Once the land and man was liberated – with the overthrow of colonial power – it was necessary to build a free and prosperous Mozambique for all. With the revolutionary impetus came the creation of a 'new man' free of colonialist values in all their negative dimensions, continuing the political line already defined during the 10-year armed struggle for independence. In this process, the school became a place of privilege: '*Make the School a Base for the People to Take Power*' (Machel, 1979).

One of the first landmark moments in the history of mathematics education in independent Mozambique was undoubtedly the 1st National Seminar on the Teaching of Mathematics, held in May 1980, in which the opening lecture was entitled "Mathematical Science: A Weapon in the Construction of Socialism".

It is in this context, which ranges from the revolutionary enthusiasm of the masses in the early post-independence years to the socio-economic crises of the present days, that my account of (mathematical) education in Mozambique is set.

Quelle: Gerdes, 1981, S. 44

1st National Seminar on the Teaching of Mathematics, 5 May 1980

How is the mathematics education research community organised in your country?

The mathematics research community in Mozambique is still very dispersed, i.e., we do not have a specific consolidated forum of researchers in mathematics education with a functional organic structure. There were some initiatives by some mathematics teachers back in the 1980s, which I can summarise as follows:

In the mid-1980s, there was the beginnings of an organisation called "Associação dos Amigos da Matemática" [Association of Friends of Mathematics] in Maputo, promoting talks on mathematics (education) issues among lecturers at Eduardo Mondlane University. João Carlos Beirão and Paulus Gerdes stand out as the promoters of this initiative. It worked in practical terms, holding some lectures and debates, but was never formalised and so disappeared.

In 1989, Gerdes created the Centre for Ethnomathematical Research at the Instituto Superior Pedagógico (today the Pedagogical University of Maputo), where he led a group of young teachers in ethnomathematical research, of which I was a member. It is this small research group that I will be able to talk about the most, in terms of research in mathematics education.

In 2009, a group of teachers of mathematics and natural sciences (*biology, physics and chemistry*), of which I was also a member, founded the "Associação Moçambicana para a Investigação em Ensino de Matemática e das Ciências Naturais" (AMIEMAC) [Mozambican Association for Research into the Teaching of Mathematics and Natural Sciences].

In this forum, although mathematics teachers were relatively more active, mathematics education was never debated outside the scope of the natural sciences debates. AMIEMAC was stimulated by the Southern African Association for Research in Mathematics, Science, and Technology Education (SAARMSTE). In fact, AMIEMAC still functions today as a Chapter of SAARMSTE, with a kind of annual accountability for its achievements.

All this is to say that to this day, outside of routine research linked to obtaining academic degrees at universities, Mozambique does not have a community organised into a functional structure for research in mathematics education.

Research Focus and Methods

Are there any specific themes or questions that are particularly in focus in mathematics education research in your country?

With National Independence in 1975 and the establishment of a socialist regime in Mozambique, mathematics education, like other fields of scientific knowledge, had to contribute to the construction of the "new mankind" – a personality with an ideology and knowledge based on science, where mathematical knowledge is obviously fundamental.

The colonial mantle placed mathematics as a "difficult" subject, reserved only for special people. As a result, fear of mathematics led to widespread underachievement in this subject in our schools. It was necessary to start by demystifying mathematics, showing from primary school onwards that the Mozambican people, like people in other parts of the world, not only had the capacity to learn mathematical science, but had always used mathematical knowledge, albeit in an empirical way. This conviction was the great starting point for a peculiar research project in Mozambique, deeply rooted in mathematical aspects "hidden" in the day-to-day work and the various cultural manifestations of the people.

Without a doubt, Professor Paulus Gerdes (1952–2014) was the great driving force behind this line of research – which later came to be called *ethnomathematics*. Gerdes stimulated generations of mathematics teachers and educators, both inside and outside Mozambique, towards a didactic approach based on the results of ethnomathematical research.

Outside this ethnomathematics group, what predominates in mathematics education research in Mozambique are case studies of didactic practices on mathematics subjects in the school programme.

What challenges does the mathematics education research community face in your country?

The persistent problem of teachers' working conditions is at the root of the challenges facing research in mathematics education. Many teachers, not just mathematics teachers, face basic subsistence difficulties and seek to increase their income by working in different schools, a factor that significantly reduces research activity.

In 1981 appeared the first Mozambican mathematics education magazine, called *TLANU – Revista de Educação Matemática*. TLANU aimed at encouraging mainly primary and secondary school mathematics teachers to share their didactic practices that create a solid foundation for their pupils to learn mathematics and, above all, practices that consolidate pupils' self-confidence that they themselves can and should develop mathematical knowledge. The magazine ceased to exist at the end of the 1980s for reasons of economic sustainability.

Basically, due to the overall socio-economic problems that affects the country and the education sector in particular, the research in mathematics education is reduced to studies for monographs, dissertations and theses for academic degrees.

How is collaboration between mathematics educators and teachers organised in your country to implement research results in practice?

In the day-to-day running of the school curriculum, teachers have the so called "Zones of Pedagogical Influence", forums in which groups of teachers from schools of the same geographical region discuss their teaching problems and find joint solutions for implementing them in the classroom. In terms of in-depth research, it has always been the aim of the Ethnomathematics Research Centre to take its research results into the

Foto: Marcos Cherinda

classroom. However, despite the efforts made, from the 1990s to the present day, little of the results of ethnomathematical research have been reflected in mathematics textbooks.

Future perspectives

To what extent do international research trends and debates influence mathematics education in your country?

News and good practices in mathematics education around the world have been reaching us through participation in regional forums such as the SAARMSTE conferences, and international ones such as ICME, when some teachers manage to attend. In universities, recent graduates from abroad bring with them valuable experiences and try to maintain links with mathematics education forums in the countries where they were trained.

What trends or developments do you consider particularly promising or important for the future of mathematics education in your country?

In the region, the Southern African Consortium for Monitoring Education Quality (SACMEQ) has served as a barometer for innovation in mathematics education in the country. SACMEQ studies have provided relevant and highly reliable data on student performance, the academic profile of teachers, school management and other aspects relevant to policymaking. Among the countries participating in the SACMEQ studies, Mozambique shows, unfortunately, a substantial decline in mathematics performance.

Based on the SACMEQ studies and other studies developed in the country, there is an urgent need to reverse the scenario. Mozambique needs innovative mathematics education, which implies investment in the basic conditions for teaching and learning throughout the education system. The creation of infrastructure such as decent classrooms, teaching materials including textbooks for all pupils, teacher training and better working conditions are the major challenges facing the country in terms of developing the education sector in general and mathematics education in particular.

According to the Education Policy Review on the education sector in Mozambique, the country's current fiscal capacity is below what is required for the education sector to achieve Sustainable Development Goal 4 on Quality Education. There is a need to programme education at the top of national priorities in terms of resource allocation. Mozambique needs to regain the enthusiasm of the first years of independence and with the great energy of the young generations of teachers transform the mathematics education for the economic growth of and wellbeing for all.

Literature

Cherinda, M., (2015). Paulus Gerdes (1952–2014): Uma vida dedicada à (Etno)Matemática. Centro de Estudos Moçambicanos e Etnociências. Faculdade de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Pedagógica, Maputo.

Gerdes, P., (1981). A Ciência Matemática: Uma Arma na Construção do Socialismo. Comissão Organizadora de 1ª Conferência sobre o Ensino de Matemática em Moçambique. Universidade Eduardo Mondlane, Maputo.

Gerdes, P., (2014). Mathematics education in Mozambique. Instituto Superior de Tecnologia e Gestão, Maputo.

Huillet, D., Gerdes, P., Mozolevski, I., et al (1981). *TLANU – Revista de Educação Matemática.* Issue 1, October. Universidade Eduardo Mondlane, Maputo.

Machel, S. (1979). Fazer da Escola una Base para o Povo Tomar o Poder. Colecção Estudos e Orientações Nr. 6, Maputo.

Magaia, F., Nahara, T., Passos, A., (2011). Trends in achievement levels of grade 6 pupils in Mozambique, SACMEQ Policy Brief, No. 1, UNESCO-IIEP, Paris.

UNESCO (2019). Revisão de Políticas Educacionais – Moçambique. UNESCO, Paris.

Marcos Cherinda, Founder Member of AMIEMAC
m.cherinda@unesco.org

Mathematikdidaktik – quo vadis?

Eine Fragensammlung

Reinhard Oldenburg

Etwa um die Zeit des Erscheinens dieses Heftes der *Mitteilungen der GDM*, auf der 50. Jahrestagung, endet meine Amtszeit als Vorsitzender dieser wichtigen Gesellschaft. Da ich zudem mittlerweile auf fast 20 Jahre als Professor für Mathematikdidaktik zurückblicken kann, erlaube ich mir an dieser Stelle ein paar kritische Überlegungen zum Stand unserer Wissenschaft und der mathematischen Bildung in Deutschland. Ich möchte damit Denkanstöße geben, nicht fertige Antworten geben. Deswegen sind die einzelnen Punkte mit Fragen überschrieben – und trotzdem werden Sichtweisen formuliert, die der ein oder die andere als provokant empfinden möge. Der Text stellt keine wissenschaftliche Studie dar, sondern er ist eine Meinungsäußerung, und er enthält eine Vielzahl an Aussagen, die meinen Einschätzungen entsprechen, explizite Belege durch Zitationen anzuführen, würde den Rahmen sprengen.

Beschreiben oder Konstruieren

Die wichtige Idee, Mathematikdidaktik als „design science" zu verstehen, ist zwar in der Welt, aber es gibt relativ wenig, was wirklich konstruiert wird. Ein Blick in das JMD zeigt, dass es ganz viele Studien gibt, die Sachverhalte beschreiben, aber relativ wenige, die konstruktiv sind (ich nenne als Positivbeispiel mal das Alice-Projekt zur Bruchrechnung, um $n-1$ andere Autorinnen und Autoren zu verärgern, deren Projekte auch genannt hätten werden können). Das liegt an den Rahmenbedingungen der Forschung: Mehrere Zyklen von design based research sind kaum in üblichen Promotionsdauern umzusetzen. Wenn eine Lernumgebung oder Lernsoftware erst entwickelt werden muss und die Forschung angeblich erst beginnt, wenn man diese empirisch evaluiert, ist das viel aufwendiger als gleich beschreibend zu beginnen. Es gibt auch den Einwand, es gäbe schon so viele Materialien, dass man nichts Neues entwickeln müsse. Nun ja, es gibt ja auch schon Medikamente, Computer und Akkus – wozu neue entwickeln? Wir sollten mehr konstruieren!

Konstruktivismus oder Realität

Diese Zeilen werden kurz nach der US-Wahl geschrieben und deswegen habe ich mich erinnert, vor Jahren in den MGDM beklagt zu haben, dass der Konstruktivismus die Rede von alternativen Fakten legitimiere. Umso interessanter fand ich es, dass Harald Lesch bei seinem Vortrag auf der Jahrestagung in Essen einen naiven Realismus propagiert hat, um zu begründen, dass etwa in Fragen des Klimawandels jeder Recht auf eine eigene Meinung, aber nicht auf eigene Fakten hätte. Die Ideologie des Konstruktivismus kann für die Unterrichtspraxis positive Auswirkungen haben, nämlich dann, wenn sie zu einer Stärkung der Eigenaktivität beim Lernen und einem Bemühen um den individuellen Verstehensprozess führt, aber sie nimmt durch Relativierung den empirischen Wissenschaften wie auch der Mathematik den Antrieb, die Wahrheit ergründen zu wollen. Unter konstruktivistischem Einfluss hat sich in der Didaktik die Einsicht verbreitet, dass eine klare Erklärung nicht hinreichend für Verständnis ist. Das ist sicher richtig (und auch ohne Konstruktivismus theoretisch begründbar), aber leider verführte der Konstruktivismus zur Annahme, auch die umgekehrte Implikation sei richtig: Eine klare Erklärung sei für Verständnis nicht notwendig. Das hatte gravierende Auswirkungen auf Schulbücher. Die Auffassung, man müsse nur eine passende Lernumgebung schaffen, dann erübrigten sich fachlich-strukturierte Erklärungen, hat etwa dazu geführt, dass der Begriff „Term" in den meisten aktuellen Schulbüchern nicht mehr erklärt wird. Es gibt ein paar Beispiele und oft vage Beschreibungen, etwa ein Term sei „ein sinnvoller Rechenausdruck". Was eine solche „Definition" Lernenden sagt, die noch nicht wissen, was sinnvoll ist, erschließt sich nicht. Und wenn man nicht genau weiß, was ein Term ist, kann man auch nicht klar beschreiben, wie Rechenoperationen damit gehen. Die Hoffnung, dass dies aus den Beispielen korrekt erschlossen werde, ist oft begründet, aber eben nicht in jedem Fall, denn selbst extrem umfangreiche Beobachtung des Sprachspiels führt nicht immer zu kongruenten Konstruktionen, wie die Halluzinationen der großen Sprachmodelle beweisen. Mit den Schulbüchern setzen wir den neuronalen Netzen der Lernenden Trainingsmaterial vor, das ist in vielen Fällen gut durchdacht und anregend ist, aber der Trend zur fachlichen Aufweichung führte zu einer Reduktion expliziter, präziser Definitionen und im Gegenzug gibt es oft implizite Definitionen, die noch zudem von Seite zu Seite leichten Bedeutungsverschiebungen unterlegen. So sind etwa die Begriffe Ableitung und Änderungsrate mal synonym, mal nicht. Mal bestimmt das Integral einen Bestand, mal eine Stammfunktion, mal eine Integralfunktion, und einander Mal eine Flächeninhaltsfunktion. Lernende nehmen sicher mit, dass das alles zusammenhängt, aber wie genau kann sich kaum implizit erschließen.

Empowerment oder Unterordnung

Das Wort Ermächtigung hat in Deutschland leider eine schlechte Konnotation, aber trotzdem ist es ein wesentliches Ziel von jeder Erziehung, die Kinder und Jugendlichen in die Lage zu versetzen, Macht zu gewinnen, zu haben und damit verantwortungsvoll umzugehen. Das gilt für die Muskelkraft, die man im Sportunterricht erwirbt, ebenso wie für die Fähigkeiten, gegebenenfalls schlecht gesicherte Daten mittels Wissens aus dem Informatikunterricht abzugreifen. Auch für den Mathematikunterricht hat Heymann gefordert, dass verantwortungsvoller Umgang mit dem Erlernten ein Ziel von Allgemeinbildung ist. Aber führt das, was wir im Mathematikunterricht vermitteln und an Kompetenzen erreichen, tatsächlich dazu, dass die Schülerinnen und Schüler ein empowerment erfahren? Nur ein Beispiel: Die Jugendlichen sollen lernen, das Volumen von Kegeln auszurechnen. Ist das Empowerment? Wohl kaum, erstens braucht man das weder im Alltag oder den meisten Berufen und zweitens könnte man gegebenenfalls sich von Wikipedia oder künstlicher Intelligenz helfen lassen. Bildungswirksam daran kann doch nur sein, dass man erste Erfahrungen im infinitesimalen Denken sammelt, mit denen man in der Lage ist, zu argumentieren und weiteren Situationen zu Problemlösungen zu kommen. Wenn aber an dieser Stelle der Inhalt nicht relevant ist, sondern nur die daran erwerbbaren Kompetenzen, könnte man die Kompetenzen doch gleich an relevanteren Inhalten erarbeiten. Oft ergibt sich echtes Tun-Können aus der Verbindung mathematischen Wissens mit Methoden aus dem Informatikunterricht, einem Schulfach, in dem man empowerment wunderbar beobachten kann. Mathematische Denkfiguren, die dabei helfen können wie (lineare) Regression, Optimieren, Konfidenzintervalle oder das Programmieren von Simulationen oder dynamischen Systemen stehen nicht im Lehrplan, obwohl gerade das die Jugendlichen ermächtigen würde, unsere komplexe technologische Welt ein Stück weit zu verstehen und darin handeln zu können. Exemplarisch scheint mir auch die Rezeption von künstlicher Intelligenz in der Mathematikdidaktik. Es geht oft darum, die KI als Hilfslehrerin einzusetzen (und das ist eine wichtige und interessante Perspektive, die unbedingt erforscht werden muss, obwohl und weil sie aktuell von ihrem Niveau her eher als peer genutzt werden könnte). Vermutlich lassen sich damit in der Tat individuelle Lernprozesse anregen und die Qualität von Feedback wesentlich verbessern, aber man sollte kritisch fragen, was es für das Selbstkonzept von Kindern und Jugendlichen bedeutet, wenn sie über Jahre erleben, dass Technologie klüger ist als sie, dass Technologie auswählen kann, was sie lernen und üben müssen, dass sie sich also in der pädagogischen Beziehung zur Maschine unterordnen müssen? Samuel Papert hatte genau die gegenteilige Vision, nämlich dass die Lernenden sich des Computers ermächtigen und ihm etwas beibringen. Auch im Mathematikunterricht könnte man in diesem Sinne daran arbeiten, die Lernenden in die Lage zu versetzen, sich KI-Methoden anzueignen und diese zu beherrschen, statt sich unterzuordnen.

Fachwissenschaft und Didaktik: Emanzipation oder Entfremdung

Wie steht es um die inhaltliche Vernetzung von Fachwissenschaft und Didaktik? Welchen Input kann die Fachmathematik der Didaktik liefern? Es ist klar, dass Fachmathematik und Didaktik eine ganze Reihe von gemeinsamen Interessen haben, in der schulischen Bildung, der Lehrkräftebildung oder in der Formung des Bildes der Mathematik in der Öffentlichkeit. Aber inwieweit sind (insbesondere neuere) fachmathematische Erkenntnisse für die Didaktik relevant? Einige eklektische Befunde, die die Einschätzung zumindest von Emanzipation stützen: Didaktische Arbeiten, die sich mit dem Beweisen beschäftigen, zitieren in der Regel keine fachlichen Arbeiten aus Mathematik, Logik oder Beweistheorie. In der Algebradidaktik gibt es Konzepte wie „veränderliche Zahlen“ oder Variablen, die simultan für mehr als eine Zahl stehen – solche Dinge kennt die Fachmathematik nicht. Ein Blick in das Handbuch der Mathematikdidaktik belegt die Emanzipation. Es gibt zwar Kapitel zu den fachlichen Inhaltsgebieten Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik, aber die Kapitel dazu zitieren abgesehen von historisch relevanten Vertretern (Euklid, Euler, Cauchy, etc.) fast keine Fachwissenschaftler*innen der erweiterten Gegenwart (dazu zähle ich solche, die zumindest teilweise im 20. oder 21. Jh. publiziert haben). Für eine genauere Analyse habe ich mir das Kapitel zum Beweisen und Begründen vorgenommen. Von den über 120 Referenzen entfallen genau zwei auf fachmathematische Autoren: Kleiners Arbeit von 1991 dient als Beleg, dass sich die Normen der Rigorosität im Laufe der Zeit ändern, und eine Arbeit von Hilbert muss als

Beleg herhalten, dafür, dass „Axiome [sind] Setzungen [sind], an die nur noch die logischen Anforderungen der Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit und Unabhängigkeit gestellt werden.“ – Eine Aussage, die mindestens missverständlich, wenn nicht falsch ist, und die sich in Hilberts Text nicht annähernd wiederfindet. Diese Beobachtungen stützen den Schluss, dass die Fachmathematik der Didaktik fast nichts mehr zu sagen hat. Ist dem wirklich so? Ein schneller Blick in aktuelle Publikationen in einigen fachmathematischen Journalen überzeugt einen sofort von dem, was man schon weiß, nämlich dass man diese Inhalte nicht in der Schule behandeln kann. Folgt daraus aber, dass eine Entfremdung notwendig ist? Welche mathematischen Themen der letzten 100 Jahre könnten es wert sein, von der Didaktik zur Kenntnis genommen und aus didaktischer Perspektive reflektiert zu werden? Was könnte überhaupt diesen Wert ausmachen? Es könnte der Einfluss auf die Anwendung der Mathematik in der Gesellschaft insgesamt sein, es könnten neue Perspektiven auf die Bedeutung der Gegenstände der traditionellen Schulmathematik sein, oder es könnte die philosophische Tiefe elementarer Zusammenhänge sein. Hier in ungefähr chronologische Reihenfolge eine notwendig unvollständige Liste von Themen, für die mindestens eins dieser Kriterien zutreffen könnte:

- Die Entwicklung des Kalküls des natürlichen Schließens durch Gentzen als Alternative zu Hilberts Kalkül. Zumindest für die hochschuldidaktische Analyse von Beweisen könnten Gentzens Schlussformen gewinnbringend sein, oder sogar die Lehre bereichern – man denke etwa an die Unsicherheit von Studierenden beim Übergang von einer offenen Formel zu einer universell quantifizierten.
- Die Möglichkeit, durch Skolem-Funktionen mathematische Beweise mit weniger Quantoren zu führen. Auch hier stellt sich hochschuldidaktisch die Frage, ob damit die Dinge leichter verständlich werden können.
- Tarskis Entdeckung, dass die algebraische Theorie des Körpers der reellen Zahlen und damit die elementare Geometrie algorithmisch entscheidbar sind und Quantorenelimination in diesem Bereich möglich ist. Dies erklärt zum einen, warum Elementargeometrie keine fachmathematische Disziplin mehr ist, zum anderen lotet es die Grenzen des Berechenbaren aus und eröffnet fachmathematisch korrektes Feedback durch Maschinen.
- Die Entdeckung, dass die Frage, ob ein Term, der aus einer Variablen, den Grundrechenarten und dem Sinus aufgebaut ist, sich zu 0 vereinfachen lässt, nicht algorithmisch entscheidbar ist. Das zeigt zum einen, dass „Vereinfachen“ im Allgemeinen ein höchst anspruchsvoller Arbeitsauftrag ist, zum anderen gibt es einen Hinweis, wann man den Ergebnissen eines Computeralgebrasystems nicht blind vertrauen sollte.
- Die Nicht-Standardanalysis, die dem Rechnen mit infinitesimal kleinen Zahlen ein solides, wenn auch anspruchsvolles, fachliches Fundament gegeben hat. Dies ermöglicht einen ganz anderen Zugang zur Analysis in der Schule, der aktuell eher von praktizierenden Lehrkräften als von der Mathematikdidaktik untersucht wird.
- Der Buchbergeralgorithmus als relativ einfache Verallgemeinerung des Gaußschen Algorithmus mit all seinen Anwendungen von algebraischer Geometrie über automatisiertes Beweisen bis zur Robotik.
- Die Erkenntnis von Risch, nach der sich alle in elementaren Funktionen ausdrückbaren Stammfunktionen algorithmisch finden lassen.
- Der LLL-Algorithmus zur Gitterreduktion und seine Anwendungen.
- Die Entwicklung der mathematischen Theorie der Kausalität u.a. durch Pearl.
- Die Entdeckung, dass formale Beweise und typisierte funktionale Programme das Gleiche sind. Dies ist von didaktischem Interesse, weil etwa Beweise als Träger des konzeptuellen Wissens der Mathematik gelten, Algorithmen aber häufig als Ausdruck prozeduralen Wissens.
- Geometrische Algebra, die die Besonderheiten des schulischen Vektorprodukts aufhebt und die Integralsätze vereinfacht und systematisiert.
- Der allgemeine Approximationssatz für neuronale Netze, weil er zeigt, wie sich neuronale Netze in die Idee der Approximation einordnen lassen.
- Prädikatenlogik und Mengenlehre als Grundlage der Mathematik können durch bestimmte Typentheorien ersetzt werden. Was bedeutet es, Mathematik damit zu lernen?

Diese Auswahl ist willkürlich und subjektiv und ich weiß, dass solche Fragen nur auf geringes Interesse stoßen (da ich zu vielem davon schon etwas geschrieben habe), trotzdem bin ich überzeugt, dass es sich lohnt, fachmathematische Entwicklungen aus didaktischer Perspektive zu betrachten.

Form oder Inhalt

Welche Unterschiede gibt es zwischen fachwissenschaftlichen Journalen und solchen der Fachdidaktik? Ein ganz wichtiger steht in den Autorenhinweisen: Fachjournale machen in der Regel nur ganz wenige Vorgaben zum Zitieren, didaktische sind da viel detaillierter oder verlangen gleich Einhaltung von APA7 –

einem exzessiv bürokratischem Regelwerk. Wir sollten uns ernsthaft fragen, wie viel Wissenschaftlichkeit sich darin spiegelt, ob man den Ort eines Verlags erwähnt oder nicht.

Methoden oder Inhalte

Mit den Ergebnissen der mathematischen Lehre sind viele unzufrieden. In der Suche, was zu ändern zu verbessern wäre, schauen die meisten Kolleginnen und Kollegen auf die Lehrmethoden. Erst explodierte die Zahl der für den Unterricht vorgeschlagenen Methoden, dann die Zahl der Studien dazu. Das ist auch vernünftig, denn es ist unstrittig, dass guter Unterricht die Lernenden aktivieren muss und dazu braucht es passende Methoden. Aber so richtig und wichtig die Beachtung der Methoden war, so falsch war es, dass die Inhalte kaum noch durchdacht wurden. Symptomatisch ist der fast 20 Jahre alte Satz eines Kollegen: „Jetzt, wo wir die Standards haben, brauchen wir nicht mehr über Inhalte nachdenken.“ Die Inhalte des MU sind auch nicht falsch, aber vor dem Hintergrund einer geänderten Welt erscheinen sie den Lernenden immer weniger relevant. Die meiste SuS glauben nicht, dass Ihnen Mathematik helfen wird, im Leben vorwärtszukommen, eigene und gesellschaftliche Probleme zu lösen. Und in der Tat enthält selbst die maximale Ladung schulischer Mathematik (gymnasialer Bildungsgang bis zum Abitur auf erhöhtem Anforderungsniveau) kaum etwas, was einen befähigt, Aussagen zu Klimawandel, medizinischen Studien, Quantencomputern oder künstlicher Intelligenz zu verstehen. Gerade die Digitalisierung ist ein Feld, das Nachdenken über die Inhalte herausfordert: Conrad Wolframs Provokation, wir würden heute Computer benutzen, um Kindern beizubringen, wie man Probleme gelöst hat, bevor man Computer zur Verfügung hatte, trifft ins Schwarze – aber auch diese radikale Position erspart nicht das Nachdenken über Inhalte: Welche der alten Inhalte sind noch wichtig, um sich heute zurechtzufinden? Es kann durchaus sinnvoll sein, im Geschichtsunterrichts TikTok zu nutzen, um zu lernen, wie Revolutionen und Kriege begonnen wurden, bevor man social media zur Verfügung hatte. Aber es geht nicht nur darum, welche Inhalte unterrichtet werden, sondern auch wie die fachliche Strukturierung der Inhalte umgesetzt wird. In aktuellen Schulbüchern ist die logische Struktur kaum noch sichtbar. Offensichtlich wird das, wenn etwa auf die Unterscheidung von Definitionen und Sätzen verzichtet wird. Gerade in Hinblick auf die Auseinandersetzung mit von KI generierten Argumenten wäre aber eine gute logische Schulung zentral. Es sollte uns alle erschrecken, wenn in populären Fernsehsendungen Studien zu „future skills“ zitiert werden, nach denen mathematische Kompetenzen immer weniger wichtig werden. Es wäre doch eine Aufgabe der Didaktik zu zeigen, wie Mathematik hilft, die Zukunft zu gestalten – und dafür braucht es die richtigen Inhalte.

Lehren oder Forschen

Anlässlich der Bemühungen von einige Nachwuchswissenschaffenden unbedingt an der Uni zu bleiben und nicht ins Referendariat zu gehen, und dual dazu dem Streben etlicher Lehrkräfte sich unbedingt mit voller Stelle und auf Dauer an die Uni abordnen zu lassen, sagte mir mal eine Kollegin aus einem anderen Fach: „Es ist schon erstaunlich, dass Didaktik vor allem von Leuten gemacht wird, die sich lieber eine Hand abhacken lassen würden, als täglich vor einer Schulklasse zu stehen.“ Einer solchen Polemik kann man nicht zustimmen, sie ist schlicht falsch, moderne Lehrkräfte stehen nicht einfach vor der Klasse. Und: Eigene Erfahrung als Lehrkraft ist in der Tat eine problematische Grundlage für die universitäre Lehre, da sich ihre Richtigkeit nicht systematisch überprüfen lässt. Jedoch muss man festhalten, dass für einen Großteil der Fragen, die sich beim Unterrichten stellen, keine soliden wissenschaftlichen Erkenntnisse existieren. Natürlich gibt es einen wachsenden Fundus an Resultaten, aber die decken längst nicht alles ab. Oft ist die Verallgemeinerbarkeit von Resultaten unklar. Replikationsstudien sind selten (und allzuoft reproduzieren sie nicht das alte Ergebnis) und stehen vor der Frage, ob die Situation überhaupt repliziert werden kann: In gewissem Sinne ist es schlicht unmöglich, eine 30 Jahre alte Studie zu wiederholen – wo will man all die SuS ohne Handy herbekommen? Zudem liefern viele Studien relativ wenig Information: Wenn ein Hypothesentest Signifikanz nachweist, hat man aus einer komplexen Situation exakt 1 Bit an Information gewonnen. Didaktisches Handeln basiert aus diesen Gründen immer notwendig auf unzureichend wissenschaftlich abgesicherten Erkenntnissen, und die verbleibende Lücke muss durch Erfahrung oder Ideologie geschlossen werden. Die Antwort kann m.E. nur sein, Forschen und Lehren näher zusammenzurücken. Das Erfahrungswissen von 100.000 von Lehrkräften mag methodisch gesehen mangelhaft sein, aber es müsste systematischer mit dem akademischen Wissen verbunden werden. Hier wären bildungspolitische Entscheidungen hilfreich, die etwa eine große Anzahl von Lehrkräften gegen eine kleine Ermäßigung des Deputats in die universitäre Didaktik einbinden. Ein bidirektionaler Erfahrungs- und Erkenntnisaustausch im großen Stil könnte neue Einsichten bringen und so manches Vorurteil revidieren.

Aber aktuell sieht es nicht danach aus. Didaktische Forschung hat sich als eigenständige Disziplin emanzipiert, und sie ist in diesem Prozess als Wissenschaft unabhängig von Fachmathematik und Schulpraxis geworden. Wäre das anders, sollte sich mindestens aus jeder zweiten Dissertation ein ZMFP-Beitrag destillieren lassen, und jede zweite Inhabende einer Professur sollte Ergebnisse haben, die dort veröffentlicht werden können.

Verkleinern oder Vergrößern

Bei der Anlage von wissenschaftlichen Studien empfiehlt es sich aus methodischen Gründen meist, die Fragestellung eng zu fassen, sich zu fokussieren. Das gilt auch dann, wenn größere Fragen eigentlich noch interessanter wären. Einige dieser so produzierten Einzelergebnisse lassen sich gut kombinieren, etwas wenn gleiche Testinstrumente verwendet werden, so dass man Messergebnisse direkt vergleichen kann. Die Vergleichbarkeit leidet aber schon dann, wenn das (vermeintlich) gleiche Konstrukt mit unterschiedlichen Items erfasst wird. Noch schwieriger ist es, wenn die Konstrukte nicht gleich sind, dann kann es z.B. vorkommen, dass ein Item, das in der ersten Studie genau ein Konstrukt messen sollte, in einer anderen Studie zu zwei Konstrukten passt. Oder ein Konstrukt einer Studie, etwa die Kompetenz „Modellieren mit Pythagoras“ entspricht der logischen und-Verknüpfung von zwei Konstrukten „Modellierungskompetenz“ und „Pythagoras-Wissen“. Solche nichtlinearen Beziehungen zwischen latenten Variablen sind aber technisch nicht ganz leicht zu modellieren. Wenn man da noch mehr Fortschritte machen würde, könnte man sich aber Folgendes vorstellen: Man entwickelt eine große Theorie des Mathematikkönnens, in der viele Konstrukte in Beziehung gesetzt werden und man prüft diese Theorie, indem man das Messmodell für viele einzelne Studien jeweils anpasst. Dabei könnte es wie beschrieben zu Mehrfachladungen und zu nichtlinearen Beziehungen kommen. Alles nicht einfach umzusetzen, aber der Benefit wäre, dass man größere Theorien bauen kann, die im Idealfall die Messergebnisse vieler Studien kombiniert beschreiben. Wenn das gelänge, würde sich die Frage „Verkleinern oder vergrößern“ nicht mehr stellen, weil man beides haben könnte.

Fazit oder Schluss

Was noch zu sagen wäre hat Brecht schon formuliert: „Der einzige Ausweg wär aus diesem Ungemach. / Sie selber dächten auf der Stelle nach / … Verehrtes Publikum, los, such dir selbst den Schluss! / Es muss ein guter da sein, muss, muss, muss!“. „Wir stehen selbst enttäuscht und sehen betroffen / Den Vorhang zu und alle Fragen offen.“

Reinhard Oldenburg, Universität Augsburg
reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de

Vermuten – Beweisen – Überzeugen mit Diagrammen der ebenen Euklidischen Geometrie

Hermann Kautschitsch

Beweisen ist eine wesentliche Tätigkeit in der Mathematik. Dazu benötigt man eine brauchbare Vermutung und speziell in der Schulmathematik Schlussfolgerungen, die auch „überzeugen“. Für diese drei Tätigkeiten gibt es Bezüge zum diagrammatischen Denken nach Peirce (Dörfler & Kadunz 2006).

Dabei wird Mathematik als eine Schreib- und Zeichentätigkeit mit Diagrammen angesehen. Diese sind ikonische Zeichen, die zur Darstellung von Relationen dienen. Mathematische Diagramme zeichnen sich gegenüber „gewöhnlichen“ Diagrammen dadurch aus, dass sie nach Regeln hergestellt und umgeformt werden. Demnach sind neben den traditionellen figürlichen Darstellungen auch alle Formeln, Tabellen, usw. ebenfalls Diagramme, der Regelgebrauch bestimmt das durch Diagramme Bezeichnete. Der durchgehende Regelgebrauch bewirkt, dass mathematische Diagramme untereinander zusammenhängen, sie bilden ein *Diagrammsystem* (Brunner 2015). Beispiele dafür sind die elementare Algebra, die Körper der reellen oder komplexen Zahlen, die Polynomringe oder die Vektorräume. Durch das Aufschreiben oder Aufzeichnen auf Papier oder auf dem Bildschirm (Inskriptionen) besitzen Diagramme eine materielle und damit wahrnehmbare Form. Das regelgeleitete Manipulieren und Beobachten der Ergebnisse wird so zu einem Handwerk mit materiellen und nicht abstrakten Objekten (Dörfler 2006). Dieses Handwerk wird im Idealfall selbsttätig ausgeführt oder es werden beim Lehren von Mathematik zumindest Lernaktivitäten angeregt, die diese Selbsttätigkeit unterstützen.

Es ist für das Erreichen von *Überzeugung* hilfreich. *Vermutungen* sind Invarianten, die bei solchen handwerklichen Tätigkeiten, eventuell computerunterstützt mittels DGS bzw. CAS, beobachtet werden. Beim *Beweisen* einer Regel wird ein „geschicktes“ Ausgangsdiagramm so lange umgeformt, bis ein Diagramm erreicht wird, an dem die entscheidende Regel „abgelesen“ werden kann. Die neue Regel wird dem Diagrammsystem hinzugefügt.

Das Erfinden von Ausgangsdiagrammen und die Entdeckung von brauchbaren Umformungen erfordern Kreativität und Schreib- bzw. Lesekompetenzen.

Anhand des Satzes von Thales wird nun dargelegt, wie die Veränderung von Diagrammsystemen die Beweistechniken und den damit einhergehenden Kompetenz- und Kreativitätsaufwand verändert, bis hin zu fast „automatischen“ Beweisen. Dadurch gelingt eine Algorithmisierung der Geometrie, die z. B. eine Anwendung in der Robotik gestattet.

Diesen Vorgang kann man historisch nachverfolgen (Dorninger 2024), er könnte aber auch Eingang in die Klassenzimmer und Hörsäle finden, wenn man den Unterricht fallweise diagrammatisch organisiert.

Mit diesem Artikel soll gezeigt werden, wie der vorhin beschriebene Umgang mit Diagrammen die drei Tätigkeiten Vermuten, Beweisen und Überzeugen unterstützt. Darüber hinaus werden die drei Geometrien, nämlich die synthetische, analytische und algebraische Geometrie semiotisch beschrieben und ihre entsprechenden Beweisarten anhand des Satzes von Thales demonstriert.

Den Satz von Thales benützen wir in folgender Form:

Sei C ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis über der Strecke AB. Dann hat das Dreieck ABC in C einen rechten Winkel.

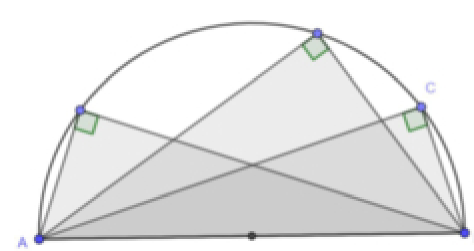


Abbildung 1. Grafische Realisierung des Satzes von Thales mithilfe der Software Geogebra

Synthetische euklidische Geometrie

Ausgehend von den Euklidischen Axiomen werden mittels zugelassener logischer Regeln, wie z. B. dem modus ponens, durch Zusammenfügung (Synthese) bereits hergeleiteter Gesetze neue Gesetze (Regeln) gefunden.

Das Diagrammsystem für die synthetische Geometrie ist die Menge der Euklidischen Axiome und der daraus hergeleiteten Sätze.

1. Beispiel: Synthetische Behandlung des Satzes von Thales

Mehrere Auswahlen von C in Abbildung 1 bzw. ein computerunterstütztes Wandern von C auf dem Halbkreis führen experimentell und anschaulich zur Vermutung des Satzes. Für eine Begründung werden z. B. folgende, zuvor aus den euklidischen Axiomen hergeleitete Winkelsätze in Erinnerung gerufen: Wechselwinkel sind gleich groß, im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich groß und die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt 180° (das Winkelmaß eines gestreckten Winkels).

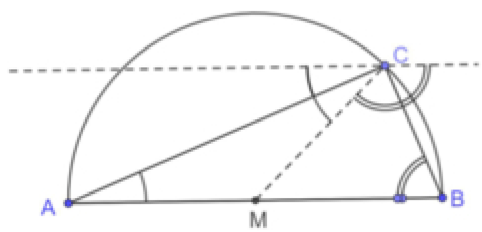


Abbildung 2. Ein synthetischer Beweis des Satzes von Thales

Die Begründungen erfordern die „Idee" (≙ Erweiterungsdiagramm) der Parallelen zur Strecke AB und der Verbindungsstrecke CM (siehe Abbildung 2). Es taucht natürlich die Frage auf, wie man zu solchen Ideen kommen kann. Jedenfalls schließt man mit Abbildung 2: *Der Satz von Thales gilt, weil das Doppelte des Winkels bei A und B einen gestreckten Winkel ergibt.*

Beobachtungen: Das Manipulieren mit den Diagrammen erfordert im Allgemeinen eine hohe Kreativitäts-, Erinnerungs- und Vorstellungsleistung. Das Anfertigen von Bildern ist nicht unbedingt notwendig (so gibt es in den Elementen von Euklid keine Bilder), sie erweisen sich aber als besonders erkenntnisleitend und überzeugungsgewinnend.

Analytische euklidische Geometrie

Eine wesentliche Vereinfachung erfuhr das „Geometrie-Betreiben" durch Einführung eines Koordinatensystems und die Umwandlung von geometrischen Eigenschaften in *Koordinatengleichungen*. Im Fall der ebenen Geometrie sind es Gleichungen in zwei Variablen. Sie sind die Diagramme der analytischen Geometrie und das Manipulieren bzw. Beweisen erfolgt durch Rechnen nach den Methoden der Linearen Algebra.

Das Diagrammsystem für die ebene analytische Geometrie ist der reelle 2-dimensionale Skalarproduktraum.

2. Beispiel: Analytische Behandlung des Satzes von Thales

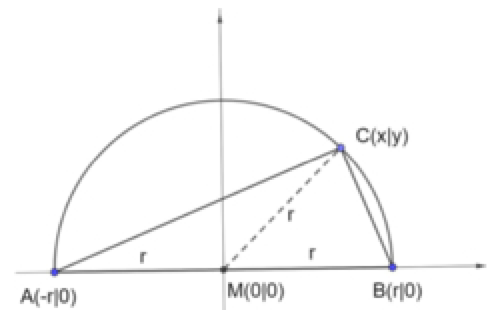


Abbildung 3. Ein analytischer Beweis des Satzes von Thales

Wie in der synthetischen Geometrie benötigt man eine brauchbare Idee. Die beliebige Lage von C erreicht man durch die beliebige Wahl der kartesischen Koordinaten x, y von C. Das rechtwinklige Koordinatensystem kann auf den pythagoreischen Lehrsatz führen. Wir verwenden für die Begründung des Satzes von Thales daher den Satz von Pythagoras und seine Umkehrung. In der Literatur gibt es aber auch analytische Begründungen ohne Verwendung des Satzes von Pythagoras. Da dieser Aussagen über Streckenlängen tätigt, richten wir unser Augenmerk auf die Streckenlängen des Dreiecks ABC.

Die Streckenlänge von AB beträgt $2r$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Koordinaten x, y des Punktes C nach Abbildung 3: $x^2 + y^2 = r^2$.

Mit den Formeln eines Skalarproduktraumes erhält man für die Streckenlängen

$$\overline{AC}^2 = (r+x)^2 + y^2$$

und

$$\overline{BC}^2 = (r-x)^2 + y^2.$$

Damit ist nach Rechnung

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= 2r^2 + 2\left(x^2 + y^2\right) = 2r^2 + 2r^2 \\ &= 4r^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras schließt man aus dem Diagramm der Abbildung 3, dass das Dreieck ABC in C rechtwinklig ist.

Der Satz von Thales gilt, weil $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

Die Verwendung von Vektoren erleichtert die Schreibarbeit und Ideenfindung. Wegen des zugrunde liegenden Skalarproduktraumes genügt es, das Produkt der Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ zu berechnen. Dies stellt die Erinnerungsleistung dar.

Setzt man $\overrightarrow{a} := \overrightarrow{AM} := \overrightarrow{MB}$ und $\overrightarrow{b} := \overrightarrow{MC}$, dann gilt nach den Regeln im Skalarproduktraum

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\ &= -\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 = -|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 \\ &= -r^2 + r^2 = 0,\end{aligned}$$

damit steht $\overrightarrow{AC}$ senkrecht auf $\overrightarrow{BC}$.

Der Satz von Thales gilt, weil $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Beobachtung: Für das Finden einer Beweisidee ist nach wie vor eine gewisse Kreativitäts- und Erinnerungsleistung notwendig, der „Kalkül" des zugrunde liegenden Diagrammsystems lässt die Umformungen beinahe „automatisch" ablaufen. Nicht jede Umformung benötigt wie im synthetischen Fall eine neue Idee. Natürlich gibt es kompliziertere geometrische Eigenschaften und Umformungen in der ebenen Geometrie als beim Satz von Thales, diese können jedoch auch computerunterstützt erfolgen. Um dann vom Beweis überzeugt zu sein, muss man jedoch auf den Computer vertrauen, weil man die Umformungen nicht selbst durchgeführt hat! („Chipbeweis").

Der Kreativitäts- bzw. Erinnerungsaufwand kann durch die Methoden im Ring der Polynome in mehreren Variablen („multivariate Polynome") erheblich verringert werden. Für den Schulunterricht bedeutet dies, dass Misserfolge bei Lernenden infolge Ideenmangels oder zu geringem Wissen vermieden werden. Das Interesse für Beweise und Anwendungen der Geometrie kann infolge der Algorithmisierung der Geometrie gesteigert werden. Darüber hinaus erfährt man die Macht eines Kalküls.

Algebraische euklidische Geometrie

Die neue Idee, Geometrie zu betreiben, besteht in der Umwandlung geometrischer Eigenschaften in Polynomgleichungen in mehreren (nicht nur zwei) Variablen und deren Nullstellenbestimmung. Diese Polynomgleichungen in n Variablen sind die Diagramme der algebraischen Geometrie, ein Beweis ist erbracht, wenn die Nullstellenmenge des polynomialen Gleichungssystems alle n-Tupel enthält.

Das Diagrammsystem der algebraischen Geometrie ist die Algebra $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *der Polynome in n Variablen über einem Körper* $\mathbb{K}$.

3. Beispiel: Algebraische Behandlung des Satzes von Thales mittels Polynomen

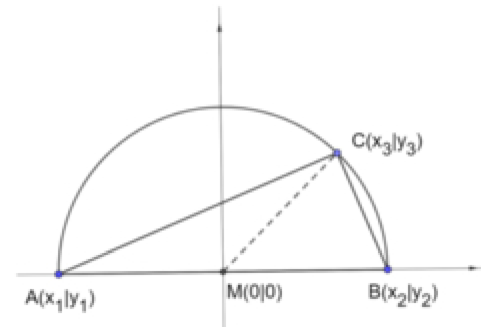


Abbildung 4. Ein algebraischer Beweis des Thales mittels Polynomen

Nach Wahl eines geschickten Koordinatensystems werden die Voraussetzungen und die Behauptung in Polynomgleichungen umgewandelt.

M ist Mittelpunkt der Strecke AB mit $A(x_1 \mid y_1)$, $B(x_2 \mid y_2)$ und $y_1 = y_2 = 0$ bedeutet in Gleichungen: $x_1 + x_2 = 0$ und $y_1 + y_2 = 0$. In Abbildung 4 treten die Variablen $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ auf, daher fassen wir die letzten beiden Gleichungen als multivariate Polynomgleichungen in diesen sechs Variablen auf, d. h.

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1 + x_2 = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := y_1 + y_2 = 0.$$

Da C auf dem Halbkreis liegt, sind die Strecken MA und MC gleich lang: $\overline{MA} = \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{MA}^2 = \overline{MC}^2$ (man quadriert, um Polynome zu erhalten).

Nach dem Satz von Pythagoras ist $\overline{MC}^2 = x_3^2 + y_3^2$ und $\overline{MA}^2 = x_1^2 + y_1^2$, also

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2 \;\Leftrightarrow\; &x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 \\ &=: r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.\end{aligned}$$

Umwandlung der Behauptung in eine Polynomgleichung: Der rechte Winkel in C kann analytisch beschrieben werden durch:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_1x_2 + y_3^2 - y_2y_3 - y_1y_3 + y_1y_2 \\ =: f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.\end{aligned}$$

Formulierung des Satzes von Thales in Polynomform: $\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$ gilt: Aus

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

folgt

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Der Teil-Term $x_3^2 + y_3^2$ von f kommt in $-r = -x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2$ vor. Den überflüssigen Term $-x_1^2$ eliminiert man durch Addition von $(x_1 - x_3)(x_1 + x_2)$, die hinzukommenden Terme passen für f. Analog macht man es mit dem Term $-y_1^2$.

Durch solche Termbeobachtungen erhält man:

$$f = (-1)r + (x_1 - x_3)\,p + (y_1 - y_3)q$$

Damit schließen wir: Ist $p = q = r = 0$, dann gilt auch $f = 0 \forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}$.

Der Satz von Thales gilt, weil das die Behauptung darstellende Polynom eine Linearkombination der die Voraussetzungen darstellenden Polynome ist.

Für alle (!) Sätze bewährt sich also folgende Beweisstrategie:

Stelle die Polynomgleichung der Behauptung als Linearkombination der Polynomgleichungen der Voraussetzungen dar.

Es sind daher keine Kreativitäts- bzw. Erinnerungsleistungen für die Ideenfindung notwendig. Nur für die Umformung von geometrischen Sachverhalten in Polynomgleichungen benötigt man Kenntnisse aus analytischer Geometrie. Anspruchsvoll können hingegen die Termumformungen sein. Mit MATHEMATICA kann mittels des Befehls *PolynomialReduce* die Termumformung „automatisiert" werden. Dazu benötigt man jedoch eine spezielle Basis, nämlich die *Gröbnerbasis eines Polynomideals.*

Es wird eine stark vereinfachte Darstellung vorgestellt, genaueres kann man aus Aichinger (2020) und Cox (2005) entnehmen. Die oben angesprochene Menge der Linearkombinationen bildet im Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ bekanntlich ein Ideal. Die Menge $I := \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ heißt das von den Polynomen $f_1, \ldots, f_m$ erzeugte Ideal. Für ein Polynom f gilt:

$$f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \Leftrightarrow \exists h_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{mit } f = h_1 f_1 + \ldots + h_m f_m.$$

Die Bestimmung dieser $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ ist i. A. schwierig (Ideal-Membership-Problem). Man orientiert sich am eindimensionalen Fall $\mathbb{K}[x]$. Bekanntlich ist $\mathbb{K}[x]$ ein Hauptidealring, also $I := \langle g \rangle$ für ein $g \in \mathbb{K}[x]$ und es gilt: $f \in I$ genau dann, wenn man bei Division von f durch g den Rest 0 erhält.

Im mehrdimensionalen Fall wäre eine analoge „multivariate Division" wünschenswert. Dafür benötigt man den Begriff der „Monomordnung" eines multivariaten Polynoms, die dem Grad eines eindimensionalen Polynomes entspricht. Darauf wird in diesem Artikel nicht eingegangen (Pargfrieder, 2024). Wegen obiger Problemstellung ist man an einer Darstellung der Form $f = h_1 f_1 + \ldots + h_m f_m$ interessiert, man „dividiert" also durch ein m-Tupel von Polynomen und nicht durch ein einziges Polynom. Die „multivariate Division" von f durch ein m-Tupel $(f_1, \ldots, f_m)$ bedeutet daher, eine Darstellung von f der Form

$$f = h_1 f_1 + \ldots + h_m f_m + r$$

mit einem *Restpolynom* r von „minimaler Monomordnung" zu finden. Leider sind diese Reste nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen von der Wahl einer Ordnung ab. Eine *Gröbnerbasis* $G := \{g_1, \ldots, g_m\}$ ist nun gerade so definiert, dass sie die gewünschten Eigenschaften besitzt, d. h., die Reste r sind eindeutig bestimmt und $f \in I$ genau dann, wenn der Rest *0* ist.

Der *Buchberger-Algorithmus* erzeugt aus einer gegebenen Basis eines Ideals dieses Wundermittel Gröbnerbasis. In MATHEMATICA ist er im Befehl *GroebnerBasis* verwirklicht. Der Befehl *PolynomialReduce* wiederum bestimmt in der zweiten Komponente der Ausgabeliste den Rest von f bei multivariater Division durch eine Liste von Polynomen, eben der Liste der Gröbnerbasis.

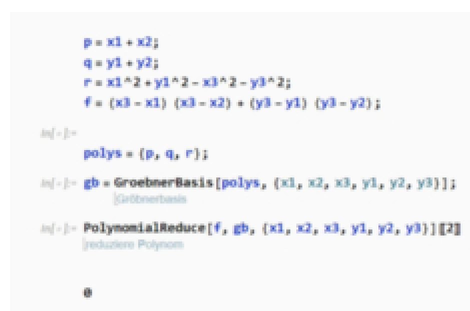


Abbildung 5. Computerunterstützter algebraischer Beweis des Satzes von Thales mittels Linearkombination von Polynomen

Man *sieht*, dass die zweite Komponente in PolynomialReduce 0 ist. Das bedeutet, dass das „Behauptungspolynom" f eine Linearkombination der „Voraussetzungspolynome" *p, q, r.* ist. Damit folgt, dass mit $p = q = r = 0$ auch $f = 0$ *ist*, somit gilt der Satz des Thales.

Der Satz von Thales gilt, weil die multivariate Division des „Behauptungspolynoms" durch die Gröbnerbasis der „Voraussetzungspolynome" den Rest 0 ergibt (im Diagramm der Abbildung 5 tritt die Null als letzte Zeile auf).

4. Beispiel: Algebraische Behandlung mittels eines polynomialen Gleichungssystems

Für algebraisch abgeschlossene Körper, wie z. B. den Körper der komplexen Zahlen, der die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ enthält, gibt es eine weitere Vereinfachung, die keine Linearkombinationsdarstellung des „Behauptungspolynoms“ benötigt. Dabei wird dem geometrischen Sachverhalt ein *System von multivariaten Polynomgleichungen* zugeordnet und dessen Nullstellenmenge berechnet.

Für den Problemkreis des Satzes von Thales hatten wir oben hergeleitet (an Stelle von f schreiben wir ab nun h):

$\forall x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ gilt: Aus

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

folgt

$$h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Mittels einer Wahrheitstafel kann man zeigen:

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow \neg\big(A \wedge (\neg B)\big).$$

Obige Aussage ist also logisch äquivalent zu:

$$\nexists x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R},$$

sodass gilt:

$$p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$$

und

$$h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \neq 0.$$

Nun wird noch $h \neq 0$ in eine Gleichung umgewandelt.

Sei z neben $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ eine neue Variable. Weil $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gilt: $h \neq 0 \Longleftrightarrow h \cdot z - 1 = 0$. Denn ist $h \neq 0$, dann gibt es ein $h^{'}$ mit $h \cdot h^{'} = 1$ oder $h \cdot h' - 1 = 0$, d. h., die Gleichung $h \cdot z - 1 = 0$ hat eine Lösung. Hat umgekehrt $h \cdot z - 1 = 0$ eine Lösung $z = h'$, dann ist $h \cdot h^{'} = 1$ und h ist wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{R}$ ungleich 0.

Damit erhalten wir folgendes *polynomiale Gleichungssystem* für den Satz von Thales:

$$\begin{aligned}
&p(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1 + x_2 = 0\\
&q(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := y_1 + y_2 = 0\\
&r(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) := x_1^2 + y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 = 0\\
&h(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) :=\\
&= [(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)] \cdot z - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Der Satz des Thales gilt nach obiger Äquivalenz also genau dann, wenn das polynomiale Gleichungssystem $p = q = r = h = 0$ keine Lösung hat.

Allgemein können wir formulieren: Seien m, n natürliche Zahlen und $p_1, \ldots, p_n$ und q Polynome in den m Variablen $t_1, \ldots, t_m$. Gilt für alle m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ die Implikation, dass aus $p_1(x_1, \ldots, x_m) = \ldots = p_n(x_1, \ldots, x_m) = 0$ auch $q(x_1, \ldots, x_m) = 0$ folgt, dann hat das Gleichungssystem mit der zusätzlichen Variablen z $p_1(t_1, \ldots, t_m) = 0, \ \ldots, p_n(t_1, \ldots, t_m) = 0$ und $q(t_1, \ldots, t_m) \cdot z - 1 = 0$ keine Lösung und umgekehrt.

Damit kommt der Hilbertsche Nullstellensatz ins Spiel, der eine weitreichende Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Algebra darstellt:

Sei $\mathbb{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und I ein echtes Ideal in $\mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m]$, d. h., $I \neq \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m]$. Dann gibt es ein m- Tupel $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$mit $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ für alle $f \in I$. Es gibt also ein gemeinsames Lösungs-m-Tupel aller $f \in I$. Gibt es keine gemeinsame Lösung, dann ist I kein echtes Ideal, sondern $I = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m]$. Insbesondere ist $1 \in I$. Bemerkung: Die Voraussetzung $I \neq \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m]$ entspricht im 1-dimensionalen Fall der Voraussetzung Grad $f(x) \neq 0$.

Für ein Gleichungssystem bedeutet dies: Sei $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ ein polynomiales Gleichungssystem von n Gleichungen in m Variablen und I das von den $f_1, \ldots, f_n$ aufgespannte Ideal, also $I := \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. Hat das Gleichungssystem keine Lösung in $\mathbb{K}^m$, dann ist I kein echtes Ideal, sondern $I = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m]$ und damit gilt $1 \in I$ oder $1 = h_1 f_1 + \ldots + h_n f_n$. Ob das Gleichungssystem $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ keine Lösung hat, kann nun wieder mittels der Gröbnerbasis von $I := \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ entschieden werden (Pargfrieder 2024): Das Gleichungssystem $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ hat genau dann keine gemeinsame Lösung, wenn die Gröbnerbasis von $I := \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ das konstante Polynom $c \neq 0$ und damit wegen der Abgeschlossenheit des Ideals I bezüglich aller Multiplikationen auch $1 \in \mathbb{K}$ enthält. Der Satz von Thales gilt also genau dann, wenn die Gröbnerbasis von $I := \langle p, q, r, h \rangle$ die $1 \in \mathbb{K}$ enthält.

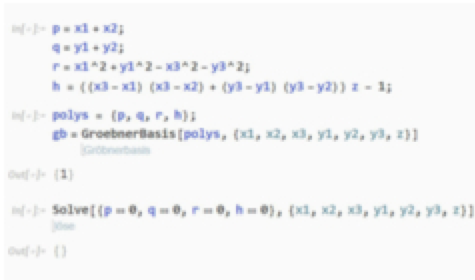


Abbildung 6. Computerunterstützter algebraischer Beweis des Satzes von Thales mit polynomialem Gleichungssystem

Bemerkung 1: Für manche, eher einfache polynomiale Gleichungssysteme kann die Nullstellenmenge auch mit dem MATHEMATICA-Befehl Solve berechnet werden. Dies ist z. B. beim Satz von Thales der Fall, als Lösungsmenge ergibt sich die leere Menge {}, siehe letzte Zeile in obiger Abbildung.

Bemerkung 2: Oben hatten wir bemerkt, dass der Hilbert‘sche Basissatz im Allgemeinen nur für algebraisch abgeschlossene Körper gilt. Das bedeutet, dass mit der oben vorgestellten Methode eventuell nicht alle Sätze bewiesen werden können. Aus Abbildung 6 und Bemerkung 1 schließen wir:

Der Satz von Thales gilt, weil die 1 *in der Gröbnerbasis des Ideals, das von den dem Satz von Thales zugeordneten Gleichungen aufgespannt wird, enthalten ist (im Diagramm der Abbildung 6 tritt* {1} *als letzte Zeile auf).*

oder

Der Satz von Thales gilt, weil die Lösungsmenge des dem Satz zugeordneten polynomialen Gleichungssystem leer ist.

Beobachtung: Die algebraischen Beweise sind alles andere als anschaulich, aber dafür überzeugend, wenn man die Theorie versteht und den Computerrechnungen vertraut. Der Verlust der Anschaulichkeit in Bildern hat dafür den ungeheuren Vorteil, dass nicht für jeden geometrischen Sachverhalt und für jede Diagrammumformung neue Ideen kreiert werden müssen. Mathematiker haben eine für alle (?) geometrischen Sachverhalte effiziente Beweisstrategie entwickelt. Erinnerungen an zahlreiche Lehrsätze der analytischen Geometrie sind nur notwendig, um die geometrischen Voraussetzungen in multivariate Polynomgleichungen umzuformen. Aber auch dafür gibt es standardisierte Verfahren für Kollinearität, Mittelpunkt, Abstand, Skalarprodukt, Parallelität usw., die wie in einem Lexikon nachgeschlagen werden können.

Das Vermuten kann durch Veränderungen der Polynomgleichungen für die Voraussetzungen und die Behauptung erfolgen, oder man vertauscht Voraussetzungen mit der Behauptung Man verändert solange, bis die 1 oder die 0 in den Abbildungen 5 bzw. 6 auftreten.

Beispiel: Man könnte bei der Behandlung des Satzes von Thales die Voraussetzung r mit der Behauptung f vertauschen. Man nimmt also an, dass bei C ein rechter Winkel sein soll und fragt sich, auf welcher Bahn sich der Punkt C bewegt. Mittels einer DGS vermutet man, dass C sich auf einem Halbkreis bewegt. Die 0 in Abbildung 7 zeigt, dass die Vermutung stimmt. Damit ist die Umkehrung des Satzes von Thales bewiesen.

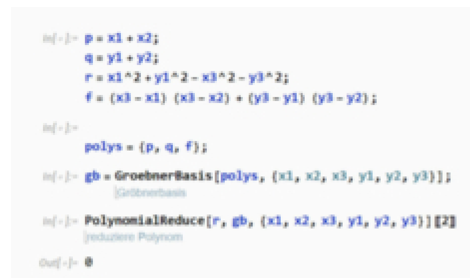


Abbildung 7. Thales, Umkehrung

Zusammenfassung

Die Behandlung des Satzes von Thales in den drei verschiedenen Geometrien zeigt auf:

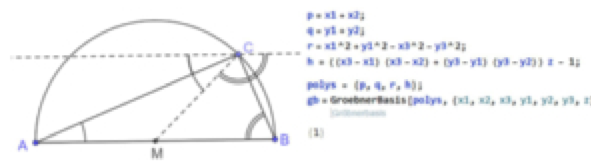


Abbildung 8. Thales, Zusammenschau

1. Verschiedene Diagrammsysteme erfordern verschiedene Kreativitäts- und Erinnerungsleistungen. Je umfangreicher die dahinterstehende mathematische Theorie ist, desto geringer werden diese, jedoch um den Preis einer immer größer werdenden Termumformungs- und Lesekompetenz. Diese kann auf leistungsstarke CAS-Pakete abgewälzt werden. Damit kann die Beweis- und Vermutungsfindung beinahe „automatisch“ ablaufen. Tritt in den algebraischen Diagrammen in der letzten Zeile die 0 oder die 1 auf, ist die Behauptung bewiesen. Überzeugung erreicht man, wenn man die für die Diagrammumformungen notwendige Theorie versteht und Vertrauen in die notwendigen Computerberechnungen hat.
2. Durch die beinahe „automatisch“ möglichen Beweise in der algebraischen Geometrie erreicht man eine *Algorithmisierung* der Geometrie. Wie so oft in

der Mathematik haben einige Mathematiker Theorien und Verfahren zur Erreichung von bestimmten Zielen entwickelt, die dann von Benützern meist unreflektiert verwendet werden. Denken wir z. B. an das schriftliche Rechnen in Stellenwertsystemen oder an das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

3. Natürlich wurde algebraische Geometrie nicht für den Einsatz in der ebenen euklidischen Geometrie entwickelt. Diese wurde historisch durch die synthetische und analytische Geometrie bereits erschöpfend behandelt. Dasselbe gilt auch für den Unterricht an der S1 und S2. Trotzdem soll erwähnt werden, dass noch 1986 während einer Computer-Mathematik-Tagung in Exeter ein weiterer, neben den bisher ≈65 000 (Stand August 2024, siehe de.wikipedia.org/wiki/Ausgezeichnete_Punkte_im_Dreieck) bekannten ausgezeichneten Punkten im Dreieck, entdeckt wurde und daher *Exeterpunkt* genannt wird. Auch der seit 1899 bekannte *Satz von Morley* wurde erst in neuerer Zeit analytisch und algebraisch bewiesen (Messerschmidt 2004).
4. Methoden der algebraischen Geometrie werden gerade wegen der dadurch möglichen Algorithmisierung der Geometrie auch außerhalb der Geometrie verwendet, z. B. bei der Versuchsplanung, beim Testen von Hypothesen und in der Robotik.

Das sind Gründe genug, um algebraische Verfahren auch im Unterricht zu behandeln. Die dazu notwendige Theorie wird skizzenhaft wie in diesem Artikel vorgestellt, CAS-Programme übernehmen die Rechenarbeit. Das ist für den Mathematikunterricht nichts Ungewöhnliches, auch beim Einsatz des Taschenrechners wird so vorgegangen. Da die ebene euklidische Geometrie relativ gut bekannt ist, bietet sie ein ausgezeichnetes Übungsfeld, um die Wirksamkeit obiger Verfahren kennen zu lernen.

Literatur

Aichinger, E. (2020). *Vorlesungsskript: Notizen zu den Vorlesungen: Kommutative Algebra und algebraische Geometrie und Gröbnerbasen.* Johannes Kepler Universität, Linz. www.algebra.uni-Linz.ac.at/Students/GroebnerBases/w20/

Brunner, M. (2015). Diagrammatische Realität und Regelgebrauch. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 9–49). Berlin & Heidelberg, Deutschland: Springer.

Cox, D. A., Little, J., & O'shea, D. (2005). *Using algebraic geometry.* New York, NY: Springer.

Dörfler, W. (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik, 27,* 200–219.

Dörfler, W., & Kadunz, G. (2006). Rezension von „Erkenntnisentwicklung". *Journal für Mathematikdidaktik, 27,* 300–318.

Dorninger, D. (2024). *Beweisen in der Elementargeometrie – klassisch, analytisch, automatisch.* Unveröffentlichtes Manuskript.

Messerschmidt, V. (2004). *Automatisches Beweisen in der ebenen Geometrie mittels Gröbnerbasis.* Universität Kassel, Kassel. www.mathematik.uni-kassel/~koepf/Diplome/Messerschmidt.pdf

Pargfrieder, J. (2024). *Automatisches Beweisen in der Geometrie mithilfe von Gröbnerbasen.* Unveröffentlichte Masterarbeit, Johannes Kepler Universität Linz, Linz. epub.jku.at/obvulihs/download/pdf/9958149

Hermann Kautschitsch, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
hermann.kautschitsch@aau.at

Bildung für nachhaltige Entwicklung im Mathematikunterricht

Potentiale und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik

Hans-Stefan Siller und Katrin Vorhölter

„Die Welt im Dauerstress“, „Immer nur Krise, Krise, Krise“, „Star-Investor warnt vor globaler Polykrise: Fünf Faktoren gefährden die Weltwirtschaft“ lauten die Schlagzeilen von Tageschau, Zeit online oder Focus zu den sich häufenden globalen Ereignissen wie extreme Wetterbedingungen, Konflikte und Kriege, Krankheiten, Hunger oder Wirtschaftskrisen. Diese stellen uns aktuell gesellschaftlich – auch im Bildungskontext – vor zahlreiche Herausforderungen, und die Frage ist, wie wir mit diesen umgehen, ihnen begegnen und bestenfalls sie bewältigen können.

Eine Antwort des Bildungssektors der UNESCO, um der Bewältigung disruptiver Ereignisse zu begegnen, wird als Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) bezeichnet und geht auf den Weltkongress für Bildung und Kommunikation über Umwelt und Entwicklung im Jahr 1992 zurück. Hier unterstreicht die im Juni 2024 erschienene Neuauflage der eigenständigen Empfehlung der Kultusministerkonferenz zu „Bildung für nachhaltige Entwicklung in der Schule“ (KMK, 2024) auch für den deutschsprachigen Raum die international anhaltende Forderung nach einer Umsetzung von BNE im schulischen Kontext (Hallinger & Nguyen, 2020; UN General Assembly, 2015; UNESCO, 2020). Es gilt Lernende in die Lage zu versetzen, zugrundeliegende komplexe Zusammenhänge verschiedener Einflussfaktoren und deren Auswirkungen wahrzunehmen und zu analysieren, um ein Verständnis globaler Herausforderungen zu fördern (KMK/BMZ, 2007). Dabei werden die Beschaffung, Einordnung und Verarbeitung von Informationen immer relevanter. Insbesondere ist die Fähigkeit, Aussagen kritisch zu hinterfragen und einzuordnen, notwendig. Hierfür bedarf es der Beteiligung und Integration verschiedener Fachdisziplinen.

Erste Ansätze, wie Mathematik zur kritischen Bildung beitragen kann, reichen bis in die frühen 1970er Jahre zurück. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik haben sich u. a. Christine Keitel und Dieter Volk frühzeitig damit auseinandergesetzt (Skovsmose, 2020). Die Weiterentwicklung hinsichtlich eines zukunftsfähigen Mathematikunterrichts wurde auch von vielen Persönlichkeiten immer wieder eingefordert:

> Für die Welt von heute und morgen ist die Komplexität vieler Probleme ein besonderes Kennzeichen. Insbesondere die sogenannten *Schlüsselprobleme* der Menschheit wie etwa *Bevölkerung* (einschließlich der gesellschaftlich produzierten Ungleichheiten und den daraus resultierenden Wanderungsbewegungen), *Friedenssicherung, Ökologie und Ökonomie* (einschließlich der Ressourcen- und Energieproblematik) sind in diesem Zusammenhang zu nennen. (Graumann, 1994, S. 3, Hervorhebungen im Original)

Dies kann und sollte auch dazu führen, dass das Fach und seine Bedeutung positiv(er) in der Gesellschaft wahrgenommen wird, und erkannt wird,

> daß mathematisches Denken einen spezifischen Zugang gibt, sich nicht durch andere Fächer ersetzen oder substituieren läßt. Im Gegenteil wird ein Ziel des Mathematikunterrichts sein, die Spezifik dieses Zugangs und seiner Grenzen Schülerinnen und Schüler erfahren und erkennen zu lassen. (Jahnke, 1995, S. 325)

Zentrales Ziel bei der Berücksichtigung von Themen der Nachhaltigkeit im Mathematikunterricht ist darin zu sehen, dass Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung zu mündigen Bürgerinnen und Bürger unterstützt werden, damit sie nachhaltige Entwicklung in der Gesellschaft konstruktiv gestalten und reflektiert Stellung nehmen können. Dafür gilt es insbesondere auch Lehrkräfte zu befähigen, Herausforderungen nachhaltiger Entwicklung für den Mathematikunterricht zu identifizieren und Konsequenzen davon im Schulunterricht zu realisieren.

Die aktuelle Forderung der KMK, Bildung für nachhaltige Entwicklung in alle Fächer zu integrieren, bietet für die Didaktik der Mathematik die Chance, sich erneut die Frage(n) zu stellen, (1) was ein heutiger Mathematikunterricht beinhalten sollte, um die Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf die Welt von Morgen vorzubereiten, i.e. was der Mathematikunterricht zu einer BNE beitragen kann und sollte, und (2) inwiefern sich der Mathematikunterricht daher verändern muss. Die zweite Frage ist insbesondere deswegen brisant, als dass zwar in den meisten Bundesländern BNE als Querschnittsaufgabe für die Schulfächer implementiert ist (KMK, 2023), aber in vielen Bundesländern mathematikspezifische Ausdifferenzierungen fehlen. Als Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, welche das Lehren und Lernen von Mathematik beforschen, müssen wir uns somit fragen, welcher Zusammenhang zwischen Mathematik und BNE besteht und inwiefern die Integration von BNE in den Mathematikunterricht eine sinnhafte Neuorientierung bewirken kann. Eine erste Antwort geben Li und Tsai (2021, S. 2537):

> ESD in mathematics education calls for a new key concept for thinking and acting about how we can reorient mathematics toward environmentally and socially conscious thinking to engage the younger generations in ethical action for a better future. This new concept must push back the boundaries of the traditional philosophy of mathematics and accommodate the power of mathematical applications in guiding human lives and the social world [...].

Mathematik ist – wenn auch nicht immer offensichtlich – häufig Grundlage vieler Modelle und damit wesentlich für Entscheidungsprozesse, Meinungsbildungen und Handlungen im Kontext von BNE (Barwell, 2018; Skovsmose, 2023). Daher bilden mathematisches Wissen und Fähigkeiten einen Grundbaustein, um globale wie lokale Probleme verstehen und damit umgehen zu können (z. B. Lafuente-Lechuga et al., 2024; Skovsmose, 2023). Hierbei ist weder die rein innermathematische Betrachtung noch die Anwendung mathematischer Verfahren in offensichtlichen Kontexten, z. B. bei der Analyse von Daten, ausreichend. Es ist notwendig Lernende zu befähigen, wesentliche mathematische Inhalte und Konzepte, die auf den ersten Blick verborgen scheinen, im Sachkontext zu erkennen, reflektiert einzusetzen und zu bewerten. Denn ein unreflektierter Einsatz oder eine unkritische Akzeptanz mathematischer Konzepte birgt die Gefahr, dass Ergebnisse fehlinterpretiert bzw. die Einschränkungen nicht erkannt, und so falschen Schlussfolgerungen gezogen werden. Dies ist insbesondere im Bereich von Desinformationen wichtig, um beispielsweise den Missbrauch von mathematischen Argumenten von Klimaleugnerinnen bzw. -leugnern zu identifizieren (Barwell & Hauge, 2021). Gleichzeitig kann eine reflektierte Anwendung zu einem tieferen Verständnis sowohl des BNE-Kontextes wie auch der mathematischen Inhalte und Konzepte beitragen (z. B. Anwar, Juandi, & Ningsih 2020; Siller et al., 2024). Daher besteht die Notwendigkeit, den Stellenwert von Mathematik im Kontext der BNE genauer zu beleuchten und ihre Bedeutung herauszustellen.

Hierdurch wird wiederum die Notwendigkeit offensichtlich, aus der Community der Mathematikdidaktik stoffdidaktisch fundierte Implementierungen von Lernumgebungen aber auch einzelnen Aufgaben zu realisieren sowie empirisch fundierte Forschung durchzuführen. Um dies zu leisten, ist es notwendig sich zu vergegenwärtigen, welche evidenzbasierten Erkenntnisse bislang bezogen auf Schülerkompetenzen, Lehrkräftekompetenzen und hochwertigem Unterrichtsmaterial vorliegen. Daher werden wir in diesem Beitrag auf diese drei Bereiche eingehen, Herausforderungen für die Mathematikdidaktik identifizieren und Potentiale für einen zukünftigen Mathematikunterricht herausstellen.

BNE für Schülerinnen und Schüler

Schülerinnen und Schüler sind heute mit multiplen sozialen, ökonomischen und politischen Krisen auf der Welt konfrontiert und werden dies auch in Zukunft sein. Hier können Lehrkräfte durch die Vermittlung von Wissen, (Handlungs-)Fähigkeiten und Werten (UNESCO, 2017) in ihrem Mathematikunterricht Unterstützung bieten, um mit diesen Krisen umzugehen. Im Zentrum steht dabei das Ziel, die Lernenden zum Erkennen, Bewerten und Handeln in einer komplexen Welt zu befähigen (Siller et al., 2025b).

Durch das Abwägen verschiedener (mathematischer) Argumente sollen Schülerinnen und Schüler lernen, Situationen kritisch zu beurteilen (Siller et al., 2024). Dies soll sie befähigen, fundierte, evidenzbasierte Entscheidungen bezüglich Themen der Nachhaltigkeit zu treffen, welche sich in der Fähigkeit und dem Willen zu aktivem Handeln äußern – auch über den Unterricht hinaus. Ziel ist es, dass Schülerinnen und Schüler mit ihrem (mathematischen) Wissen und ihren (mathematischen) Fähigkeiten in der Lage sind, an gesellschaftlichen Diskussionen aktiv zu partizipieren und dabei Emotionen und gefühlten Zusammenhängen sachliche Argumente (z. B. auf Basis mathematischer und statistischer Überlegungen) entgegenzustellen. Auf diese Weise können sie langfristig zu einer Veränderung der – für eine Demokratie essenziellen – Diskussionskultur beitragen. Die kritische mathematische Betrachtung von Themen der nachhaltigen Entwicklung sowie eine unterrichtliche Reflexion darüber kann dazu beitragen, im Unterricht nicht nur die Komplexität und Dringlichkeit von Problemen der Nachhaltigkeit bewusst zu machen, sondern auch Ziele und Visionen des Mathematikunterrichts zu überdenken, wie dies z. B. Li & Tsai (2021, S. 2534) fordern:

> It is evident that there is a difference in goal orientation between ESD and 'teaching to the test' in mathematics education. This difference invites us to rethink what the goals of, and the vision for, mathematics education should be in the twenty-first century.

Die gewonnenen Einsichten bei der Bearbeitung von Problemen der Nachhaltigkeit können Anstoß für eine Veränderung des eigenen Verhaltens sowie einen aktiven Einsatz für gesellschaftlichen und politischen Wandel sein. Dafür sollten Lernende Fähig- und Fertigkeiten erwerben, Maßnahmen kritisch zu beleuchten und auf Basis von Daten deren Effektivität zu beurteilen.

Grundsätzlich gibt es verschiedene Möglichkeiten für eine BNE im domänenorientierten Fachunterricht. Im Folgenden fokussieren wir auf den von der Kultusministerkonferenz (KMK) und dem Bundesministerium für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (BMZ) in Auftrag gegebenen Orientierungsrahmen Globale Entwicklung. In diesem werden elf Kernkompetenzen genannt, die normativ gesetzt und fachübergreifend realisiert werden sollen und die jeweils von fachspezifischen, theoretisch angebundenen Realisierungen für die Sekundarstufe I (Reiss et al., 2016) bzw. die Sekundarstufe II (Siller et al., 2025b) ergänzt werden. Die erfolgten fachspezifischen Ableitungen stellen lediglich Indikatoren für die jeweiligen aufgeführten BNE-Kernkompetenzen dar, die es empirisch zu fundieren gilt. Erste evidenzbasierte Analysen, z. B. ob eine Trennung in den Kernkompetenzen auf Basis der theoretischen Überlegungen möglich ist, sind bereits publiziert (Siller et al., 2025a) bedürfen aber nun einer Skalierung, um die notwendige Verallgemeinerung zu bestätigen. Eine solche Fundierung sowie erste Überprüfungen stellen eine notwendige Voraussetzung für die Entwicklung von Messinstrumenten dar, die wiederum eine Voraussetzung für eine evidenzbasierte Entwicklung von Unterrichtsmaterial sind.

Der Erwerb von fachspezifischen BNE-Kernkompetenzen erfordert fundiertes mathematisches Wissen und zugehörige Fähigkeiten. Die Notwendigkeit mathematischer Verfahren für den Erwerb fachspezifischer BNE-Kernkompetenzen ist sowohl in der Konzeption für die Sekundarstufe I (Reiss et al., 2016) als auch Sekundarstufe II (Siller et al., 2025b) konstruktiv aufgegriffen und ermöglicht eine integrative curriculare Einbindung der Kernkompetenzen. Die Kompetenzen „Globale BNE-Kontexte als Individuum mithilfe der curricular zur Verfügung stehenden mathematischen Mittel begreifen und daraus folgende Konsequenzen in damit einhergehenden mathematischen Fragestellungen reflektieren“ sowie „Konzepte und Verfahren der Mathematik als Werkzeuge im individuellen, gesellschaftlichen, ökonomischen, ökologischen und politischen Kontext interdisziplinär und im Umgang mit Aussagen von Experteninnen und Experten sachkundig anwenden“ (Siller et al., 2025b) bringen direkt zum Ausdruck, dass mathematische Mittel ein grundlegendes Werkzeug für den Erwerb dieser Kompetenz sind. Entsprechend setzen diese Anforderungen für Lernende keine zusätzlichen mathematischen Fachinhalte voraus, sondern können als motivationsfördernde und sinngebende Ausführungen in den Fachunterricht integriert werden. Dies zeigt auch die Kompetenz „grafische Darstellungen und Tabellen mit Daten zu globalen Fragen verstehen und auswerten“ (Reiss et al., 2016, S. 303) auf: Die Lernenden sollen den curicular erforderten verständigen Umgang mit Daten in unterschiedlichen Repräsentationen im Kontext der nachhaltigen Entwicklung anwenden. Denn „[e]rst auf der Basis hinreichend verstandener Mathematik können Schüler erfahren, daß mathematische Begriffe und Techniken in vielen Situationen als ‚Verstärker‘ ihres Alltagsdenkens taugen.“ (Heymann, 1996, S. 547). Die Anwendung mathematischer Verfahren in sinnstiftenden Kontexten kann durch die reflektierte Anwendung darüber hinaus zu einem vertieften Verständnis dieser Verfahren führen und einer rein kalküllastigen, eher unreflektierten Anwendung entgegenwirken. Darüber hinaus wird ein solches Vorgehen auch durch die Berücksichtigung der beiden Grunderfahrungen (G1) und (G3) nach Winter (1995) nicht nur legitimiert, sondern geradezu gefordert. Damit ist auch eine Anbindung an die jeweiligen Ländercurricula gegeben.

Professionalisierung von Lehrkräften

Damit insbesondere im Schulkontext die aufgezeigten (Lehr- und Lern-)Ziele erreicht werden, bedarf es an Lehrkräften, welche entsprechendes Wissen und nötige Fähigkeiten im Mathematikunterricht vermitteln wollen und können. Diese Vermittlung stellt jedoch eine komplexe Herausforderung für die Lehrkräfte dar. Die für die Implementation von BNE in den Mathematikunterricht benötigten Kompetenzen beinhalten sowohl Wissen und Fähigkeiten zur BNE als auch ein vertieftes mathematisches Wissen und entsprechende Fähig- und Fertigkeiten. Um BNE in den Mathematikunterricht zu implementieren, müssen Lehrkräfte somit Wissen zu den jeweiligen Kontexten verfügen. Darüber hinaus müssen sie einschätzen können, inwiefern die mathematischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Jahrgangsstufe ausreichend sind, um in den Kontexten sinnvolle, i. e. nicht unangemessene, Vereinfachungen zu treffen, die zu intellektuell ehrlichen Resultaten führen.

Um eine Umsetzung von BNE im Mathematikunterricht zu unterstützen, sind alle drei Phasen der Lehrkräftebildung in unterschiedlicher Art und mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung zu berücksichtigen. Derzeit gibt es keine etablierten Konzepte – weder für die universitäre Lehrkräfteausbildung, noch für das Referendariat oder die Lehrkräftefortbildung. Der Überblick der KMK (2023) zur Fachkräfteausbildung macht deutlich, dass die Bundesländer hier sehr unterschiedliche Vorgehensweisen verfolgen. In der Regel wird dabei die BNE als Querschnittsaufgabe gesehen.

Für die Konzeption von Angeboten und Maßnahmen für die Lehrkräftebildung sind der instrumentelle und emanzipatorische Ansatz zu differenzieren, aber gleichermaßen zu berücksichtigen. Dabei steht im instrumentellen Ansatz, auch als Bildung für nachhaltige Entwicklung bezeichnet, die Vermittlung von Expert:innen-Wissen im Vordergrund, während der kritisch-emanzipatorische Ansatz die Bildung als nachhaltige Entwicklung und damit nicht als geschlossenen Expert:innen-Diskurs sieht, „sondern als ein offener gesellschaftlicher (Lern-)Prozess [...]. Leitend ist dabei die Erkenntnis, dass oft gar nicht sicher ist, welche Verhaltensweisen effektiv die nachhaltigeren sind.“ (Wals, 2011 in Rieckmann, 2021, S. 7). Darüber hinaus sollten Lehrkräfte auch den transformativen Ansatz bedienen können, der im Orientierungsrahmen Globale Entwicklung durch die Kernkompetenz des Handelns betont wird: Dieser Ansatz zielt nicht nur auf die Vermittlung von Wissen und Fähigkeiten zur Gestaltung einer lebenswerten Zukunft, sondern insbesondere darauf, das Denken, Handeln und Engagement der Lernenden im Sinne einer nachhaltigen Entwicklung zu verändern. Damit wird eine zentrale Forderung, „das nötige (Fach-)Wissen, die notwendigen Gestaltungskompetenzen sowie die Grundlagen für Denk-und Handlungsweisen [zu] vermitteln, die unerlässlich sind, um das komplexe Thema der nachhaltigen Entwicklung in seinen vielfältigen Facetten zu verstehen“ (JMU, 2024, S. 5), erfüllt und einer zeitgemäßen Lehrkräfteprofessionalisierung wissenschaftsbasiert und kritisch-reflektierend Rechnung getragen. Dies muss sich in weiterer Folge für die Studienseminare und Lehrkräftefortbildungen weiterentwickeln.

Neben dem Wissen und den Fähigkeiten bedarf es auch der Überzeugung, dass Mathematik einen Beitrag zur BNE leisten kann und muss. Bei einer Umfrage unter Würzburger Lehramtsstudierenden (Sekundarstufe I – MS, RS, GYM; im März 2024; $n = 245$, Rücklauf ca. 11 % dieser Studierenden) zeigte sich, dass jede dritte Person keine Verbindung zwischen Mathematik und Nachhaltigkeit sieht. Ferner konnten Wiegand und Borromeo Ferri (2023) drei verschiedene Typen (i. e. Reformer, Mathematiker, Weltverbesserer) von Lehramtsstudierenden in Bezug auf die Umsetzung von BNE im Mathematikunterricht rekonstruieren. Die Überzeugungen dieser unterschiedlichen Typen sollte bei der Konzeption von universitären Lehrveranstaltungen, der Arbeit in den Studienseminaren und Lehrkräftefortbildungen Beachtung geschenkt werden.

Konzeption von Unterrichtsmaterial

Das Bereitstellen von Unterrichtsmaterial stellt nicht nur eine Unterstützung für Lehrkräfte dar. Vielmehr dienen Beispielaufgaben auch der Qualitätssicherung, indem sie Kriterien für gute Aufgaben aufzeigen (Büchter & Leuders, 2009). Dies erscheint uns insbesondere im Rahmen der BNE von herausragender Bedeutung, da in diesem Umfeld (1) durchaus Unterrichtsmaterial bereitgestellt wird, das nicht immer den entsprechenden Ansprüchen einer guten Aufgabe für die Implementation von BNE in den Mathematikunterricht genügt, und (2) oftmals nur aus Selbstzweck – ohne fachdidaktische Fundierung – erstellt wurde und somit wesentliche Elemente eines Best-Practice-Ansatzes gar nicht erfüllen kann.

Ziel guter Aufgaben für den Mathematikunterricht, die gleichsam der Aufforderung einer BNE nachkommen, sollte sein, dass Schülerinnen und Schüler den Wert mathematischer Verfahren und Konzepte für Kontexte der BNE erkennen und erfahren, dass und wie sie diese Verfahren und Konzepte für die eigene Meinungsbildung und auch für die Argumentationen und Diskussionen mit anderen (konsequent) nutzen können. Hierzu gehören insbesondere auch ein Erwerb und eine sinnhafte Anwendung ebendieser Konzepte und Verfahren in unterschiedlichen Kontexten, so dass auch Einschränkungen und/oder Grenzen deutlich werden.

Die von der UNESCO/MGIEP (2017) für die Implementation von BNE in Mathematikbüchern zusammengefassten Kriterien reichen hierfür nicht aus, da sie den mathematischen Kompetenzerwerb nicht angemessen berücksichtigen, sondern ausschließlich den BNE-Kompetenzerwerb fokussieren. Auf diese Weise kann oben genanntes Ziel nicht ausreichend erreicht werden. Entsprechend müssen weitere Kriterien hinzukommen, die den mathematischen Kompetenzerwerb sowie den Nutzen von Mathematik für BNE-Kontexte explizit machen. Diese Forderungen und entsprechend abgeleitete Kriterien sind nicht neu, sondern finden sich bereits mehrfach in der Literatur. So fordern beispielsweise Blomhoj und Kjeldsen (2006) für qualitätsvolle Modellierungsprobleme, dass solche Aufgaben unter anderem aufzeigen, dass die Verwendung mathematischer Verfahren und Konzepte neue Einsichten in die Problemlage bringt und dass sie die Schülerinnen und Schüler in angemessener Weise herausfordern, mit Methoden und Konzepten zu arbeiten, die für ihren mathematischen Lernprozess relevant sind:

> It is a quality if the task [...]
>
> - opens for interesting modelling results. Showing that mathematical modelling can add meaning to the situation and provide new insights into the problem. [...]
> - challenge the students appropriately to work with concepts and methods that are relevant for their mathematical learning. (Blomhoj & Kjeldsen, 2006, S. 167)

Das Heranziehen von Kriterien für Modellierungsaufgaben (z. B. Wiegand (2024) für Modellierungsaufgaben im BNE-Kontext) ist keinesfalls ein Plädoyer dafür, dass nur solche Aufgaben im Rahmen einer BNE einen Kompetenzerwerb ermöglichen. Fakt ist aber, dass Aufgaben für eine BNE eine sachkontextuelle Einbettung benötigen, i. e. einen Kontext der nachhaltigen Entwicklung im Sinne der Nachhaltigkeitsziele, und damit dem Sachrechnen zuzuordnen sind. Dieses kann im Sinne Winters (1994) unterschiedliche Funktionen verfolgen. So sollte neben dem Sachrechnen als Umwelterschließung, dem die oben angesprochenen Modellierungsprobleme zuzuordnen sind, ebenfalls das Sachrechnen als Lernstoff sowie als Lernprinzip anhand von Kontexten der BNE durchgeführt werden, wie z. B. in Wilhelm (2024).

Es bedarf entsprechend Aufgaben unterschiedlicher Komplexität, welche lange bestehende Forderungen bzw. Prinzipien der Mathematikdidaktik, z. B. eben die Umwelterschließung (Vollrath, 1983) in substanziellen Lernumgebungen (Wittmann, 2010), konstruktiv aufgreifen. Insbesondere sollen die Aufgabenkontexte so gewählt sein, dass sowohl mathematische Fähigkeiten erworben werden als auch mehr über den Sachkontext gelernt und die Bedeutung von Mathematik für BNE deutlich wird.

Herausforderungen für die Mathematikdidaktik

Die Integration von BNE in den Mathematikunterricht stellt nicht nur die schulischen Akteure (wie oben dargestellt), sondern auch uns als Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker vor neue Herausforderungen. Um Studierende auf die Implementation von BNE in den Mathematikunterricht vorzubereiten, Referendare auf ihren ersten Schritten in diesem Feld anzuleiten und Lehrkräfte entsprechend weiterzubilden, bedarf es an evidenzbasierten Konzepten, die auf der Grundlage empirischer Studien entwickelt und entsprechend implementiert werden. Auch wenn – oder gerade weil – die Praxis aufgefordert ist, BNE möglichst umgehend in den Unterricht zu implementieren, sollten wir nicht in einen Aktionismus oder gar Lobbyismus verfallen, sondern gemäß unserer Profession handeln. Hierzu nehmen wir im Folgenden die (oben erläuterte) Trias aus Lernenden, Lehrkräften und Unterrichtsmaterial in den Blick:

Lehrkräfte nehmen in der Bildung zukünftiger Generationen eine Schüsselrolle ein, weshalb ihre Weiterbildung zentral für eine positive gesellschaftliche Entwicklung ist, insbesondere bei Themen der Nachhaltigkeit. Im Rahmen von Fortbildungen müssen Lehrkräfte durch Vermittlung sowohl *fachlicher* Grundlagen nachhaltiger Entwicklung (einschließlich der Rolle von Mathematik) als auch spezifischen *fachdidaktischen* Wissens befähigt werden, BNE im Mathematikunterricht umzusetzen. Hierfür sollten bestehende Konzepte verfeinert und inhaltlich ausgestaltet sowie die Umsetzung der Begleitforschung zur empirischen Evaluation der Lehrkräftefortbildung entwickelt werden. Neben der Weiterbildung praktizierender Lehrkräfte ist das Lehramtsstudium von besonderer Relevanz, da hier Studierende auf den Unterricht von Morgen vorbereitet werden. Die wenigsten Universitäten werden aufgrund der zur Verfügung stehenden Zeit didaktischer Angebote eigene fachspezifische Veranstaltungen oder gar Module für BNE implementieren können, sondern BNE wird querschnittlich in die Veranstaltungen zu integrieren sein. Hier sollte also u.a. den folgenden Fragen nachgegangen werden:

- Welche Änderungen in Bezug auf Einstellungen zur Integration von BNE in den Mathematikunterricht nehmen (angehende) Mathematiklehrkräfte nach dem Besuch von Lehrveranstaltungen (mit BNE-Bezug) und spezifischer BNE-bezogener Lehrkräftefortbildungen bei sich selbst wahr?
- Welchen Einfluss hat eine universitäre Lehrkräfteaus- und -fortbildung auf die Einstellung der (angehenden) Lehrkräfte zur fachdidaktischen Forschung sowie zur Zusammenarbeit zwischen Schule und Universität?

Zentrales Ziel bei der Berücksichtigung von Themen der Nachhaltigkeit im Mathematikunterricht ist es, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, als mündige Bürgerinnen und Bürger reflektiert und fundiert Stellung zu nehmen und die Gesellschaft konstruktiv (mit) zu gestalten. Hierzu bedarf es sowohl dem Erwerb mathematischer Fertig- und Fähigkeiten wie auch der Fähigkeit, diese in Kontexten der BNE anzuwenden. Bezogen auf Schülerinnen und Schüler ist daher u. a. empirisch zu analysieren:

- Wie lassen sich BNE-Kompetenzen von Schülerinnen und Schüler fördern? Welche Rolle spielen hierbei die Kontexte und die Aufgabenstellungen?
- Inwiefern wird durch die Bearbeitung den Lernenden der Wert von Mathematik für Fragen der nachhaltigen Entwicklung deutlich?
- Inwiefern verändert die Bearbeitung BNE-spezifischer Mathematikaufgaben das Interesse, die Selbstwirksamkeit u. a. von Lernenden am bzw. im Unterrichtsfach Mathematik?

Für die Lehrkräfteaus- und -fortbildung sowie für die Umsetzung von BNE im Mathematikunterricht bedarf es wie dargestellt Aufgaben, die sowohl den fachlichen und BNE- Kompetenzerwerb fördern als auch den Nutzen von Mathematik für BNE verdeutlichen. Hierbei kann zunächst auf vorhandene Kriterien für gute Aufgaben zurückgegriffen werden. Es ist jedoch aus unserer Sicht sinnvoll, empirisch zu überprüfen:

- Welche Auswirkungen haben bestimmte Operatoren und Formulierungen in Aufgaben auf den fachlichen bzw. BNE-Kompetenzerwerb?
- Wie sollten Aufgaben formuliert sein, die insbesondere das Potential von Mathematik für eine BNE deutlich machen?

Bei allen Bestrebungen und Forschungen sollte darauf geachtet werden, dass das Potential der Mathematik für Themen der nachhaltigen Entwicklung im Fokus steht, denn es gilt, BNE im Fachunterricht zu implementieren - und nicht ein Unterrichtsfach BNE zu konzipieren.

Potential von BNE für die Mathematikdidaktik

Auch wenn die Implementation von BNE in den Mathematikunterricht eine Herausforderung für alle beteiligten Personengruppen, inklusive der Forschenden, darstellt, kann dies auch ein Potential für eine seit langer Zeit schon angemahnten Weiterentwicklung eines zukunftsfähigen Mathematikunterrichts gesehen werden. Um dieses Ziel zu erreichen, sollte zumindest in Teilen über eine Neuorientierung der Inhalte des Mathematikunterrichts nachgedacht werden. Vor dem Hintergrund der disruptiven globalen Ereignisse, deren Bewertung und dem Umgang mit ihnen erhalten einige mathematische Konzepte eine (neue) Bedeutung. Hier einige Beispiele:

- Für das Verständnis der Entwicklungen der Corona-Pandemie und der von der Politik getroffenen Maßnahmen war es notwendig, ein Verständnis für exponentielles Wachstum zu haben (Engelbrecht et al., 2023) – einem Inhalt, der bis dato eher kalküllastig in den Mathematikunterricht integriert und für die Schülerinnen und Schüler mit wenig sinnstiftenden Kontexten wie Algenwachstum belegt war.
- Für zahlreiche Probleme aus dem Kontext der nachhaltigen Entwicklung, beispielsweise dem Zusammenhang zwischen Temperaturanomalien und menschlichem Handeln (Just et al., 2023), ist die Differenzierung von Arten von Zusammenhängen essenziell. Mathematische Konzepte und insbesondere deren Unterschiede wie Korrelation, Kausalität und Regression werden in der Schule bislang in der Regel nicht oder nur qualitativ betrachtet; in den Bildungsstandards werden diese Konzepte weder für den ESA/MSA noch für die allgemeine Hochschulreife genannt, sind aber in den Curricula einiger Bundesländer vorhanden (z. B. ISB, 2024 oder Niedersächsisches Kultusministerium, 2018)
- Die Analyse von Medienberichten, wie es Gal & Geiger (2022) beschrieben, ist eine weitere Möglichkeit den Stellenwert von Mathematik zu verdeutlichen. In der Studie wird deutlich, dass ein Verständnis der schriftlichen Darstellung von Daten zum Verständnis notwendig ist. Zusätzlich zeigt sich, dass eine Beachtung der Datenqualität unumgänglich ist, um die vermittelten (mathematischen und statistischen) Inhalte richtig einschätzen zu können. Insgesamt verdeutlicht diese Analyse den Stellenwert von Mathematik und Daten in Medienberichten und zeigt die Notwendigkeit verschiedener Fähigkeiten des Verstehens, Interpretierens und Evaluierens von medial dargestellten Informationen auf. Ein solch kompetenter Umgang mit Daten ist eine Grundvoraussetzung für „statistisches Mündigwerden" (vgl. Gross & Lengnink, 2024, S. 39), nicht zuletzt, um realen Problemen bzw. Phänomenen im gesellschaftlichen Diskurs folgen zu können.

Das Potential, das diesen oder ähnlichen Aufgabenstellungen sowie realen Problemen oder Phänomenen im Kontext der BNE zugesprochen werden kann, liegt zweifelsohne in der Entwicklung eines kritisch-mathematischen Blicks (Jablonka, 2003), der die Verwendung von Mathematik in der Gesellschaft kritisch reflektiert. So wird die enge Verbindung von Inhalten (im Sinne von Leitideen der Bildungsstandards) und notwendiger prozessbezogener Kompetenzfacetten bzw. Kompetenzen offensichtlich, da die Erarbeitung von Kontexten der nachhaltigen Entwicklung nicht als Produkt erfolgt, sondern im (Unterrichts-)

Prozess umgesetzt wird. Dabei stehen nicht nur technische Fertigkeiten im Fokus, sondern es muss Wert auf den Umgang mit deskriptiven und normativen Modellen, auf Begründungen und Argumentationen in mathematischen Kommunikationssituationen gelegt werden.

Die Notwendigkeit eines verständnisorientierten Umgangs mit Mathematik macht die globalen Herausforderungen unserer Zeit und die damit verbundene Anforderung nach Integration von Kontexten der nachhaltigen Entwicklung in den Unterricht noch deutlicher, als dies wie eingangs zitiert schon vor über 30 Jahren gefordert wurde. Die kalküllastigen Aufgabensammlungen, wie sie von professionellen Anbietern teilweise ohne didaktische Expertise entwickelt, vermarktet und auch in der Schule verwendet werden, rechenlastige Erklärvideos, in denen das Wie, nicht aber das Warum angesprochen wird – wie sie von Lernenden aller Altersklassen genutzt werden – binden derzeit solche wichtigen Kontexte nicht ein – nicht zuletzt weil es ein Mindestmaß an kognitiver Aktivierung von Lernenden bedarf, um sich mit solchen Inhalten auseinanderzusetzen. Vielmehr bedarf es Aufgabenformaten und Lernumgebungen, in denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig auf kreative Weise mathematische Verfahren und Konzepte nutzen können, um zu erkennen, inwiefern Mathematik bei den dargestellten Problemsituationen ein geeignetes Werkzeug darstellt, diese Probleme anzugehen, Ergebnisse zu bewerten und entsprechende Maßnahmen abzuleiten. G. Graumann hat dies bereits 1994 sehr treffend formuliert und sollte von uns allen wieder mehr ins Bewusstsein rücken: „Zusammenfassend ließe sich also sagen, daß die <u>Mathematik uns ein in besonderer Weise elaboriertes Begiffssystem und spezielle Darstellungsformen zur Verfügung stellt, das uns Erklärungshilfen für die Vergangenheit und Handlungsorientierungen für die Zukunft liefert.</u>“ (Graumann, 1994, S. 2, Hervorhebungen im Original).

Literatur

Anwar, Juandi, D., & Ningsih, S. Y. (2020). Education for sustainable development: Investigating the sustainability consciousness and mathematical competence in the geometry for middle school students. *Journal of Physics: Conference Series, 1521*(3) DOI:10.1088/1742-6596/1521/3/032068

Barwell, R. (2018). Some Thoughts on a Mathematics Education for Environmental Sustainability. In Ernest, P. (Hrsg.) *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. DOI:10.1007/978-3-319-77760-3_9

Barwell, R., & Hauge, K. H. (2021). A critical mathematics education for climate change: A post-normal approach. In *Applying critical mathematics education* (pp. 166-184). Brill.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *ZDM – Mathematics Education, 38*(2), 163–177. DOI:10.1007/BF02655887

Büchter, A. & Leuders, T. (2009). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor.

Engelbrecht, J., Borba, M & Kaiser, G. (2023). COVID 19 pandemic – its mathematical background and its social and educational consequences. *ZDM – Mathematics Education, 55*(1).

Gal, I. & Geiger, V. (2022). Welcome to the era of vague news: a study of the demands of statistical and mathematical products in the COVID-19 pandemic media. *Educational Studies in Mathematics, 111*, 5–28. DOI:10.1007/s10649-022-10151-7

Graumann, G. (1994). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung: mit Blick auf Schlüsselprobleme unserer Welt. *Mathematik in der Schule*, *32*(1), 1–7

Groß, J, & Lengnink, K. (2024). Statistisches Mündigwerden – dem Gender Pay Gap auf der Spur. *mathematik lehren*, 245, 39-44

Hallinger, P., & Nguyen, V.-T. (2020). Mapping the landscape and structure of research on education for sustainable development: A bibliometric review. *Sustainability*, *12*(5), 1947. DOI:10.3390/su12051947

Heymann, H. W . (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz.

ISB (Hrsg.). (2024). *LehrplanPLUS Gymnaisum Mathematik Jahrgangsstufe 11*. www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/11/mathematik

Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Hrsg.): *Second international handbook of mathematics education* (S. 75–102). Kluwer Academic Publishers.

Jahnke, T. (1995). Warum sollen Schüler (nicht) Mathematik lernen. *Mathematik in der Schule, 33*(6), 322–328

JMU (2024). *Eine Strategie für mehr Nachhaltigkeit*. www.uni-wuerzburg.de/fileadmin/uniwue/Nachhaltigkeit/Nachhaltigkeitsstrategie_UA.pdf

Just, J., Siller, H.-St. & Vorhölter, K. (2023). Bildung für Nachhaltige Entwicklung im Mathematikunterricht am Beispiel des Themas Klima. *MNU-Journal, 6*, 456–463.

KMK/BMZ (2007). *Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklung*. www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2007/2007_06_00_Orientierungsrahmen_Globale_Entwicklung.pdf

KMK (2023): *Bildung für nachhaltige Entwicklung – Informationen der Länder*. www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/AllgBildung/2023-02-17_BNE-Info-Laender.pdf

KMK (2024). *Empfehlung der Kultusministerkonferenz zur Bildung für nachhaltige Entwicklung in der Schule*. www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2024/2024_06_13-BNE-Empfehlung.pdf

Lafuente-Lechuga, M., Cifuentes-Faura, J. & Faura-Martínez, Ú. (2024). Teaching sustainability in higher education by integrating mathematical concepts. *International Journal of Sustainability in Higher Education, 25*(1). 62–77. DOI:10.1108/IJSHE-07-2022-0221

Li, H. C., & Tsai, T. L. (2021). Education for sustainable development in mathematics education: what could it look like? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(9), 2532–2542. DOI:10.1080/0020739X.2021.1941361

Niedersächsisches Kultusministerium. (2018). *Kerncurriculum Mathematik Sek II*. cuvo.nibis.de/cuvo.php?p=download&upload=208

Reiss, K., Ufer, S., Ulm, V. & Wienholtz, G. (2016). Mathematik. KMK, BMZ & Engagement Global (Hg.) (2016), *Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklung im Rahmen einer Bildung für nachhaltige Entwicklung für die Sekundarstufe 1*. Bonn

Rieckmann, M. (2021). Reflexion einer Bildung für nachhaltige Entwicklung aus bildungstheoretischer Perspektive. *Journal for Religion in Education, 44*(2), 5–16. DOI:10.20377/rpb-153

Siller, H.-St., Günster, S. M. & Geiger, V. (2024). Mathematics as a central focus in STEM – Theoretical and practical insights from a special study program within pre-service (prospective) teacher education. In Y. Li, Z. Zeng & N. Song (Hrsg.): *Advances in STEM education. Disciplinary and interdisciplinary education in STEM* (S. 317–343). Springer Nature Switzerland. DOI:10.1007/978-3-031-52924-5_15

Siller, H.-S., Vorhölter, K., Just, J., Orschulik, A., & Zieriacks, C. (2025a). Empirical differentiation of student competencies in ESD. In *ICMI Study 27*.

Siller, H.-S., Vorhölter, K., Oldenburg, R., Schneider, K., Wagener, M. & Warmeling, A. (2025b). Mathematik. In KMK, BMZ & Engagement Global (Hrsg.): *Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklung im Rahmen einer Bildung für nachhaltige Entwicklung für die Gymnasiale Oberstufe (OR GOS)*. Bonn.

Skovsmose, O. (2020). Critical mathematics education. In Lerman, S. (Hrsg.): *Encyclopedia of mathematics education*. Springer, Cham. DOI:10.1007/978-3-030-15789-0_34

Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer. DOI:10.1007/978-3-031-26242-5;

UN General Assembly (2015). *Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development*. resolution / adopted by the General Assembly, A/70/L.1. https://sdgs.un.org/sites/default/files/publications/21252030%20Agenda%20for%20Sustainable%20Development%20web.pdf

UNESCO (2017). *Education for sustainable development goals: learning objectives*. UNESCO.

UNESCO (2020). *Education for sustainable development: a roadmap*. UNESCO. DOI:10.54675/YFRE1448

UNESCO & MGIEP (2017). *Textbooks for sustainable development*. UNESCO.

Vollrath, H.-J. (1983). Die umwelterschließende Funktion des Mathematikunterrichts. *Pädagogische Welt, 37*, 726–730, 743.

Wals, Arjen E. J. (2011). Learning our way to sustainability. *Journal of Education for Sustainable Development, 5*(2), 177–186. DOI:10.1177/097340821100500208

Wiegand, S. (2024). *Zum Beitrag der mathematischen Modellierung zur Bildung für nachhaltige Entwicklung – ein Leitfaden für den Mathematikunterricht.* RPTU Distance and Independent Studies Center.

Wiegand, S. & Borromeo Ferri, R. (2023). Promoting preservice teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. *ZDM – Mathematics Education, 55*, 1269–1282. DOI:10.1007/s11858-023-01500-8

Wilhelm, K. (2024). *BNE im Mathematikunterricht – Nicht nur eine Frage der Lerninhalte: Der Achtsame Unterricht.* DOI:10.22028/D291-42410

Winter, H. (1994): *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens, Funktionen des Rechnens*. Cornelsen.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 21*(61), S. 37–46.

Wittmann, E. C. (2010). Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule – vom Fach aus. In P. Hanke, G. Möwes-Butschko, A. K. Hein, D. Berntzen, & A. Thieltges (Hrsg.): *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule* (pp. 63–78). Waxmann.

Hans-Stefan Siller, Julius-Maximilians-Universität Würzburg
hans-stefan.siller@uni-wuerzburg.de

Katrin Vorhölter, TU Braunschweig
katrin.vorhoelter@tu-braunschweig.de

Friendly mathematical exercises

Antonella Perucca

Mathematical exercises may fail to be realistic. Eugenia Cheng, for instance, likes to mention a problem where someone goes and buys 75 watermelons. If you think about it, the situation is absurd, unless we are speaking of a catering service that could maybe do such a purchase for real.

Most pupils may not notice the weird scenarios because they are busy solving the problem (for example, calculating the total price). In case they do notice, they might just raise an eyebrow and ignore the matter. Or laugh about it. However, some pupils may be unsettled by an impossible situation or an improbable coincidence, like all apples weighing precisely 200 grams. They might think that the idealisation is, in fact, a *lie*.

Some pupils are less inclined than others to omit details, or they may approach problems with a more practical mindset. They may also have questions that go beyond the scope of the exercise. For instance, in a math problem, it may not matter whether you buy bread at the bakery first or milk at the supermarket. But in real life, it could matter, like if the bakery closing earlier than the supermarket forces you to buy the bread first.

Another issue is the lack of information, which forces pupils to make unspoken assumptions. For example, if you buy 2 apples and then you buy 3 apples, how many apples do you have? Probably, the expected answer is 5. However, did you maybe buy more apples because you have eaten the first two? Or, how many apples did you have prior to these purchases? The average pupil might just play Sherlock Holmes when guessing what the teacher wants to hear.

The oversimplification may be necessary to make the exercises. For example, we may need to assume that two quantities are perfectly proportional. This may force us to assume, for example, that all cows make the same amount of milk, and the same amount of milk every day. To accept that, one can maybe think that we are reasoning with average values.

Occasionally, the teacher could (and should) challenge the pupils to ask all the questions that are usually put under the carpet. This is because the oversimplification and the unspoken conventions may simply kill the critical spirit. It is a crucial ability to focus on the essential, and it is also necessary to simplify overly complex problems, however one should bear in mind what is true and what is an approximation or a simplification or a supposition.

Antonella Perucca, University of Luxembourg
antonella.perucca@uni.lu

Jahresbericht 2024 GDM Schweiz

Esther Brunner und Kathleen Philipp

Jahrestagung

Die Jahrestagung 2024 fand am 19./20. 1. 2024 an der Pädagogischen Hochschule der FHNW auf dem Campus Muttenz statt. Der Rektor der PH FHNW, Prof. Dr. Guido McCombie, begrüsste die Anwesenden sehr herzlich und machte in seinen Grussworten deutlich, dass eine gute solide Weiterbildung und Vernetzung von Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern zentral ist für ein qualitativ hochwertiges Studienangebot an den Pädagogischen Hochschulen. Zur kontinuierlichen Weiterbildung und Vernetzung gehört auch immer wieder ein Blick über den Tellerrand hinaus. Einen solchen wollte die diesjährige Tagung gleich mehrfach ermöglichen, indem sowohl die Einführung in die Tagung durch Esther Brunner sowie die beide Hauptreferate Impulse zu diesem Thema setzen konnten.

Das erste Hauptreferat, das Prof. Dr. Jean-Luc Dorier von der Universität Genève zum Thema „Erlernen der räumlichen Orientierung mit Hilfe einer virtuellen Stadt“ in französischer Sprache anhand von deutschsprachigen Folien hielt, gab einen Einblick über Mathematiklernen im Kompetenzbereich Form & Raum in der Romandie. Das zweite Hauptreferat, das am Nachmittag die Tagung abrundete, wurde von Prof. Dr. Anke Lindmeier von der Friedrich-Schiller-Universität in Jena gehalten und beleuchtete unter dem Titel „Same, same but different?“ Merkmale von mathematischer Unterrichtsqualität aus einer deutschen und einer taiwanesischen Perspektive im Vergleich. Beide Referate ermöglichten Einblicke in Mathematikdidaktik in anderen kulturellen und/oder sprachlichen Kontexten und zeigten eindrücklich die Kontextabhängigkeit von Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in der Unterrichtsgestaltung, aber auch in der Denk- und Handlungsweise von Lehrpersonen bzw. Mathematikdidaktikdozierenden. Auch wenn Mathematik als universale Sprache gilt, ist es mitnichten so, dass ein einheitliches Verständnis von Qualität von Mathematikunterricht vorliegt, was sich dann auch in der Mathematikdidaktik der jeweiligen Kontexte spiegelt.

Am Vor- und am Nachmittag fanden anregende und vielfältige Ateliers von Mitgliedern der GDM Schweiz statt. Bernd Wollring gab einen sehr praktischen Einblick in seine Lernumgebung „Häuschen-Gebiete“, die für Zyklus 1 und 2 konzipiert ist. Georg Bruckmaier beleuchtete in seinem Atelier die numerische Darstellung von Anteilen in Medien und Alltag, während Hans Walser zu „Hands on Geometry“ ein Angebot zum Mitmachen machte. Henrike Allmendiger zeigte in ihrem Atelier „Von der Vorlesung zur Lernlandschaft“ didaktische Elemente für die Lehrpersonenausbildung auf, die aus dem Pilotprojekt „Lerntypen-orientiertes Material“ stammen. Das neue Mathbuch wurde mit seiner Konzeption von Beat Wälti und Martin Lacher vorgestellt und diskutiert. Am Nachmittag beleuchteten Roland Pilous und Christian Rüede das Lernen zu und durch Beweise. Philippe Sasdi und Evelin Putscher befassten sich mit SOL (selbst organisiertes Lernen) im Mathematikunterricht und diskutierten Chancen und Grenzen der Unterrichtsgestaltung mit Mathematikplänen. Esther Brunner und Sanja Stankovic stellten erste Ergebnisse aus der SNF-Studie «DiaMaNt» zu mathematikdidaktischen Kompetenzen und Überzeugungen von Primarstudierenden und ihren Praxislehrperson im Vergleich vor. Wie das Mathematikverständnis in Zeiten von KI gestärkt werden kann, diskutierten Richard Conrardy und Joël Adler, während sich Henrike Allmendinger mit mathematischer Orientierung befasste. Diese interessanten Angebote aus den eigenen Reihen wurden erneut ausserordentlich geschätzt.

Ebenfalls ein Angebot aus den eigenen Reihen, insbesondere des Nachwuchses, stellte die Posterpräsentation vor dem Mittag dar. Es wurden verschiedene Projekte und Qualifikationsarbeiten vorgestellt und mit den Teilnehmenden rege diskutiert.

Nach der Mittagspause in der Mensa – die Kosten für das Essen wurden von der GDM Schweiz übernommen – feierten die Mitglieder der GDM Schweiz das zehnjährige Bestehen der GDM Schweiz als eigenständiger Verein nach Schweizer Recht und Landesverband der GDM. Eigens für diesen Anlass hatte René Schelldorfer, der nicht nur als Mathematiker, sondern auch als Chorleiter und Musiker tätig ist, einen GDM-Schweiz-Song mit dem Titel „Mathe für alli Lüt!“ zur Melodie des Beatles-Songs „Give peace a chance“ (Lennon & McCartney) getextet. Diesen Song studierte er mit den Anwesenden ein und brachte den ganzen

Raum nicht nur zum Mitsingen im Wechsel von zwei Gruppen, sondern schliesslich zu einer Aufnahme des GDM-Schweiz-Jubiläums-Liedes, das sowohl als Notenblatt wie als Audioaufnahme im Mitgliederbereich der Website der GDM Schweiz abrufbar ist. Was für ein ganz besonderes Highlight! Herzlichen Dank, lieber René, für diesen erfrischenden Beitrag!

Im Anschluss fand die Mitgliederversammlung 2024 statt, durch die Esther Brunner führte. Als Stimmenzählende wurden Georg Bruckmaier und Selina Pfenninger gewählt. Die Traktanden der Versammlung wurden speditiv abgewickelt. Die Ergebnisse können im Protokoll der Mitgliederversammlung 2024 der GDM Schweiz nachgelesen werden. Das Protokoll der Mitgliederversammlung 2023 wurde genehmigt, der Jahresbericht der Präsidentin verdankt. Die Rechnung 2023 und das Budget 2024 wurden genehmigt und einem entsprechenden Budgetbetrag für die neue Website zugestimmt. Danach fanden ordentliche Wahlen statt. Esther Brunner, Bernhard Dittli und Gabriela Schürch wurden erneut wiedergewählt für eine weitere Amtsperiode von vier Jahren. Neu wird das Präsidium wieder als Co-Präsidium geführt von Esther Brunner zusammen mit Kathleen Philipp. Auch dieser Antrag des Vorstands fand vorbehaltlose Unterstützung durch die Versammlung. Esther Brunner gab ihr Amt als Mitglied des Beirats der GDM und Schweizer Vertretung weiter an Kathleen Philipp, die dafür von der Versammlung gewählt wurde. Es folgten Informationen zum Joint Degree Master Fachdidaktik Mathematik PHZH/ETH und Uni Basel/PH FHNW. Dazu gaben nicht nur jeweilige Leitungspersonen Auskunft, sondern Absolvierende der beiden Studiengänge. Bettina Lenzner und Marino Schmid erzählten von ihren persönlichen Erfahrungen dieser Studiengänge. Eine letzte Information folgte zum Programm MatheTalk 2, einem PgB-Projekt der PHZH und PHTG in Zusammenarbeit mit der GDM Schweiz. Unter dem Traktandum Verschiedenes wurden noch Termine für die kommenden Tagungen bekanntgegeben.

Nach der Mitgliederversammlung folgten die zweite Runde der Ateliers und der zweite Hauptvortrag, bevor die Tagung dann bei einem sehr reichhaltigen Apéro, offeriert von der PH FHNW, in der Lounge im 12. Obergeschoss des Campus Muttenz ausklang.

Das bewährte Konzept aus 2023 mit der Jahrestagung am Freitag und einem fakultativen Workshopangebot am Samstagvormittag wurde auch diesmal weitergeführt. Am Samstagvormittag standen für ca. 25 Teilnehmende zwei fakultative Workshopangebote zur Wahl: Karin Kucian erläuterte neuropsychologische Grundlagen der Dyskalkulie und Anke Lindmeier vertiefte zusammen mit ihrer Mitarbeiterin Josephine Paul die Themen aus dem Hauptreferat vom Freitag anhand von Noticing-Vignetten und ihrem Einsatz in der interkulturell-vergleichenden Forschung.

Ein besonderer Dank geht an Kathleen Philipp für die Einladung an die PH FHNW, Standort Campus Muttenz und ihre grosse Arbeit für die Organisation der Tagung.

Fachdidaktische Diskussion

Am 19. 9. 2024 fand eine Fachdidaktische Online-Diskussion zu einem sehr aktuellen und relevanten Thema statt: Prof. Dr. Benjamin Rott aus Köln referierte zunächst zum Thema „KI im Bildungswesen: ein Versuch, die Folgen abzuschätzen“ und eröffnete damit zum einen sehr fundiert Perspektiven und zeigte zum anderen auch an konkreten Beispielen Chancen und Möglichkeiten, aber auch entsprechende Grenzen. Im Vortrag spannte Benjamin Rott das Feld breit auf und zeigte sowohl Anwendungen und Auswirkungen für die mathematikdidaktische Lehre und Forschung durch gezielte Nutzung dieser Werkzeuge. Die Folien des Vortrags sind für die Mitglieder im internen Bereich verfügbar.

Diese Grundlagen aus dem Impulsreferat wurden anschliessend in vier thematischen virtuellen Gruppen vertiefend diskutiert: Die erste Gruppe befasste sich mit „KI in der mathematikdidaktischen Lehre (Hochschullehre)“, die zweite Gruppe fokussierte „KI im Zusammenhang mit der berufspraktischen Ausbildung“, während sich die dritte Gruppe mit „KI in der mathematikdidaktischen Forschung“ befasste und die vierte Gruppe „KI in der Schule“ zum Gesprächsanlass nahm.

Zu den Ergebnissen der Gruppendiskussionen liegt im internen Bereich der Website ein kurzer zusammenfassender Bericht vor.

Vorstandssitzungen und Geschäfte

Der Vorstand traf sich auch in diesem Jahr zu insgesamt sechs Sitzungen. Fünf Sitzungen wurden in Form von Videokonferenzen durchgeführt, was sich sowohl bezüglich Terminfindung wie auch zeitlichem Aufwand für den Vorstand bewährt. Die Sitzung im Frühsommer fand vor Ort in Zürich in Präsenz statt und schloss mit einem gemeinsamen Nachtessen der Vorstandsmitglieder und den kürzlich aus Ämtern verabschiedeten Kolleginnen und Kollegen.

Die erste Sitzung im Februar stand im Zeichen der Festlegung des Jahresprogramms, des Rückblicks auf die durchgeführte Jahrestagung vom Januar sowie eines Ausblicks auf Jahrestagungen 2025–2026. Anlässlich der zweiten Sitzung im März wurden Ideen für eine fachdidaktische Diskussion diskutiert und der Anlass konkretisiert. Als weiteres gewichtiges Thema wurde die neue Website, wie sie von Bernhard Dittli in enger Zusammenarbeit mit einer Webdesignerin und nach Klären der Rahmenbedingungen mit Esther Brunner ab Jahrestagung in einem ersten Entwurf vorlag, diskutiert. Zahlreiche Optimierungsvorschläge seitens der Vorstandsmitglieder konnten aufgenommen und umgesetzt werden. Zudem wurde immer wieder kostenbewusst auf das Machbare innerhalb dieses Rahmens, der im Budget 2024 dafür festgelegt worden war, fokussiert. Bernhard Dittli leistete im Zusammenhang mit der neuen Website einen sehr grossen Einsatz, der entsprechend herzlich von den Vorstandsmitgliedern verdankt wurde. Das Thema Website war denn auch erneut Gegenstand der dritten Vorstandssitzung Ende April. Weiter konnte die Örtlichkeit für die Jahrestagung 2027 (PH Schwyz) festgelegt werden. Gearbeitet wurde zudem an der Jahrestagung 2025 sowie an der geplanten Fachdidaktischen Diskussion im Herbst. Anlässlich der vierten Vorstandssitzung vom Juni sowie der fünften vom September waren erneut diese Geschäfte (Jahrestagung, Fachdidaktische Diskussion, Neue Website) Thema. In der vierten Sitzung gab Eliane Liechti zudem einen Einblick in ihren neuen Arbeitsbereich als Präsidentin der AG Mathematikdidaktik der SGL. Zudem gab Esther Brunner einen Ausblick auf das laufende PgB-Projekt der PHZH und PHTG in Zusammenarbeit mit der GDM zu Weiterbildungsangeboten für Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker. Die fünfte Vorstandssitzung befasste sich nebst den ordentlichen Themen mit der Präsentation unseres Vereins GDM Schweiz, die Esther Brunner anlässlich einer Sitzung der KOFADIS gehalten hatte. Auch an der sechsten Sitzung wurden Fragen zur Jahrestagung 2025 sowie zur neuen Website bearbeitet.

Weitere Anlässe und Sitzungen

Der Beirat der GDM traf sich an zwei mehrstündigen Sitzungen (eine in Präsenz im März und eine online im Oktober), um diverse Geschäfte zu diskutieren. Zudem fanden verschiedene Absprachen zu Stellungnahmen usw. auf dem schriftlichen Weg statt. Als Schweizer Vertretung im Beirat der GDM hat Kathleen Philipp daran teilgenommen.

Die KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz) lud zu einer Online-Sitzung Anfang September ein. An dieser wurden die einzelnen Fachvereine bzw. -verbände präsentiert. Esther Brunner übernahm diese Präsentation für die GDM Schweiz und gab einen Einblick in die Arbeit im Vorstand, die Ziele des Vereins sowie übergreifende Anliegen, die im Rahmen der KOFADIS bearbeitet werden sollten.

Dank

Auch in diesem Kalenderjahr konnte die GDM Schweiz immer auf die tatkräftige und konstruktive Unterstützung der Mitglieder zählen, sei es durch das Anbieten eines Ateliers an der Jahrestagung, durch die Teilnahme an verschiedenen Anlässen, durch Hinweise und Informationen aus einzelnen PHs an alle oder durch Rückmeldungen und Vorschläge, die uns weiterbringen. Ganz besonders zu erwähnen sind in diesem Jahr Bernhard Dittli, der im Zusammenhang mit der neuen Website einen riesigen Aufwand leistete sowie Kathleen Philipp, die für eine perfekt organisierte, gelungene Jahrestagung im Campus Muttenz sorgte. Ein weiterer, sehr herzlicher Dank geht an Eliane Liechti von der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik der SGL. Eliane vertritt diese befreundete Gesellschaft neu bei uns im Vorstand der GDM CH und wir blicken auf eine sehr konstruktive und gelungene Zusammenarbeit zurück.

Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau
esther.brunner@phtg.ch

Kathleen Philipp, Fachhochschule Nordwestschweiz
kathleen.philipp@fhnw.ch

Neues aus der Nachwuchsvertretung

Lisa Birk, Niclas Bradtke, Josephine Paul und Gerrit Loth

Erneut liegt ein ereignisreiches Jahr hinter uns, aus dem wir als Nachwuchsvertretung gerne berichten. Den Ausgangspunkt für unseren Beitrag stellt das Herbsttreffen dar, zu welchem wir uns im Oktober 2024 an der Universität Kassel trafen. Auf dem Herbsttreffen haben wir vergangene Aktivitäten reflektiert und Neues geplant. Außerdem haben wir neue Strukturen für unsere zukünftige Arbeit geschaffen.

Zunächst möchten wir jedoch den Mitgliedern danken, die uns beim Herbsttreffen verlassen haben. Dr. Sara Becker, Marco Böhm und Franziska Tilke haben die Nachwuchsvertretung viele Jahre unterstützt und bereichert. Vielen Dank an euch! Gleichzeitig konnten wir vier neue Mitglieder für unsere Arbeit gewinnen. So sind zum Herbsttreffen Hannes Eirund, Lena Jaeger, Dr. Michael Fischer und Valerie Wachter zu uns gestoßen. Wir freuen uns auf die gemeinsame Arbeit! Auch im Team der Sprecher/innen gab es Veränderungen. Nach einer spannenden Wahl ist Malina Abraham nun Sprecherin der Nachwuchsvertretung. Bis zur bald anstehenden GDM-Tagung 2025 in Saarbrücken agiert das Team der Sprecher/innen zu dritt. Auf der Tagung wird Malina Abraham dann Gerrit Loth im Amt ablösen. Im weiteren Beitrag blicken wir nun auf die vergangenen Aktivitäten zurück und bieten eine Vorschau auf Anstehendes.

Foto: Josephine F. Paul

Gruppenbild vom Herbstreffen an der Universität Kassel

Onlineangebote der Nachwuchsvertretung

Während in der Vergangenheit die Onlineangebote für Promovierende und PostDocs in verschiedenen Arbeitsgruppen geplant und umgesetzt wurden, haben wir diese nun zusammengelegt, um Ressourcen zu bündeln und Synergien zu nutzen. So boten wir auch in diesem Jahr einige digitale Veranstaltungen für Promovierende und PostDocs an. Den Anfang machten Dr. Stephanie Kron und Theresa Büchter aus der Nachwuchsvertretung, die insbesondere neu gestartete Promovierende zum Gespräch über den Einstieg in die Promotion einluden. Prof. Dr. Benjamin Rott ermöglichte einen Einblick in das wissenschaftliche Publizieren für Promovierende als auch für PostDocs. Der *Posterworkshop* von Malina Abraham und Ömer Arslan, ebenfalls aus der Nachwuchsvertretung, gab den Teilnehmenden bereits einen kleinen Vorgeschmack auf die nahende GDM 2025 in Saarbrücken. Dieses Angebot bieten wir nun jährlich im Winter an, um die Promovierenden dabei zu unterstützen, schon früh mit einem Poster in der Community sichtbar zu werden. Den Abschluss der diesjährigen Vortragsreihe machte Prof. Dr. Karin Binder, die für mögliche Manipulationen bei der Auswertung quantitativer Daten sensibilisierte. Wir danken allen Vortragenden herzlich für die spannenden Vorträge. Wir freuen uns bereits sehr auf die Angebote im kommenden Sommer, deren Ankündigung bald über unseren Doktoranden- bzw. PostDoc-Verteiler erfolgt.

Nachwuchsprogramm zur Jahrestagung der GDM 2025

Auf der Jahrestagung der GDM 2025 in Saarbrücken wird erneut ein umfangreiches Programm für den wissenschaftlichen Nachwuchs angeboten.

Nachwuchstag

Bereits am Sonntag, den 2. März, beginnt der GDM-Nachwuchstag wie in jedem Jahr vor dem offiziellen Start der Tagung. Hier bieten wir am ersten Tag verschiedene Workshops zu den Themen *wissenschaftliches Schreiben*, *Vorträge halten*, *Selbst- und Zeitmanagement*, *Open Science*, *Umgang mit Literatur* und *Nutzung von KI im Arbeitsalltag von Forschenden* an. Weiterhin besteht die Möglichkeit, sich mit anderen aus dem wissenschaftlichen Nachwuchs im Rahmen eines thematischen und methodischen Networkings zu vernetzen. Zudem können im Rahmen des Nachwuchstages die eigenen Tagungsbeiträge bereits probeweise vorgestellt werden, um in geschütztem Rahmen Feedback zu erhalten – dies ist in diesem Jahr erstmalig sowohl für Vorträge als auch für Posterbeiträge möglich. Für eine gute Vorbereitung auf den Posterbeitrag fand daher auch schon der oben erwähnte *Posterworkshop* im Rahmen der Online-Angebote statt. Nach Abschluss des inhaltlichen Programms am Sonntag gehen wir gemeinsam zum Abendessen in das *AC-Café* direkt auf dem Campus in Saarbrücken.

Der Nachwuchstag wird am Montag, den 3. März, fortgesetzt. Am Montagmorgen können die Teilnehmenden einen weiteren Workshop besuchen und auch für Probebeiträge ist ein weiterer Zeitslot eingeplant. Im Anschluss daran findet mit allen Teilnehmenden des Nachwuchstages eine Talkrunde mit bereits promovierten Mathematikdidaktiker/innen statt, bei der Fragen zu den Themen Promotion und Karrierewege gestellt werden können. Zu Gast sind Dr. Jonas Lotz, der als Gymnasiallehrer arbeitet, und Prof. Dr. Susanne Schnell, Universitätsprofessorin an der Universität Frankfurt. In einer gemeinsamen Abschlussrunde wird der Nachwuchstag beendet und wir starten gemeinsam in die Jahrestagung!

Alle aktuellen Informationen zu unseren Angeboten sind auf der Homepage der GDM-Tagung 2025 zu finden: gdm-tagung.de/Nachwuchstag

Wir von der GDM-Nachwuchsvertretung freuen uns sehr, euch junge Nachwuchswissenschaftler/innen auf der GDM 2025 kennenlernen zu dürfen.

Diejenigen, die dieses Jahr leider keinen Platz erhalten haben oder gerade erst ihre Promotion beginnen, dürfen sich schon auf den nächsten Nachwuchstag auf der Jahrestagung 2026 in Wuppertal freuen.

Nachwuchsprogramm während der Tagung

Neben dem Nachwuchstag gibt es auch während der GDM-Jahrestagung 2025 Veranstaltungen für den wissenschaftlichen Nachwuchs. Insbesondere für den fortgeschrittenen Nachwuchs (fortgeschrittene Promovierende, PostDocs und Juniorprofessor/innen) hält Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski einen Workshop zur *Antragstellung bei der DFG*. Prof. Dr. Kirstin Erath bietet einen Workshop zum *Halten didaktischer Vorlesungen* und Prof. Dr. Aiso Heinze zum *wissenschaftlichen Publizieren* an. Zudem gibt es im Rahmen eines *Networkings für PostDocs* die Möglichkeit zum Austausch und zur Vernetzung. Hier sind auch erfahrene Forschende anwesend, um bei Bedarf von ihren Erfahrungen zu berichten. Angedacht ist ein offener Austausch zu Themen wie die Bewerbung auf Juniorprofessuren, Vereinbarung von Karriere und Familie und anderen Punkten, die euch derzeit beschäftigen. Die genauen Termine aller Angebote können dem aktuellen Tagungsprogramm entnommen werden: gdm-tagung.de/programmheft

Um den Austausch zu fördern, wird auf der Jahrestagung der GDM 2025 zum ersten Mal ein Treffen des gesamten Nachwuchses stattfinden. Hier stellen wir uns als Nachwuchsvertretung vor und erläutern Themen, die uns aktuell umtreiben. Außerdem möchten wir dem wissenschaftlichen Nachwuchs die Gelegenheit bieten, Wünsche und Impulse für unsere Arbeit mit uns zu teilen. Direkt im Anschluss an das Nachwuchstreffen gehen wir gemeinsam zum *Kneipenabend* in die *L'Osteria*. Der gesamte wissenschaftliche Nachwuchs ist herzlich eingeladen, am Austauschtreffen und dem Kneipenabend teilzunehmen.

Wir bedanken uns herzlich bei allen Vortragenden und dem Planungsteam der Universität des Saarlandes für die Unterstützung beim Nachwuchsprogramm vor und während der GDM-Jahrestagung!

Karrierewege nach der Promotion

Während der Promotion und insbesondere am Ende dieser Phase stellen sich viele Nachwuchswissenschaftler/innen immer wieder Fragen zu möglichen Karrierewegen nach der Promotion. Soll ich in der Wissenschaft bleiben? Zieht es mich in die Schule oder vielleicht in eine ganz andere Richtung? Mit einer Promotion in der Mathematikdidaktik stehen uns viele verschiedene Karrierewege offen, die allerdings häufig im Verborgenen bleiben, wenn sie nicht unmittelbar an die Schule oder die Universität führen. In den beiden vergangenen Ausgaben der Mitteilungen der GDM haben wir bereits über unser Ziel berichtet, verschiedene Karrierewege mit einer mathematikdidaktischen Promotion abzubilden und somit jungen Wissenschaftler/innen einen Einblick in potenzielle (auch außerwissenschaftliche) berufliche Laufbahnen zu geben. Inzwischen haben uns viele spannende Rückmeldungen erreicht, die Einblicke in verschiedene Karrierewege, beispielsweise in die Jugendseelsorge oder die Bildungsadministration, geben. An dieser Stelle möchten wir ein großes Dankeschön an alle aussprechen, die ihre Karrierewege mit uns geteilt haben. Die Karrierewege werden zeitnah auf unserer Homepage präsentiert.

Auch wenn wir schon einige spannende Karrierewege sammeln konnten, freuen wir uns natürlich weiterhin über Ihre Beiträge: Haben Sie einen außergewöhnlichen Karriereweg eingeschlagen? Üben Sie oder haben Sie einen Beruf ausgeübt, der auf den ersten Blick außerhalb der Mathematikdidaktik liegt, etwa in Ministerien, Schulbuchverlagen oder der Wirtschaft? Dann freuen wir uns, wenn Sie Kontakt zu uns aufnehmen (Mail an lisa.birk@uni-muenster.de), um auch Ihre Erfahrungen zu teilen. Wir freuen uns auf spannende Einblicke und bedanken uns im Voraus herzlich für Ihre Unterstützung.

Umstrukturierungen in der Nachwuchsvertretung

Zu guter Letzt möchten wir noch von zwei neu geplanten Umstrukturierungen berichten. Eine Umstrukturierung betrifft die *GDM-Nachwuchskonferenz*. Diese war in ihrer Anfangszeit eine Veranstaltung, die maßgeblich in Kooperation des jeweiligen austragenden Standortes und der Nachwuchsvertretung geplant wurde. Mit den Jahren ist die inhaltliche Planung zunehmend in die Verantwortung des ausrichtenden Standortes übergegangen, während die Nachwuchsvertretung für die Standortsuche verantwortlich war. In Zukunft möchten wir als Nachwuchsvertretung die Standorte wieder mehr in der inhaltlichen Planung unterstützen und haben daher eine Arbeitsgruppe Nachwuchskonferenz gebildet.

Eine weitere neu gebildete Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit der Umstrukturierung unseres Angebots zur Vertrauensprofessur. Das wertvolle Konzept der Vertrauensprofessur möchten wir in Zukunft noch weiter optimieren. Hier werden demnächst alle Neuerungen bekannt gegeben. An dieser Stelle danken wir allen, die diese wichtige Aufgabe bereits übernommen haben. Prof. Dr. Regina Bruder, Prof. Dr. Rudolf Sträßer und Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, vielen Dank für euer Engagement.

Anregung und Feedback

Wir freuen uns stets auf Ideen, Impulse und Wünsche aus allen Richtungen der GDM. Insbesondere freuen wir uns über Vorschläge für Beiträge auf unseren Angeboten der Jahrestagungen oder den digitalen Angeboten zwischen den Jahrestagungen. Auch über Initiativen zur Ausrichtung einer Nachwuchskonferenz sind wir sehr dankbar. Bei Interesse können Sie und könnt ihr uns sehr gern unter folgender E-Mail-Adresse kontaktieren: nachwuchsvertretung@didaktik-der-mathematik.de

Lisa Birk, Universität Münster
lisa.birk@uni-muenster.de

Niclas Bradtke, Universität Kassel
nbradtke@mathematik.uni-kassel.de

Josephine F. Paul, FAU Erlangen-Nürnberg
josephine.paul@fau.de

Gerrit Loth, Universität Vechta
gerrit.loth@uni-vechta.de

Jahrestagung der GDM 2025 – „Großes entsteht immer im Kleinen“

Saarbrücken, 3. 3.–7. 3. 2025

Die 58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik findet vom 3. 3. 2025 bis 7. 3. 2025 an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken statt. Am Nachmittag des 2. 3. 2025 und am Vormittag des 3. 3. 2025 geht ein Nachwuchstag mit einem breit gefächerten Workshop- und Beratungsangebot für junge Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler der Mathematikdidaktik voraus. Neben der wissenschaftlichen Weiterqualifizierung steht dabei das Vernetzen mit und Kennenlernen von anderen Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftlern im Fokus.

Bei der GDM-Tagung 2025 wird in Saarbrücken ein besonderes Jubiläum gefeiert: Die GDM wurde 1975 in Saarbrücken während der 9. Bundestagung für Didaktik der Mathematik gegründet. Das 50-jährige Jubiläum wollen wir 2025 unter dem saarländischen Motto „Großes entsteht immer im Kleinen“ feiern und dabei Bezüge zur damaligen Tagung herstellen sowie die Entwicklung der Mathematikdidaktik in den letzten 50 Jahren in den Fokus nehmen. Wir freuen uns auf inspirierende und spannende Hauptvorträge von Andrea Hoffkamp, Katja Krüger, Franziska Perels, Andreas Stylianides und Anna-Marietha Vogler sowie 20 Minisymposien, 14 Arbeitskreise, zwei Diskussionsforen sowie

Foto: BeckerBredel Fotografen

Der Saarbrücker Campus aus der Vogelperspektive auf über 200 Einzelvorträge, über 50 Kurzvorträge und 50 Poster.

Durch den ErLe-Tag am Donnerstag wird ein Transfer wissenschaftlicher Erkenntnisse in die praktische Umsetzung initiiert sowie ein Austausch zwischen Forschung und Praxis gefördert.

Zudem wird ein abwechslungsreiches Rahmenprogramm, bestehend aus Begrüßung und Eröffnung sowie Eröffnungsabend mit Posterausstellung am Montag, Ausflugsprogramm am Mittwochnachmittag, Mitgliederversammlung und Gesellschaftsabend am Donnerstag und Abschluss am Freitag, angeboten. Auf der Tagungswebsite erhalten Sie weitere Informationen zur Anreise und zum Ablauf der Tagung: www.gdm-tagung.de

Wir freuen uns, Sie schon bald bei uns in Saarbrücken begrüßen zu können!

Bei Fragen und/oder Anregungen können Sie uns gerne jederzeit per E-Mail erreichen.

Das lokale Organisations-Team der GDM 2025
in Saarbrücken
gdm2025@math.uni-sb.de

Einladung zur Mitgliederversammlung im Rahmen der GDM-Jahrestagung 2025

Saarbrücken, 6. 3. 2025

Ort: Universität des Saarlandes
Günter-Hotz-Hörsaal im Gebäude E2 2
Beginn: 16.00 Uhr

Tagesordnung

TOP 1. Beschluss der Tagesordnung, Bestätigung des Protokolls
TOP 2. Bericht des Vorstands
TOP 3. Bericht der Kassenführung und der Kassenprüfung
TOP 4. Entlastung des Vorstands
TOP 5. Vorgehen zur Verwendung von GDM-Mitteln
TOP 6. Beitragsfestsetzung 2025
TOP 7. Tagungskonzept 2027
TOP 8. Wahl zur Kassenprüfung
TOP 9. Wahlen zum Vorstand
  TOP 9.1 Wahl der/des 1. Vorsitzenden
  TOP 9.2 Wahl zur Kassenführung
TOP 10. Wahlen zum Beirat
TOP 11. GDM-Jahrestagung 2026 in Wuppertal
TOP 12. Zeitschriften
TOP 13. Verschiedenes

Sebastian Schorcht, Schriftführung der GDM
schriftfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

Arbeitskreis: Frauen, Gender & Diversity und Mathematik

Augsburg und online, 10./11. 10. 2024

Renate Motzer und Lara Gildehaus

Am Donnerstag, den 10. 10. 2024 trafen sich die Teilnehmenden des diesjährigen Arbeitskreistreffens, zum großen Teil vor Ort in Augsburg, zum Teil vor ihren Laptops, zu dem von Renate Motzer (Universität Augsburg) vorbereiteten hybriden Treffen, der 35. Herbsttagung des Arbeitskreises. Insgesamt waren fünf Forschungsvorträge, zwei Diskussionsbeiträge und ein Best-Practice Projekt als buntes Programm für die zwei Tage geplant.

Im ersten Vortrag berichtete Johanna Kerres (Uni Bielefeld) von ihrem Forschungsprojekt zur *Gendersensiblen informatischen Bildung im Mathematikunterricht der Grundschule*.

Das informatische Selbstkonzept ist schon vor dem ersten Kontakt mit informatischen Inhalten in der Schule je nach Gender unterschiedlich ausgeprägt. So haben Mädchen tendenziell ein geringeres informatisches Selbstkonzept als ihre gleichaltrigen Mitschüler – Erklärungsansätze finden sich in Sozialisationsprozessen. Um diesem Trend entgegenzuwirken und somit gleiche Voraussetzungen für das weiterführende Lernen zu schaffen, sollten Mädchen früh positive Erfahrungen im Umgang mit Informatik machen. Eine mögliche Einbettung informatikbezogener Themen in der Schule kann im Mathematikunterricht geschehen. Im Sinne der fachdidaktischen Entwicklungsforschung wurde dazu theoriegeleitet eine gendersensible Unterrichtsreihe zum Thema „Programmieren im Mathematikunterricht der Grundschule“ mit der App Scratch Junior entwickelt. Diese wurde in mehreren Zyklen empirisch untersucht und weiterentwickelt. In diesem Vortrag wurde die Begleitforschung zum informatischen Selbstkonzeptes der Kinder aller Gender fokussiert, welche sich durch die Beschäftigung mit informatischen Themen im Mathematikunterricht der Grundschule verändert: In den experimentellen Klassen, die an der Unterrichtsreihe teilgenommen hatten, zeigte sich im Post-Test kein signifikanter Unterschied im informatischen Selbstkonzept mehr.

Als zweite trug Wiebke Neumann (FU Berlin) vor über *Heuristische Lösungsbeispiele in der Hochschulausbildung von Grundschullehrkräften – Gestaltung und Einsatz zur Verbesserung der Begründungskompetenz.*

Im grundlegenden Mathematikmodul an der Freien Universität Berlin berichten angehende Grundschullehrkräfte, insbesondere Studentinnen, auch im Sommersemester 2024 von Herausforderungen bei der Bewältigung der (Haus-)Aufgaben. Besonders anspruchsvoll empfinden sie Aufgaben, bei denen auf verschiedenen Begründungsniveaus, kurz BGN, argumentiert werden muss.

Heuristische Lösungsbeispiele bieten einen vielversprechenden Ansatz, um die Begründungskompetenz der Studierenden zu fördern und gleichzeitig die kognitive Belastung zu reduzieren. Die Lösungsbeispiele machen neben der Lösung (als Produkt) auch den Prozess dorthin sichtbar.

Bei der Konzeption dieser Beispiele sind Gestaltungsprinzipien wie Segmentierung, Selbsterklärungsaufforderungen und Reflexionsaufträge von zentraler Bedeutung, um den Lernprozess zu unterstützen.

Im Vortrag wurden sowohl ein entwickeltes heuristisches Lösungsbeispiel als auch das geplante Studiendesign vorgestellt, anhand dessen die Integration dieser Beispiele in das Tutoriums-Konzept des Mathematikmoduls untersucht und ihr Einfluss auf die Begründungskompetenz sowie affektive Merkmale in Bezug auf die Mathematik analysiert werden soll.

Nach einer diskussionsreichen Kaffeepause stellte dann Elena Makarova (Uni Basel) aus der pädagogischen Psychologie ihre Untersuchungen zu *Geschlechtsspezifischen Konnotationen mathematisch-naturwissenschaftlicher Schulfächer und ihren Wirkungen* vor.

Das Referat untersuchte die geschlechtsspezifischen Konnotationen von mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulfächern und deren Auswirkungen auf die Studienwahl im MINT-Bereich. Es wurden vier zentrale Fragestellungen beleuchtet: Erstens, mit welchem Geschlecht mathematisch-naturwissenschaftliche Fächer assoziiert werden; zweitens, wie solche geschlechtsspezifischen Zuschreibungen die Wahl von MINT-Studiengängen beeinflussen; drittens, welche Überzeugungen angehende Lehrpersonen hinsichtlich der mathematischen Kompe-

Foto: R. Motzer

Abschlussfoto am Freitag

tenzen von Schülerinnen und Schülern haben und inwieweit diese Überzeugungen mit traditionellen Geschlechterrollen übereinstimmen; und viertens, welche Herausforderungen in der Gendersensibilisierung innerhalb der Lehrpersonenausbildung in MINT-Fächern bestehen. Insgesamt wurde so die Bedeutung von Geschlechterbildern im MINT-Bereich beleuchtet und die damit verbundenen Herausforderungen in der Lehrpersonenausbildung ausführlich diskutiert.

Zum Abschluss des Donnerstages stellte Lara Gildehaus (Uni Klagenfurt) in einem Diskussionsbeitrag Überlegungen und den Planungsstand zum geplanten Drittmittelantrag *Menschen machen Mathematik – Einblicke zum Status Quo* vor. Dabei ging es um das auch in Zusammenarbeit mit der DMV-Fachgruppe Gender, Diversity & Sustainability entwickelte Anliegen einer „Status Quo Befragung" zur aktuellen Situation von Mathematiktreibenden. Was motiviert eine solche Befragung? Was sind Ziel und Anliegen? Und wie kann das organisatorisch durchgeführt werden? Diese Fragen wurden intensiv unter den Teilnehmenden diskutiert, unstrittig war dabei der dringende Bedarf an einer soliden Datenbasis für weitere Forschungen und Maßnahmen.

Ein anschließendes gemeinsames Abendessen ermöglichte dann weiteren Austausch und Vernetzung.

Der Freitagmorgen stand zunächst unter dem Thema *Mathematische Grundkonzepte allen verständlich machen*. Ingrid Kasten aus Nottuln stellte ihre Überlegungen zu einem *besonderen Unterrichtskonzept für den Mathematikunterricht in der Grundschule* vor und erprobte als Best-Practice Beispiel mit den Teilnehmenden das Rechnen mit Maßband und Stäbchen.

Ausgangspunkt ihrer Überlegungen waren die verschiedenen Vergleichsuntersuchungen und viele Unterrichtserfahrungen, die zeigen, dass der allgemeine und mathematische Kenntnisstand von Grundschüler:innen durchaus besorgniserregend ist. Zielsetzung sollte es sein, Eigenständigkeit und Selbständigkeit der Arbeitsweise sowie Korrektheit der Ergebnisse im Mathematikunterricht zu erreichen. Dazu wurde von Ingrid Kasten ein „ganzheitliches didaktisches Konzept" vorgestellt, anhand dessen sie mit Stäbchen und Maßband ausgerüstet den Mathematikunterricht der Grundschule durchkämmt und dabei auch möglichst unabhängig von Sprachkenntnissen agiert, um auch Lernenden mit Deutsch als Zweitsprache gerecht zu werden.

Von den Grundschulkindern leitete Madita Frühauf von der FU Berlin (in Zusammenarbeit mit Bettina Hannover) auf die Grundschullehramtsstudierenden über. Ihre Fragestellung ist: *Wie hängt die Mathematikangst von Lehrkräften mit ihrem interpersonellen Verhalten zusammen? Eine empirische Untersuchung unter Berücksichtigung des Geschlechts* soll dies herausfinden.

Viele Lernende sind in dem Fach Mathematik mit der Emotion Angst konfrontiert, wobei Frauen bzw. Mädchen in besonderer Weise betroffen sind. Dabei berichten nicht nur Schüler:innen, sondern auch (angehende) Lehrkräfte von mathematikbezogener Angst (MA). Einige wenige Studien zeigten zudem, dass die MA von Lehrkräften auch das Lernen von Schüler:innen negativ beeinflussen kann, jedoch bleibt dabei unklar, über welche Mechanismen sich die MA der Lehrkraft auf die Schüler:innen auswirkt. Madita Frühauf und Bettina Hannover verfolgen die Annahme, dass sich die MA der Lehrkraft in ihrem interpersonellen Verhalten gegenüber den Schüler:innnen äußert. Dabei beschreiben sie interpersonelles Verhalten gemäß der Interpersonal Theory von Leary (1957) in einem Circumplex auf den Dimensionen Communion (Wärme, Zugewandtheit) und Agency (Lenkung, Kontrolle). In einer Feldstudie (Studie 1; $n = 42$ Mathematik-Grundschullehrkräfte und $n = 961$ Grundschüler:innen) und einem Experiment (Studie 2; $n = 172$ angehende Mathematik-Grundschullehrkräfte) untersuchten sie, in welcher Weise sich die MA der Lehrkräfte in der Communion und Agency ihres interpersonellen Verhaltens gegenüber Schüler:innen äußert und welche Rolle das Geschlecht der Lehrkraft in diesem Zusammenhang spielt. Im Vortrag wurden die Ergebnisse in Hinblick auf Geschlechtsstereotype diskutiert und im Hinblick darauf, wie Lehrkräfte für Schüler:innen günstige Emotionsregulationsstrategien im Umgang mit MA erwerben können.

Der nächste Impuls des Freitagvormittags war dann ein weiterer Diskussionsbeitrag und *Erfahrungsaustausch: Wo stehen wir bzgl. Gleichstellung und Diversity in Berufungen?*, den Christine Scharlach (FU Berlin) anstieß. Obgleich sich in den letzten 30 Jahren vor allem einige formale Vorgaben zur Gleichstellung in Berufungsverfahren geändert haben, hält sich mitunter ein Eindruck, dass diese an der konkreten Umsetzung wenig ändern und weiterhin wenig Wissen und Bewusstsein zum Thema Gleichstellung vorhanden sind. Diesen Eindruck teilten und diskutierten die Teilnehmenden, woraus sich auch konkrete Anregungen wie konstruktiv auf Veränderungen hingewirkt werden kann, ergaben.

Als letzter Input am Freitag kam ein Video-Vortrag von Anna-Sophia Dersch (Uni Gießen) zum Tragen, das den Titel *Sensibilität von Lehrkräften gegenüber Mathe-Geschlechterstereotyp-verstärkendem Unterrichtsverhalten: Ein Video-Experiment* trug.

Mathe-Geschlechterstereotype, dass Mädchen geringere mathematische Fähigkeiten als Jungen hätten, wirken sich nachteilig auf die Repräsentanz von Frauen in der Mathematik aus. Lehrkräfte berichten heutzutage jedoch geringe explizite Mathe-Geschlechterstereotype. Folgt daraus, dass Lehrkräfte sensibilisiert für Mathe-Geschlechterstereotype sind und diese in ihrem Berufsalltag erkennen? In früheren Studien wurden Unterrichtsvideos, die dysfunktionale Lehrstrategien von Lehrkraftmodellen darstellten, herangezogen, um die Sensibilität von Lehrkräften gegenüber diesen zu diagnostizieren. Darauf aufbauend nutzen wir in dieser Studie inszenierte Mathematik-Unterrichtsvideos, um die Sensibilität teilnehmender Lehrkräfte für Unterrichtsverhalten, welches Mathe-Geschlechterstereotype verstärkt, zu erfassen.

Es wurde in einem wissenschaftlichen Experiment (1) untersucht, ab welcher Explizitheit des Stereotyp-verstärkenden Verhaltens Lehrkräfte dieses erkennen und kritisch einordnen (Sensibilität), (2) den Einfluss des Geschlechts der teilnehmenden Lehrkräfte und des Lehrkraftmodells sowie deren Interaktion darauf, (3) den Zusammenhang der Sensibilität mit expliziten Mathe-Geschlechterstereotypen. Auch dieses Video regte zu einer intensiven Diskussion an.

Den Abschluss der zwei diskussions- und erkenntnisreichen Tage bildete dann die AK-Sitzung, in der auch die turnusmäßigen Sprecher:innenwahlen anstanden. Hier wurde Lara Gildehaus als AK-Sprecherin gewählt. Der bisherigen Sprecherin Renate Motzer dankten alle ganz herzlich für die 12 überaus engagierten Jahre als solche und die Organisation einer Vielzahl von AK-Treffen. Renate Motzer arbeitet im AK als zweite Sprecherin weiterhin mit. Christine Scharlach wurde als weitere Stellvertreterin im Sprecher:innenteam bestätigt.

Weiterhin wurde beschlossen, das nächste AK-Treffen 2025 wieder Anfang Oktober (evtl. auch in den letzten Septembertagen) zu veranstalten. Als mögliche Tagungsorte wurden Bielefeld und Berlin diskutiert. Genaueres muss noch geklärt werden. Ebenfalls ist wieder ein AK-Treffen im Rahmen der GDM-Tagung 2025 geplant.

Renate Motzer, Universität Augsburg
renate.motzer@math.uni-augsburg.de

Lara Gildehaus, Universität Klagenfurt
lara.gildehaus@aau.at

Arbeitskreis: Grundschule

Freiburg, 8.–10. 11. 2024

*Kathrin Akinwunmi, Marei Fetzer, Daniel Walter und Gerald Wittmann (Sprecher*innenrat)*

Die Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule fand 2024 zum zweiten Mal im neuen Format an einer Hochschule statt. Am zweiten Wochenende im November trafen sich über 180 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus verschiedenen Bereichen der Lehrkräfteaus- und -fortbildung an der Pädagogischen Hochschule Freiburg. Das Tagungsthema lautete *Schule im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel*.

Nach der Begrüßung eröffnete Timo Dexel (Universität Münster) am Freitagabend die Tagung mit dem ersten Hauptvortrag unter dem Titel *Gesellschaft im Wandel – Mathematikunterricht im Wandel? Mathematiklernen in der Grundschule zwischen Singularisierung und Superdiversität*. Er analysierte gesellschaftliche Wandlungsprozesse im Hinblick auf die Aspekte der Singularisierung und der Superdiversität der Gesellschaft und zeigte auf, wie der Wandel auch im Diskurs aufgegriffen wird. In empirischen Studien wird jedoch eine relativ stabile Praxis des Mathematiklernens beschrieben, die sich gegenläufig zu den gesellschaftlichen Öffnungstendenzen zeigt: In der Schulpraxis findet eine Schließung und Vereindeutigung statt. Den Vortrag schloss er mit einer Ermutigung für Lehrkräfte wie Forschende, gewisse Risiken der Bildung einzugehen, um die Chancen fachlicher Offenheit wahrzunehmen und zu lehren.

Am Samstagvormittag gab Ulrich Kortenkamp (Universität Potsdam) in seinem Vortrag *Wie viel Mathe braucht der Mensch? Mathematische Kompetenzen im Angesicht von KI* anhand verschiedener Beispiele einen Einblick in problematische Lösungsansätze von ChatGPT bei der Bearbeitung typischer mathematischer Aufgaben. In Analysen der Chat-Konversationen zeigte und erklärte er Fehler und falsche Behauptungen der KI, die von Lernenden bei der Nutzung unbedingt kritisch hinterfragt werden müssen. Er schlussfolgerte daraus, dass die Frage nach einem kritischen Umgang und einer stetigen Verifizierung der Lösungen für den Mathematikunterricht in Anbetracht von KI bedeutsam wird.

Daniela Götze (TU Dortmund) stellte in ihrem Vortrag *Fortbildungsmaterial im Wandel – Adaptionshandlungen von Multiplizierenden im Blick* zunächst in Form von Fallstudien dar, in welcher Weise Multiplikatorinnen und Multiplikatoren zur Verfügung gestellte Fortbildungsmaterialien für ihre Fortbildungen abändern. Derartige Adaptionen mögen sinnvoll sein, um auf die Gegenheiten „vor Ort“ eingehen zu können, dürfen aber die Intention der Fortbildung nicht verfälschen. Hieraus ergeben sich Folgerungen für die Gestaltung der Qualifizierung von Multiplikatorinnen und Multiplikatoren.

Daniel Frischemeier (Universität Münster) beendete mit seinem Vortrag *Förderung von Data Literacy im Mathematikunterricht der Primarstufe – unterrichtspraktische Umsetzungsideen und empirische Befunde* die Tagung. Er gab einen breiten Überblick über den aktuellen Stand der Mathematikdidaktik zu diesem Bereich und stellte insbesondere dar, welche Möglichkeiten sich hierbei durch die Einbindung digitaler Medien zur Exploration großer Datensätze eröffnen. Er stellte heraus, wie wichtig es ist, dass Lernende mit realen und lebensweltbezogenen Daten arbeiten, um die statistischen Fragestellungen ernst nehmen zu können, und welche Rolle die Kontexteinbettung bei der Interpretation von Daten spielt.

An den beiden Tagen wurden zudem sieben Arbeitsgruppen angeboten, in denen in insgesamt acht Sitzungen laufende Forschungsprojekte vorgestellt und aktuelle Entwicklungen und Perspektiven diskutiert wurden:

- Arithmetik (Koordination: Solveig Jensen, Charlotte Rechtsteiner, Henning Sievert)
- Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit (Koordination: Gritz Kurtzmann)
- Geometrie (Koordination: Simone Reinhold, Bernadette Thöne)
- Kommunikation und Kooperation (Koordination: Birgit Brandt, Uta Häsel-Weide)
- Lehrkräftebildung (Koordination: Gerald Wittmann)
- PriMaMedien (Koordination: Melanie Platz, Aileen Steffen-Delplanque)
- Sachrechnen (Koodination: Dinah Reuter)

Für den wissenschaftlichen Nachwuchs gab es dieses Mal zwei unterschiedliche Angebote. Wie auch schon in den Vorjahren konnte bei Expertinnen und Experten ein Beratungsangebot nachgefragt werden. Zudem fand erstmals ein Round Table (Koordination: Julia Bruns, Lea Müller, Rose Vogel) statt, bei dem vier Doktorandinnen bzw. Doktoranden in zwei Gruppen ihre Dissertationsprojekte vorstellten, die anschließend diskutiert wurden.

Der Tagungsband enthält schriftliche Fassungen der Hauptvorträge und dokumentiert zudem die Ergebnisse aus den Arbeitsgruppen. Er wird von Anna Susanne Steinweg herausgegeben und erscheint in der Reihe *Mathematikdidaktik Grundschule* der University of Bamberg Press (online frei verfügbar unter www.uni-bamberg.de/ubp/verlagsprogramm/reihen/mathematikdidaktik-grundschule/).

Die nächste Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule findet vom 14. bis 16. November 2025 am IPN in Kiel statt. Die Anmeldung ist im Frühsommer 2025 möglich. Näheres hierzu sowie aktuelle Informationen finden Sie auf der Internetseite des AK Grundschule (grundschule.didaktik-der-mathematik.de).

Kathrin Akinwunmi, Universität Münster
akinwunmi@uni-muenster.de

Marei Fetzer, Universität Wuppertal
fetzer@uni-wuppertal.de

Daniel Walter, Technische Universität Dortmund
daniel.walter@tu-dortmund.de

Gerald Wittmann, Pädagogische Hochschule Freiburg
gerald.wittmann@ph-freiburg.de

Arbeitskreis: Lehr-Lern-Labore

Karlsruhe, 27./28. 9. 2024

Tim Lutz, Sebastian Bauer und Theresa Scholl

Die Jahrestagung des Arbeitskreises Lehr-Lern-Labore Mathematik fand dieses Jahr wieder wie gewohnt als Herbsttagung am 27. und 28. 9. 2024 statt. In diesem Jahr wurde die Tagung gemeinsam von der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe und dem Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) veranstaltet. Den 27. 9. 2024 gestaltete das Team des Karlsruher Institut für Technologie mit der örtlichen Tagungsleitung Sebastian Bauer. Der zweite Tag der Tagung wurde von der örtlichen Tagungsleitung Thomas Borys an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe organisiert. An dieser Stelle möchten wir uns bei Sebastian Bauer und Thomas Borys und den jeweiligen Organisationsteams bedanken.

In diesem Bericht werden die Beiträge der Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Tagung kurz zusammengefasst, sowie über die nächsten Aktivitäten des Arbeitskreises informiert. Zu Beginn der Tagung begrüßte Sebastian Bauer als zweiter Sprecher und Tagungsleiter am Karlsruher Institut für Technologie die Teilnehmenden, stellte kurz den Arbeitskreis Lehr-Lern-Labore vor und gab organisatorische Hinweise bezüglich der Tagung.

Als erstes stellte Peter Kaiser (KIT) in seinem Vortrag „Das Mathelabor am KIT – Breiten- und Begabtenförderung“ die Vielfalt des Angebots des Mathelabors am KIT vor, bei dem sowohl auf Angebote für ganze Schulklassen, einzelne begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler sowie Lehramtsstudierende eingegangen wurde. Deutlich wurde hierbei die Breite des Angebots und die Zielsetzung des Labors „Mathematik erleben, entdecken und begreifen“ der jeweiligen Angebote aufgezeigt. Weiterhin wurden die aktuellen Forschungsvorhaben und Promotionsprojekte im Rahmen des Labors skizziert. In der Diskussion wurden einerseits die thematischen Hintergründe der Angebote diskutiert, andererseits wurde über die Rahmenbedingungen wie

Finanzierung und Werbung gesprochen. Im Anschluss an diesen Vortag gab es die Möglichkeit das Mathelabor des KIT zu besuchen und die darin enthaltenen Exponate auszuprobieren.

Alexander Zimmermann (PPH Burgenland) hielt einen Vortrag zum Thema „Logik und Definitionstheorie im Rahmen des akademischen Mathematikunterrichts". Seine Absicht ist die Einrichtung eines diesbezüglichen Lehr-Lern-Labors an der Privaten Pädagogischen Hochschule Burgenland. Im Vortrag verwies er zunächst auf häufig in der fachmathematischen oder -didaktischen Literatur vorkommende Fachtermini zum Thema Definitionen und diskutierte diese kurz. Daraus ergaben sich mehrere, insbesondere für die Fachdidaktik der Mathematik wichtige Aspekte. Anschließend arbeitete er anhand eines Fallbeispiels die Bedeutung des korrekten Definierens und der Logik für ein wirkliches und umfängliches Verstehen mathematischer Beweise heraus. In der abschließenden Diskussion ging es vorrangig um inhaltliche Fragen zum Vortragsthema und konzeptionelle Fragen zum geplanten Lehr-Lern-Labor.

Ramona Hagenkötter (Universität Duisburg-Essen) stellte im Rahmen ihres Vortrags „Mathematik erleben im Lehr-Lern-Labor – Einblicke in das Projekt MerLab" das gemeinsam mit Katrin Rolka und Kim Fenrich (beide Ruhr-Universität Bochum) realisierte und von der Reinhard Frank-Stiftung geförderte Projekt vor. Ziel des Projekts ist, dass Schülerinnen und Schüler durch handelndes Arbeiten, experimentelle Zugänge und interaktive Darbietungsmethoden eigentätig Mathematik entdecken können und so neue Einblicke in die Rolle und Bedeutung von Mathematik bekommen. Dazu nehmen insgesamt sieben Klassen von sechs Projektschulen in herausfordernden Lagen aus dem Ruhrgebiet über einen Zeitraum von zwei Jahren an vier verschiedenen Projekttagen im Alfried Krupp-Schülerlabor der Wissenschaften der Ruhr-Universität Bochum teil. Gemeinsam wurden erste Ergebnisse mit Blick auf die Vorstellungen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler über Mathematik und mathematisches Arbeiten vor und nach dem ersten Projekttag diskutiert.

Im Rahmen einer Diskussion über die Belange des Arbeitskreises stellte Tim Lutz, Sprecher des Arbeitskreises, ein Format für mögliche Beiträge vor, welches für die kommende Herbsttagung 2025 diskutiert wurde. Dabei wird ein kurzer Vortrag oder Werkstattbericht mit einem Workshop zur Datengewinnung/Analyse verbunden, um Forschungsprojekte mithilfe der in der Community vorhandenen Expertise zur Arbeit in Lehr-Lern-Laboren aktiv im Tagungsgeschehen zu unterstützen und voranzubringen. Zur Planung des Arbeitskreistreffens auf der Jahrestagung der GDM und der nächsten Herbsttagung sammelte Theresa Scholl, Sprecherin für den wissenschaftlichen Nachwuchs, Anregungen und Wünsche zur thematischen und methodischen Gestaltung, die im Nachgang der Tagung im Sprecher/innenteam diskutiert werden.

Zum Ende des ersten Tagungstages erläuterten Stephan Kindler und Stephanie Hofmann (KIT) im Rahmen des Workshops „Projekt CAMMP – Moderne Anwendungen der Mathematik computergestützt erarbeiten" das Konzept der Lehr- und Lernmaterialien des Schülerprogramms CAMMP. Dabei wurde die Bedeutung von Lernarrangements hervorgehoben, die den Realitätsbezug der Mathematik verdeutlichen und ihre Relevanz für moderne Anwendungsfelder aus Alltag, Industrie und Forschung zeigen. Im Mittelpunkt standen die Designprinzipien eines computergestützten Modellierungsunterrichts und deren Umsetzung in den Projekten von CAMMP. Am Beispiel eines Modellierungstages zum Thema Spracherkennung wurde die didaktische Aufbereitung vorgestellt und die Teilnehmenden hatten die Möglichkeit, das digitale Material eigenständig zu erkunden. Abschließend fand eine Diskussion über das Konzept der Modellierungstage und des Projekts statt, in der sowohl Potenziale für den Einsatz des Lehr- und Lernmaterials als auch Verbesserungsmöglichkeiten thematisiert wurden.

Am zweiten Tagungstag stellte Friederike Reuter (PH Karlsruhe) die MachmitWerkstatt „MiniMa" der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe vor. Unter dem Motto „Minis und Erwachsene entdecken Mathematik" planen Studierende des Grundschullehramts sowie der Kindheitspädagogik mathematische Spiel- und Lernumgebungen, führen sie im Lehr-Lern-Labor mit Kindergruppen aus der Region durch und reflektieren die Umsetzung im Anschluss intensiv anhand videografierter Lehr-Lern-Prozesse. Für die kindheitspädagogischen Fachkräfte und Grundschullehrkräfte, die die Kindergruppen bei den Besuchen in der MiniMa begleiten, bietet das Projekt MiniMa zudem ein nachhaltiges Fortbildungsangebot. Das auf den Methoden der Videointeraktionsanalyse beruhende videobasierte Reflexionskonzept für die Arbeit mit Studierenden im Lehr-Lern-Labor wurde vorgestellt und mit den Teilnehmenden im Workshop erprobt. Dabei wurden Vorteile des Einsatzes der Methodik für Forschung und Lehre herausgearbeitet und diskutiert.

Thomas Borys (PH Karlsruhe) hielt einen Workshop zum Thema „Hands on Kryptologie". In diesem Workshop wurden Lehr-Lernmaterialien, die die Grundprinzipien der Kryptologie greifbar machen, vorgestellt. Auch konnten die Teilnehmenden der Tagung diese aktiv selbst ausprobieren. Die Materialien wurden zusammen mit Studierenden entwickelt, daher wurde insbesondere dargelegt, wie das im Rahmen der Lehre erfolgt ist. Bei verschiedenen Gelegenheiten kamen die Lehr-Lernmaterialien zum Einsatz, beispielsweise hatte das Pop-up-Labor „Die Spion-Schule“ schon mehrfach auf diversen Veranstaltungen geöffnet. Die Einsätze waren nur auf Grund einer großen Beteiligung von Studierenden möglich. Überarbeitete Versionen der Lehr-Lernmaterialien bilden das Herzstück des Online-Adventskalenders „Krypto im Advent“. Allerdings mussten diese für das Online-Angebot angepasst und erweitert werden. Diese Anpassungen und Erweiterungen erfolgten unter Beteiligung der Studierenden. Im Workshop wurde gezeigt, wie diese vielschichtigen Arbeiten im Rahmen der Lehre zusammen mit den Studierenden erfolgen konnten.

Sebastian Wartha (PH Karlsruhe) stellte die Beratungsstelle Rechenstörungen der PH Karlsruhe vor. Die Einrichtung vereinigt seit 2010 die Bereiche Service, Lehre und Forschung. Betroffene bzw. interessierte Eltern und Lehrkräfte können sich über E-Mail und Telefon bei der Beratungsstelle über so genannte Rechenstörungen bzw. -schwierigkeiten („Dyskalkulie“) informieren. Die betroffenen Kinder und Jugendlichen werden bei Vorliegen grundsätzlicher Probleme im Bereich Zahl- und Operationsvorstellungen von Studierenden im Rahmen verschiedener Lehrveranstaltungen und Praktika individuell und prozessorientiert diagnostiziert und in Kleingruppen gefördert. Im Bereich Forschung konnten umfangreiche Drittmittel eingeworben werden. Die aktuellen Projekte „Karlsruher Mathe Sommer“ (eine einwöchige Sommerschule in den Ferien für ca. 100 Kinder) und der „Karlsruher Matheclub“ (an Karlsruher Schulen werden Fördergruppen eingerichtet, in denen Studierende und Lehrkräfte zusammen je sechs Kinder unterstützen) wurden vorgestellt und diskutiert.

Die Tagung endete mit einem Vortrag von Albrecht Beutelspacher (Mathematikum Gießen) über das Thema „Mathematik für alle – Kann das gut gehen?“, bei dem Herr Beutelspacher über zunächst theoretische Konzepte und deren konkrete Anwendung im Mathematikum in Gießen berichtete. Dieser Vortrag richtete sich an ein über den Arbeitskreis hinausreichendes Publikum und wurde von zahlreichen Lehrkräften und Studierenden aus der Region besucht.

Das Sprecher/innenteam des Arbeitskreises lädt herzlich zur *Arbeitskreissitzung im Rahmen der GDM Tagung 2025* ein. Personen, die etwas über die Arbeit und Ausrichtung des Arbeitskreises erfahren möchten oder selbst ein Lehr-Lern-Labor aufbauen, können ihr Interesse gerne auch jederzeit beim Sprecher/innenteam bekunden.

Tim Lutz, Pädagogische Hochschule Tirol
tim.lutz@ph-tirol.ac.at

Sebastian Bauer, Karlsruher Institut für Technologie
sebastian.bauer2@kit.edu

Theresa Scholl, Justus-Liebig-Universität Gießen
theresa.scholl@math.uni-giessen.de

Webseite des Arbeitskreises
madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Lehr-Lern-Labore_Mathematik

Arbeitskreis: Hochschulmathematikdidaktik

Tübingen, 15./16. 11. 2024

Christine Bescherer, Walther Paravicini, Stefanie Rach und Angela Schmitz

Die Herbsttagung des AK Hochschulmathematikdidaktik fand in diesem Jahr am 15./16.11.2024 an der Universität Tübingen statt, wieder zusammen mit dem Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik. Das Team um Prof. Dr. Walther Paravicini schaffte eine schöne Atmosphäre, um anregende Gespräche zu führen. Dazu beigetragen haben zwischen den interessanten Tagungsbeiträgen lange und leckere Kaffeepausen sowie kurze Wege zwischen den Räumen. Nur beim Wetter sind noch Verbesserungen möglich, denn der Nebel hing an beiden Tagen über Tübingen.

Im Anschluss an die Herbsttagung fand die Arbeitskreissitzung statt. Nach einigen Informationen zu Aktivitäten sowie zum Mailverteiler des AKs stand die Wahl des AK-Sprecherteams an. Alle drei Sprecherinnen boten an weiterzumachen. Andere Vorschläge wurden nicht gemacht, und Christine Bescherer (PH Ludwigsburg, als Vertreterin der Pädagogischen Hochschulen), Stefanie Rach (OVGU Magdeburg, als Vertreterin der Universitäten) und Angela Schmitz (TH Köln, als Vertreterin der Hochschulen für angewandte Wissenschaften) wurden einstimmig mit 22 Stimmen (0 Enthaltungen, 0 Gegenstimmen) gewählt. Weiterhin wurde vereinbart, auf der GDM 2025 eine informelle Zusammenkunft, z. B. bei der Postersession oder zwischen den Vorträgen, zu initiieren. Die nächste Tagung des Arbeitskreises zusammen mit dem Hanse-Kolloquium soll im Herbst 2025 stattfinden.

Inhaltlich gab es neben dem spannenden Hauptvortrag zum Themenbereich *Individualisiertes Lernen* von Anselm Knebusch, Hochschule für Technik Stuttgart, zwölf interessante Präsentationen in zwei parallelen Strängen. Alle Vorträge werden im Folgenden vorgestellt.

Hauptvortrag

Anselm Knebusch, der in diesem Jahr den Ars legendi-Fakultätenpreis Mathematik und Naturwissenschaften für seine herausragenden Leistungen in Lehre, Beratung und Betreuung erhalten hat, gab Einblicke in sein Konzept des ‚computerbasierten Lernens im Hörsaal' (CBL), welches er mit Kohorten von je ca. 30 Studierenden durchführt. Studierende lernen hier in den ersten beiden Semestern Mathematik nicht mehr in einer klassischen Vorlesung, sondern zwar immer noch in Präsenz, aber mit dem eigenen Rechner in einer stark vorstrukturierten Lernumgebung mit Videos und Online-Übungsaufgaben sowie Zusatzmaterialien. Der didaktische Hintergrund des CBL basiert auf der großen Heterogenität der Studienanfängerinnen und -anfänger in Mathematik. Manche der Studierenden kommen direkt nach der Erreichung der allgemeinen Hochschulreife, andere haben seit ihrer Fachhochschulreife mehrere Jahre in einem eher mathematikfernen Bereich gearbeitet. Nach Anselm Knebusch sind die Ziele des CBL neben der Aktivierung der Studierenden vor allem die Stärkung ihrer Eigenverantwortung für das Mathematiklernen. Ein großer Vorteil ist das direkte Feedback, das sowohl über die Online-Übungen als auch durch den Dozenten, der die ganze Zeit im Raum anwesend ist und zur Unterstützung herbeigerufen werden kann, erfolgt. In einer Experimental-/Kontrollgruppen-Studie mit insgesamt ca. 100 Studierenden zeigte sich, dass die Klausurergebnisse in beiden Gruppen etwa gleich gut ausfielen. Allerdings konnte anhand von Zwischenassessments nachgewiesen werden, dass die CBL-Studierenden über das Semester hinweg mehr lernten und in den Zwischenerhebungen mehr mathematisches Wissen zeigten als die Kontrollgruppe. Zum Abschluss gab Anselm Knebusch noch einen Ausblick, wie sich sein Konzept durch den Einsatz von KI verändern könnte.

Präsentationen

Jörg Härterich: Analyse von Studierendenlösungen zur vollständigen Induktion

Beim Übergang in die Hochschule wird in Untersuchungen mitunter eher auf schnell verfügbares Wissen geblickt, das leicht abprüfbar ist. In der vorgestellten Untersuchung wurde angestrebt, eher tieferes Wissen zu betrachten und herauszufinden, wie gut Studienanfängerinnen und -anfänger neues Wissen zur vollständigen Induktion erwerben können. Einerseits wurde quantitativ in den eigenen Kursen erhoben, an welchen Stellen beim Aufschreiben eines Induktionsbeweises besondere Schwierigkeiten auftraten – hier fällt insbesondere der richtige Gebrauch von Quantoren und das formale Notieren des Induktionsschrittes auf. Andererseits wurden 20 Lehrbücher daraufhin analysiert, welche Strategien bei der Einführung der Induktion benutzt wurden, z. B. die Domino-Analogie oder das Präsentieren absichtlich falscher Beweise.

Silke Neuhaus-Eckhardt und Hans-Stefan Siller: Übungsaufgaben in Mathematik bearbeiten – Hilft das für den Studienerfolg?

In diesem Vortrag, der kurzfristig auf einen Online-Vortrag umgestellt wurde, ging es um die Frage, inwiefern Fach- und Lehramtsstudierende von der Bearbeitung von Übungsaufgaben profitieren. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die erfolgreiche Bearbeitung von Übungsaufgaben unter Kontrolle von Vorleistungen kaum Varianz in den Ergebnissen schriftlicher Abschlussprüfungen erklärt, während die Varianzaufklärung für mündliche Prüfungen hoch ausfällt. Durch die Einbettung in Angebots-Nutzungsmodelle wurden die verschiedenen Bedingungen deutlich, die auf den Einfluss von Aufgabenbearbeitungen auf den Studienerfolg wirken, z. B. die Qualität der Übungsaufgaben und Bearbeitungsprozesse durch die Studierenden. Im nächsten Schritt wird die Passung zwischen Charakteristika von Übungsaufgaben und Aufgaben in den schriftlichen Abschlussprüfungen analysiert.

Erik Hanke: Transfer von (Grund-)Vorstellungen und Aspekten in die komplexe Analysis – stoffdidaktisch und diskurstheoretisch

Der Vortrag beleuchtete den Transfer von Grundvorstellungen und Aspekten aus der reellen Analysis in die Funktionentheorie, insbesondere auf den Begriff des Wegintegrals. Theoretisch fußen die Analysen auf der diskurstheoretischen Perspektive des commognitive framework und wurden durch Interviews mit Expertinnen und Experten in der Funktionentheorie angereichert. Die entwickelten, vielfältigen Aspekte und Grundvorstellungen wurden anschließend diskutiert.

Antonia Hintze: Aufgabenentwicklung im Projekt „Mathematik vernetzen – Unterstützung von Studierenden in der bewussten Wahrnehmung von Bezügen zwischen Schul- und Hochschulmathematik“

Im dargestellten Projekt wird in der Lehramtsausbildung an der Universität Vechta ein studienbegleitendes Angebot entwickelt, in welchem Aufgaben exemplarisch die Zusammenhänge zwischen Schul- und Hochschulmathematik aufzeigen und die Lernenden zu einer reflektierten Auseinandersetzung mit diesen Bezügen anregen sollen. In Leitfadeninterviews mit den Studierenden wurde der Rückgriff auf die eigenen Erfahrungen aus der Schulmathematik als positiv wahrgenommen, und die Einschätzung der Nützlichkeit der Hochschulmathematikthemen hing davon ab, wie offensichtlich der Zusammenhang zur Schulmathematik wurde.

Lars Merkel, Jürgen Roth und Julia Rausenberger: Funktionen in den Life Sciences – Anwendungsorientiert Grundvorstellungen aufbauen

Der Übergang von der Schule zur Fachhochschule stellt Schweizer Studierende in naturwissenschaftlichen Fächern unter anderem aufgrund unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse vor Herausforderungen. Zur Verbesserung des konzeptuellen Wissens über Funktionen wurde an der Hochschule für Life Sciences FHNW eine digitale Lernumgebung entwickelt, die auf studiengangsrelevante Anwendungskontexte und Grundvorstellungen setzt. Ersten quantitativen Ergebnissen zufolge erzielten Studierende in der Experimentalgruppe damit kaum höhere Lernzuwächse, zumindest nach dem Gesamtscore des FALKE-Tests.

Angelo Henle: Peer Instruction in Statistik-Übungsgruppen: Die Bedeutung der Interaktion mit Mitstudierenden für den Lernerfolg

Peer-Instruction speziell für das Lernen in Statistik stand in diesem Vortrag im Fokus. Um die Methode der Peer-Instruction gut zu implementieren, sind passende ConcepTests essentiell. Notwendige Schritte zu deren Entwicklung wurden beispielhaft erläutert. Im Zentrum des Vortrags standen Ergebnisse einer experimentellen Studie mit Studierenden betriebswirtschaftlicher Studiengänge in Hinblick auf die Wirksamkeit der Methode in zwei verschiedenen Settings, die sich u. a. im Umfang der Besprechung unterschieden. Neben Fragen zum experimentellen Design wurden auch die verschiedenen Indikatoren diskutiert, die zur Wirksamkeitsuntersuchung der Methode genutzt wurden.

Helmer Hoppe und Julia Kaiser: Grundvorstellungen zum Stetigkeitsbegriff aus theoretischer Perspektive und Sicht von Experten

In diesem Forschungsprojekt wurden verschiedene Grundvorstellungen zur Stetigkeit theoretisch fundiert beschrieben und durch die Erkenntnisse aus verschiedenen Interviews mit Fachmathematikerinnen und -mathematikern bestätigt bzw. ergänzt. Bei den Vorstellungen („Gesichter der Stetigkeit“) kamen durch die Interviews interessante Themen hinzu, die sich aus den mathematischen Arbeitsfeldern der Befragten ergeben – unter anderem auch, dass es Expertinnen und Experten wichtig zu sein scheint, dass sie in der praktischen Arbeit ein „Gefühl für die Stetigkeit“ von Funktionen haben.

Frank Feudel: Rekonstruktion der Verwendungsweise von Mathematik in anderen Fachdisziplinen

Die Handhabung mathematischer Konzepte außerhalb der Mathematik unterscheidet sich auf praktischer und argumentativer Ebene teilweise vom Umgang mit ihnen in der Mathematik als Fachdisziplin. Am Beispiel der Ableitung wurde gezeigt, wie mit Hilfe fachlicher Analysen unter Verwendung der sogenannten anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) die Verwendungsweise mathematischer Konzepte in anderen Fachdisziplinen, insbesondere in den Wirtschaftswissenschaften, rekonstruiert werden kann. In der Diskussion wurde als ein Qualitätsmerkmal von guter Lehre herausgestellt, dass diese verschiedenen Verwendungsweisen expliziert werden.

Gilbert Greefrath, Georg Hoever und Katharina Kirsten: Vorkenntnisse von Erstsemesterstudierenden – eine Langzeitanalyse am Fachbereich Elektro- und Informationstechnik der FH Aachen

Seit dem Wintersemester 2009/10 werden an der FH Aachen die Mathematik-Vorkenntnisse von Studienanfängerinnen und -anfängern für die Studiengänge Elektrotechnik und (Wirtschafts-)Informatik erhoben. In den Daten sind Änderungen der Rahmenbedingungen wie z. B. geänderte Lehrpläne, G8 oder die Auswirkungen der Corona-Pandemie nachvollziehbar. Anhand einer Mehrebenenanalyse ergaben sich signifikante Einflüsse der (Nicht-)Teilnahme am Vorkurs, der Art der Hochschulzugangsberechtigung (Abitur oder Fachhochschulreife) und der Note auf die Mathematikkenntnisse. Es konnte auch gezeigt werden, dass Personen mit Fachhochschulreife besonders stark vom Besuch des Vorkurses profitierten.

Julia Kaiser: Sprachsensible Hochschullehre im Fach Mathematik am Beispiel der Graphentheorie

Eine der Hürden beim Übergang von der Schule zur Hochschule ist der Erwerb einer adäquaten mathematischen Fachsprache. Um den Erwerb von Fachsprache in den Blick zu nehmen, wurde in dem vorgestellten Projekt die Anregung fachsprachlicher Kommunikation in authentischen Situationen angestrebt. Speziell wurden Übungsaufgaben aus der Graphentheorie (als ein relativ voraussetzungsloser Teil der Mathematik) verwendet. Die Aufgaben wurden dabei so überarbeitet, dass sie zum Schreiben reichhaltiger Texte einladen. Aus den Studierendenbearbeitungen zu diesen Aufgaben wurden interessante Sprachprodukte wie etwa das Missverständnis „Graph im Sinne der Graphentheorie“ vs. „Graph im Sinne der Analysis“ gesammelt.

Svenja Kaiser, Markus Vogel, Leif Döring und Stefan Münzer: Mathematikspezifische Ursachen von Studienabbrüchen

Anhand der Erhebungen einer längsschnittlichen Studie an der Universität Mannheim konnte vom ersten bis zum dritten Studiensemester ein großer Schwund an Studierenden nachgewiesen werden. Durch verschiedene Regressionsanalysen wurde versucht, Prädiktoren für den Studienverbleib bzw. -abbruch zu identifizieren. Für das Jahr 2022 waren dies vor allem Abiturnote, Annäherungsleistungsmotivation, Arbeitsvermeidungsmotivation sowie das Beweisverständnis. Im Jahr 2023 hatte nur das Selbstkonzept (kriteriale und soziale Norm) einen signifikanten Einfluss. Aktuell werden durch eine wöchentliche Kurz-Befragung u. a. die Studienmotivation, die Einschätzung der Anforderungen und die Studienabbruchsintention erhoben.

Susanne Kruse: Blended Learning in der Mathematik der Studieneingangsphase

Im Vortrag wurde ein Blended Learning-Konzept für Mathematik vorgestellt, u. a. umgesetzt in Grundlagenveranstaltungen in den Wirtschaftswissenschaften. Das Konzept umfasst Online-Aufgaben, vorlesungsbegleitende Videoclips zu allen Themen des Moduls, ein Vorlesungsskript in Form eines Lückentextes, betreute Online-Foren sowie weitere digitale Komponenten, die mit regelmäßigen Präsenzveranstaltungen kombiniert werden. Erläutert wurde, wie dieses Konzept Studierenden mit heterogenen Vorkenntnissen ermöglicht, ihre Lernpfade individuell zu gestalten und selbstgesteuert zu lernen, und welche Implikationen sich bei der konkreten Ausgestaltung des Lernformats ergeben.

Christine Bescherer, PH Ludwigsburg
bescherer@ph-ludwigsburg.de

Walther Paravicini, Universität Tübingen
w.paravicini@uni-tuebingen.de

Stefanie Rach, OVGU Magdeburg
stefanie.rach@ovgu.de

Angela Schmitz, TH Köln
angela.schmitz@th-koeln.de

Arbeitskreis: Mathematik und Bildung

Saarbrücken, 8./9. 11. 2024

Christian Büscher und Anselm Lambert

Anfang November luden Anselm Lambert und Christian Büscher nach Saarbrücken zur Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematik und Bildung mit dem Thema „Bildung nachhaltig entwickeln – Demokratie stärken“ ein. Das Tagungsthema erwies sich als gut gewählt, denn mit der Wahl des U.S.-Präsidenten und dem Zerbrechen der Ampelkoalition noch in derselben Woche konnte es aktueller kaum sein. Die Aktualität des Themas und die vielen interessanten Vorträge auf der Herbsttagung erschufen so ein anregendes Diskussionsklima, bei der Fragen einer Bildung für nachhaltige Entwicklung verknüpft wurden mit Überlegungen, inwiefern mathematische Bildung politisch ist und sein kann oder sogar sein soll.

Christian Büscher (Uni Duisburg-Essen) betonte in seinem Vortrag „Statistiken auf Social Media und Vertrauen in politische Institutionen – ein Fall für Statistical Literacy?“ die Relevanz von mathematischer Bildung für eine demokratische Gesellschaft mit Blick auf den Umgang mit Argumenten auf Social Media. BürgerInnen müssen in die Lage versetzt werden, datenhaltige Argumente auf Social Media nicht nur verstehen und hinterfragen zu können, sondern ihre Unterstützung oder Zurückweisung dazu auch fundiert ausdrücken zu können. Einblicke in ein Entwicklungsforschungsprojekt zeigten, welche Bedarfe und Anknüpfungspunkte hier bei Lernenden bestehen.

Tanja Hamann und Thekla Kober (Uni Hildesheim) gaben im Vortrag „Seminar ‚Demokratiebildung im Mathematikunterricht‘ – ein Erfahrungsbericht“ Einblicke in die Gestaltung und die Rezeption eines Seminars mit Lehramtsstudierenden zu Demokratie und Mathematik. Es wurde deutlich, dass Studierende zunächst Themen der Demokratieerziehung nicht im Mathematikunterricht vermuten, durch das Seminar aber einen neuen Blick darauf erhalten konnten. Der Vortrag konnte praktische Orientierung für die Lehre bieten und die Inspiration, ein oftmals in der Lehre wenig repräsentiertes Thema doch zum Gegenstand der Lehre zu machen.

Jannik Heckmanns (Uni Bielefeld) Vortrag nahm Ausgang in dem Punkt, dass kritisches Denken eine zentrale Grundlage der Wahrnehmung von Bürgerrechten und Erfüllung von Bürgerpflichten in einer Demokratie ist. Davon ausgehend stellte er eine theoretische Fundierung des Begriffs des mathematikbezogenen kritischen Denkens vor, um den Zusammenhang zwischen kritischem Denken und mathematischer Bildung genauer spezifizieren zu können. Bildung für nachhaltige Entwicklung kann hierbei den Kontext für den Mathematikunterricht liefern, um mathematikbezogenes kritisches Denken auszubilden.

Den eingeladenen Hauptvortrag hielt Heinz Böer (MUED), der aus der jahrzehntelangen Erfahrung der MUED mit der Entwicklung von Unterrichtsmaterial für eine Handlungsorientierung in emanzipatorischer Absicht berichtete. Der kurzweilige Vortrag gab Einblicke in den reichhaltigen Schatz an Unterrichtsmaterial der MUED, wo mit Kontexten wie Massentierhaltung im Hühnerstall oder Bestimmung des Equal Pay Day schon lange für eine Bildung für nachhaltige Entwicklung geworben wird. Eindrucksvoll wurde auch gezeigt, wie etwa mit dem gemeinsamen Schreiben von Briefen an Ministerien mathematische Bildung im Kontext des Politischen gelingen kann.

Johanna Brück (Uni Gießen) ging der Fähigkeit des systemischen Denkens nach, damit Lernende in die Lage versetzt werden, komplexe Zusammenhänge zu erfassen, die Auswirkungen eigener Handlungsalternativen abzuwägen und begründete Entscheidungen zu treffen. Auch dabei kann mathematische Bildung einen wertvollen Beitrag leisten. Exemplarisch wurde an einem System um Bienen und Menschen konkretisiert, wie sich systemisches Denken im fächerübergreifenden Mathematikunterricht fördern lässt.

Der Abend wurde eingeleitet mit einem kurzen Vortrag von Wilfried Herget, der die Mathematik in Zeitungen als besonderen Ausgangspunkt einer demokratischen Bildung im Mathematikunterricht aufzeigte. Er zeigte eindrucksvoll, wie nicht-traditioneller Aufgabenformate wie das Schreiben eines Leserbriefs eine reichhaltige Diskussionskultur im Mathematikunterricht ermöglichen. Gleichzeitig verwies er auf die Anstrengungen, die Lehrkräfte unternehmen müssen, bis ihre Klasse eine solche Aktivität wie selbstverständlich durchführen kann – eine Anstrengung, die aber durchaus lohnt. Im Anschluss konnten die Teilnehmenden beim französischen Abend mit regionalen Delikatessen die Anregungen des Tages im Gespräch vertiefen.

Den zweiten Tag eröffnete Daniel Pötz (Uni Graz) mit dem Thema „Allgemeinbildender Mathematikunterricht und Financial Literacy in Symbiose“, bei dem gesellschaftliche Themen wie Inflation mit Blick auf Winter'sche Grunderfahrungen dargelegt wurden. Daran anknüpfend wurden Gestaltungsprinzipien für einen Mathematikunterricht dargestellt, welcher zum einen Themen wie Inflation aus dem Bereich Financial Literacy aufgreift und zum anderen Winter´sche Grunderfahrungen ermöglicht.

Johanna Heitzer (RWTH Aachen) ergänzte das Thema in ihrem Vortrag „‚Wer kein Geld hat, muss dafür bezahlen.' – Mathematische Bildung und Urteilsfähigkeit in Finanzfragen" um konkrete Umsetzungsmöglichkeiten zu Themen wie Ungleichheit im Mathematikunterricht. Für Aufklärung über Finanzangelegenheiten ist der Mathematikunterricht der passende schulische Ort.

Susanne Hilgers und Carina Büscher (Uni zu Köln) betonten im Vortrag „Reflexionen zu algorithmischen Entscheidungssystemen von Lehramtsstudierenden", dass es mit Blick auf die Verbreitung algorithmischer Entscheidungssysteme entscheidend ist, die Bevölkerung zu auch in dieser Frage mündigen Bürgern auszubilden, damit sie nicht nur passive Konsumenten computergenerierter Entscheidungen sind, sondern durch kritisches Hinterfragen die digitale Welt aktiv mitgestalten können. Dabei spielen Lehrkräfte eine zentrale Rolle, da sie einen direkten Einfluss darauf haben, wie zukünftige Generationen mit den Technologien umgehen werden. Im Vortrag wurden Reflexionen über algorithmische Entscheidungssysteme von Lehramtsstudierenden während eines Seminars zu Entscheidungsbäumen vorgestellt.

Den Abschluss machte Johannes Hinkelammert (FU Berlin) mit dem Vortrag „Wie kann das Thema ‚Bruchrechnen' einerseits grundschulgerecht (in der 6-jährigen Grundschule) und verständlich sowie andererseits anschlussfähig an die Sekundarschulmathematik gestaltet werden?". Hierbei stellte er eine Perspektive auf Brüche vor, die Konzepte wie die der Relationalität, der Proportionalität bis hin zum funktionalen Zusammenhang in den Vordergrund rückt. Ein im Zuge mehrerer Seminare neu entwickeltes Darstellungsmittel kann den Aspekt der Proportionalität bei Brüchen verdeutlichen.

So schloss eine Herbsttagung voller inspirierender Vorträge und spannender Diskussionen. Ein herzliches Dankeschön gilt Anselm Lambert und Karin Mißler als lokalem Organisationsteam, die für eine rundum gelungene Tagung gesorgt haben.

Die nächste Sitzung des Arbeitskreises findet während der Jahrestagung 2025 statt. Die nächste Herbsttagung findet voraussichtlich im November 2025 in Saarbrücken statt.

Christian Büscher, Universität Duisburg-Essen
christian.buescher@uni-due.de

Anselm Lambert, Universität des Saarlandes
lambert@math.uni-sb.de

Arbeitskreis: Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich

Spital am Pyhrn, 14./15. 6. 2024

Myriam Burtscher, Stefan Götz und Edith Schneider

Die Frühjahrstagung 2024 des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich" fand im Seminarhotel „Freunde der Natur" in Spital am Pyhrn vom 14. bis 15. Juni statt. Es nahmen 24 Kolleg/innen von österreichischen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen teil. Organisiert und moderiert wurde die Veranstaltung von den Autor/innen dieses Berichts.

Nach der Begrüßung stand als erster wichtiger Tagesordnungspunkt die Wahl eines Sprecher/innenteams am Programm. Ein Wahlvorschlag (Burtscher – Götz – Schneider) ging vorab per E-Mail an den bisherigen Sprecher Andras Batkai (PH Vorarlberg) ein, der die Wahl auch leitete. Von den anwesenden stimmberechtigten Mitgliedern wurde das vorgeschlagene Team Burtscher (PH Salzburg) – Götz (Universität

Wien) – Schneider (Universität Klagenfurt) einstimmig bei drei Enthaltungen gewählt. Alle drei Kandidat/innen nahmen die Wahl an und bedankten sich bei Andras Batkai für sein Engagement für den Arbeitskreis.

Der Vorschlag zur Erstellung einer neuen Homepage, betreut durch Felix Woltron (Universität Wien), wurde durch das neue Sprecher/innenteam eingebracht. Grundsätzlich wurde die Aktivierung der Homepage begrüßt, wobei ihr „Standort" zur Diskussion stand. Vorerst wird die Homepage an der Universität Wien eingerichtet, eine Anfrage an die GDM zur Finanzierung einer eigenen (universitätsunabhängigen) Homepage soll aber erfolgen. Inhalte, Materialien oder Informationen, die auf der Homepage erscheinen sollen, sind an das Sprecher/innenteam zu senden.

Der E-Mail-Verteiler für den Arbeitskreis wurde bereits vor der Tagung aktualisiert bzw. ergänzt. Er ist für alle Interessierte offen und setzt keine GDM-Mitgliedschaft voraus. Bei Interesse zur Aufnahme genügt die Zusendung einer E-Mail an eine Person des Sprecher/innenteams. Es werden Informationen zu Tagungen, Stellenausschreibungen, Einladungen zum Arbeitskreis, … über diesen Verteiler verbreitet. Stellungnahmen des Arbeitskreises, über die nur GDM-Mitglieder abstimmen dürfen, müssen zuvor dem Vorstand der GDM zur Kenntnis gebracht werden. Zur Abstimmung wird es einen „GDM-internen" Verteiler geben. Informationen, die über den Verteiler verbreitet werden sollen, sind an das Sprecher/innenteam zu senden und werden dann ggf. vom Sprecher/innenteam über den Verteiler ausgeschickt.

Für jede Institution soll eine Ansprechperson für das Sprecher/innenteam genannt werden, um den Informationsfluss zu sichern. Bisher wurden genannt: Sabine Apfler (PH NÖ), Monika Musilek (PH Wien), Petra Hauer-Typpelt (KPH Wien / Krems), Sabine Reindl (PH OÖ), Stefan Götz (Universität Wien), Myriam Burtscher (PH Salzburg), Edith Schneider (Universität Klagenfurt), Martina Greiler (PH Kärnten), Michael Fischer (Universität Graz), Christina Konrad (PH Diözese Linz) und Florian Stampfer (Universität Innsbruck).

Eine Berichtsrunde aus den einzelnen vertretenen Institutionen schloss den ersten, organisatorischen, Teil der Tagung ab.

Der erste inhaltliche Tagesordnungspunkt betraf die Neuordnung der Lehramtsstudien für die Primar- und die Sekundarstufe in Österreich. Sie werden von sechs auf fünf Jahre verkürzt, um dem Lehrer/innenmangel in Österreich zu begegnen. Myriam Burtscher stellte das Salzburger Modell für die Primarstufe vor, Edith Schneider die neuen gesetzlichen Rahmenbedingungen für die Sekundarstufe. In fast allen Institutionen waren zum Zeitpunkt der Tagung noch keine neuen Curricularentwürfe in Diskussion. Es folgte ein Austausch in einer Primarstufen- und in einer Sekundarstufenrunde mit anschließender Zusammenfassung des Besprochenen im Plenum.

Eine Nachwuchs-Gruppe umfasst aktuell 20 Personen, ein Nachwuchstreffen wurde für den 17. 9. 2024 in Linz anberaumt. Weitere Informationen sind der zugehörigen Homepage zu entnehmen: www.jku.at/linz-school-of-education/news-events/mathematikdidaktik-young-researchers/.

Der erste Tag ging mit einer Sammlung von Themen zu Ende, die der Arbeitskreis bei zukünftigen Treffen behandeln sollte:

- Schnittstellenproblematik
- Einblicke in Lehrveranstaltungen sowohl inhaltlich als auch bezüglich Lehrgestaltung, Anforderungen, Differenzierung
- Woran wird geforscht? Ein Überblick über aktuelle wissenschaftliche Aktivitäten (in Österreich)
- Diskussion bildungspolitischer Fragestellungen, z. B. Entwicklung der Zentralmatura, mittlere Reife, Lehrplan, Schulbuchzulassungen
- Wofür fühlt sich der Arbeitskreis zuständig?

Als Wunsch bzw. Anregung wurde dazu geäußert, dass Tagungspunkte künftig immer von einer heterogenen Gruppe vorbereitet werden. Die Themen werden im Arbeitskreisverteiler ausgeschrieben.

Am zweiten Tag hielten Arabella Denk (Universität Wien) und Pia Tscholl (Universität Innsbruck) einen Impulsvortrag zum Thema *Wissenschaftliche Begleitung der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe 1 in Österreich*, den Stefan Götz (Universität Wien) und Florian Stampfer (Universität Innsbruck) mitgestaltet haben. Die Lehrplan-Novelle 2023 fordert erstmalig die Thematisierung eines (intuitiven) Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Sekundarstufe 1 ab dem Schuljahr 2025/26 (7. Schulstufe). Diese einschneidende Änderung bietet für die mathematikdidaktische Community in Österreich die einmalige Gelegenheit, diese Neueinführung zu beforschen, z. B. durch forschungsgeleitete Materialentwicklung oder durch Beobachtung des Unterrichtsgeschehens.

In Bezug auf die Materialentwicklung ist beispielsweise ein *Design-Based-Research-Ansatz* zielführend. Der Fokus der Materialentwicklung und Beforschung liegt dann auf der Auswahl, Erstellung und Evaluierung geeigneter Visualisierungen zum Aufbau inhaltlicher Vorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff. Dabei muss darauf geachtet werden, dass sich diese Verstehensmittel mit den Inhalten der Statistik (z. B. Darstellung von relativen Häufigkeiten oder Vierfeldertafel) vernetzen lassen, sich aber auch auf andere

Inhalte des Lehrplans der Sekundarstufe 1 (z. B. Visualisierungen von Brüchen) übertragen lassen. Darüber hinaus sollen aktuelle Forschungsergebnisse zu Verständnishürden beim Einsatz von Baumdiagrammen, zu numerischen Darstellungen von relativen Häufigkeiten, aber auch zu bedingten Wahrscheinlichkeiten mitberücksichtigt werden, um die Anschlussfähigkeit für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe 2 zu gewährleisten.

Die Methode der *Teilnehmenden Beobachtung* ermöglicht die Analyse von im Unterricht realisierten Zielbeschreibungen (taught curriculum) im Kontext der allgemeinen Lehrplanvorgaben (intended curriculum). Neben einer Untersuchung etwaiger Diskrepanzen zwischen Richtlinien und Praxis könnten Einblicke in Konzeptvorstellungen von Lernenden und Lehrenden zum Themenkomplex Daten und Zufall aus (unterrichtlichen) Gesprächen sowie Materialien gewonnen werden.

Im Anschluss an den Impulsvortrag berichteten Vertreter/innen der einzelnen Institutionen über Schwerpunkte der Stochastikausbildung und über weitere Aktivitäten in diesem Bereich an ihren Wirkungsstätten. Hier könnte eine Verbindung von Primar- und Sekundarstufe interessant sein.

Bei Interesse zur Mitarbeit wird um Kontaktaufnahme mit Stefan Götz (stefan.goetz@univie.ac.at) gebeten.

Myriam Burtscher (PH Salzburg) stellte im Anschluss das Projekt *DIVA – Dividieren als Verteilen und Aufteilen verstehen* vor, das sie gemeinsam mit Michael Gaidoschik (Freie Universität Bozen) leitet. Das Entwicklungsforschungsprojekt sucht für die Erarbeitung der Division in der Primarstufe einen gangbaren Weg, wie möglichst viele Kinder ein tragbares Verständnis der Division entwickeln können. Ein wesentliches Ziel ist dabei, dass die Kinder das jeweils Typische der beiden Aspekte Verteilen (Messen) und Aufteilen (Teilen) verstehen und auch sprachlich angemessen auszudrücken lernen. Der erste Zyklus des Projekts wurde in vier Klassen aus Salzburg und Südtirol durchgeführt und ist im Dezember 2023 abgeschlossen worden. Nun liegen erste Erkenntnisse vor, die deutlich machen, dass es möglich und lohnend ist, Kinder konsequent zum Nachdenken über Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Aspekte anzuregen.

Erfahrungen aus der Arbeit mit Studierenden unterstreichen größere Vorerfahrungen mit der Vorstellung des „Teilens“. Dagegen musste ein Mangel an handlungsorientierten Erfahrungen von Studierenden in der eigenen Schulerfahrung festgestellt werden.

Eine Weiterführung der beiden Vorstellungen in höheren Schulstufen wurde diskutiert. Dazu wäre eine Analyse von Schulbüchern der Sekundarstufe 1 passend. Bei Interesse zur Mitarbeit wird um Kontaktaufnahme mit Myriam Burtscher (myriam.burtscher@phsalzburg.at) gebeten.

Termine für eine Herbsttagung 2024 wurden im Anschluss besprochen, mittlerweile hat sich herausgestellt, dass der Vorschlag 6. bis 7. Dezember 2024 nicht realisiert werden konnte. Stattdessen findet die Herbsttagung vom 2. bis 3. Dezember 2024 in Salzburg statt.

Eine Arbeitskreissitzung bei der nächsten GDM-Tagung 2025 in Saarbrücken wird angemeldet.

Die Aktivierung der Datenbank an der Universität Klagenfurt für Dissertationen, Diplomarbeiten und Masterarbeiten aus dem Bereich Mathematikdidaktik an österreichischen Universitäten wurde zur Diskussion gestellt. Eine Verlinkung mit der Homepage des Arbeitskreises wäre wünschenswert. Dazu wird eine Aktivierung und Aktualisierung der Datenbank befürwortet.

Eigene, übersichtliche und von außen zugängliche Homepages mit Publikationsverzeichnissen für die Kolleg/innen an den PHs wären wünschenswert, um den gewünschten wissenschaftlichen Austausch zu erleichtern.

Myriam Burtscher, Pädagogische Hochschule Salzburg
Myriam.Burtscher@phsalzburg.at

Stefan Götz, Universität Wien
stefan.goetz@univie.ac.at

Edith Schneider, Universität Klagenfurt
edith.schneider@aau.at

Arbeitskreis: Psychologie und Mathematikdidaktik

Lüneburg, 18./19. 10. 2024

Silke Neuhaus-Eckhardt und Janina Krawitz

Die Herbsttagung des AKs Psychologie und Mathematikdidaktik fand dieses Jahr im herbstlichen Lüneburg statt. Die auch diesjährige hohe Anzahl an Teilnehmenden zeigt die positive Entwicklung des Arbeitskreises auf, welcher in Tradition der International Group for Psychology of Mathematics Education (IG PME; www.igpme.org) steht. Damit können wir uns auch weiterhin im deutschsprachigen Raum über eine qualitativ hochwertige, psychologisch orientierte Strömung innerhalb der Didaktik der Mathematik freuen.

Nach dem üblichen ersten gemeinsamen Treffen beim Mittagessen für diejenigen, die schon früher anreisen konnten, stellte am Freitagnachmittag Michael Nickl (IPN Kiel/TU München) im ersten Vortrag ein Projekt zur Förderung von Diagnosekompetenzen angehender Lehrkräfte vor. Dabei zeigte er auf, dass verschiedene Videoformate mit unterschiedlicher physischer Ähnlichkeit ähnlich lernförderlich sind und daher auch weniger aufwendige Videoformate genutzt werden können. Zusätzlich stellte er eine zweite Studie zur Integration von adaptiven Scaffolding in die Videos zur Förderung der Diagnosekompetenzen vor. In der darauffolgenden Diskussion wurden vor allem die unerwarteten geringen Unterschiede zwischen Experimental- und Kontrollgruppe sowie die Möglichkeit weiterer Forschungsperspektiven diskutiert.

Im zweiten Vortrag des Tages stellten Alina Knabbe und Dominik Leiss (Leuphana Universität Lüneburg) ihr Forschungsprojekt aus dem Bereich des kontextbezogenen Interesses bei realitätsbezogenen Aufgaben vor. Basierend auf vorherigen Forschungsergebnissen, dass Interesse am lebensweltlichen Kontext eine wichtige Rolle spielt, wurde eine systematische Befragung zum Interesse an verschiedenen Themenbereichen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen erwartungskonform unterschiedliches Interesse an den verschiedenen Themenbereichen, welches auch mit den Personenmerkmalen zusammenhängt. Gerade diese Themenbereiche und ihre Relevanz für den Mathematikunterricht sowie die Möglichkeit vertiefender Analysen zu den Personenmerkmalen wurden anschließend gewinnbringend diskutiert.

In einer extra für uns eingerichteten geschlossenen Gesellschaft wurde danach der Abend mit einem gemeinsamen Essen verbracht, welches für die meisten Teilnehmenden noch in einem späteren Kneipenbesuch mündete, bei dem uns auch das Lüneburger „Bridgen“ nahegebracht wurde.

Am Samstagmorgen führte Marielena Menzel (Universität Potsdam) in ihr Projekt zur Förderung von Modellierungskompetenzen und Motivation in Mathematik durch Experimente ein, wobei Sie sich auf die Wirkmechanismen zwischen Trait und State Values der Wertüberzeugungen während der Intervention im Kontrollgruppendesign konzentrierte. Die Intervention wirkt unterschiedlich auf die Wertüberzeugungen, was auch in der anschließenden Diskussion thematisiert wurde. Außerdem wurden weitere Analysemethoden für die vorhandenen Daten vorgeschlagen.

Im letzten Vortrag der Herbsttagung stellten Jascha Quarder und Stanislaw Schukajlow (Universität Münster) ihre Studie über die Wechselwirkungen zwischen Autonomie- und Kompetenzerleben sowie deren Beeinflussung durch mögliche prädiktive Faktoren vor. Neben einem positiven Einfluss durch offene Modellierungsaufgaben und der Modellierungsleistung auf die beiden Konstrukte zeigt sich auch eine Situationsabhängigkeit der Ergebnisse. In der Diskussion wurden neben der Frage, warum die soziale Eingebundenheit als drittes Grundbedürfnis der Selbstbestimmungstheorie nicht mit in die Studie aufgenommen wurde, auch die genaue Ausgestaltung der Unterrichtseinheiten sowie deskriptive Ergebnisse diskutiert.

Wir möchten uns bei allen Vortragenden, die sich im Rahmen der Herbsttagung dem intensiven Vortragsformat gestellt haben, nochmals herzlich bedanken. Gleichzeitig danken wir auch allen Teilnehmenden für ihre Fragen, Kommentare und Anregungen. Ein besonders großer Dank geht dieses Jahr aber an die Arbeitsgruppe in Lüneburg, die dieses Treffen vortrefflich organisiert hat und uns einen Raum reservieren konnte, von dem man einen wundervollen Ausblick hatte!

Um auch Sie an den Vorträgen und Einblicken teilhaben zu lassen, haben wir die Vortragenden gebeten, die Kernpunkte ihres Vortrags sowie einen kurzen Rückblick auf die Diskussion festzuhalten.

Foto: S. Neuhaus-Eckhardt

Gruppenfoto, entstanden auf der Herbsttagung 2024 des AK

Förderung von Diagnosekompetenzen: Adaptive Echtzeitanpassung von Scaffolding für Lehramtsstudierende in einer videobasierten Simulation

Michael Nickl, Daniel Sommerhoff, Anika Radkowitsch, Sina A. Huber, Elisabeth Bauer, Stefan Ufer, Jan L. Plass und Tina Seidel (IPN Kiel, TU München und weitere)

Zur Förderung des mathematischen Argumentierens müssen Lehrkräfte den Wissensstand der Schüler*innen akkurat diagnostizieren. Um die dafür notwendigen Diagnosekompetenzen zu fördern, hat sich der Einsatz videobasierter Simulationen in der universitären Lehre vielversprechend gezeigt (Chernikova et al., 2024). Videos in Simulationen können bei hoher physischer Ähnlichkeit und funktionaler Korrespondenz dabei eine hohe Authentizität ermöglichen. Dem Ziel der hohen Authentizität steht jedoch ein hoher Aufwand bei der Entwicklung realistischer Videos gegenüber. Vor diesem Hintergrund wurden in diesem Projekt realistische, animierte und bildbasierte Videoformate hinsichtlich wahrgenommener Authentizität (physische Ähnlichkeit und funktionale Korrespondenz) und elizitierter Lernaktivitäten in einer videobasierten Simulation miteinander verglichen ($N = 192$ Lehramtsstudierende, Between-Subject-Design). Die Videoformate unterschieden sich in physischer Ähnlichkeit, jedoch nicht in funktionaler Korrespondenz und Lernaktivitäten. Der Vergleich der Formate deutet darauf hin, dass auch weniger aufwendig zu produzierende Videoformate ähnlich lernförderlich sind wie realistische Videos.

Neben der Gestaltung der Videos in der Simulation beeinflusst auch die Integration von Scaffolding und dessen Anpassung an individuelle Lernprozesse die Lernzuwächse von Lehramtsstudierenden (Belland et al., 2017). Basierend auf der Echtzeitauswertung von Textprozessdaten untersuchten wir daher zusätzlich das Potenzial von Scaffolding-Adaptivität zur Förderung der Diagnosekompetenzen von Lehramtsstudierenden, indem wir die Effekte der Simulationsbearbeitung ohne Scaffolding (Kontrollgruppe), mit nicht-adaptivem Scaffolding und mit adaptivem Scaffolding verglichen ($N = 245$ Lehramtsstudierende, Between-Subject-Design). Die kurze (ca. 25 Minuten) Intervention zeigte keine signifikanten Lernzuwächse für die Diagnoseakkuratheit durch adaptives Scaffolding. Aufgrund dieser zunächst etwas überraschenden Ergebnisse wurde ein Schema zur Analyse von Gelingensbedingungen adaptiven Scaffoldings entwickelt, zur Analyse der ausbleibenden Effekte in der Studie eingesetzt und im Rahmen des Vortrags auf der Herbsttagung des AKs präsentiert.

Kernpunkte der Diskussion und Anregungen. Die Diskussion des Vortrags fokussierte zunächst die unerwarteten Ergebnisse der Adaptivitätsstudie, insbesondere die Lernzuwächse der Kontrollgruppe. So wurde deutlich, dass Simulationen an sich einen Mehrwert für die Lehrkräfteausbildung haben, unabhängig von zusätzlichem Scaffolding. Gleichzeitig zeigten Fragen zum Design, z. B. zur parallelen Gestaltung der Videoformate, dass auch untergeordnete Aspekte, wie kurze Handgesten, Einfluss auf die Wahrnehmung und Bewertung haben können und die Gestaltung paralleler Videos entsprechend schwierig ist. Schließlich wurden in der Diskussion verschiedene Forschungsperspektiven zum Diagnostizieren deutlich (z. B. Noticing, Förderung von Diagnosekompetenzen), für die eine systematische Erarbeitung von Gemeinsamkeiten und

Unterschieden sowie ein stärkerer Austausch Potenzial für die weitere Erforschung der Diagnosekompetenzen birgt (Leuders et al., 2022).

INMATCO-Projekt: Interest in Mathematical Task Context. Von VAMPS zu INMATCO – Geschichte eines psychologisch-mathematikdidaktischen Forschungsprojekts

Alina Knabbe, Dominik Leiss und Lysann Zander (Leuphana Universität Lüneburg, Leibniz Universität Hannover)

In dem Vortrag wurde dargestellt, wie die Ergebnisse des DFG-Projekts VAMPS (Variationen, Aufgaben, Mathematik, Physik und Sprache) einen neuen Forschungsschwerpunkt im Bereich des kontextbezogenen Interesses bei realitätsbezogenen Aufgaben und damit das interdisziplinäre Forschungsprojekt INMATCO (Interest in Mathematical Task Context) an der Schnittstelle von Mathematikdidaktik und Psychologie motiviert haben.

Realitätsbezogene Aufgaben spielen im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle, bereiten vielen Lernenden jedoch Schwierigkeiten (z. B. Daroczy et al., 2015; Jankvist & Niss, 2020). Im Rahmen des VAMPS-Projekts wurden Mathematikaufgaben aus 30 realen Kontexten entwickelt und untersucht, welche Aufgabenmerkmale die Schwierigkeit von realitätsbezogenen Aufgaben beeinflusst. Die Ergebnisse geben Hinweise darauf, dass neben kognitiv-fachlichen Anforderungen und Personenmerkmalen, der lebensweltliche Aufgabenkontext eine größere Rolle beim Lösen der Aufgaben spielt als bisher angenommen (Leiss et al., 2024). Während sich in der Mathematikdidaktik hauptsächlich mit dem positiven Zusammenhang zwischen fachlichem Interesse an Mathematik und der mathematischen Leistung von Schüler*innen befasst wurde (z. B. Nuutila et al., 2020), wurde der Aufgabenkontext und das damit verbundene Interesse selten untersucht. Daher wurde in einer zweiten Studie das Interesse am lebensweltlichen Kontext der VAMPS-Aufgaben näher betrachtet. Hierfür wurden 535 Schüler*innen des neunten und zehnten Jahrgangs an zwei Gesamtschulen befragt. Die Ergebnisse zeigen geschlechtsspezifische Interessensunterschiede und einen positiven Zusammenhang zwischen kontextuellem Interesse und dem Lösen realitätsbezogener Aufgaben. Im daran anknüpfenden INMATCO-Projekt wurde eine systematische Abfrage von Themenbereichen vorgenommen, da die bisher untersuchten VAMPS-Aufgabenkontexte eine zufällige Zusammenstellung an lebensweltlichen Themen darstellte. Insgesamt nahmen 1006 Schüler*innen aus der fünften bis zwölften Klasse an der Erhebung teil. Die Ergebnisse zeigen, dass erwartungskonform Schüler:innen ihr Interesse unterschiedlich an verschiedenen Themenbereich einschätzen. Darüber hinaus wurden Personenmerkmale (Geschlecht und sozialer Hintergrund) als Einflussfaktoren auf das Interesse am lebensweltlichen Kontext identifiziert.

Kernpunkte der Diskussion und Anregungen. Im Anschluss an den Vortrag wurden unter anderem die Fragen diskutiert, welche lebensweltlichen Themenbereiche für Schüler*innen relevant sind, welches Wissen über lebensweltliche Themen im Mathematikunterricht vermittelt werden sollte und inwieweit es auch einer normativen Diskussion für die bewusste Auswahl von Kontexten im Mathematikunterricht bedarf. Es wurde darauf hingewiesen, dass die unterrichtliche Umsetzung eines solchen Ansatzes insbesondere auch darauf achten muss, dass geschlechterstereotypische Interessen im Klassenverband nicht zusätzlich noch verstärkt werden. Vertiefte Analysen hinsichtlich verschiedener Personenmerkmale, wie dem Alter, und die Entwicklung von weiteren Aufgaben, um den Zusammenhang zwischen Leistung und kontextuellem Interesse systematisch zu untersuchen, wurden angeregt. Abschließend wurde betont, dass, im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, der Einfluss des Aufgabenkontextes in der Mathematikdidaktik bislang wenig Beachtung fand und weitere Forschung in diesem Bereich unerlässlich ist.

Experimentieren zur Förderung von Motivation bzgl. mathematischem Modellieren im Mathematikunterricht!?

Marielena Menzel, Sebastian Geisler und Stefanie Rach (Universität Potsdam, OVGU Magdeburg)

Mathematisches Modellieren ist eine wichtige Praktik, allerdings weisen Schüler*innen oftmals Modellierungsaufgaben weniger Wert zu als innermathematischen Aufgaben. Um die Motivation der Lernenden zu steigern, kombinieren wir im Projekt Ex2MoMa (Experimentieren zur Förderung von Modellierungskompetenzen und Motivation in Mathematik) das mathematische Modellieren mit hands-on Experimenten. Die konkreten Wirkmechanismen sind dabei allerdings nicht eindeutig, insbesondere welche Komponenten der Motivation positiv beeinflusst werden können.

Unterschieden werden hier stabile, domänenspezifische Values bezüglich Mathematik („Trait Values“) und dynamische, kurzweilige Values bezüglich einer konkreten Aufgabe („State Values“) nach den Komponenten des Subjective Task Value (Eccles & Wigfield, 2020). Die Wechselwirkung von Trait Values und State Values (nach Moeller et al., 2022) untersuchten wir in einer quasi-experimentellen Kontrollgruppenstudie mit drei Bedingungen: Modellierungsaufgaben (1) mit in Experimenten selbst erhobenen Daten, (2) mit vorgegebenen realen Daten und (3) mit vorgegebenen geglätteten Daten. In drei aufeinanderfolgenden Mathematikstunden wurden in 28 Klassen der 10. und 11. Jahrgangsstufe drei gleich strukturierte Modellierungsaufgaben zu drei Kontexten je nach Bedingung bearbeitet. Die State Values der Lernenden wurden direkt nach der Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe und die Trait Values vor und nach der Intervention mittels erprobter Skalen erhoben.

Die Ergebnisse deuten an, dass sich die Intervention unterschiedlich auf die Trait Values und State Values der Schüler:innen auswirkt und nicht alle Komponenten im gleichen Maß profitieren.

Kernpunkte der Diskussion und Anregungen. Es wurde unter Anderem diskutiert, inwiefern die verwendeten Kontexte besonders motivationsförderlich sind. Motivation hängt zwar mitunter stark von den verwendeten Kontexten ab, und die Frage, welche Kontexte beim Modellieren besonders motivationsfördernd wirken, ist interessant, jedoch bestand die Forschungsfrage in diesem Projekt darin, die Rolle des Experimentierens beim Modellieren bezüglich der Motivation zu beforschen. Daher wurden gezielt Kontexte gewählt, die im Rahmen von Praxisheften und Schulbüchern für die Kombination von Modellierungsaufgaben mit Experimenten beworben wurden (z.B. Deschauer et al., 2018; Ludwig & Oldenburg, 2007).

Ein weiterer Schwerpunkt in der Diskussion lag auf weiteren Analysemöglichkeiten der vorliegenden Daten, z.B. eine Clusterung auf Klassenebene durchzuführen, die Leistung (Vornote) der Schüler*innen als Prädiktor aufzunehmen, eine Interaktion von Person und Situation zu analysieren sowie eine andere Form der Dummy-Kodierung zu testen. Diese Forschungsansätze werden aktuell in das Publikationsvorhaben des Projekts eingearbeitet.

Kompetenzerleben, Autonomieerleben und ihre Wechselwirkung: Die Bedeutung von Modellierungsleistung und Unterricht mit offenen Modellierungsaufgaben

Jascha Quarder, Stanislaw Schukajlow, Janina Krawitz, Katharina Wiehe & Katrin Rakoczy (Universität Münster, Universität zu Köln, Justus-Liebig-Universität Gießen)

Die Selbstbestimmungstheorie betont die Bedeutung von Autonomie und Kompetenz als zentrale psychologische Grundbedürfnisse des Menschen (Deci & Ryan, 1985). Für den realitätsbezogenen Mathematikunterricht liegen erste Hinweise vor, dass Autonomieerleben und Kompetenzerleben die Motivation von Schüler*innen fördert (Schukajlow & Krug, 2014) . Es ist jedoch wenig darüber bekannt, wie sich Autonomieerleben und Kompetenzerleben während des Lernprozesses gegenseitig beeinflussen und welche spezifischen Faktoren diese vorhersagen. Ein potenzieller Einflussfaktor könnte die Modellierungsleistung sowie der Unterricht mit offenen Modellierungsaufgaben sein. Ziel des Vortrags war es daher, folgende Forschungsfragen zu beantworten: (1) Welche Wechselwirkungen bestehen zwischen Autonomieerleben und Kompetenzerleben während des Lernens? und (2) Inwieweit wird das Autonomieerleben und Kompetenzerleben durch die Modellierungsleistung und den Unterricht mit offenen Modellierungsaufgaben beeinflusst? Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine experimentelle Studie mit $N = 295$ Neuntklässler:innen durchgeführt. Die Schüler:innen erhielten über fünf Einheiten entweder Unterricht mit offenen Modellierungsaufgaben (Experimentalgruppe) oder Unterricht mit geschlossenen realitätsbezogenen Aufgaben (Kontrollgruppe). Die Gruppenzugehörigkeit und Modellierungsleistung wurden im Prätest erfasst, während das Autonomie- und Kompetenzerleben an fünf Messzeitpunkten jeweils am Ende einer Unterrichtseinheit erhoben wurde. Die Datenauswertung erfolgte mittels eines Cross-Lagged-Panel-Modells. Die Ergebnisse zeigen signifikante Wechselwirkungen zwischen Autonomie- und Kompetenzerleben sowie positive Effekte offener Modellierungsaufgaben auf beide Konstrukte. Interessanterweise beeinflusst die Modellierungsleistung das Autonomieerleben, nicht jedoch das Kompetenzerleben. Zudem variieren die Effekte stark zwischen den Messzeitpunkten, was die Bedeutung der jeweiligen Unterrichtssituation hervorhob.

Kernpunkte der Diskussion und Anregungen. Aufgrund der starken Variation der Effekte zwischen den Messzeitpunkten wurde in der anschließenden Diskussion empfohlen, die Unterrichtseinheiten der beiden Gruppen detaillierter darzustellen, um mögliche Gründe für die Schwankungen der Effekte besser nachvollziehen zu können. Es wäre besonders hilfreich, die fachdidaktische Ausgestaltung der Unterrichtseinheiten hinsichtlich des Erlebens von Autonomie und Kompetenz genauer zu beschreiben. Ein weiterer Diskussionspunkt betraf die Entscheidung, das dritte Grundbedürfnis der Selbstbestimmungstheorie – die soziale Eingebundenheit – nicht zu berücksichtigen. Hier wurde angemerkt, dass eine ausführlichere Erklärung für diese Entscheidung wünschenswert wäre. Darüber hinaus wurde vorgeschlagen, neben dem Cross-Lagged-Panel-Modell auch deskriptive Ergebnisse zu berichten. Dies könnte verdeutlichen, in welchen Unterrichtseinheiten das Autonomie- und Kompetenzerleben im Durchschnitt besonders ausgeprägt war. Ziel des Vorschlags ist es, die Ergebnisse mit der fachdidaktischen Ausgestaltung der jeweiligen Unterrichtseinheiten in Zusammenhang zu bringen und mögliche Boden- oder Deckeneffekte bei der Analyse der Einflussfaktoren aufzudecken.

Organisatorisches und Ausblick

Janina Krawitz (Universität zu Köln) wurde als neue Sprecherin des AKs gewählt und wird diese Aufgabe zusammen mit Silke Neuhaus-Eckhardt (JMU Würzburg) übernehmen. Wir danken hiermit dem ausscheidenden Sprecher Daniel Sommerhoff für die jahrelange Leitung des AKs. Die nächste Tagung wird voraussichtlich am 17. und 18. Oktober 2025 in Würzburg stattfinden.

Haben Sie Lust bekommen, an unserer Tagung teilzunehmen und mitzudiskutieren? Eine kurze E-Mail an eine der Sprecherinnen Silke Neuhaus-Eckhardt (neuhaus@dmuw.de) oder Janina Krawitz (janina.krawitz@uni-koeln.de) genügt, wenn Sie in den E-Mail-Verteiler des Arbeitskreises aufgenommen werden möchten, der unser Hauptkommunikationsmittel ist. Aktuelle Informationen finden Sie auch immer auf unserer Internetpräsenz unter akpsy.didaktik-der-mathematik.de.

Wenn Sie vortragen möchten, melden Sie sich bitte ebenfalls per E-Mail. Die Teilnehmenden unserer Herbsttagung interessieren sich vornehmlich für Studien, bei denen die Bezugsdisziplin Psychologie eine Rolle spielt. Bis zu vier Arbeiten, die eher fortgeschritten oder kurz vor dem Abschluss sind, können vorgestellt werden, egal ob es ein Promotionsprojekt, Ausschnitt aus einer laufenden Studie oder eine Arbeit im Publikationsprozess ist. Sie sollten dazu bereit sein, die Arbeiten im Sinne eines ausführlichen Werkstattberichts zur Diskussion zu stellen. Unterjährig wird der AK Psychologie und Mathematikdidaktik voraussichtlich keine weitere planmäßige Aktivität anbieten.

Gemeinsames Literaturverzeichnis

Belland, B. R., Walker, A. E., Kim, N. J., & Lefler, M. (2017). Synthesizing results from empirical research on computer-based scaffolding in STEM education: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 87*(2), 309–344. DOI:10.3102/0034654316670999

Chernikova, O., Holzberger, D., Heitzmann, N., Stadler, M., Seidel, T., & Fischer, F. (2024). Where salience goes beyond authenticity: A meta-analysis on simulation-based learning in higher education. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 38*(1–2), 15–25. DOI:10.1024/1010-0652/a000357

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H.-C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*(Article 348). DOI:10.3389/fpsyg.2015.00348

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* Springer US. DOI:10.1007/978-1-4899-2271-7

Deschauer, S., Körner, H., & Meyer, J. (Hrsg.). (2018). Experimente im Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 1*(64).

Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology, 61*, 101859. DOI:10.1016/j.cedpsych.2020.101859

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 467–496. DOI:10.1080/0020739X.2019.1587530

Leiss, D., Ehmke, T., & Heine, L. (2024). Reality-based tasks for competency-based education: The need for an integrated analysis of subject-specific, linguistic, and contextual task features. *Learning and Individual Differences, 114*, 102518. DOI:10.1016/j.lindif.2024.102518

Leuders, T., Loibl, K., Sommerhoff, D., Herppich, S., & Praetorius, A.-K. (2022). Toward an overarching framework for systematizing research perspectives on diagnostic thinking and practice. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(1), 13–38. DOI:10.1007/s13138-022-00199-6

Ludwig, M., & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren, 141*, 4–11.

Moeller, J., Viljaranta, J., Tolvanen, A., Kracke, B., & Dietrich, J. (2022). Introducing the DYNAMICS framework of moment-to-moment development in achievement motivation. *Learning and Instruction, 81*, 101653. DOI:10.1016/j.learninstruc.2022.101653

Nuutila, K., Tapola, A., Tuominen, H., Kupiainen, S., Pásztor, A., & Niemivirta, M. (2020). Reciprocal predictions between interest, self-efficacy, and performance during a task. *Frontiers in Education, 5*. DOI:10.3389/feduc.2020.00036

Schukajlow, S., & Krug, A. (2014). Do multiple solutions matter? Prompting multiple solutions, interest, competence, and autonomy. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 497–533. DOI:10.5951/jresematheduc.45.4.0497

Silke Neuhaus-Eckhardt,
Julius-Maximillians-Universität Würzburg
neuhaus@dmuw.de

Janina Krawitz, Universität zu Köln
janina.krawitz@uni-koeln.de

Arbeitskreis: Semiotik, Zeichen und Sprache der Mathematikdidaktik

Herbsttagung in der Abtei Frauenwörth, 18.–20. 9. 2024

Barbara Ott, Christof Schreiber und Gert Kadunz

In der Zeit vom 18. 9. bis 20. 9. 2024 wurde die Herbsttagung des Arbeitskreises durchgeführt. Der Tradition folgend war die Abtei Frauenwörth im Chiemsee (www.frauenwoerth.de) der Tagungsort. Diese Tagung zeichnete sich, wie schon die mehr als zwanzig Herbsttagungen davor, durch eine Vielfalt von präsentierten Inhalten aus, welche sich alle einem zeichentheoretischen Kontext zuordnen lassen. Dazu wurden vier Vorträge gehalten, deren Kurzfassungen hier notiert sind.

Flavio Angeloni, Leibniz Universität Hannover
Elementare Algebra in der (österreichischen) Gebärdensprache

Der Vortrag umfasst Ergebnisse des Promotionsprojektes zum Kommunizieren über elementare Algebra in österreichischer Gebärdensprache. Dabei werden Relationen zwischen den Gebärden zu mathematischen Begriffen und zu mathematischen Verschriftlichungen oder Handlungen sowie die Ikonizität mathematischer Gebärden untersucht. Der mathematische Fokus sind Variablen und das Operieren mit ihnen. Anwendungen für den Unterricht in einer Gebärdensprache basierend auf den Ergebnissen wurden ebenso thematisiert.

Hermann Kautschitsch, Universität Klagenfurt
Vermuten – Beweisen – Überzeugen mit Diagrammen der ebenen Euklidischen Geometrie

Anhand zweier Standardbeispiele der Schulgeometrie, des Satzes von Thales und des Satzes vom Schwerpunkt im Dreieck, werden die Konstruktion und Arbeitsweise von Diagrammen in der synthetischen, analytischen und der algebraischen Geometrie dargelegt. Die an diesen Beispielen vorgestellten Beweise zeigen, dass je reichhaltiger die den Diagrammen zugrunde liegende Theorie ist, desto „automatischer“ erfolgt das Vermuten und Beweisen. Dies nicht zuletzt weil ausgefeiltere Methoden der Mathematik, realisiert z. B. durch CAS, eingesetzt werden können. Abschließend wird das Problem der Überzeugungskraft verschiedener Diagramme (synthetische, analytische und algebraisches Geometrie), beschrieben und Folgerungen für den Unterricht formuliert.

Sebastian Schorcht, Technische Universität Dresden
Prompt-Techniken & Agenten-Netzwerke – KI-gestütztes Lösen und Stellen von Textaufgaben

Der gehaltene Vortrag untersucht den Einsatz von Large Language Models (LLMs), insbesondere GPT-Varianten, zum Lösen mathematischer Textaufgaben. Nach einer Einführung in die Funktionsweise von LLMs und deren Anwendung im Kontext des mathematischen Problemlösens, präsentiert die Studie eine vergleichende Analyse verschiedener Prompt-Techniken (Zero-Shot, Chain-of-Thought, Ask-Me-Anything, Few-Shot) und GPT-Versionen (GPT-3.5, GPT-4, GPT-4 mit Wolfram-Plugin). Die Qualität der KI-generierten Lösungen wurde anhand inhaltsbezogener (Spezifität, Klarheit, Korrektheit) und prozessbezogener (Strategie, Repräsentation, Reflexion) Kriterien evaluiert. Die Ergebnisse zeigen, dass die GPT-Version einen signifikanten Einfluss auf die inhaltliche Qualität hat, während die Prompt-Techniken hauptsächlich die prozessbezogene Qualität, insbesondere die Lösungsstrategie, beeinflussen. Der Vortrag beleuchtete sowohl das Potenzial als auch die Herausforderungen von KI-Systemen beim Lösen mathematischer Textaufgaben und gab einen Ausblick auf zukünftige Forschungsrichtungen in diesem Bereich.

Annika Wille*, Leibniz Universität Hannover, und Barbara* Ott*, Pädagogische Hochschule St. Gallen*
Eine Analysemethode zur Bestimmung von Interaktionsmustern

Im Vortrag wird die Analysemethode PMSC (Process Analysis of Mathematical Sign Activity and Communication about it) vorgestellt, die auf der Semiotik von Charles Sanders Peirce basiert. Es werden Analysen von der Nutzung von Zeichensystemen in der individuellen mathematischen Lernbegleitung präsentiert, wobei der Fokus auf Interaktionsmustern in der diagrammatischen Tätigkeit und der Kommunikation darüber liegt. Durch den Vergleich verschiedener Studierenden-Lernenden-Paare können Unterschiede in der sich entwickelnden sozialen Praxis sichtbar werden.

Neben den oben angeführten Personen nahmen Willi Dörfler, Sandra Bumann, Gert Kadunz, Felix Poklukar, Christof Schreiber und Rose Vogel an dieser Tagung teil.

Bisher sind drei Sammelbände aus Vorträgen des Arbeitskreises entstanden. Im Anschluss an die Tagung 2025 soll ein neuer Band die Vorträge der nächstjährigen Tagung einer breiteren Öffentlichkeit vorstellen.

Diese Tagung ist für die Zeit vom 24. 9. bis 26. 9. 2025 in der Abtei Frauenwörth im Chiemsee geplant.

Barbara Ott, Pädagogische Hochschule St. Gallen
barbara.ott@phsg.ch

Christof Schreiber, Justus-Liebig-Universität Gießen
christof.schreiber@math.uni-giessen.de

Gert Kadunz, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
gert.kadunz@aau.at

Arbeitskreis: Mathematiklehren und -lernen in Ungarn

Online, 27./28. 9. 2024 und Budapest, 16. 10. 2024

Gabriella Ambrus und Johann Sjuts

Auf zwei Veranstaltungen im zweiten Halbjahr 2024 kann der Arbeitskreis „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn" zurückblicken. Am 27. und 28. September 2024 fand (online) das Herbsttreffen des Arbeitskreises statt, am 16. Oktober 2024 ein Gastvortrag von Johann Sjuts an der Eötvös Loránd Universität in Budapest.

1 Herbsttreffen des Arbeitskreises am 27. und 28. September 2024

Teilgenommen haben 18 Kolleginnen und 9 Kollegen aus der Mathematikdidaktik (14 aus Ungarn, 7 aus Deutschland, 3 aus Österreich, 2 aus der Schweiz und 1 aus Rumänien). Es gab einen Hauptvortrag und zwölf Kurzvorträge.

Hauptvortrag

Vancsó, Ödön (Budapest): ***Warum ist die Stochastik so schwer?***
Abstract: Im Vortrag werden die kognitiven Probleme der Entwicklung der Grundbegriffe (z. B. der Wahrscheinlichkeit) untersucht und wie diese im Unterricht beherrscht werden sollten. In der Mathematik sind wir daran gewöhnt, dass eine Behauptung, ein Urteil etc. entweder richtig oder falsch ist. Die immer anwesende Unsicherheit ist in der Stochastik nicht zu vermeiden. Deshalb scheint dieses Gebiet ein „fremder Körper" in der Mathematik zu sein. Wie kann diese Situation durch die Analyse der verwendeten kognitiven und metakognitiven Prozesse behandelt werden? Wir suchen Antworten auf diese Frage.

Kurzvorträge

Barkó, Ferenc (Budapest): ***Die Methoden der Reihenentwicklung in einigen Mathematiklehrbüchern des 18. Jahrhunderts***
Abstract: Verfahren zur Erzeugung unendlicher Summen finden sich in zwei Lehrbüchern aus dem 18. Jahrhundert, die wahrscheinlich dazu gedacht waren, Oberstufenschüler in die Analysis einzuführen. Einer seiner Autoren ist der bekannte Mathematiker Leonhard Euler, der andere Autor ist ein weniger bekannter Mathematiker und Lehrer aus Ungarn: Pál Kerekgedei Makó, der sein Lehrbuch auf Latein verfasste. Heutzutage gehören diese Verfahren nicht mehr zu den Pflichtthemen in der Oberstufe, obwohl sie Gelegenheit bieten, wichtige Fragen zu irrationalen Zahlen, Operationen und Unendlichkeit zu diskutieren, deren Lehre durch den Einsatz von Taschenrechnern in den Mittelschulen etwas oberflächlich geworden ist.

Figula, Ágota (Debrecen): ***Die Analyse der Klausuren von Studenten, die die Mathematik mit der Orientierung an Funktionen lernen***
Abstract: Wir haben in den Seminaren des Kurses *Mathematik 1* eine Gruppe von Elektroingenieur- und Physikstudenten in ihrem ersten Hochschuljahr mit der Orientierung an Funktionen und mit praxisorientierten Aufgaben unterrichtet. Sie haben eine Klausur zum Thema Differenzialrechnung geschrieben. Wir haben die Ergebnisse unserer Studenten mit ihren Kommilitonen verglichen. Die Erfahrung war, dass unsere Gruppe solche Aufgaben, in denen sie die Differenzialrechnung anwenden sollten, erfolgreicher lösen konnte.

Fried, Katalin and Vásárhelyi, Éva (Budapest): ***Two pillars of traditional Hungarian mathematics education***
Abstract: Hungarian mathematics education showed a noticeable rise around the turn of the 19th and 20th centuries. Later, in the 60s–70s of the 20th century, it gained new momentum with the leadership of Tamás Varga. In spite of some negative reactions, it became a success story in Hungary. Many have researched why and how it happened and how it still works. Also, the guided discovery nature of Hungarian mathematics education is well-known. But it only works for some children, and requires a lot of time. A workaround solution was needed to create a material appropriate for practically all children. To achieve this goal, sets of problems were created, and, for that, careful designing was needed. We study the background of the creating

of such problem sheets. They were designed *using elementarizing* and were based on *context effect*. We are going to represent some examples and analyze how they work.

Fülöp, Zsolt (Budapest): *The main cognitive aspects of the transition from arithmetic to algebra – patterns and errors*

Abstract: The cognitive gap between arithmetic and algebra principally means the pupils' inability to operate spontaneously with or on the unknown. In this way, certain types of errors can be identified, such as reversal error, closure, etc. In this presentation, we would like to discuss the results of our own empirical research on this topic, conducted among Grade 7 pupils. Our study investigates the main patterns and errors in pupils' thinking processes in the solution of word problems whose algebraic model is an equation where the unknown quantity occurs on both sides of the equation.

Kása, Emese (Debrecen): *Die Untersuchung des Unterrichts der Analysis unter Elektroingenieur- und Physikstudenten*

Abstract: In unserem Experiment haben wir Elektroingenieur- und Physikstudenten in den Seminaren des Kurses *Mathematik 1* untersucht, welche Kenntnisse sie über Funktionen in ihrem ersten Hochschulsemester beherrschen. Sie haben einen Test im ersten Seminar geschrieben, in dem wir ihre Vorkenntnisse zum Thema Funktionen erhoben haben. Dann haben wir unsere Gruppe mit der Orientierung an Funktionen unterrichtet. Am Ende des Semesters haben alle Studenten wieder denselben Test geschrieben. Nach unseren Erfahrungen zeigte unsere Gruppe im zweiten Test bessere Leistungen.

Müller, Matthias und Imhof, Andreas (Chur): *Einflüsse der Methode bei der Untersuchung von Aneignungsprozessen bei der Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen – Beschreibung eines methodischen Untersuchungsdesigns*

Abstract: Denkprozesse, Schülerkonzepte und mathematische Grundvorstellungen können nur indirekt über Lösungen von Aufgaben, Beobachtungen oder Gespräche erschlossen werden. Jedem Vorgehen wohnen methodenspezifische Messfehler inne (Hasselhorn & Schneider, 2007). In einer mathematikdidaktischen Studie zum Lernen mit digitalen Mathematikwerkzeugen (Müller, 2021) wurden Werkzeug-Aneignungsprozesse mit der Methode des Lauten Denkens (Konrad, 2010) untersucht. Um die Reliabilität und Validität der Studienergebnisse zu verifizieren, wird im Rahmen des Beitrags ein neues Untersuchungsdesign vorgestellt.

Pintér, Marianna (Budapest): *Can the traditional and digital development game fit in the mathematical ability development process of the alpha generation?*

I collected data in between 2014 and 2019 two times about the IT device usage habits of the Alpha-generation, and their mathematical experience base before school age. The method of data collection was a questionnaire survey. The second (online) questionnaire was available nationwide, it was filled out anonymously and voluntarily by a relative of 345 Hungarian pupils. Now I present the correlation analysis between the data covered the following: the independence of tool use habits and the frequency of tool use from gender, place of residence, and parent's educational level. Playing at home with traditional mathematical development games is also independent of those listed. Traditional development games are not supplanted or replaced by games played on IT devices, there is no trade-off between them.

Postupa, Jennifer (Bamberg) und Ambrus, Gabriella (Budapest): *Kognitive Aktivierung durch grafische Darstellungen – ein Vergleich deutscher und ungarischer Schulbücher aus zwei Epochen*

Abstract: Das Erlernen, Verstehen und Betreiben von Mathematik kann durch geeignete grafische Darstellungen erheblich unterstützt werden. In Lehrbüchern werden grafische Darstellungen beispielsweise eingesetzt, um Textinhalte zu verdeutlichen, mathematische Zusammenhänge zu veranschaulichen oder Beispiele für Aufgabenbearbeitungen bereitzustellen. Nicht zuletzt sind grafische Darstellungen auch geeignet, Lernende zu einer intensiven Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten anzuregen. Die Untersuchung solch kognitiv aktivierender Lehrbuchdarstellungen im Rahmen des Bruchrechnens steht im Mittelpunkt dieses Vortrags.

Schnepel, Susanne (Münster): *Die Bedeutung des lauten Denkens für den Aufbau mentaler Repräsentationen im mathematischen Anfangsunterricht*

Abstract: Kinder mit Lernschwierigkeiten entwickeln häufig unzureichende mentale Repräsentationen oder Fehlvorstellungen. Im Vortrag wird der Frage nachgegangen, ob die metakognitive Strategie des lauten Denkens den Aufbau mentaler Repräsentationen bei Kindern mit Lernschwierigkeiten unterstützen kann. Die Frage wird auf Grundlage publizierter Studien beantwortet.

Sjuts, Johann (Osnabrück): *Passender Prompt, perfekter Respons? KI-Chatbot-Einsatz zum Lösen mathematischer Probleme*
Abstract: Ein generativer KI-Textroboter, ein KI-Chatbot, reagiert auf eine Eingabeaufforderung, einen Prompt, mit einer Antwort, einem Respons. Damit kann ein Chatbot durchaus in der Lage sein, für ein in Textform vorgelegtes mathematisches Problem eine Lösung in Textform zu erstellen. Anleitungen, Prompts klar und zielgerichtet zu formulieren, liefert das sogenannte Prompt Engineering. Die Frage ist, was sich vom Prompt Engineering zum Lösen mathematischer Probleme erwarten lässt.

Szűcs, Kinga (Erfurt): *Beliefs von deutschen Mathematiklehrkräften zum Beweis(en)*
Abstract: Da Beliefs eine entscheidende Rolle bei der Planung, Gestaltung, Bewertung, Wahrnehmung und Rezeption von Lehr- und Lernprozessen spielen, wurde bei Lehrkräften der Mathematik in Deutschland mit Hilfe eines digitalen Fragebogens untersucht, über welche Beliefs sie mit Bezug zum Beweis(en) verfügen. Die Ergebnisse zeigen, dass die Überzeugungen der Probanden vom Beweisbegriff mit dessen inhaltlichen Facetten übereinstimmen, gleichzeitig aber im schulischen Kontext in angemessenem Maß davon abweichen. Zudem lassen die Befunde Widersprüche zwischen ihren Beliefs mit Bezug zum Lernen bzw. zum Lehren von Beweisen erkennen. Im Vortrag werden die Ergebnisse ausführlich vorgestellt und es wird zur Teilnahme im ungarischen Sprachraum ermutigt, um länderübergreifende Vergleiche vornehmen zu können.

Vargyas, Emese (Leipzig): *Brücken bauen: Vom Speziellen zum Allgemeinen*
Abstract: Das Lösen von Beweis- und Konstruktionsaufgaben in der Elementargeometrie stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine erhebliche Herausforderung dar. Der häufig gegebene Rat, einen Spezialfall zu betrachten, erweist sich oft als wenig hilfreich. Die Gründe für das Scheitern einer anschließenden Verallgemeinerung sind vielfältig. Die Trivialität des Spezialfalls, Schwierigkeiten bei der Erkennung von Zusammenhängen zwischen dem speziellen und dem allgemeinen Fall sowie mögliche Sackgassen, die sich aus der speziellen Lösung ergeben, sind nur einige der möglichen Ursachen. Im Vortrag werden anhand ausgewählter Beispiele verschiedene Ansätze zur Überwindung dieser Probleme vorgestellt.

In den Rückmeldungen wurden das vielfältige und bereichernde Programm sowie die angenehme und vertraute Atmosphäre (sogar online) gewürdigt.

2 Gastvortrag an der Eötvös Loránd Universität

Die Eötvös Loránd Universität hatte Johann Sjuts zum Gastvortrag eingeladen. Die Begrüßung erfolgte durch Csaba Csapodi, den neuen Leiter des dortigen Mathematikdidaktischen Zentrums für Lehrerbildung.

Johann Sjuts: *Key to Success: Cognitive and Metacognitive Processes in Understanding Mathematics*

Abstract: Humans are able to self-reflect on their thoughts and actions. They are able to make themselves the subject of their thoughts and reflections. In particular, it is possible to become aware of one’s own cognition, which means the way in which one thinks about something, and thus regulate and control it. This is what the term metacognition, thinking about one’s own thinking, stands for. The cognitive processes of thinking, learning and understanding in mathematics become more effective and successful when they are supplemented and extended by metacognitive processes. However, it depends on a specific design of the mathematics lessons and the corresponding tasks in mathematics.

3 Buchreihe „Mathematiklehren und -lernen in Ungarn“ im WTM-Verlag Münster

Mittlerweile liegen sechs Bände vor. Die Buchreihe hat dazu beigetragen, dass nicht nur ein vielfältiger Austausch von Forschungsergebnissen und Unterrichtsanregungen und eine internationale Zusammenarbeit stattgefunden haben, sondern dass auch (jüngere) Kolleginnen und Kollegen aus Ungarn eine Gelegenheit zu Publikationen erhalten und so Wege zur wissenschaftlichen Qualifikation gefunden haben.

4 Ausblick

Vorgesehen sind im Jahr 2025 zwei Treffen, am 4. März 2025 eine Arbeitskreis-Sitzung im Rahmen der GDM-Jahrestagung in Saarbrücken und am 10. und 11. Oktober 2025 eine Veranstaltung an der Eötvös Loránd Universität in Budapest zum 10-jährigen Bestehen des Arbeitskreises.

Gabriella Ambrus, Eötvös Loránd Universität Budapest
ambrus.gabriella@ttk.elte.hu

Johann Sjuts, Universität Osnabrück
sjuts-leer@t-online.de

ISTRON-Gruppe

Frankfurt, 20./21. 9. 2024

Matthias Ludwig, Simon Barlovits, Simone Jablonski, Katrin Vorhölter und Hans-Stefan Siller

Interdisziplinarität aufzeigen, **S**chulisch wirken, **T**echnologieeinsatz fördern, **R**ealitätsbezüge integrieren, in Forschung und Schulpraxis Interessierten **O**rientierung bieten und all dies **N**achhaltig implementieren – unter diesem Leitbild fand auch die diesjährige Herbsttagung der ISTRON-Gruppe statt. Unterstützt durch das lokale Organisationsteam um Matthias Ludwig wurde die traditionsgemäße und bewährte Zweiteilung des Treffens umgesetzt: Am ersten Tag fand eine interne Sitzung, am zweiten Tag ein Fortbildungstag für Lehrkräfte statt.

Die interne Sitzung dient primär dem wissenschaftlichen Austausch zum Lehren und Lernen von Realitätsbezügen und wird inhaltlich vom Sprecherteam (Hans-Stefan Siller und Katrin Vorhölter) organisiert. In diesem Jahr konnten die Forschungsergebnisse aus drei Vorträgen diskutiert werden:

Den Anfang machten Nina Unshelm (Universität Würzburg) und Sarah Digan (Australian Catholic University). Im gemeinsamen Vortrag präsentierten die Referentinnen erste Erkenntnisse des internationalen Projektes „Strengthening teachers' instructionals capabilities with Big Data" (PI Hans-Stefan Siller und Vince Geiger) zur Überprüfung von Medienaussagen mit Mathematik und großen Datensätzen. Im Rahmen der Forschung wurden Lernenden zwei divergente Medienaussagen, z. B. zur globalen Erderwärmung, vorgelegt. Durch die Analyse realer und öffentlich zugänglicher Datenbanken zur Erderwärmung sollten die Lernenden beurteilen, inwiefern die Medienaussagen mit den gegebenen Realdaten übereinstimmen – die Medienaussagen sollen also auf ihren Wahrheitsgehalt geprüft werden.

Im Anschluss wurde Hans Humenberger (Universität Wien) aus Wien digital dazugeschaltet – das Hochwasser im Raum Süddeutschland hatte ihm eine Präsenzteilnahme verwehrt und zugleich die Relevanz des Themas Nachhaltigkeit im Sinne von Wetterphänomenen und Klimawandel unterstrichen. In seinem Vortrag berichtete Hans Humenberger über die Umsetzung des Modellierens in einem Seminar für Studierende: Die Studierenden erarbeiten über das Semester hinweg Modellierungsaktivitäten, welche im Anschluss an Modellierungstagen in Wiener Schulen zum Einsatz kommen – ein Ansatz, der nicht nur Modellierungsaktivitäten in die Schule bringt, sondern Studierende über ihre erstellten Aufgaben und Materialien reflektieren lässt.

Im dritten Vortrag referierte Sebastian Kunze (PH Ludwigsburg) über empirische Ergebnisse zu Lernumgebungen und zum kriterienbasierten Noticing von Lehramtsstudierenden und Lehrkräften. Insbesondere wurde das Potenzial von schriftlichen Vignetten herausgestellt: In einer Studie wurden (angehende) Mathematiklehrkräften Vignetten vorgelegt, welche fiktive Lehrkräfteinterventionen zu Modellierungsprozessen aufzeigen. Es zeigte sich, dass die Lehramtsstudierenden deutlich seltener die dargestellten Lösungsprozesse der Lernenden als zielführend ansehen. Hingegen analysieren Lehrkräfte weniger kritisch die fiktiven Lehrkräfteinterventionen. Folglich können Vignetten zur Lehrkräfteaus- und -fortbildung genutzt werden, um die Unterstützung von Modellierungsprozessen gezielt zu fördern.

Im Anschluss an die wissenschaftlichen Vorträge und Diskussionen wurde über anstehende Konferenzen, z. B. die ICTMA22-Konferenz im kommenden Jahr in Linköping/Schweden, sowie die Möglichkeiten modellierungsspezifischer Publikationen, u. a. die bei Springer aufgelegte Reihe „Realitätsbezüge im Mathematikunterricht", berichtet. Die Einreichung von Abstracts für den aktuellen Call zum Modellieren an außerschulischen Lernorten ist noch möglich (Fristende: Ende Februar 2025).

Gut gestärkt mit hessischen Spezialitäten fand am nächsten Tag der Lehrkräftetag statt. *Wie können Temperaturrekorde und Klimawandel im Mathematikunterricht thematisiert werden? Warum lädt auch der Schulgarten zum Mathematiklernen ein? Und wie viel Schulmathematik steckt hinter Künstlicher Intelligenz?* Mit diesen Fragen wurden Mathematiklehrkräfte der Sekundarstufe I und II eingeladen, sich intensiv mit mathematischem Modellieren und Nachhaltigkeit auseinander zu setzen. Das Angebot umfasste praxisorientierte Workshopangebote mit konkreten Ideen und Umsetzungsmöglichkeiten für den eigenen Unterricht und wurde insbesondere von hessischen Lehrkräften wahrgenommen. Zwei Hauptvorträge rahmten dieses Angebot: Katrin Vorhölter (TU Braunschweig) stellte in ihrem einleitenden Vortrag Herausforderungen und Potentiale der Bildung für Nachhaltige Entwicklung im Mathematikunterricht heraus. Martin Bracke (Universität Koblenz) übernahm das inhaltliche Schlusswort der Veranstaltung und zeigte anhand einiger Beispiele für den Mathematikunterricht, wie nachhaltige Entwicklung und Mathematik zum „Dream-Team" werden können. Das gesamte Programm des Lehrpersonentags kann weiterhin unter der folgenden Webadresse abgerufen werden: www.uni-frankfurt.de/151321993/ISTRON_Tagung_2024__Mathematisches_Modellieren_und_Nachhaltigkeit.

Der Dank für die Organisation und Durchführung gilt insbesondere Matthias Ludwig und seinem Team an der Goethe-Universität Frankfurt sowie allen Vortragenden der Tagung und Dozierenden des Fortbildungstages, aber auch dem Springer-Verlag, welcher während der Tagung den Lehrkräften kostenlos elektronische Exemplare der ISTRON-Bände aus der Buchreihe „Realitätsbezüge im Mathematikunterricht", in der regelmäßig entsprechende Unterrichtsmaterialien sowie Ergebnisse empirischer Untersuchungen veröffentlicht werden, auf der Homepage der Tagung zur Verfügung gestellt hat.

Weitere Informationen zu ISTRON finden Sie auf der Homepage der ISTRON-Gruppe (www.istron-gruppe.de), die neben den Informationen zur Schriftenreihe auch Informationen zu zukünftigen Tagungen enthält. Haben Sie Interesse, bei ISTRON mitzumachen? Dann würden sich die Sprecher der ISTRON-Gruppe (K. Vorhölter und H.-St. Siller) freuen, Sie auf der GDM-Jahrestagung in Saarbrücken im Arbeitskreistreffen begrüßen zu dürfen!

Matthias Ludwig, Goethe-Universität Frankfurt
ludwig@math.uni-frankfurt.de

Simone Jablonski, Universität Paderborn
jablonsk@mail.uni-paderborn.de

Simon Barlovits, Goethe-Universität Frankfurt
barlovits@math.uni-frankfurt.de

Katrin Vorhölter, TU Braunschweig
katrin.vorhoelter@tu-braunschweig.de

Hans-Stefan Siller, Julius-Maximilians-Universität Würzburg
hans-stefan.siller@uni-wuerzburg.de

GDM-Nachwuchskonferenz 2024

Daniel Sommerhoff und Femke Sporn

Habe nun, ach! Literaturreviews, Interaktionsanalyse
und Statistik,
Und leider auch Publizieren
Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh ich nun, ich froher Tor!
Und bin viel klüger als zuvor.

Frei nach Goethe könnte man so die GDM-Nachwuchskonferenz 2024 beschreiben, die vom 9. bis 13. September in Bad Malente stattfand und von Birte Niebuhr, Femke Sporn und Daniel Sommerhoff vom IPN Kiel ausgerichtet wurde. Insgesamt trafen sich dort über 50 Promovend:innen der Didaktik der Mathematik aus Deutschland und Österreich sowie 25 Expert:innen.

Die Tagung bot eine tolle Plattform für junge Wissenschaftler:innen, um sich vor allem forschungsmethodisch weiterzubilden, sich intensiv auszutauschen, und wertvolle Kontakte zu knüpfen. Hierfür wurden neben methodisch orientierten Hauptvorträgen von Ulrich Kortenkamp, Olaf Köller, und Jessica Hoth auch Workshops, Round Tables sowie diverse Networking-Aktivitäten und ein Ausflugsnachmittag angeboten. Die Themen reichten von systematischen Literaturreviews über Design Research und statistischen Analyseverfahren bis zu aktuellen Themen wie Open Science und dem Einsatz von Künstlicher Intelligenz in der Mathematikdidaktik. Zusätzlich zu diesen Gruppenformaten gab es auch die Gelegenheit, individuelle Beratungsgespräche mit Expert:innen zu führen, die von den Promovend:innen sehr gut angenommen wurden.

Als Ersatz für einen kurzfristig abgesagten Hauptvortrag fand zudem eine Podiumsdiskussion zu Herausforderungen und Bewältigungsstrategien während der Promotion statt. Als Diskutant:innen hatten sich kurzfristig David Bednorz, Judith Huget, Henning Sievert, Anselm Strohmaier und Birke Weber bereit erklärt, die einerseits alle erfolgreich promoviert haben, andererseits aber auch Unterschiede in der weiteren Karriere repräsentieren.

Die Podiumsdiskussion war informativ, zeigte verschiedene Perspektiven auf und gab den Teilnehmenden der Nachwuchskonferenz die Möglichkeit, ihre eigenen Erfahrungen und Herausforderungen über eine digitale Chatwall anonym in die Diskussion einzubringen. Dabei wurde deutlich, dass die Art und Qualität der Betreuung während der Promotion von vielen Faktoren abhängt und zum Teil sehr unterschiedlich erlebt wird. Dies wurde auch im weiteren Verlauf der Tagung von und mit den Teilnehmenden diskutiert. So berichteten einige Promovierende von Schwierigkeiten, überhaupt in einen vertieften, regelmäßigen und produktiven Austausch mit der betreuenden Person zu kommen. Auch ergänzende Strukturen im wissenschaftlichen Mittelbau, wie Mentor:innen oder Austauschformate mit anderen Promovend:innen, scheinen sehr unterschiedlich ausgeprägt zu sein.

Diese Unterschiede in der Betreuung führten zu der Anregung, dass innerhalb der GDM strukturelle Anpassungen zur Verbesserung der Betreuungssituation vorgenommen werden könnten. Als Fachgesellschaft könnten bspw. Mindest- oder wenigstens Standards für die Betreuung von Promotionen etabliert werden, die nicht nur potenziell einigen Promovierenden die Promotion erleichtern würden, sondern letztlich auch zu einer Qualitätssteigerung sowie zu mehr Fairness und Vergleichbarkeit führen würden. Diese Standards könnten, so die Anregung, von der Nachwuchsvertretung der GDM in Zusammenarbeit mit dem Beirat oder einer eingesetzten Arbeitsgruppe entwickelt und implementiert werden.

Neben der Betreuungssituation zeigten sich die Promovend:innen vor allem auch an Fragen der Selbstorganisation (bspw. Zeitmanagement) und Aspekten des wissenschaftlichen Arbeitens wie der Literaturrecherche, der Methodenwahl oder verschiedenen Formen der Promotion (bspw. kumulativ vs. Monografie) interessiert.

Ein Programmelement, das aufgrund der Erfahrungen dieser Nachwuchskonferenz in Zukunft einer weiteren Ausschärfung bedarf, sind die Round Tables. Diese sind einerseits als Möglichkeit für die präsentierenden Teilnehmer:innen gedacht, ihre eigene Forschung zu präsentieren, sollten aber gleichzeitig auch den nicht-präsentierenden Teilnehmer:innen die Möglichkeit bieten, sich in der Rezeption und kritischen Diskussion von Vorträgen zu üben. Schließlich sollte es jeweils noch ein Feedback der anwesenden Expert:innen geben. In der Durchführung, aber auch in der Evaluation, zeigte sich, dass die Round Tables trotz einer immer noch guten Bewertung am schwächsten bewertet wurden, da diese verschiedenen Zielsetzungen in ihrer aktuellen Form noch nicht ausreichend vereinbar umgesetzt waren. Das Team der NWK 2024 steht diesbezüglich bereits im Austausch mit dem Organisationsteam der Nachwuchskonferenz 2025 aus München (Termin der Nachwuchskonferenz 2025: 15.–19. September, Webseite: www.ed.math.lmu.de/nwk2025).

Foto: Daniel Sommerhoff

Gute Stimmung beim Gruppenbild mit Teilnehmer:innen und Expert:innen

Neben den wertvollen fachlichen Impulsen bot die Tagung auch reichlich Gelegenheit für informelle Gespräche und Networking. In den Pausen, bei den gemeinsamen Abendveranstaltungen und dem Ausflugsnachmittag konnten sich die Teilnehmenden in informeller Atmosphäre austauschen und neue Kontakte knüpfen, die sicherlich auch über die Tagung hinaus Bestand haben werden.

Insgesamt lässt sich sagen, dass die GDM-Nachwuchskonferenz 2024 eine rundum gelungene Veranstaltung war, die den Teilnehmenden nicht nur fachlich, sondern auch persönlich wertvolle Impulse gegeben hat. Die Mischung aus wissenschaftlichem Input, praxisnahen Workshops und der Möglichkeit zum individuellen Austausch sorgte dafür, dass die Teilnehmenden auf ihre Kosten kamen und mit einem positiven Gefühl an ihre Standorte zurückkehren konnten. Dies zeigt sich nicht nur anekdotisch, sondern auch in der durchgeführten Evaluation. Hier bewerteten drei Viertel der Teilnehmenden die Tagung mit sehr gut, knapp ein Viertel mit gut und nur eine Person vergab eine neutrale Bewertung. 95 % der Teilnehmenden würden die Teilnahme an der Nachwuchskonferenz anderen Promovierenden empfehlen. Beschreibungen der Nachwuchskonferenz durch die Teilnehmenden waren beispielsweise:

- „Eine super nette Atmosphäre, alle waren super freundlich, spannende neue Inhalte in den Workshops und Vorträgen!“
- „Viel inhaltlicher Input für die Dissertation und viel Austauschmöglichkeiten mit anderen Promovierenden und Expert:innen.“
- „Lehrreich und intensiv“
- „Das war eine runde und vielseitig gelungene Veranstaltung: inhaltlich, kognitiv, sozial, affektiv, sportlich, kulturell, konzeptionell, methodisch, menschlich bereichernd und neue Perspektiven eröffnend für die Weiterarbeit am eigenen Forschungsvorhaben.“

Damit hat die Tagung einen bleibenden Eindruck hinterlassen und deutlich gemacht, wie wichtig solche Veranstaltungen für den wissenschaftlichen Nachwuchs sind. Die Anregung, Mindeststandards für die Betreuung von Promovierenden zu entwickeln, zeigt, dass die Konferenz auch Impulse für strukturelle Verbesserungen in der Promotionsbetreuung geben konnte – ein Schritt, der in Zukunft sicherlich weiterverfolgt werden sollte.

An dieser Stelle sei ganz explizit den Expert:innen gedankt, ohne die die Tagung nicht möglich gewesen wäre und die sich trotz voller Terminkalender oft nicht nur für ihre Workshops oder Vorträge, sondern weit darüber hinaus Zeit genommen haben, um mit dem Nachwuchs in Austausch zu kommen! Auch der GDM als Fachgesellschaft sei für die finanzielle Unterstützung bei der Umsetzung gedankt.

Einen kurzen Einblick in die Tagung ermöglicht das Abschlussvideo der Nachwuchskonferenz, welches unter folgendem Link abgerufen werden kann: youtu.be/OP132XsYk8M

Weitere Eindrücke sind über den Instagram-Account des IPN verfügbar: www.instagram.com/ipn_kiel/.

Daniel Sommerhoff, IPN – Leibniz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
sommerhoff@leibniz-ipn.de

Femke Sporn, IPN – Leibniz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
sporn@leibniz-ipn.de

Das war die MAVI30 Conference: Mathematical Views – Affect and Beliefs in Mathematics Education: Looking back and forward

Ralf Erens und Maria Kirstine Østergaard

Die 30. Internationale Konferenz zum Thema „MAthematical VIews“ (MAVI) fand Ende September 2024 an der Pädagogischen Hochschule in Freiburg statt. Zur Jubiläumstagung kamen zahlreiche Teilnehmende aus Deutschland, Italien, dem Vereinigten Königreich, der Tschechischen Republik, Schweden, Norwegen, Dänemark, Finnland, Österreich, Spanien, Australien und Neuseeland. Sie war damit die bisher meistbesuchte Konferenz in der Geschichte der Forschungsgruppe.

Getreu dem unterstützenden und kollegialen Geist von MAVI führten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer durchdachte Diskussionen über ein breites Spektrum an Forschungsthemen im Zusammenhang mit affektiven Aspekten des Mathematikunterrichts. Einige der Präsentationen konzentrierten sich auf Faktoren, die die Unterrichtspraxis von Lehrkräften beeinflussen können, wie z. B. kognitive Dissonanz, digitale Lernumgebungen, Praktika während der Lehrerausbildung und kulturelle Unterschiede bei der Übertragung von Lehrmethoden. Ein weiteres wichtiges Thema waren die Überzeugungen und Perspektiven der Lehrkräfte in Bereichen wie Technologieeinsatz, Kompetenz, Schwierigkeit der mathematischen Aufgaben und Bedeutung des mathematischen Inhaltswissens, des mathematisch-pädagogischen Wissens und des allgemeinen pädagogischen Wissens der Lehrkräfte.

Gegenstand der Diskussion waren außerdem die Evolution und Evaluierung von Theorie-Rahmen und Modellen, darunter die Evaluierung einer digitalen Testumgebung, die Entwicklung eines Modells für die professionelle Entwicklung von Lehrkräften unter Verwendung der Ergebnisse des nationalen Large-Scale Assessment und eine Studie über einen Achievement Emotion Questionnaire. Auch fächerübergreifende Themen, insbesondere bei der MINT-Bildung, standen im Vordergrund. Zu den vorgestellten Forschungsarbeiten gehörten Studien über die Wahrnehmung von Mathematik in Chemieaufgaben durch SchülerInnen, über den Einfluss von mathematischen Überzeugungen und Vorstellungen von Lehramtsstudierenden auf wissenschaftliche Aktivitäten sowie über die professionsbezogenen Beliefs von Lehrkräften hinsichtlich der Rolle der Mathematik in wissenschaftlichen Modellen.

Die affektiven Aspekte des Mathematiklernens von SchülerInnen waren ein zentraler Punkt der Konferenz. Die wissenschaftlichen Beiträge behandelten Themen wie die Beziehung zwischen Ausdauer und mathematischem Wohlbefinden, den Einfluss des Selbstkonzepts von Universitätsstudenten auf die Abbrecherquote im Studienfach, die Verwendung von neuronalen EEG-Analysen zur Untersuchung von Mathematikangst, die reflexive thematische Analyse mathematikbezogener Emotionen von Universitätsstudierenden und die Beziehung zwischen affektiven Variablen wie Wertvorstellungen zur Mathematik und Resilienzfaktoren. Andere Studien untersuchten die Zusammenarbeit von SchülerInnen und ihre gegenseitige Wahrnehmung als Lernende, den Einfluss einer Unterrichts-Intervention zum mathematischen Problemlösen auf affektive Reaktionen der Schüler sowie die Art und Weise, wie die Teilnahme der SchülerInnen ihre Visualisierungen von mathematischen Inhalten beeinflusst und detaillierter macht.

In der Tradition der MAVI-Forschungsgruppe wurden die Beiträge im Anschluss an jeden Vortrag intensiv diskutiert, was einen wertvollen Austausch von Anregungen, Fragen und Fachwissen ermöglichte. Im Einklang mit der MAVI-Tradition förderte dieses unterstützende und integrative Umfeld die aktive Teilnahme aller Teilnehmenden, unabhängig von ihrem akademischen Titel oder ihrer Erfahrung.

Zusätzlich zu dem reichhaltigen akademischen Programm hatten die Teilnehmenden das Privileg, Hauptvorträge von zwei angesehenen Wissenschaftlern zu hören. Prof. Günter Törner von der Universität Duisburg-Essen, Mitbegründer der MAVI-Gemeinschaft, reflektierte über 30 Jahre Forschung im Bereich der affektiven Dimensionen des Mathematikunterrichts, von Überzeugungen als versteckter Variable über verschiedene Rahmen für mathematische Ansichten bis hin zu der weiten Landschaft, die die Forschung zu affektiven Aspekten des Mathematikunterrichts heute ausmacht – ein Facettenreichtum, der sich in der Themenvielfalt der bei dieser Konferenz vorgestellten peer-reviewten Beiträge widerspiegelte.

Foto: L. Holzäpfel

Foto: L. Holzäpfel

Links: FACE lecture. Rechts: Alan Schoenfeld, Günter Törner und Ralf Erens (v. l. n. r.)

Im Rahmen der MAVI berichtete Prof. Alan Schoenfeld von der University of California, Berkeley über seinen eigenen Forschungsweg von der Untersuchung des Problemlösens von SchülerInnen, der Entscheidungsfindung von Lehrerinnen und Lehrern und der Entwicklung von Beliefs bei Lehrkräften mit zunehmender Berufserfahrung.

Die Public Keynote von Alan Schoenfeld („What Matters in Classrooms? Issues of Theory, Context, and Practice") fand als sehr gut besuchte, interdisziplinäre, offene FACE-Lecture (Uni und PH Freiburg) statt, da das TRU Framework auf ein reges Interesse stieß (u. a. fächerübergreifend anwendbar). Schoenfeld erläuterte sein Konzept leistungsfähiger Lernumgebungen, das „Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework", welches eine umfassende Beschreibung der fünf Dimensionen von Lernumgebungen bietet, aus denen alle SchülerInnen als sachkundige und einfallsreiche Denkende und Problemlösende hervorgehen. In den vergangenen zehn Jahren hat Alan Schoenfeld die Ideen von TRU weiterentwickelt und Instrumente sowie Partnerschaften aufgebaut, um Lehrkräften, Schulen und Schulbezirken bei der Umsetzung eines zunehmend leistungsfähigen Unterrichts zu helfen.

Wie immer war es ein Vergnügen, sich mit alten und neuen MAVI-KollegInnen in der warmen und einladenden Atmosphäre zu treffen, die diese Konferenz wirklich einzigartig macht. Neben den akademischen Aktivitäten genossen die Teilnehmenden eine geführte Tour durch die charmanten Straßen Freiburgs mit ihren unverwechselbaren Mosaikpflastern und historischen Gebäuden. Das akademische Programm wurde ergänzt durch eine kleine Wanderung am Tuniberg im Westen Freiburgs. Der dortige Opfinger Aussichtspunkt bot bei herrlichem Spätsommerwetter einen wundervollen Blick auf Freiburg und den Schwarzwald. Der Tag endete mit einem Abendessen mit lokalen Spezialitäten inmitten eines malerischen Weinbergs, was den perfekten Rahmen für informelle Gespräche und Networking bot.

Zum Abschluss der Konferenz dankte das MAVI International Board besonders Ralf Erens (IMBF) und seinem Team für die Organisation und Ausrichtung dieser unvergesslichen MAVI30-Konferenz. Die nach einem weiteren Review überarbeiteten Beiträge und Ergebnisse der MAVI-Gruppe werden in einer Sonderausgabe von LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education veröffentlicht.

Ralf Erens, Institut für Mathematische Bildung (IMBF),
Pädagogische Hochschule Freiburg
erens@ph-freiburg.de

Maria-Kirstine Østergaard, Danish School of Education,
Aarhus University
mko@edu.au.dk

Prof. Dr. Hans-Joachim Vollrath zum 90. Geburtstag

Hans-Stefan Siller, Hans-Georg Weigand und Thomas Weth

Foto: Privat

Am 24. 11. 2024 konnte Hans-Joachim Vollrath seinen 90. Geburtstag feiern. Wir möchten ihm hiermit, natürlich auch im Namen von vielen Mitgliedern der GDM, ganz herzlich gratulieren, möchten uns bedanken für sein jahrzehntelanges stets beherztes und hochengagiertes Wirken auf regionaler, nationaler und internationaler Ebene der Didaktik der Mathematik und wünschen ihm von Herzen noch viele weitere Jahre in Gesundheit und Entspanntheit im Kreise seiner Familie.

Von 1977 bis 1982 war er im wissenschaftlichen Beirat der GDM, hat 1988 die Jahrestagung der GDM in Würzburg ausgerichtet und war federführend beteiligt an der Vorstellung der Didaktik der Mathematik in der Bundesrepublik Deutschland auf dem Weltkongress „International Conference on Mathematics Education" 1992 in Quebec (Kanada).[1] Er hat sich bereits vor 1990 aktiv für einen wissenschaftlichen Austausch zwischen der ehemaligen DDR und der Bundesrepublik und dann – nach 1990 – zwischen den alten und neuen Bundesländern eingesetzt. Anlässlich seines 80. Geburtstags wurde er 2014 Ehrenmitglied der GDM.

Der Werdegang von Hans-Joachim Vollrath

H.-J. Vollrath studierte von 1954 bis 1959 an der Freien Universität Berlin Mathematik, Physik und Geographie für das Lehramt an höheren Schulen. Er legte die erste und zweite Staatsprüfung ab, war sechs Jahre an der Schule tätig und hat dann in Mathematik bei Detlef Laugwitz in Darmstadt über ein fachmathematisches Thema mit dem Titel *Grundzüge einer Theorie der Ω-metrischen Räume* promoviert, anschließend ebenfalls in der Fachwissenschaft habilitiert. Ab 1970 war er Professor für Didaktik des Rechen- und Raumlehreunterrichts und ab 1972 bis zu seiner Pensionierung im Jahr 2000 (erster) Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik an der Universität Würzburg. Nach seiner Emeritierung hat er sich weiterhin intensiv mit der Geschichte der Mathematik an der Universität Würzburg beschäftigt, hat historische Instrumente gesammelt und diese in mehreren Ausstellungen der Öffentlichkeit zugänglich gemacht. H.-J. Vollrath hat auch in den letzten 24 Jahren stets in Fachzeitschriften veröffentlicht und noch mehrere Bücher geschrieben.

Das wissenschaftliche mathematikdidaktische Werk von Hans-Joachim Vollrath

1974 erschien die 1. Auflage der *Didaktik der Algebra*, die wissenschaftliche Leitlinien in der Mathematikdidaktik setzte. Dabei identifizierte er insbesondere den Funktionsbegriff als Leitbegriff, beschrieb die Fusion von Algebra und Geometrie und spiegelte die Veränderungen des Mathematikunterrichts wider, die durch die Betonung der Strukturmathematik bzw. „Mengenlehre" oder der „New Math" in den 1960er- und 1970er-Jahren angestoßen wurden. 1984 erschien die *Methodik des Begriffslehrens*, die das Lehren und Lernen von Begriffen in einen mathematischen, mathematikdidaktischen, pädagogischen und psychologischen Kontext einordnete – und auch heute noch als Standardwerk gilt. Sowohl diese beiden Bücher als auch die 2001 erschienenen *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* waren von einer sich stets gegenseitig befruchtenden Wechselbeziehung von Theorie und Praxis geprägt.

H.-J. Vollrath hat viele Bücher und Artikel in wissenschaftlichen Zeitschriften veröffentlicht. Seine Internetseite (www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/veroeffentlichungen.html) listet 18 Bücher und 119 Artikel auf. Das breite Spektrum dieser Veröffentlichungen zeigt sich in Beiträgen etwa zum Beweisen, zu Zahlsystemen, Funktionen und funktionalem Denken, geometrischen Abbildungen, Symmetrie oder Begriffsbildung. Dabei finden sich einerseits viele Artikel zur Theoriebildung in der Mathematikdidaktik, etwa zu Begriffsbilden und Problemlösen, zum langfristigen Lernen, zur Bedeutung mathematischen Hintergrundwissens oder zu Paradoxien im Mathematikunterricht. Andererseits hat H.-J. Vollrath viele praxisorientierte Beiträge veröffentlicht, wie etwa

[1] Mathematics education in the Federal Republic of Germany ZDM 1992, Heft 7 http://emis.muni.cz/journals/ZDM/zdm927a.html

zu Einstiegen im Geometrieunterricht, zur Umwelterschließung oder zum Funktionsbegriff. Viele seiner Ideen sind dann in die von ihm mit herausgegebene Schulbuchreihe „Gamma“ eingeflossen.

Hans-Joachim Vollrath und die Lehre

Die Ausbildung von Studierenden und die Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses waren stets eine Herzensangelegenheit von H.-J. Vollrath. Dies begann bereits in seiner Darmstädter Zeit, als er zusammen mit D. Laugwitz das Buch *Schulmathematik vom höheren Standpunkt* schrieb. In seinen Veranstaltungen versuchte er stets, die Studierenden zum eigenständigen Entwickeln von Ideen anzuregen und sog. traditionelle Unterrichtsmethoden erfahrener Lehrkräfte sowie Inhalte aktueller Lehrpläne mit kritischer Distanz zu betrachten. H.-J. Vollrath war von der Notwendigkeit eines theoriebasierten Blicks auf die Schulwirklichkeit überzeugt und hat stets die theoriegeleitete praktische Umsetzung, durchaus im Sinne einer „Design Science“, im realen Unterricht angestrebt. In gleicher Weise hat er auch seine Doktorandinnen und Doktoranden in ihrem eigenständigen Denken unterstützt, hat sich in deren jeweiligen Interessensgebiete eingearbeitet und deren Fortentwicklung immer mit großem Engagement und hoher fachlicher Kompetenz unterstützt.

Hans-Joachim Vollrath und die Geschichte der Mathematik und deren Instrumente

H.-J. Vollrath hat sich fortwährend für die Geschichte der Mathematik und seine Bedeutung im Mathematikunterricht interessiert. Da ist zunächst sein enger Bezug zu Martin Wagenschein, den er zu seiner Darmstädter Zeit kennenlernte, und dessen (historisch-) genetischer Bezug der mathematischen Inhalte. Der Aufsatz H.-J. Vollraths „Rettet die Ideen!“ ist eine Weiterentwicklung des Wagenscheinschen Prinzips „Rettet die Phänomene“. Weiterhin galt sein fortwährendes Interesse der Entwicklung der Mathematik an der Universität Würzburg. Er hat Bücher zu Athanasius Kircher (1602–1680) und Caspar Schott (1608–1666) geschrieben, beide Professoren für Mathematik an der Universität Würzburg, hat Ausstellungen zu deren Wirken organisiert und durchgeführt, hat historische Instrumente gesammelt, wie etwa Ellen, Ellipsenzirkel, Proportionalzirkel, Planimeter oder Rechenmaschinen. Eine Dauerausstellung historischer Rechenmaschinen kann in der Bibliothek des Instituts für Mathematik besucht werden. In seinem Buch *Verborgene Ideen* (2013) hat H.-J. Vollrath gezeigt, wie diese Instrumente auch heute noch der Ausgangspunkt für mathematische und mathematikdidaktische Überlegungen sein können.

Hans-Joachim Vollrath und sein Menschenbild

Es gibt nur wenige Menschen, denen man in jeder Hinsicht vertrauen kann, bei denen man Ratschläge stets als uneigennützig und ehrlich empfindet, denen man aber auch umgekehrt mit all seinen Schwierigkeiten und Problemen in ehrlicher Weise entgegentreten kann und deren Meinung man immer als überlegt, tiefgehend reflektiert und kompetent anerkennt. H.-J. Vollrath hat bei allen seinen Schülerinnen und Schülern sowie bei Diskussionen mit Doktorandinnen und Doktoranden in vielen Oberseminaren fortwährend versucht, deren Denk- und Arbeitsweisen nachzuvollziehen, um dann positive Möglichkeiten und Chancen eines weiteren Vorgehens zu überlegen. Hier zeigte sich das positive Weltbild von H.-J. Vollrath, mit dem er auch anderen Menschen gegenübertritt, indem er deren individuelle Persönlichkeit anerkennt und sie bestärkt, die Wege zu gehen, von denen sie selbst überzeugt sind. Sicherlich ist das auch durch seine religiöse Grundprägung bedingt, die sein ganzes Leben begleitet und strukturiert hat, ohne jemals gegenüber anderen indoktrinierend gewesen zu sein. H.-G. Vollrath ist ein Beispiel dafür, dass es einer engen Wechselbeziehung zwischen fachlichem Wissen, persönlichen Eigenschaften, personalen Grundprinzipien, Interesse, Engagement und Ehrlichkeit bedarf, um in einer Wissenschaft kreative und nachhaltige Ideen hervorbringen zu können.

Wir wünschen für die kommenden Jahre alles erdenklich Gute und Schöne!

Literatur

Laugwitz, D., & Vollrath, H.-J. (1969). *Schulmathematik vom höheren Standpunkt*. Bibliographisches Institut.
Vollrath, H.-J. (1974). *Didaktik der Algebra*. Klett.
Vollrath, H.-J. (1978). Rettet die Ideen! *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 31*, 449–455.
Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens*. Klett.
Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2001). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Springer-Spektrum.
Vollrath, H.-J. (2013). *Verborgene Ideen – Historische mathematische Instrumente*. Springer Spektrum.

Hans-Stefan Siller, Julius-Maximilians-Universität Würzburg
hans-stefan.siller@uni-wuerzburg.de

Hans-Georg Weigand, Julius-Maximilians-Universität Würzburg
hans-georg.weigand@uni-wuerzburg.de

Thomas Weth, Friedrich-Alexander-Universität Nürnberg
thomas.weth@fau.de

Nachruf auf Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn

Andreas Büchter, Hans Humenberger, Christoph Selter, Stephan Hußmann, Susi Prediger und Daniela Götze

Hans-Wolfgang Henn (meist nur Wolfgang genannt) wurde am 9. 1. 1947 geboren und ist am 5. 5. 2024 im 78. Lebensjahr gestorben.

Als Mathematiker, Mathematik- und Physiklehrer, Fachleiter für Mathematik und Mathematikdidaktiker lebte er seine Leidenschaft für Mathematik vor und aus – und hat ebenso leidenschaftlich versucht, seine Mitmenschen für die „Königin der Wissenschaften" (C. F. Gauß) zu begeistern. Dabei spielte es keine Rolle, welche mathematische Vorbildung jemand mitbrachte, stets suchte er nach faszinierenden Phänomenen auf dem jeweiligen Niveau. Seine Begeisterung fußte gleichermaßen auf der Schönheit der Mathematik und ihrer Nützlichkeit, die für ihn allerdings auch Teil der Schönheit war.

Nach einem kurzen Start in den Ingenieurwissenschaften studierte Wolfgang ab 1967 die Fächer Mathematik und Physik an der Universität Karlsruhe und legte dort 1971 das erste Staatsexamen in diesen Fächern ab. Geradezu legendär sind die Umstände seines Studienfachwechsels. Weil er das Mathematikstudium zum Sommersemester aufnahm – und nicht wie regulär vorgesehen zum Wintersemester –, versuchte die Allgemeine Studienberatung eine passende Lehrveranstaltung zu finden. Dort war man der Auffassung, dass „Elementare Zahlentheorie" ein guter Einstieg sei, weil die Vorlesung im Titel das Adjektiv „elementar" trägt. Dass „Elementare Zahlentheorie" – zumal die Vorlesung seines späteren Doktorvaters Heinrich-Wolfgang Leopoldt – in der Regel keine leichte Kost für den Studieneinstieg ist, hat ihn allerdings nicht von der Mathematik abgehalten, sondern seine Begeisterung eher noch gefördert. Zur Zeit seines Studiums war Werner Blum Assistent an der Universität Karlsruhe, sodass die beiden einander schon recht früh kennenlernten, woraus sich eine jahrzehntelange Freundschaft und Zusammenarbeit entwickelt hat. Direkt nach seinem Studium wurde Wolfgang ebenfalls Assistent an der Universität Karlsruhe und promovierte dort 1975 in der algebraischen Zahlentheorie (Dissertation: „Automorphismengruppe und Weierstraßpunkte von Funktionenkörpern"). Danach blieb er noch weitere vier Jahre, bis 1979, an der Universität Karlsruhe. Sein erstes wissenschaftliches Arbeitsgebiet war also die algebraische Zahlentheorie, was auch durch mehrere Veröffentlichungen aus dieser Zeit belegt wird. Aber schon während dieser Zeit wandte sich Wolfgang auch dem Mathematikunterricht zu. Ab 1978 erschienen erste mathematikdidaktische Veröffentlichungen von ihm. Das Referendariat und das zweite Staatsexamen öffneten ihm ab 1979 den Weg in den baden-württembergischen Schuldienst. Seine fortgesetzte wissenschaftliche Arbeit und die Publikationen wechselten nun vollends das Thema, statt *algebraischer Zahlentheorie* stand nunmehr *Lehren und Lernen von Mathematik* im Vordergrund, ein Gebiet, das ihn bis zu seiner Pensionierung 2012, und darüber hinaus, nicht mehr losließ und mit allen Sinnen erfüllte.



Fotos: Privat

Hans-Wolfgang Henn

In den Jahren 1979 bis 1999 unterrichtete Wolfgang die Fächer Mathematik und Physik am Lessing-Gymnasium in Karlsruhe. Ab 1989 war er dabei zusätzlich Fachleiter für Mathematik am Staatlichen Seminar für Schulpädagogik (Gymnasium) in Karlsruhe. In den erwähnten 20 Jahren gibt es von ihm (quasi „berufsbegleitend") ca. 90 mathematikdidaktische Publikationen, beginnend mit „Die Theorie des Regenbogens als ein Beispiel für beziehungshaltige Analysis im Oberstufenunterricht" (BzMU 1979, 166–169; zu diesem Thema gibt es von Wolfgang noch einige weitere Publikationen und Vorträge, weil es ihm wirklich am Herzen lag; man kann – wohl ohne Übertreibung – sagen, dass Wolfgang dieses Thema in die deutsche Mathematikdidaktik gebracht hat) und endend mit dem ISTRON-Band 6 (Computeranwendungen, 2000), den er gemeinsam mit Frank Förster und Jörg Meyer herausgegeben hat und der zwei Beiträge von ihm selbst enthält. Über die Publikationstätigkeit hinaus war Wolfgang in Modellversuchen in Baden-Württemberg (u. a. mit Computer-Algebra-Systemen in Laptop-Klassen) und auf nationalen und internationalen mathematikdidaktischen Tagungen aktiv. Die rege, aus der Praxis gestaltete, wissenschaftliche Tätigkeit erbrachte ihm eine Berufung als Professor für Didaktik der Mathematik, und zwar an die Universität Dortmund im Herbst 1999, wo er dann bis zu seiner Pensionierung für die didaktische Ausbildung der Gymnasiallehrkräfte und für die fachliche und didaktische Ausbildung der Lehrkräfte an Grund-, Haupt- und Realschulen zuständig war. 13 Jahre lang führte er viele Lehramtsstudierende an mathematisches und mathematikdidaktisches Denken heran. Innerhalb des Fachbereichs der Universität Dortmund baute er sehr gute Beziehungen zwischen Mathematikdidaktik und Mathematik auf.

Auch nach seiner Pensionierung war er noch ein Jahr Seniorprofessor an der Goethe-Universität Frankfurt und hatte noch Lehraufträge in Heidelberg (Universität und PH).

Wir können hier nicht auf die Vielzahl seiner Publikationen im Einzelnen eingehen, stattdessen beschreiben wir kurz – und ohne Anspruch auf Vollständigkeit – einige seiner prägenden Arbeitsschwerpunkte.

- Der schon erwähnte Regenbogen (dessen letzte Version 2018 im ISTRON-Jubiläumsband erschienen ist) steht paradigmatisch für seine Bearbeitung des Themas *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (*Modellieren*), dem er sich mit vielen weiteren Publikationen zu unterschiedlichen, stets gehaltvollen Anwendungen widmete. Wolfgang war seit der Gründung der deutschsprachigen ISTRON-Gruppe (Anfang der 1990er-Jahre) eines der besonders aktiven und prägenden Mitglieder. Auch zahlreiche internationale Aktivitäten (Tagungen, Vorträge, Publikationen) von Wolfgang sind hier zu erwähnen, insbesondere im Rahmen der ICTMA (The **I**nternational **C**ommunity of **T**eachers of Mathematical **M**odelling and **A**pplications).
- Auch der *Computereinsatz im Mathematikunterricht* (CAS, DGS, etc.) war ein wichtiges Thema in Wolfgangs Schaffen. Hiervon zeugen u. a. frühe Bücher von ihm zu DERIVE, GEOLOG-WIN und CABRI-GÉOMÈTRE und auch sein Plenarvortrag auf der GDM-Tagung 2001 in Ludwigsburg mit dem Titel „Computer Algebra Systeme – Alter Wein in neuen Schläuchen?"
- Ein dritter Schwerpunkt in Wolfgangs Arbeiten, der immer wieder auftaucht, ist die Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen, die die Lernenden für die Mathematik begeistern können und sollen. Mit diesem Ziel soll Mathematik von den Lernenden im Unterricht *mehr* als *Prozess* denn als *Fertigprodukt* erlebt werden, Mathematik muss man aktiv betreiben, außerdem soll es im Mathematikunterricht mehr um Semantik und weniger um Syntax gehen. Er prägte den Spruch und den Ansatz „Die schönste Mathematik ist die selbst entdeckte." Mit dieser Forderung war Wolfgang nicht alleine, aber er hat über die Jahrzehnte seines Schaffens wesentliche Impulse und Beispiele dafür geliefert. Beispielsweise geht es in der vielzitierten „Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe" (JMD 22 (2001), 1, 73–90; gem. m. P. Borneleit, R. Danckwerts u. H.-G. Weigand) um Probleme des erwähnten Unterrichts, um Ursachen dafür und um mögliche Gegenmaßnahmen, die diesen dritten Aspekt betreffen. Unterrichtspraktische Impulse setzte er mit dem „Mathekoffer" zum Jahr der Mathematik (2008, gem. m. A. Büchter).
- Schließlich seien noch seine jüngeren *elementarmathematischen Bücher* erwähnt: Geometrie und Algebra im Wechselspiel; Elementare Stochastik, Elementare Analysis (beide gem. m. A. Büchter); Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra (gem. m. A. Filler). In allen diesen Büchern kommt klar zum Ausdruck, dass ihm das Herausarbeiten des semantischen Kerns der Mathematik ein persönliches Anliegen ist, sodass diese Bücher substantiell zur mathematischen Bildung beitragen können. Dabei half ihm das Fundament seiner eigenen Erfahrung als aktiv Mathematiktreibender, nicht nur in der algebraischen Zahlentheorie.

Es gab noch einige andere Arbeitsschwerpunkte in Wolfgangs Berufsleben (wie z. B. die Mathematik des Papierfaltens, Origamics). Der Titel der Festschrift, die zu seinem 60. Geburtstag erschienen ist, versucht diese unter ein gemeinsames Motto zu stellen: *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis*, ein passender und prägnanter Kurztitel für Wolfgangs Lebenswerk.

In der Zeit von 2000 bzw. 2002 bis Herbst 2005 waren H. Humenberger und A. Büchter Mitarbeiter am Lehrstuhl von Wolfgang Henn am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) der Universität Dortmund (heute TU Dortmund) und wir erinnern uns immer wieder gerne an diese Zeit zurück. Drei der heutigen Professorinnen und Professoren des IEEM kamen knapp danach: C. Selter und S. Hußmann im Herbst 2005 sowie S. Prediger im Herbst 2006, bei deren Berufung Wolfgang wesentlich beteiligt war. Das IEEM vermisst Wolfgang seit seiner Pensionierung 2012 als aktiven Kollegen und dankt ihm für seine fruchtbaren 13 Jahre in Dortmund.

Wolfgang war nicht nur ein angenehmer und anregender Chef und Kollege, er war auch sehr wertschätzend zu uns allen, nicht zuletzt deswegen ist er uns auch zu einem lieben Freund geworden.

Wir haben ihn geschätzt wegen seines Engagements, der Lebendigkeit und Anschaulichkeit bei Vorträgen und Lehrveranstaltungen, seiner Faszination und Begeisterung für die Mathematik, mit der er andere ansteckte; man merkte, dass ihm seine Themen ein echtes persönliches Anliegen waren, nicht bloß Berufsausübung.

Bei zahlreichen Anlässen gab es in seiner Dortmunder Wohnung noch ein gemütliches Beisammensein, bei dem auch das Private und Zwischenmenschliche (nicht nur der Beruf als Mathematikdidaktiker) nie zu kurz kamen, auch solche Erfahrungen sind wichtig und prägen sich ein.

Wolfgang hatte viele Freundinnen und Freunde, und vielen geht sein (zu früher) Tod sehr nahe. Im Kreis der Kolleginnen und Kollegen auf Tagungen konnte man seine Kontaktfreudigkeit und Beliebtheit sehr oft hautnah spüren und erleben. Seine offene und herzliche Art wird uns und allen seinen Freundinnen und Freunden immer in Erinnerung bleiben.

Im Privatleben hatte Wolfgang viele Hobbies (Sammeln zahlreicher Gegenstände wie Briefmarken und Gläser, Reisen – insbesondere in die Ferne, gutes Essen und Trinken etc.), die er auch leidenschaftlich pflegte. Leider konnte er seinen Hobbies in den letzten Jahren aufgrund gesundheitlicher Einschränkungen nicht mehr so nachgehen, wie er es gerne gewollt hätte.

Mit Wolfgang verlieren wir einen national und international angesehenen Kollegen, der zudem für Viele ein Freund war, ein toller Mensch ist zu früh von uns gegangen.

Er wird uns fehlen. RIP!

Andreas Büchter, Universität Duisburg-Essen
andreas.buechter@uni-due.de

Hans Humenberger, Universität Wien
hans.humenberger@univie.ac.at

Christoph Selter, TU Dortmund
christoph.selter@math.tu-dortmund.de

Stephan Hußmann, TU Dortmund
stephan.hussmann@math.tu-dortmund.de

Susi Prediger, TU Dortmund
susanne.prediger@math.tu-dortmund.de

Daniela Götze, TU Dortmund
daniela.goetze@math.tu-dortmund.de

Nachruf auf Prof. Dr. Michael-Markus Toepell

Simone Reinhold

Foto: Privat

Am 1. August 2024 verstarb Michael-Markus Toepell im Alter von nur 73 Jahren – plötzlich und unerwartet. Er wurde am 21. Juli 1951 geboren und schloss sein Studium der Mathematik, Physik, Astronomie, Pädagogik und Philosophie 1975 mit dem Ersten Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien an der LMU München ab – u. a. mit einer wissenschaftlichen Arbeit zum Thema „Zur historischen Entwicklung der Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome geometrischer Axiomensysteme bis zu Hilbert".

Es folgten eine Referendarzeit am Luitpold-Gymnasium und eine siebenjährige Tätigkeit als Studienrat am Ludwigsgymnasium in München. Er durchlief eine Ausbildung zum Waldorflehrer und promovierte 1984 parallel zu seiner Vollzeitschultätigkeit (Toepell, 1986). Bis zu seiner Habilitation im Jahr 1992 (Toepell, 1996) war er als Akademischer Rat an der LMU München tätig. Er absolvierte Forschungs- und Gastaufenthalte in Jena und Leipzig, nahm eine Vertretungsprofessur für *Didaktik der Mathematik* an der Universität Erlangen-Nürnberg wahr und erhielt 1993 den Ruf auf eine Professur für *Grundschuldidaktik Mathematik* an der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät der Universität Leipzig. Diese Professur hatte er bis zu seinem Eintritt in den Ruhestand 2017 inne.

In Leipzig leitete Michael-Markus Toepell über viele Jahre das *Institut für Grundschulpädagogik*, führte den Vorsitz zahlreicher Gremien und wirkte federführend im Rat des Zentrums für Lehrerbildung und Schulforschung (ZLS) mit. Als Hochschullehrer setzte er sich für die Einrichtung eines „Studienlabors" ein, aus dem sich später die Lernwerkstätten der Grundschuldidaktiken entwickelten, die bis heute wichtige Beiträge zu einer praxisorientierten und dem Forschenden Lernen verbundenen Professionalisierung (angehender) Grundschullehrerinnen und -lehrer leisten. Über die Grenzen der Universität Leipzig hinaus verantwortete er einen langjährigen Erasmus-Dozentenaustausch mit Ungarn und wurde 2011 zum Honorarprofessor der Universität Pécs (Ungarn) ernannt. Er engagierte sich zudem für die Weiterentwicklung der Freien Hochschule Stuttgart, wo er seit 2012 Mitglied des Hochschulbeirats war.

Der GDM war Michael-Markus Toepell in besonderer Weise verbunden, unter anderem von 1997 bis 2000 als Mitglied des Beirats und von 2002 bis 2006 als Mitglied des Vorstands. Als Vorstandsmitglied und Schriftführer verantwortete er die Herausgabe und Redaktion der Mitteilungen der GDM. Bereits auf der GDM-Tagung in Regensburg (1996) trat er als Mitbegründer des Arbeitskreises *Mathematikgeschichte und Unterricht* auf, den er bis 2004 mitleitete. Im Jahr 1997 koordinierte er die 31. Jahrestagung der GDM an der Universität Leipzig – seinerzeit sicher ein organisatorischer Kraftakt der besonderen Art. Nahezu zeitgleich war er als Vorstandsmitglied des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU) im Landesverband Sachsen aktiv, der 1998 die MNU-Jahrestagung in Leipzig ausrichtete.

Sein besonderes Interesse an der Geschichte der Mathematik pflegte Michael-Markus Toepell nicht nur über die GDM, sondern auch über die Fachsektion *Geschichte der Mathematik* der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV). Von 1991 bis 2001 engagierte er sich als Geschäftsführer dieser DMV-Fachsektion, gab zwischen 1996 und 1999 die Mitteilungen zur Geschichte der Mathematik der DMV-Fachsektion *Geschichte der Mathematik* und des GDM-Arbeitskreises *Mathematikgeschichte und Unterricht* heraus. Seit 1996 war er Herausgeber der Buchreihe *Mathematikgeschichte und Unterricht*. So wurde er vor dem Hintergrund seiner Arbeiten zur Geschichte der Mathematik und des Mathematikunterrichts besonders als Experte zum Werk Hilberts bekannt. Zur Didaktik der Mathematik veröffentlichte er u. a. Arbeiten, die in direkter Verbindung zu seiner Verantwortung für künftige Grundschullehrkräfte standen, und stellte dabei immer wieder auch Bezüge zur Waldorfpädagogik her (vgl. Zusammenstellung ausgewählter Schriften in Reinhold & Liebers, 2017).

Wir verlieren einen pädagogisch inspirierenden Hochschullehrer, einen ausgewiesenen Wissenschaftler sowie einen gleichermaßen zugewandten wie warmherzigen Wegbegleiter und trauern mit seiner Familie.

Literatur

Reinhold, S. & Liebers, K. (Hrsg.) (2017). *Mensch – Raum – Mathematik. Historische, reformpädagogische und empirische Zugänge zur Mathematik und ihrer Didaktik. Festschrift für Michael Toepell*. Münster: WTM.

Toepell, M. (1986). *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht (Dissertation 1984).

Toepell, M. (1996). *Mathematiker und Mathematik an der Universität München – 500 Jahre Lehre und Forschung*. München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften (Habilitationsschrift 1992).

Dankenswerterweise unterstützte Stefan Deschauer (Professor für Didaktik der Mathematik i. R., TU Dresden bis 2016) bei der inhaltlichen Ausgestaltung dieses Nachrufes.

Simone Reinhold, Universität Leipzig
simone.reinhold@uni-leipzig.de

In Memoriam Erkki Pehkonen (1941–2024)

Günter Törner

Erkki Pehkonen (Helsinki) ist nicht mehr unter uns!

Foto: G. Törner

Erkki Pehkonen auf der MAVI-Tagung, Genua 2009

Über die Kollegin Hanna L. Vitala (Helsinki) und Ralf Erens (Freiburg) erhielt Günter Törner am 10. Dezember 2024 die Nachricht, dass der ihm und lange bekannte, werte Kollege am 27. November 2024 im Alter von 83 Jahren verschieden ist.

Ganz überraschend kam diese Nachricht nicht. Am Anfang des Jahres 2024 hatten wir noch gehofft, ihn als Ehrengast bei der 30. MAVI-Konferenz in Freiburg im Breisgau begrüßen zu können, doch dann erfuhren wir, dass eine Reise wohl nicht mehr möglich wäre; schade, dass wir ihm nicht noch einmal unsere Wertschätzung auf einer jung-gebliebenen MAVI-Tagung entgegenbringen konnten. Zumindest haben wir ihn mehrfach erwähnt.

Es ist nicht möglich, einen umfassenden Nachruf im üblichen Stil zu schreiben, liegt uns doch bislang anscheinend keine aktuelle Homepage vor, auf die wir uns beziehen könnten; überdies bleiben insbesondere die Jahre im Ruhestand für den Schreiber im Dunkeln. Das Internet nennt uns zwei wichtige Quellen.[1]

Schon früh war Günter auf den Jahrestagungen der GDM ein Finne aufgefallen, der gut Deutsch sprechen konnte. Irgendwann kam ich mit ihm ins Gespräch, weil es an der Universität Duisburg eine Lehrstuhlvertretung (Mathematikdidaktik) vorübergehend zu besetzen galt, die er dann im Jahr 1994 antrat. Dies war für die Fakultät eine gute Entscheidung. Es traf sich ebenfalls überdies für den Schreiber, weil dieser damals sich

[1] https://www.researchgate.net/scientific-contributions/Erkki-Pehkonen-77576327 und https://madipedia.de/wiki/Erkki_Pehkonen

Erkki und Günter bei der MAVI-Tagung in Genua, 10. 9. 2009

in der Fortsetzung einer interessanten Kooperation mit dem kanadischen Prof. Walter Szetela (UBC, Vancouver) befand; inhaltlich ging es um die Frage, wie man sprachlich Problemlöseprozesse unterstützen könnte. Insofern fügten sich die jeweiligen Forschungsinteressen optimal zusammen. Dann entschlossen wir uns, in Zusammenarbeit mit der nordrhein-westfälischen Lehrerfortbildungsinstitution gemeinsam durchgeführte Kurse über Problemlösen anzubieten, was mir – um ehrlich zu sein – neue Perspektiven auf die Welt des Problemlösens eröffnete.

Ich lernte schnell, dass man eigentlich als Fortbildner die Probleme nicht kennen dürfte, die aktuell zur Diskussion standen, um mit den Lehrpersonen wirklich auf Augenhöhe fair kommunizieren zu können. Durch die Arbeiten von Marta Frank[2] in Kalifornien bekannt gemacht, ist es nur ein kleiner Schritt, die entscheidende Rolle von Beliefs beim Problemlösen zu erkennen.

Gut zehn Jahre später hat der Autor mit Alan Schoenfeld (Berkeley) und Kristina Reiss (München) eine internationale Bestandsaufnahme[3] unternommen; eigentlich müssten die damaligen Stellungnahmen unbedingt aktualisiert werden; in Deutschland – so glaubt der Autor – hat sich wohl in erster Näherung nicht viel verändert, denn Problemlösen ist weiterhin in Sonntagsreden wohl gelitten; im schulischen Alltag überwiegen aus seiner Beobachtungen die Ausreden, warum man nur selten für Problemlösen Zeit finden würde.

Der Autor will sich auf zwei Aspekte, was das Thema *beliefs* und *world views* (Weltbilder) anbetrifft, beschränken. Noch heute erinnert sich der Schreiber an einen Kolloquiumsvortrag von Erkki Pehkonen im mathematischen Kolloquium des Fachbereiches Mathematik an der Universität Duisburg, in dem Erkki den Mathematikern ‚beweisen' wollte, dass das Bild, was *eigentlich Mathematik sei*, bei den Mathematikern letztlich stark variieren würde. In einem ersten Kommentar bezweifelten dies Günters Kollegen einvernehmlich.

Erkki griff auf den Dionne'schen[4] 3-Komponenten-Wahltest zurück, ließ Zettel verteilen und bat die Zuhörer um drei Zahlen, deren Summe 30 Punkte betragen sollte. Nach der Bekanntgabe war die Einigkeit bei den anwesenden Mathematik-Kollegen für einige Zeit vorbei …

Als zweiter Aspekt wurde sehr früh die Idee geboren, mit finnischen und deutschen Kollegen MAVI[5]-Konferenzen aus der Taufe zu heben. Glückweise steuerten die finnische Akademie und der DAAD Reisemittel bei und am 4./5. Oktober 1995 fand in Duisburg die erste MAVI-Konferenz statt. Wie oben erwähnt, konnten wir vor wenigen Monaten die 30. Tagung feiern – mit rund 40 (insbesondere jungen) Teilnehmern –, die aus vielen Länder stammten; schon früh wurde MAVI international und wir lernten unter anderem den Einfluss der kulturellen Komponente bei Beliefs nicht zu ignorieren.

Immer war es auch Erkki, insbesondere deutschen und finnischen Teilnehmern Englisch als Tagungs- und Publikationssprache zu verordnen; es war uns ein gemeinsames Anliegen, dass die Forschungsbeiträge mehr und mehr PME-Qualität hatten.

Um nicht der Gefahr zu erliegen, irgendeine Forscherin oder irgendeinen Forscher zu vergessen, verzichten wir auf eine Aufzählung; es waren viele international angesehene Wissenschaftler, die von Erkki

[2] Frank, M. L. (1985). *Mathematical beliefs and problem solving.* Doctoral dissertation. Purdue University, West Lafeytte (Ind.), University Microfilms International.

[3] Törner, G. & Reiss K. 2007. Problem solving in the mathematics classroom: The German perspective. In: Törner, G.; Schoenfeld, A. H.; Reiss K. *Problem solving around the world: summing up the state of art. ZDM, 39* (2007), 431–441.

[4] Dionne, J. J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. In J. M. Moser (Ed.), *Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME). (pp. 223–228). Madison (WI): University of Wisconsin.

[5] Abkürzung für *Mathematical Views*; vgl. www.mathematical-views.org.

Foto: Renate Schmidt/Bildarchiv des MFO

Teilnehmer des Workshops „Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics“ am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, 26. 11. 1999

und dem Autor ermuntert werden konnten, MAVI die Ehre eines Vortrags zu geben und über Beliefs und Affektionen auf MAVi-Tagungen vorzutragen.

Das führte zu einem Pool von uns genehmen Personen, die zur Mitarbeit bei dem Buch[6] vom Gilah Leder, Erkki Pehkonen und Günter Törner gewonnen werden konnten.

In Vorbereitung dieses Projektes konnte Erkki und der Autor es mit viel Unterstützung von dritter Seite erreichen, vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) für den Zeitraum 21.–28. 11. 1999 eine fachdidaktisch-orientierte Woche zugeteilt zu erhalten. Das Foto auf dieser Seite zeigt uns die Tagungsteilnehmer, hinten rechts erkennen wir Erkki Pehkonen mit Hut.

Mussten wir uns 2002 noch eingestehen, dass Beliefs eine *hidden variable* sind, so können wir auch Erkki Pehkonen einen wesentlichen Teil zugestehen, dass wir 2007 feststellen konnten, dass *Beliefs no longer a hidden variable*[7] sind.

In diesem ersten Jahrzehnt dieses Jahrhundert sollte er die dienstliche Ruhestandsgrenze seiner Professur an der Universität von Helsinki erreicht haben. Für einen würdigen, international wissenschaftlich geschätzten Nachfolger hatte er rechtzeitig gesorgt: Marku Hannula – sein Schüler. Wir trafen Erkki nur noch gelegentlich bei MAVI-Tagungen. Irgendwann kreuzte er noch einmal im Wohnort Bottrop des Schreibers auf. Wir haben uns getroffen und es gab viel zu erzählen.

Man hörte auch, dass er nun öfters nach Südamerika unterwegs war, um seine doppelte Kompetenz – die als (vormaliger) Lehrer und gleichzeitiger international kundiger Wissenschaftler – zur Weiterentwicklung

[6] Leder, G.C., Pehkonen, E., & Törner, G. (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Mathematics Education Library 31. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[7] Goldin, G.; Rösken, B.; Törner, G. (2008). Beliefs – no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In Maaß, J.; Schlöglmann, W. (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education*, pp. 9–28. Rotterdam: Sense.

und Verbesserung des Mathematikunterricht einzubringen.

Der Schreiber erinnert sich gerne an unseren Kollegen, alle Beliefs-Interessierten werden wohl weiterhin davon profitieren, seine erschienenen Publikationen gründlich zur Kenntnis zu nehmen.

Und wiederum für den Schreiber und seine Gattin sind überdies viele Erinnerungen durch seine Reisen in die schöne nordische Heimat unseres Freundes unvergessen.

Günter ruft ihm aus seiner christlichen Glaubensüberzeugung zu: *Jumala armahtakoon sinua!*. (Gott, sei dir gnädig!) *Mene rauhassa!* (Zieh hin in Frieden!)

Prof. em. Dr. Günter Törner, Universität Duisburg-Essen
guenter.toerner@uni-due.de

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

1. Vorsitz
Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Universität Augsburg
Universitätsstraße 14
86159 Augsburg
Tel.: 0821 598-2494
vorsitzender@didaktik-der-mathematik.de

2. Vorsitz
Prof. Dr. Marita Friesen
Heidelberg School of Education
Bergheimer Straße 104
69115 Heidelberg
Tel.: 06221 477-6755
covorsitzende@didaktik-der-mathematik.de

Kassenführung
Jun.-Prof. Dr. Carina Büscher (geb. Zindel)
Universität zu Köln
Institut für Mathematikdidaktik
Gronewaldstraße 2
50931 Köln
Tel.: 0221 470-6378
kassenfuehrerin@didaktik-der-mathematik.de

Schriftführung
Prof. Dr. Sebastian Schorcht
Technische Universität Dresden
Institut für Erziehungswissenschaft
Weberbau
Weberplatz 5
01217 Dresden
Tel. 051 463-34038
schriftfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

Geschäftsführung
Fabian Rösken
geschaeftsfuehrung@didaktik-der-mathematik.de

Geschäftsstelle
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.
DMV/GDM-Geschäftsstelle
c/o WIAS
Mohrenstraße 39
10117 Berlin

Bankverbindung
Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg
IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00
BIC GENODEF1GBF

Beirat
Der Beirat der GDM setzt sich wie folgt zusammen. In Klammern angegeben sind die Jahreszahlen der Wahlen; zulässig sind drei aufeinanderfolgende Amtsperioden von je drei Jahren.

Dr. Maike Abshagen (2023)
Prof. Dr. Nils Buchholz (2024)
Theresa Büchter (2024)
Prof. Dr. Gilbert Greefrath (2021, 2024)
Gerrit Loth (2022)
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger (2021, 2024)
Prof. Dr. Kathleen Philipp (LV Schweiz, 2024)
Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer (2021, 2024)
Prof. Dr. Frank Reinhold (2024)
Prof. Dr. Susanne Schnell (2022)
Prof. Dr. Stefan Ufer (2022)

Homepage der GDM
www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

Verleger
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.

Herausgeber
Prof. Dr. Sebastian Schorcht (Anschrift s. o.)

Umschlag
Yurananth Amlumyong, Frankfurt am Main

Grafische Gestaltung und Satz
Christoph Eyrich, Berlin

Druck
Oktoberdruck GmbH, Berlin

Der Bezugspreis der *Mitteilungen der GDM* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.