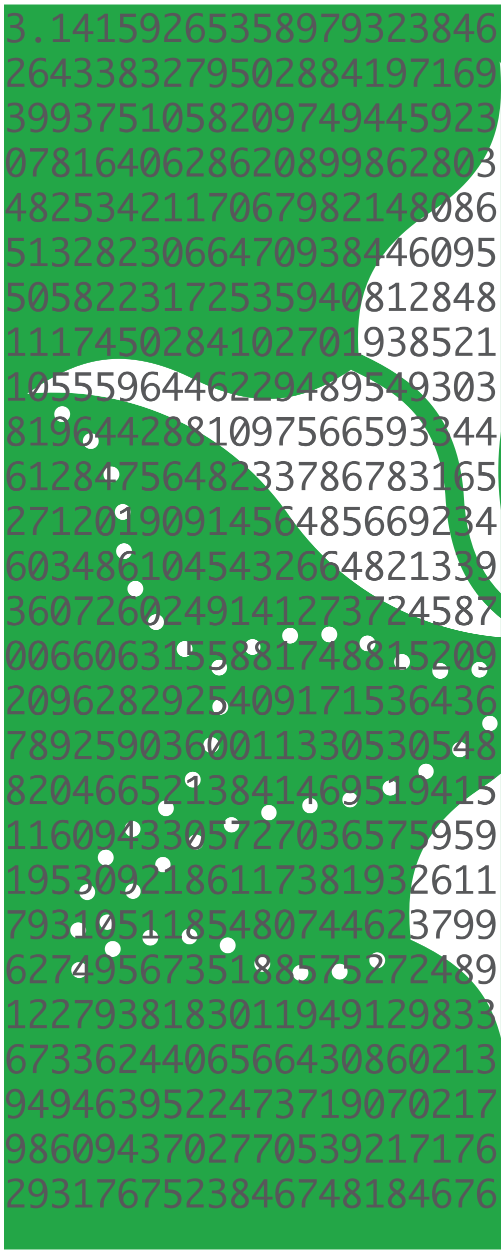
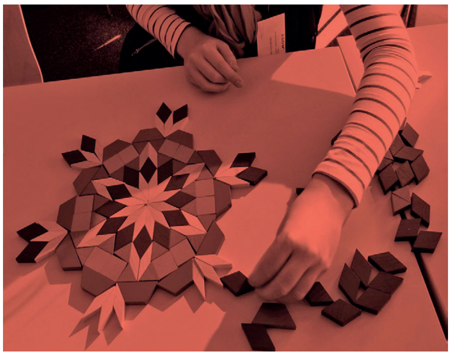
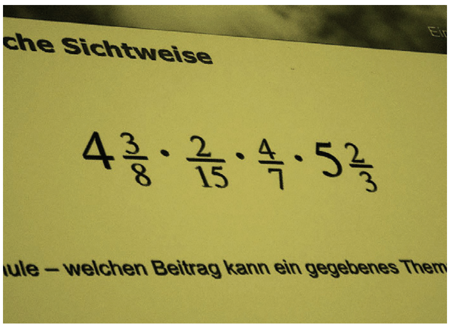
MITTEILUNGEN
DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK







GDM

99
August 2015

ICME13

Hamburg 2016

13. Internationaler Kongress zur Mathematikdidaktik

24. – 31. Juli 2016 in Hamburg (Deutschland)

Willkommen zu ICME-13

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) wird 2016 den Weltkongress zur Mathematikdidaktik – ICME-13 – in Deutschland ausrichten. Dieser steht unter der Schirmherrschaft der *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)* und wird von **Sonntag, dem 24. Juli** bis **Sonntag, dem 31. Juli 2016** an der Universität Hamburg stattfinden. Hamburg ist mit 1,8 Millionen Einwohnern die zweitgrößte Stadt Deutschlands. Direkt am Wasser gelegen bietet diese faszinierende Stadt eine geradezu perfekte Umgebung für Kongresse von internationaler Bedeutung.

1976 fand **ICME-3** in **Deutschland** – in Karlsruhe – statt und wir sind stolz, nun erneut Mathematikdidaktiker(innen) aus aller Welt in Deutschland willkommen zu heißen. Die Kongressteilnehmer(innen) werden Gelegenheit haben, die besonderen Charakteristika deutschsprachiger mathematikdidaktischer Traditionen kennenzulernen, insbesondere von **Felix Klein** geprägt, dem ersten Präsidenten von ICMI. Ebenfalls werden neuere Entwicklungen und Forschungen der deutschen Mathematikdidaktik vorgestellt werden in den Bereichen Argumentieren und Beweisen, Lehren und Lernen von mathematischen Anwendungen und Modellieren, Förderung der Lehreraus- und -fortbildung, die Verbindung von Theorie und Praxis, die hohe Relevanz von Visualisierung und mathematischer Modelle u.v.m.. Des Weiteren hat die deutsche Mathematikdidaktik enge Beziehungen zu anderen **europäischen Traditionssträngen**, basierend auf einem gemeinsamen Verständnis von Didaktik der Mathematik, deren Charakteristika auf dem Kongress deutlich werden sollen.

Der Kongress wird an der **Universität Hamburg** mit ihrer großen Auswahl an Gebäuden und Räumen sowie dem campusnah gelegenen **Congress Center Hamburg** (CCH), das weltweit hohes Ansehen genießt, stattfinden. Sowohl die Universität als auch das CCH befinden sich in Citynähe und sind hervorragend an das öffentliche Nah- und Fernverkehrssystem angebunden. Sowohl per Flugzeug als auch per Bahn ist Hamburg problemlos erreichbar (mit dem Bahnhof Hamburg-Dammtor direkt am Veranstaltungsort). Teilnehmer(innen) aus der ganzen Welt sind eingeladen, ICME-13 zu einem erfolgreichen Kongress zu machen, der einen weitgefächertem internationalen mathematikdidaktischen Erfahrungs- und Erkenntnisaustausch ermöglicht. Die Konferenzsprache ist Englisch.

Zeitplan für das Einreichen von Beiträgen und Postern

1. Oktober 2015	Einreichen von Beiträgen. Einreichen von Postern durch Personen, die Finanzierung beantragen.
10.–20. Dezember 2015	Versendung der Entscheidungen über Annahme von Beiträgen/Postern.
22. Dezember 2015	Einreichen von Anträgen auf Finanzierung von Wissenschaftler(innen) aus Staaten mit geringerer Finanzstärke an den Solidaritätsfond.
12. Januar 2016	Versendung der Entscheidungen über Finanzierung aus dem Solidaritätsfonds.
31. Januar 2016	Einreichen von Postern für Teilnehmer(innen), die keine Finanzierung beantragen.
22. Februar 2016	Versenden der Entscheidungen über die Annahme von Postern.

Zeitplan: Registrierung

1. Januar – 31. März 2016	„Early Bird" Anmeldung: 390 € Konferenzbeitrag
1. April – 31. Mai 2016	Reguläre Anmeldung: 430 € Konferenzbeitrag
Ab dem 1. Juni 2016	Spät-Anmeldung: 450 € Konferenzbeitrag

Weitere Informationen siehe: www.icme13.org
oder Kontakt unter: contact@icme13.org

Gabriele Kaiser

Universität Hamburg
Leitung ICME-13

Rudolf vom Hofe

Präsident der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

GDM

ICMI

Editorial/Vorwort des ersten Vorsitzenden und des Schriftführers der GDM

Liebe GDM-Mitglieder,
mit diesem Heft liegt nun die 99. Ausgabe der GDM-Mitteilungen vor, und wir nehmen diese Zahl und das nunmehr 40-jährige Bestehen unserer Gesellschaft zum Anlass, die GDM-Mitteilungen selbst zum Thema eines gemeinsamen Vorworts zu machen. Wir möchten zunächst auf die *Geschichte und Entwicklung* der GDM-Mitteilungen eingehen und dann auf den aktuellen Aspekt des *Umgangs mit kritischen Beiträgen in der Rubrik „Diskussion“*, die im aktuell vorliegenden Heft vergleichsweise umfangreich ausgefallen ist.

Zur Geschichte und Entwicklung der GDM-Mitteilungen

Das erste Heft erschien im Mai 1975 unter dem ersten Schriftleiter Hans-Joachim Vollrath. Es bestand aus zwei gefalteten DIN-A4 Zetteln, doppelseitig bedruckt und ohne Heftung ineinander gelegt, also insgesamt aus 8 DIN-A5 Seiten. Im Wesentlichen beinhaltet es das Gründungsprotokoll, sowie den Bericht des (designierten) ersten Vorsitzenden Heinz Griesel, dass es wegen „juristischer Schwierigkeiten“ mit der verabschiedeten Satzung eine Eintragung des Vereins beim Registergericht Kassel einer neuerlichen Befassung auf einer außerordentlichen Mitgliederversammlung bedarf. Damit hat die GDM dann gleich drei Geburtstage: Am 12. und 13. 3. 1975 findet die Gründungssammlung statt und am 17. 6. 1975 dann die außerordentliche Mitgliederversammlung zur Verabschiedung der nun gerichtsfesten Satzung, womit die Gesellschaft dann auch unter strengen Augen des Kasseler Gerichts als gegründet und einem Eintrag ins Kasseler Vereinsregister würdig erscheint.

Bis November 1975 erscheinen dann noch zwei weitere Ausgaben der Mitteilungen, jeweils von gleichem Umfang. Das 10. Heft erscheint bereits im April 1977 unter der Schriftleitung von Helmut Simeon und umfasst bereits 20 DIN-A5 Seiten (für Heft 100 sind allerdings keine 200 Seiten geplant). Weitere zwei Jahre später gibt Helmut Simeon mit Heft 19 dann die ersten GDM-Mitteilungen mit einer graphischen Abbildung im Innenteil heraus, bis dahin hatten auf der Schreibmaschine verfasste „Bleiwüsten“ den Innenteil dominiert (angesichts der seinerzeit verfügbaren Technik nötigen dem aktuellen Schriftführer gleichwohl die sogfältig gesetzten Tabellen in den Kassenberichten einen gewissen Respekt ab). In diesem Heft 19 finden sich nun auch die heute noch zum Kern der Mitteilungen gehörenden ersten Berichte aus Arbeitskreisen, nämlich aus dem Arbeitskreis „Ausbildung von Lehrerstudenten, insbesondere für die Primarstufe“ und „Fächerübergreifender Unterricht“.

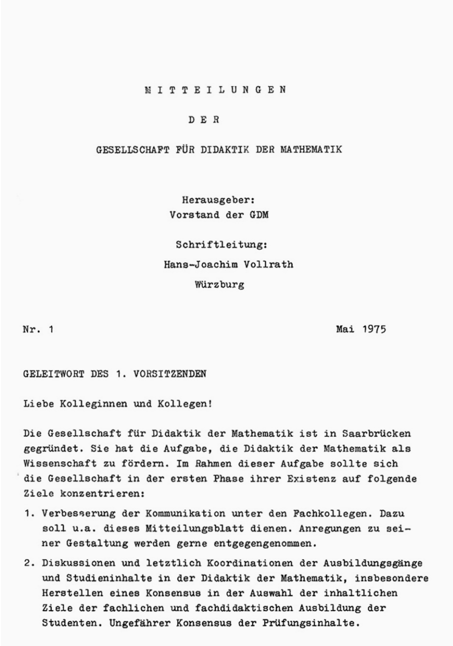
Von Heft 24, Januar 1981, bis Heft 26, September 1981, haben die Hefte erstmalig ein aufwändig handgemachtes graphisches Titelbild, für das sich der damalige Schriftleiter Hartmut Spiegel verantwortlich zeigt. Lange konnte sich das Titelbild allerdings nicht halten, ab Heft 27 gibt es dann wieder ausschließlich Schrift auf dem Umschlag, was erst wieder mit Heft 82, 2006, unter Thomas Jahnke anders werden sollte.

Peter Bender führte als Schriftleiter im Mai 1982 mit Heft 28 erstmals ein eigenes Inhaltsverzeichnis ein, die Heftdicke hatte mittlerweile 32 DIN-A5 Seiten erreicht und eine gewisse Vorab-orientierung schien offenbar angeraten. Außerdem betonte er als neu gewählter Schriftleiter, dass die Mitteilungen allen Mitgliedern nicht nur für Berichte, sondern auch für Meinungsäußerungen zur Verfügung stehen, wobei auch Diskussion und Kritik ihren Platz finden sollten.

Heft Nr. 61 vom Dezember 1995 ist eine besondere Ausgabe: Einerseits entstammt ihr mit Heinrich Winters Text „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ der wohl am häufigsten zitierte Artikel aus den GDM-Mitteilungen, der im Rahmen einer Rubrik „Zur Diskussion um Allgemeinbildung und Mathematik“ mit insgesamt vier Diskussionsbeiträgen und einer Presseerklärung der GDM erscheint. Google-Scholar zählt für diesen Artikel aktuell 186 online auffindbare Zitationen und insgesamt mindestens zehn Webseiten, die den Volltext des Beitrags – vermutlich ohne Genehmigung der GDM – online als PDF verfügbar gemacht haben (keine Sorge: Wir schicken keine „Take-Down-Notices“ heraus). Zur Zitationsverwirrung bei diesem Text trägt leider auch bei, dass er 1996 dann zwecks größerer Verbreitung in den Mitteilungen der DMV erneut abgedruckt wird. Heft 61 der Mitteilungen der GDM ist unter der Schriftführung von Michael Neubrand dann andererseits auch das erste Heft, das aufgrund seines stattlichen Umfangs von 70 Seiten in fester DIN-A5-Leimbindung erscheint.

Mit Heft 78, Juni 2004 wirkt unter der Schriftleitung von Michael Toepell zum ersten Mal unser aktueller Setzer, Christoph Eyrich, an der Entste-

ISSN 0722-7817



MITTEILUNGEN

DER

GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Herausgeber:
Vorstand der GDM

Schriftleitung:
Hans-Joachim Vollrath
Würzburg

Nr. 1 Mai 1975

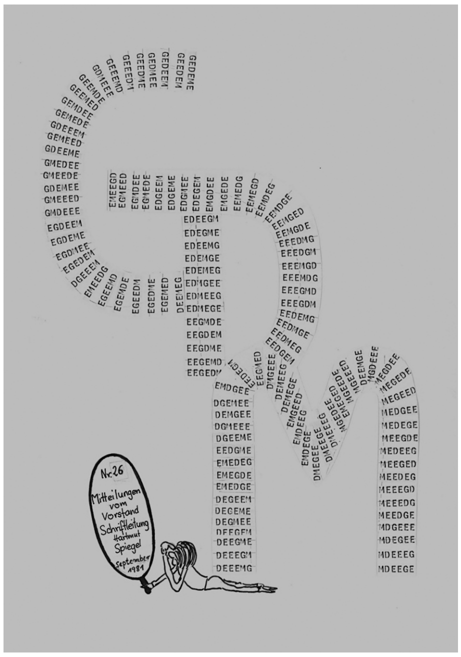
GELEITWORT DES 1. VORSITZENDEN

Liebe Kolleginnen und Kollegen!

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ist in Saarbrücken gegründet. Sie hat die Aufgabe, die Didaktik der Mathematik als Wissenschaft zu fördern. Im Rahmen dieser Aufgabe sollte sich die Gesellschaft in der ersten Phase ihrer Existenz auf folgende Ziele konzentrieren:

1. Verbesserung der Kommunikation unter den Fachkollegen. Dazu soll u.a. dieses Mitteilungsblatt dienen. Anregungen zu seiner Gestaltung werden gerne entgegengenommen.
2. Diskussionen und letztlich Koordinationen der Ausbildungsgänge und Studieninhalte in der Didaktik der Mathematik, insbesondere Herstellen eines Konsensus in der Auswahl der inhaltlichen Ziele der fachlichen und fachdidaktischen Ausbildung der Studenten. Ungefährer Konsensus der Prüfungsinhalte.

Heft 1, Mai 1975



Heft 24, Januar 1981

hung eines Heftes mit – das Heft erscheint nämlich als gemeinsame Ausgabe von DMV-Mitteilungen und GDM-Mitteilungen in einem Heft im Rahmen einer von den Vorständen betriebenen stärkeren Kooperation der beiden Vereine. Dieses Heft ist auch das erste Heft, das im DIN-A4-Format und zweispaltig erscheint – es nutzt hierzu Layout und Titelbild der damaligen DMV-Mitteilungen.

Ab Heft 82 erscheinen im Jahr 2006 unter Thomas Jahnke dann die Hefte regulär im A4-Format, nun wieder mit einer Titelgraphik, der mathematischen Suppe, die der eine gerne, der andere weniger gerne auslöffelt.

Thomas Jahnke ist außerdem der erste und bislang einzige Herausgeber, der nicht gleichzeitig auch Schriftführer ist. Ab Heft 82 gibt es die Mitteilungen außerdem auch im Internet als PDF-Dateien[1], sie werden ab dann auch erstmals außeruniversitär professionell gedruckt und konfektioniert. In einer Art „Mission Statement" schreibt Thomas Jahnke zu den Zielen seiner Herausgeberschaft:

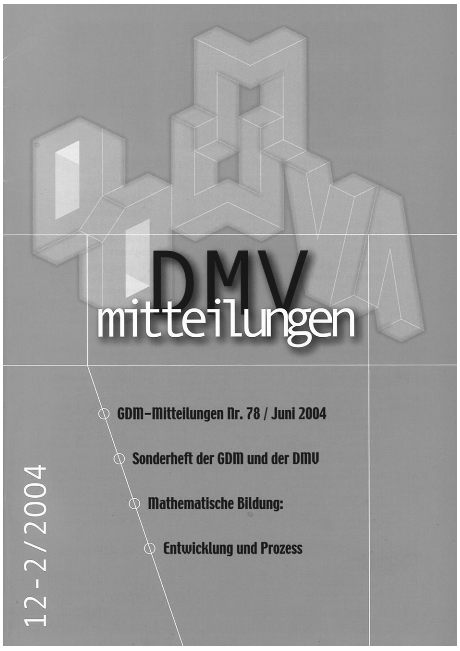
> Neben den Informationen über die Aktivitäten der GDM, den Berichten der Arbeitskreise, allgemeinen Mitteilungen, persönlichen und anderen Notizen liegt mir besonders die Rubrik ‚Diskussion' am Herzen. Hier wünsche ich mir Beiträge und Anregungen im Sinne Freudenthals Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, also weniger die flächenbündige, fertige, wissende Publikation als Überlegungen, Erwägungen und Argumente, die zu bedenken sich lohnt und die der Diskussion und dem – möglicher Weise auch kontroversen – Diskurs in unserer Gesellschaft dienen. In diesem Sinne freue ich mich auf Ihren Zuspruch wie Ihre Gegenrede.

Ab Heft 94, Januar 2013 gibt es das heutige Format mit wechselnden Bildbestandteilen und dem aktuellen Schriftführer.

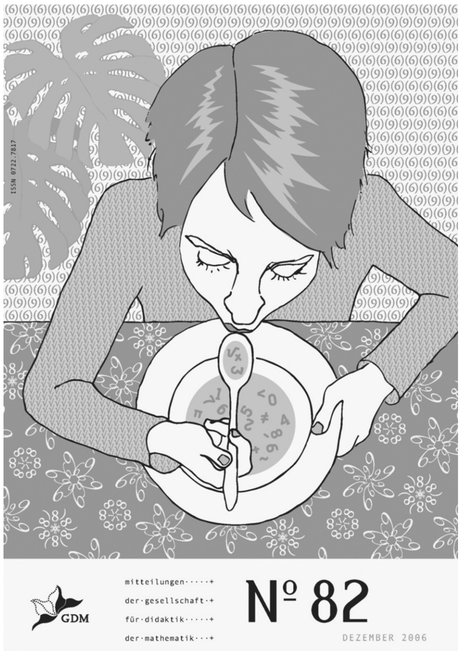
Zum Umgang mit kritischen Beiträgen

Auch die inhaltliche Struktur der GDM-Mitteilungen hat sich mit der Zeit verändert: Von ursprünglichen Mitteilungen im engeren Sinne (Vereinsinterna, Veranstaltungshinweise, später dann auch erste Berichte aus den Arbeitskreisen) hin zu vermehrten Beiträgen zur wissenschaftlichen Diskussion, ganz im Sinne der ehemaligen Herausgeber Bender und Jahnke. Hierdurch wurde das Heft einerseits lebendiger, auf der anderen Seite sind kritische Beiträge auch nicht immer unproblematisch – wo man sich für Kontroversen öffnet, bleibt es nicht aus, dass auch dieser Umstand an sich kontrovers gesehen wird.

[1] Unter: http://www.didaktik-der-mathematik.de/de/veroeffentlichungen.html



Heft 78, Juni 2004



Heft 82, Dezember 2006

So wichtig und anregend kritische Beiträge sind, können sie insbesondere dann problematisch werden, wenn sich die Kritik an wissenschaftlichen Positionen an konkreten Personen festmacht und wenn sich Auseinandersetzung in der Sache mit gegensätzlichen Überzeugungen verschiedener didaktischer Schulen verbinden. Hier kann es gerade bei kontroversen, stark pointierten Beiträgen mit (im Umfang, in dem eine solche in den Mitteilungen möglich ist, notwendig) verkürzter Argumentation dann auch im Ton schnell etwas rau werden. Dabei ist es auch möglich, dass die Kritik mancher GDM-Mitglieder von anderen Mitgliedern als ungerechtfertigt, polemisch oder unangemessen empfunden wird.

Die Frage ist nun, wie wir als Vorstand[2] mit solchen Einschätzungen umgehen, eine Kontroverse in der Sache ermöglichen, ohne Irritationen zwischen den Personen zu erzeugen. In aller Regel gelingt es den sich dankenswerter Weise mit Diskussionsbeiträgen beteiligenden Mitgliedern, in ihrer Kritik einen angemessenen und akzeptablen Ton zu treffen. Hin und wieder hat sich der Schriftführer auch erlaubt, Autor(inn)en auf einzelne irritierende oder missverständliche Passagen hinzuweisen, die Autor(inn)en haben das meist durchaus begrüßt. Dort wo es inhaltliche Differenzen zwischen Leser(inn)en und Autor(innen) gab und gibt, besteht grundsätzlich die Möglichkeit zur Reaktion, in der Kurzform eines Leser(innen)briefs oder in der Form einer ausführlichen Erwiderung im Rahmen der Rubrik „Diskussion" im jeweils darauffolgenden Heft.

Dort wo aus unserer Sicht eine direkte Erwiderung wünschenswert erscheint, bemühen wir uns, eine solche auch parallel im selben Heft erscheinen zu lassen. Dies ist jedoch schon vom zeitlichen Ablauf her nicht immer möglich. In Fällen, in denen die Kritik als persönliche Kränkung aufgefasst werden kann, behalten wir uns auch vor, eingereichte Beiträge in der vorliegenden Form zurückzuweisen. Auf ein systematisches Review-Verfahren für freie Beiträge wollen wir aber nach wie vor verzichten. Dies würde sowohl die Aktualität als auch die Lebendigkeit der Diskussion in einer Weise einschränken, die uns nicht wünschenswert erscheint. Wir sehen diesen Sachverhalt ganz ähnlich wie den Umgang mit den Sektionsvorträgen auf unseren Jahrestagungen. Auch hier sind die Beiträge sehr unterschiedlich und mitunter einzelne Beiträge auch in manchen Punkten kritisierbar. Auf der anderen Seite ermöglicht uns unser derzeitiges Verfahren ein breites, ungeschminktes und vielfältiges Bild über Positionen, Meinungen, Ideen und Aktivitäten in unserer Gesellschaft.

In diesem Sinne wünschen wir Ihnen eine anregende Lektüre und uns allen eine produktive Weiterentwicklung unserer GDM-Mitteilungen.

Rudolf vom Hofe und Andreas Vohns

[2] Der Schriftführer gibt die Mitteilungen im Auftrag des Vorstands heraus.

Inhalt

Rezensionen

Personalia

Bildnachweise der Umschlagseite:
Linke Spalte (von oben nach unten): Christian Dohrmann, Fritz Haselbeck, GDM Schweiz, GDM Schweiz
Rechte Spalte (von oben nach unten): Pascal Tesson (Gemeinfrei), Hey Paul Studios (CC-BY 2.0, modifiziert), Fritz Haselbeck

Modellbildung versus Modellisieren und Scheinmodellierung

Hans-Jürgen Bandelt

Verschmelzung von Realität mit Fiktion

Was ist mathematische Modellierung? Diese Frage wird Semester um Semester an vielen Universitäten zu Beginn einer Vorlesung, die ‚Modellierung' im Titel trägt, rhetorisch gestellt. Dabei sind meist Dynamische Systeme zur Analyse realer zeitabhängiger Prozesse in den Naturwissenschaften und der Technik (aber nicht ausschließlich) Gegenstand der Untersuchung. In Wikipedia wird sich an einer allgemeinen Definition versucht, die nur den formalen Aspekt hervorhebt:

> Ein mathematisches Modell verwendet mathematische Notation zur Beschreibung eines Systems ... und ermöglicht damit die systematische Erforschung des Themas mit mathematischen Methoden.

Der englische Wikipedia Eintrag zu ‚Mathematical model' warnt überdies den Leser:

> An artifact that is used to illustrate a mathematical idea may also be called a mathematical model, the usage of which is the reverse of the sense explained in this article.

Die Verkleidung einer mathematischen Idee bedeutet metaphorischen Gebrauch, der einer Modellbildung genau entgegengesetzt ist.

Damit stößt man auf einen fundamentalen Unterschied im Gebrauch von Modellen. Es gibt offenbar an den Fachhochschulen und Universitäten zwei Pole bezüglich der verschiedenen Grundauffassungen über Modellierung – man könnte salopp sagen, eine der Praktiker und eine der Nichtpraktiker: Die eine sieht in Modellierung die Präsentation und systematische Aufbereitung einer Fülle von erfolgreich bearbeiteten Fallbeispielen aus der Praxis ihrer mathematischen Spezialdisziplin(en), die andere sieht in ihr ein übergeordnetes Regelwerk („Modellierungskreislauf") mit Gesetzmäßigkeiten, das universellen Charakter hat und sozusagen die Eintrittspforte der ‚Realität' in die Mathematik darstellt. Da gerade die reinen Theoretiker unter den Angewandten Mathematikern von ihrem eigenen Anspruch her doch Anwendungen suchen, besteht in der Lehre, aus schierem Mangel an wirklich ausgeführten Anwendungen, die Neigung, gängige Metaphern zu vorgedachter Mathematik als Realprobleme zu deuten und passende ‚Anwendungen' zu erfinden. Ein solchermaßen anwendungsorientiert verbrämter Ansatz läßt Realität mit Fiktion eins werden und ist von der realen Modellierung zu unterscheiden: Hier soll dafür der Kunstbegriff ‚*Modellisieren*' verwendet werden, der (außer singulären Fällen von Lehnübersetzung aus dem Französischen) noch unbelastet ist.

Verschmelzung von Modell mit Metapher

Metaphern haben stets eine Rolle in der Mathematik gespielt, sei es, um einen abstrakten Begriff durch eine konkrete Analogie leichter begreiflich zu machen oder um einen mathematischen Sachverhalt nachhaltig zu memorieren. Durch Wecken von nicht zufälligen Assoziationen wird eine bessere Vernetzung im Gedächtnis erzielt. Beim Denken suchen wir permanent in der Einbildungskraft nach begleitenden Bildern und haften an Bildern, auch wenn wir wissen, daß sie falsch und irreführend sind, wie es Brandt (2011, S. 190) formuliert. Bisweilen sind Metaphern dem wirklichen mathematischen Verständnis tatsächlich geradezu hinderlich, z. B. die „metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozeßes" (Marx 2013).

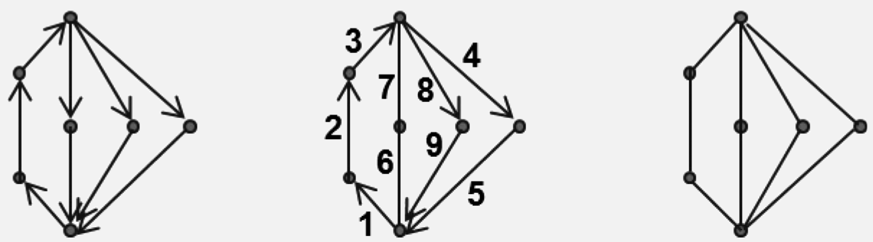
Metaphern werden aber auch bewußt eingesetzt, um eine scheinbar realitätsnahe Interpretationen zu suggerieren oder lediglich der unmißverständlichen Zitierung halber. Z. B. erfährt der kombinatorische Satz von Hall durch eine Metapher seine eindeutige Benennung, nämlich als *Heiratssatz*, der unter dieser Bezeichnung sogar einen Wikipedia Eintrag für sich reklamieren kann. Natürlich muß kein Heiratsvermittler diesen Satz kennen – es ist ja nur eine Metapher, die obendrein vom kulturellen Kontext abhängig ist und in polygamen Gesellschaften gewiß spontan anders verstanden würde.

> Die in der Bezeichnung Heiratssatz angedeutete Einkleidung dient also nicht der Auskunft über die Realität sondern über den Inhalt des Satzes. (Jahnke 2005)

Niemand käme auf die Idee, die Fragestellung des Heiratssatzes, unter welchen formalen Umständen man n Frauen mit n Männern (monogam) verheiraten kann, wenn allein potentielle gegenseitige Zuneigung (reduziert zu einer symmetrischen binären Relation) vorab bekannt und allein relevant sei, als ein reales Problem zu begreifen, das mit

Touren in gemischten Graphen

Ein *gemischter Graph* (engl.: ‚mixed graph') besteht aus einer (endlichen) Menge von sogenannten Knoten (alias Ecken) und einer Menge bestehend aus geordneten Knotenpaaren (*Pfeilen*) und ungeordneten Knotenpaaren (*Kanten*); dabei darf ein Pfeil (u, v) mit einer Kante $\{u, v\}$ koexistieren. Gibt es nur Pfeile, so heißt der Graph *gerichtet*, und gibt es nur Kanten, so spricht man von einem *ungerichteten* Graphen. Wollte man stattdessen auch mehrfache Pfeile bzw. Kanten für dasselbe Knotenpaar zulassen, dann hätte man es mit *Multigraphen* und einer etwas anderen Notation zu tun. Im Kontext dieses Artikels sollen Knotenpaare stets aus zwei verschiedenen Knoten bestehen. Somit sind in der Terminologie von Gritzmann (2013) unsere ‚gemischten Graphen' genau seine ‚schlingenfreien schlichten allgemeinen Graphen'.
Eine *Tour* ist eine zyklische Abfolge von Knoten und Pfeilen/Kanten, die zwischen Knoten und Pfeilen/Kanten hin und her wechselt und die Richtungsvorgaben entlang der Pfeile einhalten muß, wobei jeder beteiligte Pfeil (u, v) als Vorgänger seinen Anfangsknoten u und als Nachfolger v hat: $\ldots, u, (u, v), v, \ldots$. Im Falle einer Kante $\{w, x\}$ ist entweder $\ldots, w, \{w, x\}, x, \ldots$ oder $\ldots, x, \{w, x\}, w, \ldots$ in der Abfolge verlangt. Jede Tour ist durch die zyklische Abfolge ihrer Pfeile/Kanten eindeutig festgelegt. ‚Tour' bedarf immer einer Spezifizierung: Unter einer *TSP-Tour* (alias Hamiltonkreis) versteht man eine Tour, die jeden *Knoten* des Graphen genau einmal enthält. Hingegen ist eine *Eulertour* so definiert, daß jeder *Pfeil* und jede *Kante* genau einmal zu durchlaufen ist.
In keinem der drei Beispiele (a), (b), (c) gibt es eine TSP-Tour. Im Falle (a) gibt es auch keine Eulertour (weil die Pfeilrichtungen einzuhalten sind), aber in (b) (und erst recht in (c)) schon, da die beiden Kanten Nr. 6 und 7 in gewünschter Richtung durchlaufen werden können: Eine mögliche Abfolge der Pfeile/Kanten ist mit 1 bis 9 durchnumeriert.



(a) gerichtet (b) gemischt (c) ungerichtet

den Mitteln der Graphentheorie *modelliert* und *gelöst* wird. Wirklich niemand? Im fachdidaktischen Modellierungsbuch, das von Borromeo Ferri et al. (2013) herausgegeben wurde, wird unter Abschnitt 9.3.2 („Der Traummann") die Frage *modelliert* und schließlich mit digitalen Werkzeugen *gelöst*, wie viele Männer eine Frau als Heiratskandidaten ablehnen sollte, bevor sie das „Ja-Wort" gibt. Hier liegt entweder ein Scherz (als Humor in der Mathematik) oder eine Verwechslung einer lustigen Metapher mit einem Modell für ein reales Problem vor. Dazu kann man sich in dem zuletzt genannten Buch in Tabelle 1.2 über klassische Aufgabentypen vergewissern, daß schon „Sachaufgaben" als Kontext einen „echten Realitätsbezug" und als Ziel „Umwelterschließung mit Hilfe der Mathematik" haben sollen, wobei natürlich Modellierungsaufgaben „vollständig in die Kategorie der Sachprobleme fallen". Man kann dem Heiratssatz auch nicht als ‚Tanzkurssatz' wirkliches Leben einhauchen, indem man statt Massenhochzeit ein Paartanzvergnügen von n Frauen und n Männern auf gegenseitiger Sympathiebasis organisiert (Hußmann und Lutz-Westphal 2007, S.205). Eine Metapher bleibt eine Metapher.

Auch oder gerade in populären Darstellungen von Mathematik besteht bisweilen die Gefahr, daß sich in der Metapher vergriffen wird, insbesondere wenn es um Rundtouren geht. Der Begriff ‚Rundtour' ist mit über 470 000 Einträgen bei einer Google Suche wirklich populär. Der Nichtmathematiker denkt dabei etwa an einen Rundflug, eine Schiffsrundreise, eine Busrundfahrt oder eine Rundwanderung von Hütte zu Hütte. Der Mathematiker denkt sich auch Unterschiedliches dabei, aber doch etwas ganz Anderes, aller schönen Assoziationen befreit, und was genau, hängt von der Spezifizierung, also letztlich vom Zweck ab. Unter Nutzung graphentheoretischer Sprechweise meint man meist entweder eine Eulertour (hier wird dem großen Euler gehuldigt, auch wenn er in diesem Falle nur eine schlichte Unterhaltungsaufgabe gestellt und gelöst hatte), bzw. allgemeiner die Lösung des ‚Briefträgerproblems' alias ‚Chinesischen Postbotenproblems' (Vorsicht: Metapher!) oder andererseits eine TSP-Tour, wobei ‚TSP' für ‚Travelling Salesman Problem' steht. Auch hier hilft Wikipedia dem interessierten Laien mit jeweiligen Definitionen unter „Eulerkreisproblem" und „Briefträgerproblem" bzw. „Problem_des_Handlungsreisenden" ein wenig weiter. In der niederländischen Version wird auf den metaphorischen Charakter sogar explizit hingewiesen:

> Het Chinese postbodeprobleem is een veelgebruikte metafoor om een bekende probleemstelling in de grafentheorie duidelijk te maken.

Allerdings wird dem Nichtfachmann dabei nicht hinreichend klargemacht, daß nicht nur ungerichtete Graphen, sondern auch gerichtete oder gar gemischte Graphen (mit einem Mix von Kanten und Pfeilen; s. Box auf S. 7) als Modelle infragekommen, die meist relevanter für wirkliche Anwendungen sind.

Eventuell erinnert sich der ZEIT-Leser noch an die Frage 9 der „12 Großen Fragen" in der Online-Ausgabe vom 28. Dezember 2008: „Welches ist die kürzeste Route für die Müllabfuhr?" Gemeint war eigentlich eine Metapher für ein ***NP***-schweres Problem, um zum grundlegenden Problem '$\boldsymbol{P \neq NP}$?' (s. Wikipedia) der theoretischen Informatik vorzudringen. Jedoch wurde vom Journalisten eine Metapher recycelt, die umgedeutet das Müllauto mit dem Handlungsreisenden und (zusammenstehende) Mülltonnen mit den Städten gleichsetzt. Das ist wirklich unglücklich, weil dadurch erstens die Problemgröße gewiß um mindestens eine Zehnerordnung steigt und zweitens ein grundsätzlich ***NP***-schweres Problem (das TSP) aufgerufen wird, während manche Varianten des Briefträgerproblems ***NP***-leicht sind.

Rekord für Rundtouren

Das Verbandeln von Modellierung und Metaphorik kennt man aus der Tages- und Wochenpresse, wenn über neueste Erfolge der mathematischen Forschung berichtet wird. Am 5. November 2014 war im Hamburger Abendblatt eine derartige Meldung zu finden unter dem Titel *„Forscher finden Algorithmus für Rundreisen"*. Der Artikel bemüht die Metapher von touristischen Rundreisen und berichtet, daß ein Verfahren entwickelt wurde,

> um sich der optimalen Route anzunähern – ohne unendlich lange rechnen zu müssen. Allerdings bedeute diese Vereinfachung bei der Rechnung einen Kompromiss bei der Reisedauer. Immerhin: Der Algorithmus ergibt eine Reiseroute, die maximal 1,4-mal so lang ist wie die optimale Strecke.

Nun, da es sich um ein endliches Problem handelt, muß niemand unendlich lange rechnen. Die wirklich gemeinten Anwendungen werden am Ende des Artikels im Konjunktiv genannt:

> Die Erkenntnisse ließen sich auch für die Logistikbranche nutzen und dafür, die optimale Reihenfolge von Arbeitsschritten herauszufinden.

Die dieser Meldung zugrundeliegende Pressemitteilung der Universität Bonn titelte sogar „Forscher der Universitäten Bonn und Grenoble liefern bestes Ergebnis für das Rundreiseproblem" und endete den enthusiastischen Bericht mit den Worten hinsichtlich des potentiellen Nutzens:

> Zum Beispiel bei Himmelsdurchmusterungen der Astronomen ist ebenfalls die kürzeste Route von Stern zu Stern gefragt.

Der kundige Mathematiker ahnt, daß hier wohl ein neuer Approximationsalgorithmus für das (geo-)metrische TSP mit Gütegarantiefaktor 7/5 gefunden wurde. Was er nicht ahnen kann, ist, daß in dem publizierten Fachartikel selbst (Sebő und Vygen 2014) nur das „graph-TSP" approximiert wurde, d. h. die behandelten Distanzmatrizen sind stets von ungewichteten (d. h. mit Kantenlängen 1 versehenen) zusammenhängenden ungerichteten Graphen abgeleitet. Natürlich ist das ein schönes und unerwartetes Resultat der algorithmischen Graphentheorie. Jedoch keine der genannten Anwendungen macht in diesem Szenario Sinn, weil die konkreten Anwendungen sich eben nicht durch Graphen mit Einheitskantenlängen sinnvoll modellieren lassen. Es wird auch von keiner einzigen Anwendung in dem Originalartikel berichtet. Die angeblichen Anwendungen sind nur mediengängige Metaphern, die die unmittelbare gesellschaftliche Relevanz beschwören und vortäuschen sollen. Daß für Forschungsergebnisse die Pressestellen von Universitäten große Worte finden, die nicht auf Tatsachen beruhen, ist kein Phänomen, welches auf die Mathematik beschränkt wäre (Sumner et al. 2014). Deutsche Akademien fordern in solchem Kontext:

> So soll u. a. die wissentliche, nicht durch Daten bzw. Evidenzen gedeckte Übertreibung von Forschungsergebnissen gegenüber den Medien (Hype) als Verstoß gegen gute wissenschaftliche Praxis gelten und entsprechend sanktioniert werden. (Leopoldina et al. 2014)

Approximationsalgorithmen (s. Wikipedia) dienen in aller Regel rein theoretischen Zwecken, um die ***NP***-Schwere in gewisser Weise unter dem Approximationsaspekt näher auszuloten. Für praktische Zwecke nutzt man andere, im Allgemeinen schnellere Heuristiken. Hinzu kommt, daß das (symmetrische) TSP-Problem selbst für Städtezahlen der Größenordnung 10^5 unter allerhöchstem Einsatz gute Chancen hat, beweisbar optimal gelöst zu werden (Cook 2013). Da muß erst einmal eine Heuristik in der Praxis mithalten können, also den Elchtest überstehen, ehe man einen Rekord feiern kann.

Müll und Briefe

> Dass Müll abholen und Post austragen auf die gleiche mathematische Modellierung führen kann, überrascht zunächst vielleicht, ist aber ein Beispiel für die Macht und Schönheit mathematischer Strukturierung und Generalisierung. (Lutz-Westphal 2005)

Diese so formulierte Meinung überrascht in der Tat den Laien wie den Mathematiker, da die städtische Briefzustellung eben nicht wie bei der Müllabfuhr mit einem großen Fahrzeug erfolgt, sondern zu Fuß und mit dem Fahrrad. Damit sind ganz andere Voraussetzungen, schon allein durch die StVO, gegeben, die auch höchst relevant für die Optimierung sein können: Das eine Problem könnte ***NP***-leicht und das andere ***NP***-schwer sein. Natürlich, ähnlich wie Hußmann und Lutz-Westphal (2007) dann später einräumen, wird auch von Ortlieb et al. (2013) explizit konzediert, daß es gewisse Unterschiede zwischen Müllabfuhr und Briefzustellung gibt:

> Während ein Müllfahrzeug in der Regel die Abfallbehälter beider Straßenseiten auf einmal einsammelt, wird der Postbote mit seinem Rad erst die eine Straßenseite beliefern und dann auf der anderen Seite in die entgegengesetzte Richtung fahren.

Aber stimmt das denn? Im Hamburger Univiertel („Grindel“, siehe Wikipedia) kann man den Müllwerkern und dem Briefzusteller bei der Arbeit zusehen, wenn man im Grindelhof im Freien seinen Kaffee trinkt – ja und mehr noch, man kann sie auch befragen. Also, ein Grindel-Briefzusteller fährt meist dort nicht sein Fahrrad (anders als sein Kollege mit einem E-Bike in einem benachbarten Zustellbezirk mit breiteren Fuß- und Fahrradwegen), sondern er schiebt es, so daß Einbahnstraßen für ihn kein Problem sind. Er sagt klipp und klar, daß er jede Straßenseite vollständig abläuft und nie zwischendurch wechselnd die Straße überquert, einfach aus Sicherheitsgründen. So ist ihm der Abgehplan vorgegeben, der natürlich noch weiteren Präferenzen bzgl. der Überquerungen von Straßen (vorzugsweise an Fußgängerampeln) genügen wird. Das relevante Grobmodell könnte somit zunächst ein ungerichteter Multigraph sein, wo Paare von Knoten (benachbarter Straßenkreuzungen bzw. -einmündungen) mit genau zwei Kanten (den Straßenseiten entsprechend) verbunden sind. Ein solcher Multigraph ist trivialerweise eulersch, d. h. er erlaubt eine Eulertour. Also liefert der Algorithmus von Hierholzer (s. Wikipedia) in Linearzeit sofort eine mögliche Briefzustellertour. Dies gilt auch für den Fall, daß die Grenze eines jeden innerstädtischen Zustellungsbezirks mittig durch die Grenzstraßen führt, die allein schon durch eine Subrundtour genau einmal durchgangen werden könnten.

Die Müllwerker im Grindel sagen ebenso, daß sie im Prinzip jede Straßenseite getrennt abarbeiten, es sei denn, es handelt sich um eine Einbahnstraße (wo die Fahrtrichtung keine Wahl läßt) oder um eine sehr schmale Wohnstraße, in der das Müllfahrzeug dem Gegenverkehr vollständig den Weg blockiert, so daß die Müllwerker bei ihrer Arbeit keiner unnötigen Gefährdung durch den entgegenkommenden Straßenverkehr ausgesetzt sind. Ergo ist das zu betrachtende Modell ein gemischter Graph, in dem de facto fast alle Verbindungen gerichtet sind, zumindest im Grindel. Da ist man also nah dran an dem Chinesischen Briefträgerproblem für gerichtete Graphen, welches als ein spezielles Minimumkostenflußproblem sich sogar konzeptionell einfacher lösen läßt als das entsprechende ungerichtete Problem (vgl. Reiss und Stroth 2011). Für die Müllabfuhr in anderen Orten oder auf dem platten Lande kann die Modellierung etwas anders ausfallen, zumal es da noch weitere Einschränkungen geben kann. Damit ist, sofern man sich auf den Müll wirklich einlassen will, schon eine gewisse Vorkenntnis über die verschiedenen Varianten des Chinesischen Briefträgerproblems (Edmonds und Johnson 1973; Eiselt et al. 1995a,b) und exakte Lösungsverfahren (Gritzmann 2013) bzw. heuristische Strategien vonnöten. Allein schon die effiziente Verifikation, daß ein vorgelegter gemischter Graph eulersch ist, bedarf der Lösung eines Maximalflußproblems (Ford und Fulkerson 1962; vgl. Gritzmann 2013).

Würde man das ***NP***-schwere Müllautoproblem als Chinesisches Briefträgerproblem in gemischten Graphen in das ***NP***-leichte ungerichtete Chinesische Briefträgerproblem mit Gewalt umwandeln, so müßte man bei anfänglicher Ignorierung der Pfeilrichtung im Nachhinein für die ausgegebene Eulertour in dem (durch Kantenverdopplung) eulerisierten ungerichteten Graphen jede geplante Durchfahrung als Geisterfahrer gegen die Pfeilrichtung statt der angegebenen Pfeillänge (zweimal) die Länge eines kürzesten gerichteten Weges in der umgekehrten Richtung einsetzen und dafür sorgen, daß der Pfeil in der gemäßen Richtung durchfahren wird. Das kann teuer kommen. Betrachten wir einmal für jedes $n > 2$ einen ungewichteten gerichteten Graphen G_n, der aus zwei gerichteten n-Kreisen $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0$ und $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_0$ durch Identifikation des Pfeilpaares x_0x_1 und y_0y_1 entsteht, so daß der Graph G_n genau $2n-2$ Knoten und $2n-1$ Pfeile hat. Dieser Graph ist noch nicht eulersch, wird aber (auf eindeutige Weise) optimal eulerisiert durch Verdopplung des amalgamierten Pfeiles $x_0x_1 = y_0y_1$. Eine optimale gerichtete Briefträgertour ist daher gegeben durch $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0 = y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_0 = x_0$ mit $2n$ Pfeilen. Wenn nun jedoch die ‚Vereinfachung' (die natürlich hier überhaupt keine ist), die Richtungen ignorierte und mit ungerichteten Graphen arbeitete, zum Ansatz käme, dann könnte der Hierholzer-Algorithmus auch die Eulertour $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0 = y_0, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0 = x_0$ ausgeben, in der die Hälfte der Pfeile geisterfahrerhaft in dem gerichteten Graphen passiert werden müßte. Die umgekehrt orientierte Tour hat ebenso n Geisterfahrerpfeile. Um die StVO zu respektieren, müßte zu jedem dieser widrigen Pfeildurchlaufungen ein kürzester zulässiger gerichteter Weg in umgekehrter Richtung, hier mit $n-1$ Pfeilen, vorgeschaltet werden, dann der Pfeil in der korrekten Richtung genommen und abschließend der zuvor genommene Weg wieder nachgeschaltet werden. So schnellt die Anzahl der zu durchlaufenden Pfeile in einer zulässigen reparierten Tour auf insgesamt $n + 2n(n-1) = 2n^2 - n$ hoch. Das bedeutet, daß diese unsinnige ‚Vereinfachung' nicht einmal einen Approximationsalgorithmus mit Gütegarantiefaktor liefert, es sei denn, man wolle die ungerichtete Lösung umfassender umbauen.

Grundsätzlich liefert eine optimale ungerichtete Chinesische Briefträgertour bei Ignorieren der Pfeilrichtungen in einem gerichteten Graphen nur eine untere Schranke für die Länge einer optimalen gerichteten Chinesischen Briefträgertour, die beliebig schlecht sein kann, wie die folgende Graphenserie zeigt. Der Graph H_k für ungerades k bestehe aus $2k+1$ Knoten und $3k$ Pfeilen, der aus Verkleben von k gerichteten Wegen der Länge 2 an ihren Anfangsknoten und ihren Endknoten entsteht, zu dem genau ein gerichteter Weg der Länge k umgekehrt mit seinem Endknoten an jenen der kurzen gerichteten Wege gemeinsamen Anfangsknoten und entsprechend mit seinem Anfangsknoten an jenen gemeinsamen Endknoten der kurzen gerichteten Wege geklebt wird. Für $k = 1$ entsteht so ein gerichtetes Dreieck und für $k = 3$ der gerichtete Graph, der in der Box in (a) gezeigt ist. Wenn man alle Pfeilrichtungen ignorierte, also den zugehörigen ungerichteten Graph betrachtete, dann wäre der Graph schon eulersch, also hätte die Eulertour die Länge $3k$. Der gerichtete Graph hingegen benötigt für seine Eulerisierung $k-1$ weitere Kopien des gerichteten Weges der Länge k. Die wahre optimale Länge einer gerichteten Chinesischen Briefträgertour ist also $k^2 + 2k$. Der Quotient $(k+2)/3$ der beiden Optimallängen (gerichtet versus ungerichtet) geht also mit k gegen unendlich. Man sollte also das Müllautoproblem grundsätzlich passend zur Realsituation modellieren.

Auch wenn alle Theorie als grau abgetan würde, so zeigt doch schon die Praxis in einem verkehrsberuhigten Viertel wie dem Grindel, daß die Modellierungsstrategie von Ortlieb et al. (2013) und Hußmann und Lutz-Westphal (2007) für die städtische Müllabfuhr nicht gut funktionieren kann. Angenommen, das Müllfahrzeug, nunmehr von der Hamburger Modellierung gesteuert, stünde am Grindelhof, Ecke Allende-Platz und wollte in die etwa 300 m lange Bornstraße einbiegen. Das geht aber nicht wegen eines Einfahrverbots (das übrigens nicht durch Google Maps abgebildet ist). Dann muß das Fahrzeug um den Kreisel wendend den Grindelhof stadtauswärts fahren und dann nacheinander die Straßen Hallerstraße, Beim Schlump, Bundesstraße, Rentzelstraße, Grindelallee und Heinrich-Barth-Straße passieren, bis es nach rund 2,7 km in die Bornstraße gelangt. Kürzer geht es nicht. Die vielen Einbahnstraßen und Abbiegeverbote machen eine vorgenommene Optimierung im ungerichteten Modellgraphen für die Realsituation völlig unbrauchbar.

Nun könnte man einwenden, der ‚Modellierer' und der Student wissen ja beide angesichts solcher ‚Modellierungsprobleme' in den genannten Büchern, daß alles nur Lug und Trug und mit einem Augenzwinkern zu nehmen ist – aber so lernte doch der Student inspiriert und bespaßt durch diese metaphorische Müllverkleidung etwas von der modernen angewandten Diskreten Mathematik quasi nebenbei. Aber das ist überhaupt nicht der Fall. Der Hierholzer-Algorithmus (alias Zwiebelschalen-Algorithmus) wird zwar im Modellierungsbuch von Ortlieb et al. (2013) beschrieben und mit Bildchen illustriert, aber der wirklich einfache Korrektheitsbeweis nicht geführt. Dann wird noch ein weiterer Algorithmus, Fleurys Algorithmus, beschrieben – warum, das wird nicht klar, da der Algorithmus von Fleury Quadratzeit benötigt, während der von Hierholzer in Linearzeit läuft. Der Schlüsselbegriff ‚Komplexität' von Algorithmen wird ohnehin in dem gesamten Modellierungsbuch nicht genannt. Für den nächsten Schritt wird der „Satz" unter optischer Hervorhebung erwähnt, daß die Anzahl der Knoten ungeraden Grades in einem Graphen gerade ist, aber ohne den simplen kombinatorischen Beweis (mit doppeltem Abzählen), der doch nur ein, zwei Zeilen benötigte. Wie kürzeste Wege berechnet werden, wird nicht beschrieben. Wie man schließlich ein optimales perfektes Matching mit (kürzesten) Wegen für die Knoten ungeraden Grades findet, ist überhaupt nicht trivial und bleibt gänzlich unerwähnt. Alles bleibt nur rezepthaft. Modellierung genügt sich also anscheinend selbst und schert sich nicht um Begründungen – aber ohne Beweise gibt es keine Mathematik.

Um mit Thomas Jahnke zu sprechen, sollten Anwendungsaufgaben die Sache ernst nehmen, die Mathematik ernst nehmen und die Schüler ernst nehmen (vgl. Kirsch 1995). Nichts von dem ist mit dem Müllabfuhrkapitel aus dem Modellierungsbuch erfüllt.

> Eingekleidete Aufgaben benutzen die Welt, um Mathematik zu verstehen. Anwendungsaufgaben benutzen Mathematik, um die Welt zu verstehen. Beide Aufgabenausrichtungen sind sinnvoll, berechtigt und notwendig. Lustig, missverständlich und zuweilen schlimm wird es nur, wenn man die eine mit der anderen verwechselt. (Thomas Jahnke; s. http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/leute/jahnke.php)

Hier ist es schlimm.

Die Originalvorlage zu jenem Kapitel „Optimale Routenplanung bei der Müllabfuhr" ist das ausführlichere Kapitel „Mathematik für die Müllabfuhr" aus dem etwas früheren Buch „Kombinatorische Optimierung erleben" (Hußmann und Lutz-Westphal 2007), das wohl die Berliner Müllabfuhr – metaphorisch gesehen – im Blick hatte. Obwohl kürzeste-Wege-Probleme und spezielle Flußprobleme dort etwas in Länge diskutiert werden, wird das viel aufwendigere gewichtete Matchingproblem in vollständigen Graphen, an dem man nicht vorbeikommt, gar nicht behandelt – weil das den Rahmen dieses Buch gesprengt hätte. Welchen Sinn macht es dann, ein in diesem Kontext zu schweres Problem anzureißen?

Nicht gesprengt hätte diesen Rahmen der abschließende einfache Korrektheitsbeweis für die vorgenommene hierarchische Vorgehensweise zur Lösung des ungerichteten Briefträgerproblems, bei der erst (1) die Distanzen zwischen den Knoten ungeraden Grades bestimmt (und zugehörige kürzeste Wege abgespeichert) werden, (2) das perfekte Matchingproblem in dem vollständigen Hilfsgraphen auf der Menge der Knoten ungeraden Grades bzgl. dieser Distanzen gelöst wird, die Matchingkanten dann durch kürzeste Wege realisiert werden, deren Kanten in dem ursprünglichen Graphen zu verdoppeln sind, und schließlich (3) mit der so vorgenommenen Eulerisierung eine Eulertour mit dem Hierholzer-Algorithmus konstruiert wird. Es ist nämlich *a priori* gar nicht klar, warum die hinzuzunehmenden Kopien von Kanten im Eulerisierungsschritt sich im Optimalfall in kantendisjunkte Wege zwischen Knoten ungeraden Grades gruppieren lassen. Unbewußt ablaufende Plausibilitätsüberlegungen reichen da nicht aus. Für den Beweis kann man die Kantengewichtsfunktion als lediglich nichtnegativ voraussetzen: Jeder Kreis von Kantenkopien für die Eulerisierung beeinflußt nicht die Gradparitäten und kann aus einer optimalen Lösung entfernt werden und hat somit notwendigerweise Gewicht gleich Null. Die restlichen Kantenkopien bilden einen Wald, dessen Zusammenhangskomponenten also Bäume sind. Jeder Baum mit $2k > 0$ Knoten ungeraden Grades, der noch nicht ein Weg ist, kann sukzessive in k *disjunkte* Wege zwischen Knoten ungeraden Grades zerlegt werden, allerdings nicht greedy, sondern peripher etwa mittels einer Extremalwahl: Im rekursiven Schritt sucht man von einem festen Endknoten (Wurzel) aus einen letzten Verzweigungsknoten. Von diesem Knoten aus gibt es von der Wurzel weggerichtet zwei Teilwege, die zusammengesetzt einen gewünschten Weg ergeben, dessen Kanten entfernt werden können, so daß ein Baum mit $2(k-1)$ Knoten ungeraden Grades zurückbleibt, in dem die Gradparitäten immer noch die gleichen sind. Ein solches Finale hätte sich doch der mathematisch interessierte Leser sicher gewünscht, wenn schon das Schwierige einfach beiseite gelassen wurde, um das Lesen zu vereinfachen.

Vereinfachen

Eines der Postulate des Modellierens ist das Vereinfachen. Ein aus der Praxis stammendes Optimierungsproblem kann jedoch nicht nach Gusto und Vermögen des Modellierers vereinfacht werden, ohne daß hinreichende quantitative Argumente ins Feld geführt werden, d. h. daß die Mißachtung gewisser Vorgaben fast gar nicht (jedenfalls in meßbarer und abschätzbarer Weise) die Qualität der Lösung beeinträchtigen kann. Wenn allerdings ein ***NP***-schweres Problem durch den Modellierer flugs in ein ***NP***-leichtes Problem umgewandelt würde, so wäre das keine Vereinfachung sondern Hokuspokus, das den Leser und Lernenden um das wirkliche Bemühen bringt, einer praktischen (Näherungs-)Lösung der schwierigen Aufgabe näher zu kommen. Schon Kirsch (1977) hat das „intellektuell ehrliche" Vereinfachen eingefordert.

Auch die Südtiroler Hubschrauberaufgabe zur Rettung verletzter Skifahrer aus den beiden schon erwähnten Modellierungsbüchern wurde grob (und unehrlich) vereinfacht und zwar in der Weise, daß die schneebedeckten Berge vom Modellierer platt geklopft wurden, so daß man sich eigentlich in der norddeutschen Tiefebene wähnen könnte, wo man zwar besser mit dem Hubschrauber herumfliegen, allerdings nicht so gut Skifahren kann. Die Distanzen werden euklidisch berechnet, und es wird nicht einmal der Versuch unternommen, wahre Hinflugzeiten (bei nötigem Umfliegen von Bergketten und Aufsteigen zum Unfallort) mit den Distanzen zu vergleichen. Eine euklidische Lösung müßte zumindest heuristisch nachgebessert werden. Der Grund für die Abkehr von den wirklichen und praktischen Erfordernissen ist naheliegend: Es lag und liegt überhaupt kein real gestelltes Problem vor, wo man durch Nachfragen die fehlenden Informationen hätten einholen können; dies ist umso befremdlicher als das Buch von Ortlieb et al. (2013) „Fallstudien" verspricht. Stattdessen hatte man sich im Internet inspirieren lassen und die 109 Positionsdaten aus einem Projekt der Technischen Universität Kaiserslautern gefischt (vgl. Schwarze und Horn 2004), das ihre Wurzeln hatte in einer Kooperation mit dem Deutschen Schulamt, Schule Südtirol: Im Jahre 1998 hatten die dortigen 3. Modellierungswochen u. a. „Optimale Stationierung von Hubschraubern der Landesflugrettung" zum Thema (Herbst 2005).

Die Rettungshubschrauber fungieren nur als scheinbar hübsche Metapher für den Bezug auf euklidische Distanzen, denn es handelt sich um eine ganz gewöhnliche Aufgabe der Angewandten Mathematik (aus dem Gebiet der optimalen Standortwahlen des Operations Research), die nur *posthoc* winterlich eingekleidet wurde. Für die Hubschrauberaufgabe ist umgekehrt das simple Entkleiden der einzig nötige Schritt, um zur Mathematik zu gelangen. Das IQB (Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen; http://de.wikipedia.org/wiki/Bildungsstandards) würde bei solchen Aufgaben konstatieren:

> Zu ihrer Bearbeitung ist es meistens ausreichend, den der Einkleidung zugrunde gelegten Algorithmus freizulegen und abzuarbeiten.

Laut IQB reicht das aus zur Aberkennung des Status ‚Modellierungsaufgabe'.

Beim Lösen von realen Problemen ist eine gewisse Form der Vereinfachung sicher legitim und manchmal unabdingbar –

> dies soll jedoch nicht als Freibrief für beliebige Vereinfachungen und Trivialisierungen aufgefaßt werden. (Humenberger und Reichel 1995)

Welche Vereinfachungen angemessen sind, kann nur anhand der wirklichen Problemstellung und den Methoden der Teilgebiete der Mathematik, die dabei zum Tragen kämen, entschieden werden. Im Falle der Optimierung kann das durchaus eine schmale Gratwanderung zwischen Trivialisierung und Machbarkeit sein, die gute Methodenkenntnisse voraussetzt und somit *ad hoc* von einem Lernenden und Fachfremden gar nicht erfolgreich durchgeführt werden kann.

Bei näherer Betrachtung und genauerem Hinhören, was von den betroffenen Briefzustellern erzählt wird, ist auch das Problem des Grindel-Briefzustellers mit dem obigen Grobmodell zu leicht abgetan. Die vorschnelle Umwandlung in den längenbewerteten ungerichteten Graphen ignoriert den Sicherheitsaspekt und die Wartezeit beim Überqueren von Straßen. Benutzung von Fußgängerampeln ist in Hinblick auf eine Unfallvermeidung priorisiert, aber es werden nicht beliebige Umwege akzeptiert. Mittlere Wartezeit kann man umrechnen in die Weglänge, die unterdessen gehend und schiebend zurückgelegt würde. Sicherheit kostet Zeit, und wieviel Zeit gerade noch geopfert werden soll, um etwa zur nächsten Ampel zu gelangen, kann durch einen Weglängenmalus für jede potentielle Risikoquerung einer Straße hinzugerechnet werden. Ein adäquates ungerichtetes Graphenmodell sollte also zumindest zwei Sorten von längengewichteten Kanten haben: einerseits die abzulaufenden Straßenseiten zwischen Einmündungen/Kreuzungen als Knotenpunkten und andererseits die möglichen Querungen zwischen zwei solchen Knotenpunkten (und eventuell weiteren Punkten), deren Gesamtgewicht sich aus Straßenbreite, umgerechneter mittlerer Wartezeit und Sicherheitsmalus zusammensetzt. In Abbildung 1 ist eine Micky-Maus-Version des Grindelzustellungsbezirks mit lediglich vier Straßenblöcken (Achtung: starke Vereinfachung!) zu Demonstrationszwecken gezeigt: Die normalen Straßenseiten sind durchgehend und die potentiellen Überwege gestrichelt gezeichnet (Abb. 1a, b). Alle Kanten haben in der Modellierung ihr eigenes Gewicht (als Länge skaliert, in der Abbildung nicht wiedergegeben). Nunmehr müssen nur alle durchgehenden Kantenstücke mindestens einmal durchlaufen werden. Die verschiedenen Eulertouren in dem Grobmodell (Abb. 1c) unterscheiden nicht die Anzahl (bzw. Gewichte) der tatsächlichen Querungen.

Die detailliertere Problemformulierung macht nun die Bestimmung einer optimalen Briefzustellertour zu einem „rural Chinese Postman Problem" (Eiselt et al. 1995b), mitten in der Großstadt! Dieses Problem ist im Allgemeinen offensichtlich ***NP***-schwer, denn man kann das schon erwähnte

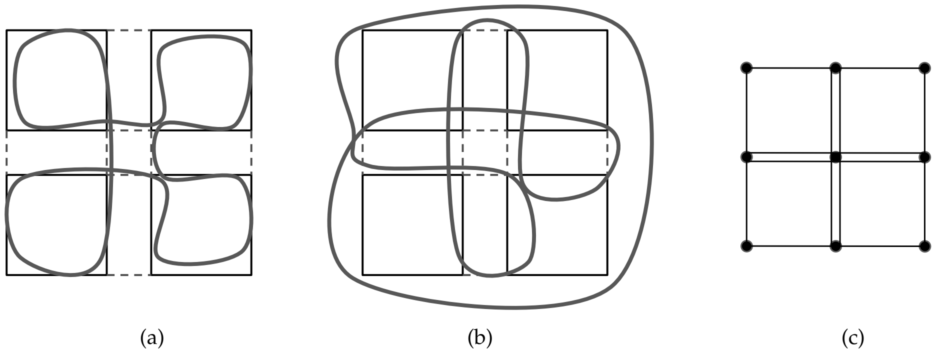


Abbildung 1. Zwei Miniatur-Briefzustellertouren mit (a) 4 bzw. (b) 12 Straßenquerungen, die als zwei gleich lange Eulertouren im zugehörigen Eulergraphen (c) gelten. Längengewichte sind nicht angezeigt.

'graph-TSP' auf einem (ungewichteten und ungerichteten) Graphen G mit n Knoten polynomial auf dieses zurückführen, indem man jedem Knoten (Stadt) für das TSP seinen zusätzlichen Knoten (Vorort) mit einer Endkante (Sackgasse) verbindet, die wenigstens einmal zu durchlaufen ist, während alle anderen Kanten des ursprünglichen Graphen G nur der möglichen Verbindung der Paare Stadt/Vorort durch eine kürzeste Rundtour fungieren: In G gibt es genau dann einen Hamiltonkreis, d.h. eine TSP-Tour der Länge n, wenn es in dem erweiterten Graphen eine rural Chinese Postman Tour der Länge $3n$ gibt.

Die metaphorische Verführung durch Graphen

> Die Arbeit mit Graphen eröffnet die Möglichkeit, unbefangen und spielerisch mathematisch zu forschen und dabei abseits vom ansonsten eher kalkülorientierten Mathematikunterricht mathematische Erfolgserlebnisse zu haben. (Lutz-Westphal 2005)

Natürlich kann der Schüler mit etwas Alltagsschläue, Herumspielen und dem festen Glauben an den Dreisatz sich heuristische Strategien überlegen – nur wird er konfrontiert mit dem Briefträgerproblem für ungerichtete Graphen kaum die Lösung von Edmonds (1965) selbst wiederentdecken und beweisen können. Und natürlich sollte dabei ein Kalkül für Matchingalgorithmen aufgebaut werden. Und natürlich sollte zuvor die algorithmische Behandlung kürzester-Wege-Probleme vollzogen sein. Und natürlich sollte schon zu Beginn klar sein, was hier überhaupt Lösen bedeutet, was unter Komplexität von Algorithmen zu verstehen ist. Es gibt keine Abkürzung zur Erkenntnis, die man frei von jeglicher Kenntnis und jeglichem Ballast, in fröhlichem Dilettieren beschreiten könnte. Wer kalkülfeindlich ist, hat offenbar eine falsche Vorstellung von Kalkülen und kann keine Mathematik betreiben und so auch keine wirklichen Probleme, die mathematischer Hilfsmittel bedürfen, lösen. Ein Hamburger Schulbuch („Lernumgebungen Mathematik") für die 9. Klasse macht bitter ernst mit jenem didaktischen Ansatz und stellt das Problem des Zeitungsausträger (für ein kostenloses Wochenblatt) vor. In einer Fußnote wird da das Stichwort „kürzeste Wege" genannt. Nun – wenn der Schulbub, der sich als Zeitungsausträger etwas Geld verdienen will, aus Sicherheitsgründen die Straßen abgeht wie der Grindel-Briefzusteller, so zerfällt das Problem in das Finden einer Eulertour (in einem eulerschen ungerichteten Multigraphen) und der Suche nach kürzesten Wegen von der Wohnung des Buben hin zum Zeitungsdepot und weiter zum Austragungsbezirk und von demselben Einstiegspunkt der Zustellungstour zurück zur Wohnung. Aber wo bleibt da in dieser Umgebung die stoffliche Vorbereitung, nämlich die Erstellung kürzester-Wege-Algorithmen?

Die Verführung durch Graphen besteht auch in dem Sinne, daß man allzu leicht verkennt, daß die graphentheoretische Sprechweise gar nicht notwendig ist, um etwa das Problem des Grindelbriefzustellers (unter Ignorierungen der Straßenquerungen) zu lösen – schließlich hat auch Euler nicht Graphentheorie als solche betrieben. Da wird die graphentheoretische Sprechweise als der entscheidende Schritt der 'Modellierung' angesehen, obwohl jemand, der nichts von dem kennt, was sich heutzutage alles unter dem Sammelsurium 'Graphentheorie' verbirgt, gar keinen Gewinn in der bloßen Umetikettierung sehen kann. Es lenkt den Blick von den zielführenden Argumenten und Konstruktionen eher ab, indem man fälschlicherweise meint, die Reduzierung auf Punkte und Striche in der Anschauungsebene führten schon an sich zur Lösung. Wenn man willens ist, ein Straßennetz in einen Graphen umzuwandeln, dann ist es ziemlich egal, ob danach ein kürzestes-Wege-Problem ansteht oder ein Briefträgerproblem zu lösen ist. Das Abkoppeln der Lösungsmethoden von dem anfänglichen banalen Modellierungsschritt ignoriert, daß in manchen Fällen z. B. erst mit der ganzzahlig-linearen Beschreibung die wirkliche Modellierung und mathematische Arbeit beginnt. Da hat der *Modellisierer* aber schon längst das Interesse verloren, weil hier die technische Methodenkenntnis einsetzt, für die er sich dann nicht mehr zuständig hält – er will ja nur kalkülfrei ‚modellieren'.

Ein Schüler oder Student kann nicht „unbefangen mathematisch forschen", wenn ihm keine mathematischen Werkzeuge in die Hand gegeben wurden, die schon durch wiederkehrende Übung vertraut und verinnerlicht sind. Es sollte eigentlich eine Selbstverständlichkeit sein, daß Mathematik im Schulunterricht systematisch aufgebaut wird, so daß sich die mathematische Werkzeugkiste langsam füllt. Tut sie aber nicht mehr, wie Wittmann (2014) deutlich macht. Schon Lehramtsstudenten (und andere) unterliegen oft der Illusion, daß Graphen etwas unmittelbar Anschauliches und somit Einfaches darstellen. Selbst Argumente und Beweise, durch ein paar Striche und Punkte illustriert, bedürfen nur scheinbar nichts Anderes als des reinen Hinschauens. Da wird leicht die metaphorische Repräsentation verwechselt mit dem kombinatorischen Satz und seinem Beweis. Selbst das kürzeste-Wege-Problem für Graphen mit nichtnegativ gewichteten Kanten bzw. Pfeilen stellt eine Herausforderung für den Unterricht dar, auch für Lehramtsstudenten an der Universität: Daß überhaupt der Dijkstra-Algorithmus eines Korrektheitsbeweises bedarf, wird gerne mit dem Argument „das sieht man doch" abgewehrt, weil die unmittelbare Anschauung überhaupt keine Probleme sieht, wenn zuvor nur die Plausibilität des Algorithmus an Beispielen vorgeführt wurde. Zu leicht interferiert die ebene geometrische Anschauung mit dem eigentlichen kombinatorischen Inhalt. So wird beispielsweise der Korrektheitsbeweis des Dijkstra-Algorithmus bei Hußmann und Lutz-Westphal (2007) de facto nur für positive Kantengewichte geführt, obgleich für nichtnegative Gewichte behauptet. Dieser unzureichende ‚Beweis' wurde übrigens (ohne Zitierung) von Reiss und Stroth (2011) in ihrem Buch für Lehramtsstudenten übernommen.

Modellisieren

Mathematische Modellbildung (alias mathematischer Modellbau oder mathematische Modellierung) ist schon immer Teil mathematischer Tätigkeit gewesen bei der praktischen Lösung von Aufgaben, von Archimedes über Euler und Gauß bis in die heutige Zeit – damals und vor wenigen Jahrzehnten allerdings noch in selbstverständlicher Weise und ohne großes Aufheben. Die Ziele können dabei ganz unterschiedlich sein, z. B. hieß es im Falle Dynamischer Systeme weiland: „*Ein Ziel des Modellbaus ist, die Organisation eines Systems zu simulieren und sie damit zu verstehen*" (Ebenhöh 1975). Verstehen der Phänomene war also hier gefragt. Das ist durchaus etwas Anderes als eine Modellbildung auf dem Gebiet der Optimierung, um rein technisch eine (fast) optimale Lösung innerhalb akzeptabler Computerzeit zu erreichen. Das Verstehen betrifft hier den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und bedarf einiger spezifischer inhaltlicher Vorbereitungen:

> Um verständlich zu machen, warum einige Modellformulierungen gutartiges, andere ein klägliches Laufzeitverhalten haben, werden in angemessenem Umfang Algorithmen zur gemischt-ganzzahligen, linearen und nichtlinearen sowie globalen Optimierung methodisch behandelt,

wie Kallrath (2013) in seinem Buch zu Fallstudien hervorhebt. Der Modellzweck ist für die Vorgehensweise entscheidend. Mathematische Modellbildung sollte nicht als ein eigenes Gebiet der Angewandten Mathematik angesehen werden, sondern als ein technisch-konzeptioneller Zwischenschritt in der Behandlung eines Problems aus der Wirklichkeit, der unter Umständen erst nach einer interdisziplinären Phase der Zusammenarbeit von Theoretikern und Praktikern erfolgt und sich schließlich auf ein bestimmtes Methodenarsenal (*vulgo* Werkzeugkiste) bezieht. Das zur Verfügung stehende Arsenal als kollektives Fachwissen ist dann geeignet einzusetzen, anzupassen und gegebenenfalls zu erweitern.

Ganz im Gegensatz zu diesem Konzept mathematischer Modellbildungen steht das universelle und verabsolutierte Konzept des Modellierens, welches mit dem Buch von Ortlieb et al. (2013) propagiert wird, das von den konkreten Erfordernissen der involvierten mathematischen Teilgebiete völlig abstrahiert (obgleich Dynamische Systeme dabei Gevatter stehen; vgl. Jetschke 1989, Anhang A.1). Da können letztlich nur Plattheiten allgemeiner Natur, eventuell philosophisch verbrämt, übrigbleiben. Die Loslösung von den Inhalten führt zwangsläufig zur Schematisierung und formalen Abarbeitung des gedachten Modellierungskreislaufes, der in seiner einfachsten kolportierten Form vierschrittig ist, mit ‚Modellbildung – Analyse & Simulation – Interpretation – Überprüfung' als die benannten Tätigkeiten. In Wirklichkeit käme es jedoch auf das Verstehen und Behandeln der konkreten Problemstellung an – das Schema als solches benennt eher Selbstverständlichkeiten, selbst, wenn ein reales und nicht nur ein metaphorisch formuliertes Problem am Anfang steht. Mit einem solchen Schema ist der Weg zur Kompetenzorientierung geebnet, in dem Glauben, es gäbe so etwas wie eine abstrakte und übertragbare „Problemlösekompetenz“ und „Modellierungskompetenz“. Auch mit Blick auf das dazu korrespondierende kompetenzorientierte Buch von Borromeo Ferri et al. (2013) wird hier Modellierung überdidaktisiert zu einem fast selbstreferentiellen System, das nicht davor zurückschreckt, die gedachten Schritte des Modellierungskreislaufes in „Teilkompetenzen“ umzubenennen (s. auch Greefrath 2010, Tabelle 3.1).

Zur besseren Unterscheidbarkeit möchte ich für vorgeschobene ‚Modellierung‘ solcher Art einen anderen Begriff verwenden, nämlich *Modellisieren* (= *Modellieren* + *Didaktisieren*). Beim Modellisieren zum alleinigen Zwecke des Unterrichtens an Hochschule oder Schule ist es im Gegensatz zur Modellbildung irrelevant, ob die gegebene Fragestellung real oder erdacht ist. Selbst bei realen Fragen kommt es nicht mehr darauf an, die Teile einer Theorie zu verstehen, die bei einer mathematischen Lösung letztlich zum Einsatz kommen, sondern nur darauf, Detailfragen an der Oberfläche zu diskutieren und dabei die Hauptkomponenten des gesamten mathematischen Modellbildungsprozeßes beweislos vorwegzunehmen oder teilweise schlicht zu ignorieren. Das Ziel ist also, nicht mehr ein wirkliches Problem zu verstehen und zu lösen, sondern nur einen *didaktischen Stellvertreter* nach gewissen formalen Regeln abzuarbeiten – wie man mit Gruschka (2011) formulieren könnte – in der Illusion, man würde dabei lernen, wie man praktische Probleme mit Hilfe der Mathematik löste.

Scheinmodellieren

Die Schule geht noch einen Schritt weiter, indem dort in der Regel sowieso keine komplexe Modellierung, noch nicht einmal Modellisierung im Hochschulsinne durchgeführt werden kann (außer bei fachübergreifenden Projektthemen), sondern nur Häppchen davon als sogenannte „Modellierungsaufgaben“. Diese sind jedoch oft keiner Modelli(si)erung entnommen, sondern sind ganz gewöhnliche, oft mehrfach unterteilte Aufgaben, die an den Haaren herbeigezogen in ein alltagssprachliches Gewand gehüllt wurden (Bandelt und Weidl 2015). Diese Künstlichkeit sieht man solchen Aufgaben, insbesondere den Zentralabituraufgaben unmittelbar an (Jahnke et al. 2014). Im Unterschied zu einer üblichen eingekleideten Aufgabe, die als solide Alltagsfragestellung durchgehen könnte, fällt die kohärente Einkleidung der Teilaufgaben einer sogenannten Modellierungsaufgabe insgesamt oft recht barock aus, so daß man schon von karnevalistischer Verkleidung oder *Kostümierung* sprechen kann. Das *Entkostümieren* wird dann als anspruchsvolle ‚Modellierung‘ deklariert und von Aufgabenstellern über Fachdidaktikern bis Schulsenatoren als ernsthafte mathematische Tätigkeit angesehen. Manchmal fällt die Kostümierung einer solchen Aufgabe aber auch so mager aus, daß – um in der Karnevalsmetapher zu bleiben – nur eine Narrenkappe auf- bzw. abgesetzt werden muß. Z. B. in Abschnitt 9.3.4 („Die Abwasserleitung“) des Buches von Borromeo Ferri et al. (2013) muß man lediglich für „Orte“ ‚Punkte‘ und für „Leitung“ ‚Strecke‘ sagen (und ein wenig präziser formulieren), und die (wohlbekannte) rein mathematische Aufgabe steht da. Es geht sogar noch schlichter, sozusagen mit einer Pappnase als einziges Utensil der Kostümierung, etwa im Falle der Aufgabe *2.2.3 „Apfelkauf (Anforderungsbereich I)“*, gemäß Auszug aus den Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009 des IQB:

> 4 kg Äpfel kosten 9,60 €. Berechne wieviel 6 kg von derselben Sorte kosten.

Dazu schreibt das IQB:

> Dies ist eine – empirisch – sehr einfache Modellierungsaufgabe, die gleichsam bei ihrer Bearbeitung das Durchlaufen der einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs erfordert.

Da muß gleichsam Adam Ries ein Pionier des Modellierungskreislaufens gewesen sein, obwohl er das mit dem Apfelkauf in weit weniger als sieben Schritten geschafft hätte. Sein weiland populäres „Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Hanthierung“ könnte dann eine Lektüre für fächerübergreifenden problemorientierten Unterricht in Mathematik, Deutsch und evtl. Latein abgeben, z. B. die *Regula Detri* behandelnd (Ries 1574, S.16–21).

MAU an der Schule

Wenn Mathematik sich ausschließlich in der Öffentlichkeit und im Unterricht hinter Alltags- und Umweltproblemen verschanzen muß, um wahr- und aufgenommen zu werden, dann verliert die Mathematik schleichend ihre Eigenständigkeit als Unterrichtsfach. Dann könnte etwa die Schulmathematik eines Tages in einen Verbund MAU (Modellierung – Alltag – Umwelt) aufgehen (bzw. untergehen), was sich perfekt gesellen würde zu den schon real existierenden Verbünden NWA (Naturwissenschaftliches Arbeiten) und EWG (Erdkunde – Wirtschaft – Gesellschaft) im neuen baden-württembergischen Bildungsplan für die Gemeinschaftsschule. Andere Bundesländer sind auch schon auf diesen Verbundzug „der neuen Disziplinlosigkeit“ (Liessmann, 2014, Kap. 4) aufgesprungen. In letzter Konsequenz braucht man dann keine Mathematiklehrer mehr, sondern nur noch solche, die didaktisch instruiert als Lernbegleiter schülerorientiert MAU unterweisen können.

Problemorientierung, Realitätsbezug, Realitätsnähe und Authentizität sind die Worthülsen, die das Lehren von Mathematik mit erdachten Aufgaben in fiktiven Lernumgebungen begleiten. Es verschmilzt Realität mit Fiktion. Für die Kennzeichnung der echten Probleme der echten Wirklichkeit, aus denen die Mathematik auch, aber nicht nur, schöpft, fehlen dann die Worte, so daß sie in dieser Umgebung mehr als real, geradezu surreal wirken müssen. ‚Modellierung' ist heutzutage, metaphorisch gesprochen, wie ein Weißer Zwerg, der in seinem vorläufigen Endstadium alles an Aufgaben und Problemen, was es in seinem Einzugsfeld gibt, akkretiert, von der Regula de tri des Apfelkaufs auf dem Markt bis hin zur Frage, wie ein Stern Materie im interstellaren Medium akkretiert (Hoffmann und Witterstein 2013, Kap. 6.3).

Es ist bezeichnend, daß Beweisen und Verstehen bei dem Problemkreis „Optimierungsprobleme" in der Sekundarstufe II nicht als explizite Ziele des Mathematikunterrichts genannt werden, sondern nur „heuristisches und algorithmisches Arbeiten" (Leneke 2011). Der Unterschied zwischen „Algorithmus" und „Heuristik" wird dabei verwischt. Hier wird also nicht nur die Mathematik ausgeklammert, sondern auch noch das nötige Grundwissen hinsichtlich Algorithmen und Datenstrukturen der Informatik banalisiert. Es fehlt der systematische stoffliche Aufbau, der fächerübergreifend natürlich schon viel früher hätte Grundlagen legen müssen anhand Themen der Arithmetik, wie etwa schriftlicher Rechenverfahren, des euklidischen Algorithmus, Horner-Schemas mit all ihren historischen Bezügen. Im Allgemein(un)wissen *„wird der Algorithmusbegriff noch sehr stark mit dem des Rechenvorgangs identifiziert"* (Ziegenbalg et al. 2010). Das spiegelt sich auch in den zu nationalen und internationalen Testzwecken verordneten Bildungsstandards für den Schulunterricht wider, bei denen das Thema „Algorithmus" unverständlicherweise unter der „Leitidee Zahl" zwecks Klassifikation abgelegt wird. Stattdessen sind die Merkmale ‚Effektivität' (Endlichkeit, Korrektheit) und ‚Effizienz' (hinsichtlich Speicherplatz und Laufzeit) fundamental für Algorithmen.

Zentralabituraufgaben der Schule – als extremer Reflex des herrschenden Modellierungsdogmas – dokumentieren den Kostümzwang, bei dem eher die Kostüme denn die dahinterstehenden einfachen mathematischen Aufgabentypen jährlich auswechselt werden (Jahnke et al. 2014). Immer wieder werden bei technischen (Schein-)Anwendungen die physikalischen Notwendigkeiten gar nicht adäquat berücksichtigt (Baumann 2011, 2014; Walser 2011). Für das „teaching to the test" muß der Schüler nur darauf vorbereitet werden, daß er sich nicht darin verliert, die eigentlich nötige Physik, Biologie etc. dabei zu durchdenken und begreifen (weil es ja gar nicht darum geht), und geschult werden, sich in die Phantasievorstellungen der Lehrkräfte, die solche Aufgaben willens sind zu entwerfen, einzufühlen, damit die rein schematische Entkostümierung schnell und unproblematisch gelingt. Das hat mit Mathematik nichts zu tun. Der Rest geht dann meist nach einübbarem Schema, rezepthaft halt.

Wirkliche mathematische Modellierung jenseits einfacher Sachaufgaben wäre vom Schwierigkeitsgrad her ohnehin für eine Abiturprüfung unangemessen. Solche Realprobleme sind in der Regel komplex und schwierig und würden nur unwirklich werden durch eine zu Prüfungszwecken vorgenommene Trivialisierung. Dennoch könnte im Unterricht sehr wohl bei ausgewählten Themen mathematische Modellierung, etwa bei Behandlung einfacher physikalischer Probleme, zum Tragen kommen, die dann vertieft wird (Bender 2007). Jedoch gerade die vordergründig nutzen- und kompetenzorientierte Ausrichtung der Schulmathematik des letzten Jahrzehnts hat solchen Ansätzen faktisch die fachliche Grundlage entzogen (Wittmann 2014).

MAU an der Universität

Was sich an den Hochschulen, gerade in der Lehrerausbildung, unter „Einführung in die (mathematische) Modellierung" verbirgt, kann im Extremfall plumpes Modellisieren sein, bei dem eine bekannte Metapher für eine wohlbekannte mathematische Problemstellung – entweder so wie sie ist oder neu eingekleidet – als Problem aus dem Alltag oder der Umwelt vorgestellt wird. Dabei kommt durchaus das Mittel der Täuschung in Hinblick auf „Fallstudien" zum Einsatz, indem eine reale Information (*„Im Jahr 2005 wurden in Hamburg 753 990 t Müll aus privaten Haushalten und Geschäften durch die Stadtreinigung Hamburg entsorgt"*) vorweggeschickt wird, die nur der Einstimmung und Ausschmückung dient und letztlich völlig irrelevant ist. Im Falle der Hubschrauberaufgabe desselben Buches (Ortlieb et al. 2013) werden zwar nachvollziehbare geographische Positionsdaten (Tabellen 8.1 und 8.2) präsentiert, die dem Leser vorgaukeln, daß ihm alle nötige Information zur Verfügung stünde. Hier würde eine wirklich interdisziplinäre Aufgabe, die die Zusammenarbeit von Hubschrauberpiloten, Ärzten, Polizei, Krankenhausbetreibern und anderen erforderte, unbotmäßig abgekürzt – wenn sie denn in der Praxis überhaupt in dieser Weise so gestellt würde.

Das ‚Modellieren', wie es in den beiden Springer Spektrum Bänden ex catedra gepredigt wird, läßt einen redlichen Realitätsbezug vermissen. Obendrein widerspricht die Praxis einiger der aufgeführten Fallbeispiele bzw. Aufgaben eklatant den angeblichen theoretischen Anforderungen an Modellierung – in ein und demselben Buche. Die traditionellen Lernschwierigkeiten, was Mathematik betrifft, werden nicht dadurch eliminiert, daß man die Mathematik faktisch entsorgt und durch Kompetenzsurrogate im simulierten Modellkreislaufen ersetzt und dabei so auf das mühevolle Verstehen und Beweisen fast völlig verzichtet. Diese Welt ist weder die der wirklichen Modellierung noch der Mathematik schlechthin, sondern nur eine Scheinwelt, die sich reißerisch interessanter (und meist viel zu schwerer) Probleme oberflächlich bedient, die sie gar nicht wirklich lösen will und kann.

Modellisieren hat nicht das Ziel, Mathematik zweckorientiert systematisch zu entwickeln, sondern aus der Vielfalt von Fragestellungen einige scheinbar ansprechende Probleme knapp zu umreißen und höchstens ein paar elementare Mathematikschritte auszuführen. Alles soll interessant und nichts beschwerlich sein und doch das gute Gefühl hinterlassen, daß man sich mit der wirklichen Realität, ganz konkret und nicht abstrakt, auseinandergesetzt hat, auch wenn alles in Wirklichkeit nur reine Fiktion bleibt. Für die fehlende Mathematik wird Ersatz geschaffen, indem man das Modellisieren theoretisch und didaktisch dadurch überhöht, daß man scheinbare Gesetzmäßigkeiten der Bearbeitung postuliert und Kompetenzerwerb als Gewinn in Aussicht stellt.

Ein legitimes Ziel an der Universität wäre hier, statt Modellisierens z. B. Grundtypen von mathematischen Anwendungsaufgaben mit ihren Lösungen systematisch zu behandeln. Natürlich bedeutet Lösen immer, daß zuvor oder dabei eine Theorie mit Methoden aufgebaut wird, die für solche Aufgabentypen zum Einsatz kommen kann. Insofern ist der Ansatz von Reiss und Stroth (2011) durchaus ein mathematischer: „*Wir wollen dabei nicht nur die Anwendung darstellen, sondern auch die Theorie am konkreten Problem entwickeln*." Die Autoren entscheiden sich auch konsequent, nur das gerichtete Chinesische Briefträgerproblem durchgängig zu behandeln, weil sie in dem Rahmen ihres Buches die nötige Theorie auch präsentieren können.

Ein Kurs oder ein Buch mit dem Titel „Einführung in die (mathematische) Modellierung" ist in der Regel irreführend bezeichnet, weil er suggeriert, es gäbe *die* Modellierung schlechthin, die man ohne konkreten inhaltlichen Ballast einüben könnte, etwa unter dem Motto „*Wer Modellieren lernen will muss modellieren*" (Ortlieb et al. 2013). Natürlich sollte auch mal Raum sein, darüber zu reflektieren, was in erkenntnistheoretischer Sicht Modellbildung in verschiedenen Kontexten bedeutet und welche Rolle die Mathematik dabei spielt oder spielen könnte (vgl. Glinz 2004). Auf jeden Fall setzt ein solcher Kurs bereits eine gewisse Kenntnis von Mathematik/Informatik und realen Problemsituationen voraus. Ein begleitender „Galopp durch's Instrumentarium" der Mathematik (Bungartz 2005) würde im Lehramtsstudium an den Zuhörern nur vorbeirauschen.

Stattdessen sollten Kurse konkreter den Ausschnitt des Teilgebiets benennen, der mit Blick auf wirkliche Anwendungen und echte Fallstudien exemplarisch erarbeitet werden soll, also z. B. „Lineare Optimierung mit Fallbeispielen" oder „Lineare Differentialgleichungssysteme mit Anwendungen". Gerade die Beschränkung auf verschlankte und relativ einfache Theorien, die aber doch reichhaltige Anwendung bieten und somit wirklich Theorie mit Praxis verbinden, sind im Lehramtsstudium für die Sekundarstufen überzeugender als ein oberflächliches Modellisieren, das Problemlösen mit Wirklichkeitsverlust einlöst (Wiechmann 2014) und der schulischen Scheinmodellierung Tür und Tor öffnet (Bandelt und Weidl 2015).

Literatur

H.-J. Bandelt, T. Weidl: Der falsche Schein der Modellierens. Diskussionsbeitrag, Mitteilungen der DMV 23 (2015) 4–5.

A. Baumann: Eine kritische Betrachtung zum Thema „Modellierungsaufgaben" anhand von Beispielen aus dem hessischen Mathematik-Abitur 2009. Mathematikinformation 55 (2011) 15–23 (http://www.mathematikinformation.info/pdf2/MI55Baumann.pdf).

A. Baumann: Mathematikdefizite der Studienanfänger. Vortrag auf dem ‚eLearning Fachforum 2014' am 14. November 2014 (http://video.frankfurt-university.de/fr3l.mp4).

P. Bender: Theoretische Vertiefung von Modellen. In: G.N. Müller, H. Schubring, E. Ch. Wittmann (Hrsg.), Arithmetik als Prozess, 2. Aufl., Erhard Kallmeyer Verlag GmbH, 2007, S. 331–361.

R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Hrsg.): Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Theoretische und didaktische Hintergründe. Springer Spektrum, 2013.

R. Brandt: Wozu noch Universitäten? Felix Meiner Verlag Hamburg, 2011.

H,-J. Bungartz: Modellbildung und Simulation. Vorlesungsfolien Kap. 2, TU München, 2005 (http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/mod_sim/SS05/ModSim_02_2auf1.pdf).

W.J. Cook: In pursuit of the Traveling Salesman – mathematics at the limits of computation. Princeton University Press, 2012.

A. Gruschka; Verstehen lehren – ein Plädoyer für guten Unterricht. Reclam, 2011.

W. Ebenhöh: Mathematik für Biologen und Mediziner. UTB Quelle & Meyer, 1975.

J. Edmonds: The Chinese postman problem. Oper Res 13, Suppl 1 (1965), B73–B77.

J. Edmonds, E.L. Johnson: Matching, Euler tours and the Chinese Postman, Mathematical Programming 5 (1973) 88–124.

H. A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte: Arc routing problems, part I: the Chinese Postman Problem. Oper. Res. 43 (1995a) 231–242.

H. A. Eiselt, M. Gendreau, G. Laporte: Arc routing problems, part II: the Rural Postman Problem. Oper. Res. 43 (1995b) 399–414.

L.R. Ford, Jr., D.R. Fulkerson: Flows in networks. Princeton University Press, 1962.

M. Glinz: Vorlesung Informatik II. Institut für Informatik der Universität Zürich, 2004 (https://files.ifi.uzh.ch/rerg/amadeus/teaching/courses/infII_ss04/kapitel_01.pdf).

K.-H. Hoffmann, G. Witterstein: Mathematische Modellierung Grundprinzipien in Natur- und Ingenieurwissenschaften. Birkhäuser, 2014.

G. Greefrath 2010. *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe* I + II). Spektrum Akademischer Verlag.

P. Gritzmann: Grundlagen der Mathematischen Optimierung – Diskrete Strukturen, Komplexitätstheorie, Lineare Optimierung, Simplex-Algorithmus, Dualität. Springer Spektrum, 2013.

M. Herbst: Mathematik mal anders -10. Mathematische Modellierungswoche in Tramin. Vor Ort ‚Ein buntes Spektrum', Bozen, Südtirol, Mai 2005, S. 24-25 (http://www.schule.suedtirol.it/lasis/documents/info/2005/05_Vor_Ort.pdf).

J. Humenberger, H.-Ch. Reichel: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI Wissenschaftsverlag, 1995.

S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.), Kombinatorische Optimierung erleben. Vieweg, 2007.

IQB: Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren. Auszug aus: IQB (Hrsg.): Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009, http://www.schulentwicklung.nrw.de/lernstand8/upload/download/mat_mathematik/Kompetenzentwicklung_Modellieren.pdf.

T. Jahnke: Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim, 2005, S. 271–272.

T. Jahnke, H.P. Klein, W. Kühnel, T. Sonar, M. Spindler: Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013. Mitteilungen der DMV 22 (2014) 115–121.

G. Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1989.

J. Kallrath: Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis. Springer Spektrum, 2. Aufl., 2013.

A. Kirsch: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. Didaktik der Mathematik 5 (1977) 87–101.

A. Kirsch: „Verstehen des Verstehbaren" — auch im anwendungsorientierten Mathematikunterricht, Didaktik der Mathematik, 23 (1995) 250–264.

B. Leneke: Von anderen „Grafen" – Knoten, Wege, Rundreisen und Gerüste im Mathematikunterricht. Beiträge zum Mathematikunterricht online 2011, S. 535–538 (https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/33665).

Leopoldina, Acatech, Akademienunion: Zur Gestaltung der Kommunikation zwischen Wissenschaft, Öffentlichkeit und den Medien. Juni 2014 (http://www.leopoldina.org/uploads/tx_leopublication/2014_06_Stellungnahme_WOeM.pdf)

K.P. Liessmann: Geisterstunde – die Praxis der Unbildung. Eine Streitschrift. Paul Zsolnay Verlag, 2014.

B. Lutz-Westphal: Mit angewandter diskreter Mathematik neue (Denk-)Wege gehen. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, Franzbecker Hildesheim, 2005, S. 360–363.

A. Marx: Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen – Die metaphorische Deutung des Grenzwerts als Ergebnis eines unendlichen Prozesses. J. Math. Didaktik 34 (2013) 73–97.

C.P. Ortlieb, C. von Dresky, I. Gasser, S. Günzel: Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2013.

K. Reiss, G. Stroth: Endliche Strukturen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

A. Ries. Adam Risen Rechenbuch auff Linien und Ziphren in allerley Hanthierung / Geschäfften unnd Kauffmanschafft. Mit neuwen künstlichen Regeln und Exempeln gemehret. Christian Egenollfs Erben 1574 (http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Adam_Risen_Rechbuch_016.jpg?uselang=de).

S. Schwarze, S. Horn: Wohin mit den Hubschraubern? Standortplanung in der Mathematik. Workshop zur 3. Runde Landeswettbewerb – Mathematik Rheinland-Pfalz, 20.–22. April 2004 (http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/aktivitaeten/schulen/landeswettbewerb04_tag1.pdf).

A. Sebő, J. Vygen: Shorter tours by nicer ears: 7/5-approximation for the graph-TSP, 3/2 for the path version, and 4/3 for two-edge-connected subgraphs. Combinatorica, 2014, DOI: 10.1007/s00493-011-2960-3.

P. Sumner, S. Vivian-Griffiths, J. Boivin, A. Williams, C.A. Venetis, A. Davies, J. Ogden, L. Whelan, B. Hughes, B. Dalton, F. Boy, C.D. Chambers: The association between exaggeration in health related science news and academic press releases: retrospective observational study. British Medical J. 349 (2014) g7015.

H. Walser: Die Modellierung des schönen Scheins. Mathematikinformation Nr. 55 (2011) 3–14.

R. Wiechmann: Kompetenzorientierung – Wirklichkeitsverlust als Prinzip von Bildung. Mathematikinformation 60 (2013) 28-39 (http://www.mathematikinformation.info/pdf2/MI60Wiechmann.pdf).

E. Ch. Wittmann:Von allen guten Geistern verlassen – Fehlentwicklungen des Bildungssystems am Beispiel der Mathematik. Profil, Juni 2014, S. 20–30.

J. Ziegenbalg, O. Ziegenbalg, B. Ziegenbalg: Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Verlag Harri Deutsch, 2010.

Hans-Jürgen Bandelt, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, Bundesstraße 55, 20146 Hamburg
Email: bandelt@math.uni-hamburg.de

Curricula und Mathematikleistung

Eine Analyse zum Mathematikleistungs-Ländervergleich 2012

Reinhard Oldenburg und Finja Krebs

Ein Vergleich der Mathematikcurricula mit den Ergebnissen der Bundesländer im Ländervergleich wirft einige Fragen zu der Bedeutung mathematischer Inhalte auf.

Der Ländervergleich 2012 in Mathematik prüfte die mathematischen Inhalte und Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler der 9. Klasse gemäß den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz erworben haben sollten. Die Standards gelten zwar für alle Länder aber ihre Implementierung ist sehr offen gehalten, so dass sich die Bundesländer in ihren Lehrplänen stark unterscheiden. Teilweise gibt es noch klassische Lehrpläne, die sich an Inhalten orientieren und detaillierte Vorgaben machen, teilweise gibt es Kerncurricula, die sich hauptsächlich auf Kompetenzen beziehen und nur wenige Inhalte auflisten.

Der Bundesländervergleich (Pant et al.) basiert auf den Bildungsstandards und zielt auf die erworbenen Kompetenzen. Von daher erscheint es plausibel, dass Länder mit kompetenzorientierten Kerncurricula einen Vorteil gegenüber Ländern mit klassischen Lehrplänen haben sollten. Andererseits gibt es viel Kritik an der Kompetenzorientierung, die auch in den GDM-Mitteilungen dokumentiert ist. Auffällig ist weiter, dass mit Baden-Württemberg ein Land (500 Punkte im Ländervergleich 2012), das sehr früh (2004) auf knapp formulierte Bildungsstandards gesetzt hat und früher in der Spitzengruppe bei Ländervergleichen war, ins Mittelfeld abgerutscht ist.

Aus diesem Grund wurde der Examensarbeit von Frau Krebs die folgende Arbeitshypothese zu Grunde gelegt:

> *Die Bundesländer, die die ursprünglichen Lehrpläne mit dem Schwerpunkt Inhalte haben, schneiden im Ländervergleich 2012 besser ab, als die Bundesländer mit Lehrplänen, die sich stärker an den Bildungsstandards orientieren.*

Der vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) durchgeführte Ländervergleich überprüft, inwieweit die Kompetenzanforderungen in den einzelnen Bundesländern von den Schülerinnen und Schülern erreicht werden und gibt die Ergebnisse auch differenziert nach Schulformen an.

Die Studie der Examensarbeit beschränkt sich auf das Gymnasium, da diese Schulform die Einzige ist, die man in allen Bundesländern miteinander vergleichen kann. Es wurde ein fein gegliederter Katalog erstellt, der alle denkbaren Inhalte des Mathematikunterrichts zu erfassen versucht. Er enthält 518 Punkte, die 18 Themenbereichen für die Klassenstufen zugeordnet sind. Erstellt wurde der Katalog auf Grundlage der Lehrpläne und Bildungsstandards der neun untersuchten Bundesländer.

Mittels dieses Katalogs wurden die Lehrpläne der neun betrachteten Bundesländer (Sachsen-Anhalt, Sachsen, Thüringen, Hessen, Rheinland-Pfalz, Baden-Württemberg, Hamburg, Bremen und Nordrhein-Westfalen) in Hinblick auf ihre fachlichen Anteile durch Punktevergabe bewertet: Für jeden Aspekt des Katalogs, der im Lehrplan enthalten war, gab es einen Punkt. Die Punktsumme ermöglicht eine Rangfolge der Bundesländer nach dem inhaltlichen Umfang der Lehrpläne zu erstellen und sie der Reihenfolge des Abschneidens im Ländervergleich gegenüberzustellen. Weiterhin wurden Korrelationen zwischen den Punkten im Katalog und den Punkten der Studie berechnet.

Betrachtet man die Rangfolge, die durch die Punktevergabe des vollkommenen Katalogs erfolgt, so ergibt sich dieses Bild:

Rangfolge Auswertung Katalog	Rangfolge Ländervergleich 2012 Gymnasien
Sachsen-Anhalt	Sachsen
Thüringen	Sachsen-Anhalt
Rheinland-Pfalz	Baden-Württemberg
Hessen	Thüringen
Sachsen	Rheinland-Pfalz
Bremen	Nordrhein-Westfalen
Hamburg	Hessen
Nordrhein-Westfalen	Hamburg
Baden-Württemberg	Bremen

Es ergibt sich zwar eine leichte Zusammenhangstendenz, aber diese muss sehr vorsichtig interpretiert werden. Die Korrelation zwischen den erreichten Punkten im Ländervergleich 2012 für Gymnasien und den erreichten Punkten im Katalog ist $r = 0.47$. Die Rangkorrelation nach Spearman beträgt allerdings nur 0.3. Angesichts der geringen Zahl von Ländern ist interessant, dass die Ergebnisse stabil sind gegen das Weglassen einzelner Länder. Relativ großen Einfluss hat das Weglassen von Baden-Württemberg: Die Rangkorrelation steigt dann auf 0.57. Während dieses Land insgesamt (gemessen an früheren Erwartungen) enttäuschend abgeschnitten hat (und damit die Hypothese, dass ein Wechsel auf sehr knappe Bildungsstandards riskant sein kann, stützt), ist der Trend im Gymnasium genau anders. Man kann spekulieren, dass die Schulbuchtradition des Landes mit der Dominanz eines stoffdominierten Lehrwerks hier eine Rolle spielen mag. Neben der Grundskepsis bei jeder Spekulation sollte man auch bedenken, dass der Bericht (Pant et al 2013) auf S. 138 den relativ großen Standardfehler der Messung in diesem Land hervorhebt.

Die Auswertung kann als eine gewisse Stütze der skeptischen Hypothese gesehen werden. In der Examensarbeit wird neben der Inhaltszählung ein weiteres Maß, nämlich die Struktur der Lehrpläne entwickelt, das eine doch engere Korrelation zu den Ergebnissen aufweist. Bei Betrachtung der Struktur der Lehrpläne wurde insbesondere auf Punkte wie die Übersichtlichkeit und Darstellung, Vorschläge für fachübergreifende Inhalte oder ergänzende Anregungen sowie die Beschreibung über den Umgang mit dem Lehrplan Wert gelegt. Allein anhand der Struktur der Lehrpläne kann demnach eine – wenn auch mit großen Unsicherheiten behaftete – Prognose für die Mathematikleistung gemacht werden. Aus diesem Grund wurde die Arbeitshypothese angenommen. Es scheint, dass Lehrpläne, die klar formulierte und im besten Fall sehr detaillierte Inhalte angeben, hilfreicher für die Gestaltung des Unterrichts sind und somit Schülerinnen und Schüler erfolgreicher abschneiden lassen. Es mag sein, dass solche an konkreten Inhalten reiche Lehrpläne den Lehrkräften und auch den Schülerinnen und Schülern und Eltern Orientierung geben.

In den Bildungsstandards selbst wird erwähnt, wie wichtig die Inhalte sind, damit die prozessbezogenen Kompetenzen erlernt werden können. Ohne Inhalte kann man diese nicht erlernen. Die hier präsentierte Auswertung gibt aber Anlass zur Frage, ob die Bedeutung der Inhalte teilweise zu gering eingeschätzt wird. Ebenso ist die Frage, ob konkrete mathematische Arbeitsweisen ausreichend geübt werden. In (Christianson et al. 2012) wird etwa nachgewiesen, dass monotones Üben auch jenseits von Routinetätigkeiten hilfreich ist.

Es ist klar, dass die in dieser kleinen Untersuchung festgestellten Tendenzen von beschränkter Aussagekraft sind. Außerdem gibt es neben den Lehrplänen unzählige weitere wichtige Variablen, die Einfluss auf die Qualität des Unterrichts haben. Wir verstehen diesen Aufsatz daher als offenen Impuls für weiteres Nachdenken. Es kann gefragt werden, ob die Testitems hinreichend kompetenzorientiert sind, oder doch relativ stark inhaltsabprüfend. Vor allem aber sollte eine überzeugende Antwort gefunden werden, warum Länder, die früh auf knappe, kompetenzorientierte Curricula gesetzt haben, eher schwach abschneiden.

Literatur

K. Christianson et al. (2012): Practice Makes (Nearly) Perfect: Solving 'Students-and-Professors'-Type Algebra Word Problems. *Appl. Cognit. Psychol.* 26: 810–822.

F. Krebs: Lehrplananalysen zum Mathematikleistungs-Ländervergleich 2013. Staatsexamensarbeit Universität Frankfurt 2014. Erhältlich per Mail an die Verfasserin.

H. A. Pant, P. Stanat, U. Schroeders, A. Roppelt, T. Siegle, C. Pöhlmann: IQB-Ländervergleich 2012-Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I. Waxmann , Münster 2013.

M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, U. Schiefele: PISA 2003: Ergebnisse des zweiten Ländervergleichs Zusammenfassung. Waxmann, Münster 2005.

Reinhard Oldenburg, Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universitätsstraße 14, 86159 Augsburg
Email: einhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de
Finja Krebs. Email: finjakrebs@web.de

Bemerkungen zu Sichtweisen auf die Geschichte der Mathematik-Didaktik

Diskussionsbeitrag zum Artikel von Gert Schubring in den *Mitteilungen* 98/2015

Hans-Dieter Sill

Man kann die Geschichte einer Wissenschaft immer von verschiedenen Positionen betrachten, je nachdem wie weit man den Gegenstandsbereich fasst und wie weit man die Vorstufen in die Betrachtungen einbezieht. So ist es unter Mathematikhistorikern üblich, die Anfänge der Mathematik in den frühen Kulturen der Ägypter und Babylonier zu sehen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde in ihren Anfängen als „gemischte“ Mathematik aufgefasst, die wie die Optik und Akustik nicht von ihren Anwendungen zu trennen sei. Die Frage der Institutionalisierung einer Wissenschaft an Hochschulen ist ein Maß ihrer Profilierung, aber kein Kriterium für den Beginn der Entwicklung. Für Gert Schubring scheint dies aber bei seiner Kritik an den Aussagen von Erich C. Wittmann in den GDM-Mitteilungen 96/2014 zur historischen Rolle der Stoffdidaktik der Fall zu sein. Für ihn beginnt die Geschichte der Mathematikdidaktik frühestens mit der Institutionalisierung der Lehrerbildung im 19. Jahrhundert. Von Stoffdidaktik könne man zudem erst dann reden, wenn sich diese Disziplin oder zumindest der Begriff etabliert haben. Dies ist für mich eine ahistorische Sicht, die nur mit Worten und Bezeichnungen operiert, aber nicht die Inhalte der Entwicklung betrachtet. Die Geschichte einer jeden mathematischen Disziplin beginnt nicht erst dann, wenn sich die heute dafür üblichen Bezeichnungen und theoretischen Auffassungen herausgebildet haben.

Die Anfänge der Didaktik der Mathematik liegen für mich im Verfassen von mathematischen Texten, die einen didaktischen Zweck haben. So dienten etwa die Texte in dem Papyrus Rhind der Ausbildung von Schreibern im alten Ägypten. Auch die Elemente des Euklid sind u. a. zu dem Zweck verfasst worden, ein mathematisches Lehrbuch für die Ausbildung von Lernenden zu schreiben; es ist mit über 2000 Jahren das am längsten unverändert verwendete Mathematiklehrbuch überhaupt. Der berühmte Dialog des Sokrates mit einem Sklaven ist ein Musterbeispiel für heuristische Gedankengänge beim Lernen von Mathematik. Die Rechenmeister im Mittelalter schrieben zahlreiche Lehrbücher, die einer bestimmten didaktischen Konzeption verpflichtet waren. Oder es sei an das berühmte Lehrbuch von Euler „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erinnert, das er versuchte so zu formulieren, dass es auch derjenige verstand, der es für ihn aufschrieb. Alles dies gehört zum Schatz der Didaktik der Mathematik.

Jede Wissenschaft hat einen Gegenstand und liefert Resultate. Der Hauptgegenstand der Mathematikdidaktik ist der Mathematikunterricht in jeglichen Formen mit jeglichen Arten von Lehrenden und Lernenden. Wesentliche Resultate sind curriculare Materialien, wie Lehrpläne, Lehrbücher, Handreichungen, Arbeitsmaterialien u. a. Unterrichtsmittel. Ein Curriculum in diesem weiten Sinne ist für mich das anzustrebende End- und Hauptresultat jeglicher wissenschaftlicher didaktischer Tätigkeit.

Betrachtet man nun den implizit vorhandenen wissenschaftstheoretischen Hintergrund der Jahrtausende langen Entwicklung unserer Wissenschaft, so ist Erich Wittmann uneingeschränkt zuzustimmen, dass man diesen aus heutiger Sicht durchaus als von der „Stoffdidaktik“ getragen bezeichnen kann. Alle Autoren der oben genannten Literatur orientierten sich vor allem an der Struktur der mathematischen Begriffe, Zusammenhänge bzw. Verfahren, die sie in Ihren Büchern darstellten.

Allerdings schließe ich mich auch der von Hans Schupp in seinem Beitrag in den GDM-Mitteilungen 97/2014 geäußerten Auffassung an, den Fokus der Diskussionen nicht an dem Terminus „Stoffdidaktik“ oder gar „Stoffdidaktiker“ festzumachen, sondern, wie es auch Wittmann letzten Endes ausführlich darstellt, an den eigentlichen inhaltlichen Problemen. Betrachtungen zu den fachlichen Inhalten des Mathematikunterrichts, die von Heinz Griesel (GDM-Mitteilungen 98/2015, S. 16) erneut zutreffend als didaktisch orientierte Sachanalysen bezeichnet werden, sind ein unverzichtbarer Bestandteil didaktischer Forschungen und gehören für mich zu einem von drei Gegenständen der Didaktik (Sill 2012).

Neben der nicht nachvollziehbaren Kritik an Erich Wittmann gibt Gert Schubring noch einen kurzen Überblick über die Herausbildung mathematikdidaktischer Lehre in Deutschland. Es ist sehr bedauerlich, dass er dabei die Entwicklungen in der DDR ignoriert, ich kann mir nicht vorstellen, dass ein Historiker die folgenden Fakten nicht kennt (Borneleit 2006). Bereits im Jahre 1946 wurden in der damaligen Sowjetischen Besatzungszone mit einem Befehl der sowjetischen Militäradministration Lehrstühle für Mathematik-Didaktik eingerichtet, die damals aus historischen Gründen oft als Lehrstühle für „Methodik des Mathematikunterrichts“ bezeichnet wurden. Dies betraf die Universitäten bzw. Hochschulen in Berlin, Dresden, Greifswald, Halle, Jena, Leipzig, Potsdam und Rostock und war mit einem in der Geschichte der Lehrerbildung historisch einmaligen Eingriff in die universitären Strukturen verbunden. Die neuen Lehrstühle wurden nicht den bestehenden Fakultäten zugeordnet, sondern es wurden neue Pädagogische Fakultäten gegründet, die auch die neu eingerichteten Didaktik-Lehrstühle für andere Fächer umfassten. In den fünfziger Jahren wurden dann noch an den Standorten Dresden, Erfurt-Mühlhausen, Güstrow, Halle, Köthen, Magdeburg und Zwickau Pädagogische Institute gegründet, die in den siebziger Jahren zu Pädagogischen Hochschulen mit Promotions- und Habilitationsrecht umgewandelt wurden. In den Jahren 1975 bis 1989 wurden in der DDR 43 Habilitationen auf dem Gebiet der Mathematikdidaktik abgeschlossen. Alle Lehrstühle bestanden bis zum Ende der DDR wurden dann in einem wiederum historisch einmaligen Akt nach Auflösung der pädagogischen Fakultäten und pädagogischen Hochschulen in die althergebrachten Strukturen integriert oder abgewickelt.

Die Ignoranz der Entwicklung der Mathematikdidaktik in der DDR findet man aber nicht nur bei historischen Beiträgen, wie etwa den Erinnerungen von Willibald Dörfler im Heft 95/2013 der Mitteilungen, sondern auch in den meisten gegenwärtigen Publikationen und Vorträgen. So erwähnte etwa Frau Kristina Reiss in ihrem Hauptvortrag zum Beweisen, Begründen und Argumentieren auf der Jahrestagung der GDM 2002 mit keinem Wort die grundlegenden Arbeiten von Hans Bock und Werner Walsch zu diesem Thema.

Das Analogon zum Institut für Didaktik der Mathematik (IDM) an der Universität Bielefeld als einer auf die Erforschung des Mathematikunterrichts ausgerichteten wissenschaftlichen Einrichtung, war die Abteilung Mathematik der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR (APW). Ein wesentliches Anliegen der Arbeit der APW war die Koordinierung der Entwicklung, Erprobung und Implementation von Lehrplänen, Lehrbüchern und Unterrichtshilfen. Die meisten wissenschaftlichen Arbeiten waren mehr oder weniger direkt diesem Ziel untergeordnet. Ein wesentliches Kriterium dieser Arbeiten war dann auch die Praktikabilität der Vorschläge für die Schulpraxis. Aus heutiger Sicht kann man mit Recht die Beschränktheit des Ansatzes und die theoretischen Defizite konstatieren. Auf der anderen Seiten waren die Wissenschaftler von der Lehrerschaft anerkannte Experten, die die alltäglichen Fragen beim Unterrichten von Mathematik zu beantworten hatten. Durch die Einphasigkeit der Lehrerbildung und die feste Integration der Hochschullehrkräfte in die Lehrerfortbildung konnte sich keine institutionell bedingte Entfremdung von der Schulpraxis herausbilden.

In dem heute oft fehlenden Bezug zu den Problemen im „realen Mathematikunterricht“ sehe ich das größte Defizit der aktuellen Entwicklung der Didaktik. Aufgrund fehlender Forschungsergebnisse sind wir oft nicht in der Lage, wissenschaftlich fundierte Antworten zu den alltäglichen Problemen der Arbeit von Mathematiklehrkräften zu geben. Die grundlegenden Probleme der Bestimmung von Zielen des Mathematikunterrichts, ihrer Strukturierung, langfristigen Entwicklung, zeitlichen Planung und ihrer Fixierung in zentralen Planungsgrundlagen sind nur selten Gegenstand didaktischer Forschungen und wurden im Wesentlichen an die Bildungsadministration ausgelagert. Die Entwicklung der aktuellen Bildungsstandards, auf deren zahlreiche und gravierenden Probleme bisher nur sehr wenige Didaktiker hingewiesen haben, ist ein beschämendes Beispiel für die mangelhaften curricularen Forschungen. Man kann sich nicht damit herausreden, dass nur wenige gefragt wurden, es gab und gibt keine ausgereiften vorhandenen Konzepte und Antworten, wie sie in anderen Ländern wie etwa in den USA und der Schweiz in langjähriger Arbeit geschaffen wurden. Diese negative Einschätzung trifft leider auch für sehr viele inhaltliche Probleme des Mathematikunterrichts zu, was ich am Beispiel der Prozentrechnung kurz verdeutlichen möchte. Die Entwicklung des Könnens im Umgang mit Prozenten war ein Gegenstand der groß angelegten PALMA- Studie, deren Ergebnisse zusammenfassend in dem Buch von Hafner „Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I“ (Vieweg 2011) enthalten sind. In dem Projekt wird die aktuelle Situation im Unterricht eines Bundeslandes mit großem empirischen Aufwand konstatiert. Es gibt aber keine wissenschaftlichen Untersuchungen im Sinne didaktisch orientierter Sachanalysen, die über das bisher bekannte hinausgehen. Es wird noch nicht einmal das Niveau der bisher einzigen umfassenden Arbeit zu dem Thema von Roland Berger aus dem 1989 erreicht, die nicht einmal zitiert wird. Auf die Arbeiten und Vorschläge zur Prozentrechnung in der mathematikdidaktischen Literatur der DDR wird ebenfalls nicht eingegangen.

Die Entwicklung von solchen zentralen Planungshilfen wie Schullehrbüchern, Arbeitsmaterialien und Unterrichtsmittel erfolgt im Wesentlichen in nebenberuflicher, finanziell lukrativer Tätigkeit in kleinen Kreisen von Autoren. Die Verlage suchen sich dazu die aus ihrer Sicht besten Lehrkräfte und Didaktiker heraus. Da es in der Regel keine wissenschaftlich fundierten und erprobten Konzepte für die Aneignung des betreffenden mathematischen Wissens und Könnens gibt, schöpfen die Autoren aus ihren eigenen Erfahrungen und denen ihrer Vorgänger, wobei man möglichst wenig von dem in der Schule üblichen Vorgehen abweichen möchte, um nicht den Verkauf zu gefährden. Aufgrund der aus bildungsökonomischer Sicht eigentlich unvertretbar hohen Zahl unterschiedlicher Lehrbuchreihen, ergibt sich für einen Didaktiker aber die einzigartige Möglichkeit, die vorhandenen Lehrbücher und Unterrichtsmaterialien als geronnene Erfahrungen zum Gegenstand didaktischer Analysen zu machen. Bei einer Analyse von 10 Schullehrbüchern für die Jahrgangsstufe 7 (6 Gymnasialbücher und 4 Realschulbücher) habe ich 14 unterschiedliche Darstellungen zum Lösen von Aufgaben zur Berechnung von Prozentwerten, 20 zur Berechnung von Prozentsätzen und 13 zur Berechnung von Grundwerten sowie auch etliche fachliche Fehler gefunden (Sill 2010). Nur wenige der vorgeschlagenen Verfahren halte ich für sinnvoll. Angesichts der zahlreichen Probleme im Umgang mit Prozenten in vielen gesellschaftlichen Bereichen ist die Entwicklung, Erprobung und Implementierung eines wissenschaftlich fundierten Konzeptes zur Behandlung der Prozentrechnung in der Schule ein dringendes gesellschaftliches Erfordernis, das nur in einem groß angelegten Projekt über viele Schranken hinweg realisiert werden könnte. Insbesondere die Implementierung des Konzeptes, also die nachhaltige Veränderung des Handelns der gegenwärtigen Lehrkräfte an den Schulen stellt eine gewaltige wissenschaftliche und organisatorische Herausforderung dar.

Auf diese prekäre Situation weist Wittmann in seinem Beitrag in den Mitteilungen 96/2014 ebenfalls deutlich hin und gibt eine Reihe von zutreffenden Ursachen an, die ich noch um die folgenden ergänzen möchte. Der wissenschaftliche Nachwuchs rekrutiert sich häufig fast ausschließlich aus den Kreisen erfolgreicher Absolventen des universitären Studiums. Dieser in den meisten Wissenschaften übliche Weg hat aber für die Arbeit auf dem Gebiet der Didaktik einen erheblichen Nachteil. Die Nachwuchswissenschaftler kennen die Komplexität der unterrichtlichen Tätigkeit und der Lernprozesse von Schülern nicht aus eigenem Erleben und haben oft ein falsches Bild von den realen Bedingungen des Unterrichts und den Möglichkeiten seiner Veränderung.

Eine weitere grundlegende Ursache sehe ich in der mangelnden Streitkultur in unserer Wissenschaft, auf die Thomas Jahnke und Wolfram Meyerhöfer in ihren Beiträgen in den Mitteilungen Nr. 92/2012 hinweisen. Der Bezug auf die stetig zunehmende Anzahl von Literaturquellen beschränkt sich in vielen Fällen auf ein reines Referieren der Quellen. Eine wirkliche kritische Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Auffassungen wie es etwa zur Prozentrechnung mit einem Artikel von Elmar B. Wagemann im JMD, Heft 4/1983 zu einem Beitrag von Hartwig Meißner im Heft 2/1982 der Fall war, findet sehr selten statt. Dabei geht es aus meiner Sicht weniger darum, dass die Zeitschriften interessanter werden, sondern ich sehe wie Meyerhöfer wissenschaftlichen Streit vor allem als eine notwendige Bedingung für den Erkenntnisgewinn an.

Unsere Wissenschaft kommt aus meiner Sicht ihrer gesellschaftlichen Verantwortung für den Mathematikunterricht in Deutschland gegenwärtig nur in unzureichender Weise nach. Es ist nicht nur an der Zeit wie Wittmann schreibt „wieder andere Gänge einzulegen“, sondern über eine Neuorientierung des gesamten Wissenschaftsbetriebes nachzudenken.

Literatur

Borneleit, P. (2006). Zur Etablierung der Methodik des Mathematikunterrichts an Universitäten und Hochschulen in der Sowjetischen Besatzungszone (SBZ) 1946–49. Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.

Sill, H.-D.: Probleme im Umgang mit Prozenten. – In: Herget, Wilfried (Hrsg.) (2010): Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen. Festschrift für Werner Walsch zum 80. Geburtstag. Hildesheim: Franzbecker. S. 137–149.

Sill, H.-D. (2012): Zum Verhältnis der Wissenschaften Mathematik und Didaktik des Mathematikunterrichts. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

Hans-Dieter Sill, Universität Rostock, Institut für Mathematik, 18051 Rostock
Email: hans-dieter.sill@uni-rostock.de

Stellungnahme zu Gert Schubrings erfreulich pointierter Kritik „der“ stoffdidaktischen Tradition in den GDM-Mitteilungen

Lutz Führer

Meine Lesart des Schubring-Beitrags

Schon der Beginn von Gert Schubrings anregendem Diskussions-Beitrag „Ein historischer Blick auf die Stoffdidaktik“ ist spannend. Dort heißt es:

> Die Stoffdidaktik hat den deutschen Mathematikunterricht über Jahrhunderte getragen [...]’ (Wittmann 2014, 16)
> Der Satz ist beeindruckend, aber er hat nichts mit der historischen Realität zu tun.

Anschließend heißt es mit eher beiläufiger Eingrenzung „der Stoffdidaktik“ auf Lehrerausbildung für Höhere Schulen:

> Ohne Lehrerbildung keine Didaktik – aber auch mit Lehrerbildung entsteht noch lange keine Didaktik.

Bis zur Wende ins 20. Jh. sei nämlich Gymnasiallehrerausbildung i. W. nur als fachwissenschaftliche Ausbildung begriffen worden. Dies habe sich erst im Umfeld der Meraner Reformer geändert, und die Hochschulposten für Mathematikdidaktiker habe es ab dann erst sehr allmählich gegeben. (Schubring nennt Schimmack und Dingler.)

> Das eigentlich innovierende Element entstand dagegen aus der Volksschul-Lehrerausbildung.

Und deren Akademisierung habe eigentlich erst – lange nach [des in Mathematik promovierten; L. Fü.] Diesterwegs Anfängen – in der Weimarer Zeit begonnen. Erst Friedrich Drenckhahn sei 1930 erstmals (als Hochschul-Dozent) für „Didaktik der Mathematik" berufen worden. Und erst im Zuge der zunehmenden Akademisierung [= Niveauerhöhung???, s. nächstes Zitat; L. Fü.] sei recht eigentlich „die Stoffdidaktik" entstanden, sozusagen als ökologische Nische für Schulpraktiker [oder Hilfsakademiker; L.F.] unter den fachwissenschaftlich qualifizierten und deshalb [nur; L. Fü.] stoffdidaktisch berufenen Gymnasiallehrerausbildern:

> Nach dem zweiten Weltkrieg setzte sich die Niveauerhöhung fort; in der Bundesrepublik wandelten sich die Pädagogischen Akademien zu Pädagogischen Hochschulen und erhielten schließlich Promotionsrechte; die Dozenten wurden zu Professoren und vielfach wurde ‚Methodik' in ‚Didaktik' transformiert; und ‚Rechnen und Raumlehre' zu ‚Mathematik'. Allerdings wurden mit dieser Niveau-Erhöhung auch junge Mathematiker berufen, die nicht die pädagogische Tradition fortsetzten, sondern Stoffdidaktik praktizierten.
>
> An den Universitäten verblieb dagegen die gymnasiale Lehrerbildung unter der Dominanz der Fachwissenschaft und mit der marginalen Rolle von Schulpraktikern; sie bildeten die soziale Basis der Stoffdidaktik. Die traditionelle Stoffdidaktik kann daher – in den wissenschaftssoziologischen Termini von Thomas Kuhn – als der vorparadigmatische Stand der Mathematik-Didaktik bezeichnet werden.
>
> Erst ab der zweiten Hälfte der 1960er Jahre, im Zuge der Reform und Expansion des Bildungswesens in der Bundesrepublik, wurde die Mathematik-Didaktik an Universitäten gestärkt – allerdings zunächst nicht an klassischen, sog. ‚Voll'-Universitäten ...
>
> Es ist also durchaus nicht zu Unrecht, dass Wittmann eine Verbindung sieht zwischen der Gründung des IDM 1973 (nicht 1972) in Bielefeld und der Reduktion (für Wittmann: „Disqualifizierung") der traditionellen Stoffdidaktik. Die Arbeit des IDM hatte ja eine entscheidende Bedeutung für die Herausbildung der Mathematik-Didaktik als wissenschaftlicher Disziplin (siehe Biehler et al., 1994).

In einer zweiten Nachbemerkung heißt es dann noch:

> Da Geoffrey Howson intensiv mit dem IDM zusammengearbeitet hat, insbesondere in dem Projekt BACOMET, kann er nicht als Kronzeuge für die Propagierung deutscher Stoffdidaktik im Ausland angerufen werden (Wittmann 2014, 16).

„Die Stoffdidaktik", so lese ich Gert Schubrings Skizze ihrer Genese, mauserte sich also bestenfalls sehr allmählich zu einem legitimen Bestandteil der eigentlichen, wissenschaftlichen und universitären, Mathematik-Didaktik, deren Entstehung sich wesentlich der Geburtshilfe durch das IDM verdanke. *„Der traditionellen Stoffdidaktik"* wird jedenfalls (nur?) der Status *„vorparadigmatischer Stand der Mathematik-Didaktik"* zuerkannt. Ob dann der letzte Absatz des Haupttextes zur wissenschaftlichen Ehrenrettung gedacht ist, wurde mir nicht klar. Dort wird lediglich kommentarlos auf Erich Wittmanns Diagnose einer *„danach* [!] *erneuerten Stoffdidaktik"* hingewiesen:

> Im Gegensatz zur Empirie-freien traditionellen Stoffdidaktik sollte heutzutage eine empirische Komponente für alle Unterrichtsvorschläge selbstverständlich sein.

Ob „Empirie" wissenschaftlich adelt, hängt ja nicht nur von deren technischer Qualität, sondern auch von dazu geeigneten Erkenntnisinteressen, Interpretationstheorien und akademischen Sozialisationsrahmen ab – also von akzeptierten oder gar bewussten Blickverengungen.

Plädoyer für eine großzügigere Auslegung der Reizvokabel „Stoffdidaktik"

Wenn man „Stoffdidaktik" etwas naiver und weniger wissenschaftsfixiert als Begriffsfeld, etwa als „Bemühen um Zugänge, Sicht- und Darstellungsweisen mathematischer Erkenntnisse, Denk-, Handlungs- und Ausdrucksweisen zu Lehrzwecken", nimmt, und so verstehe ich die inkriminierten Texte von Erich Wittmann, dann finde ich nur noch das Adjektiv „deutsch" bei „Mathematikunterricht" in Schubrings anfänglichem Wittmann-Zitat irreführend. Soll „Stoffdidaktik", welche auch immer, Mathematikunterricht und/oder Lehrerausbildung erleichtern oder durch Spezialisierungen, Differenzierungen, Sequenzierungen, Akzentsetzungen, Pointierungen usw. verbessern, dann ist es doch wohl sinnvoll und nützlich, Mathematisches aus hypothetisch angenommenen Schüler- oder Lehrersichten immer wieder neu zu rekonstruieren und der praktischen Übernahme an- oder abzuempfehlen.

Hochschul- und profane Lehrer, Lehrbücher und Fachzeitschriften haben das im und wohl auch vor dem 19. Jh. immer wieder praktiziert. Ich kann mir nicht vorstellen, dass Gert Schubring in diesem weiteren Sinne etwa Archimedes, Ptolemaios, vielleicht auch Euklid, ..., Adam Ries, Leibniz, Sturm, Christian Wolff, ..., Pestalozzi, Herbart, Fröbel u. v. a. m. nicht zu den Ahnherren auch „der Stoffdidaktik (im Allgemeinen)" rechnen möchte. Sobald ein Lehrer oder Mathematiker nicht nur zum Zwecke der Selbsterhebung („Brain-Posing"), sondern auch für weniger begnadete Leser schreibt oder für solche Hörer spricht, betreibt er m. E. Didaktisches. Um das tun zu können, braucht er allerdings kommunikative Erfahrungen. Es gibt ja auch allerlei, das sich zwischen Menschen in Unterricht und Schule abspielt, Mathematikunterricht mitbestimmt und (bisher?) nicht „wissenschaftlich" fassbar ist, sondern erlebt werden muss oder eigentlich müsste. (Die Theaterwissenschaftler können ein Lied von diversen Rationalisierungsversuchen des Gelingens singen.) In diesem Sinne halte ich „die traditionelle Stoffdidaktik" wie sie von Lehrern und Lehrerausbildern mindestens seit sumerischer Zeit betrieben wurde keineswegs für *„Empirie-frei"*. Nebenbei: Auch die IDM-Gründerväter Bauersfeld, Steiner und Stowasser kamen ja doch wohl zu Ihren einflussreichen Bielefelder Ämtern, weil sie sich zuvor (auch) als Stoffdidaktiker einen wissenschaftlichen und nicht nur belletristischen Namen gemacht hatten.

Allerdings fürchte ich, dass hochschul- und verbandszentrierte Kämpfe um Deutungshoheiten für „echte Wissenschaftlichkeit", „Paradigmen" und deren überwundene Inkubationsphasen allenfalls „forschungsökonomisch" nützlich sind. Wenn ich mich an Kuhns einst berühmtes Buch recht erinnere, fänden ja Paradigmenwechsel nicht selten aus dem schnöden Grunde statt, dass der Forschungsnachwuchs in endlicher Zeit nicht mehr mit dem Lesen und Verstehen fertig werde, bevor er als Wissenschaftler veröffentlichen und Geld verdienen dürfe bzw. sollte. Nach dem Paradigmenwechsel bräuchte er das „Veraltete" dann nicht mehr. Er könnte es wegen der Bedeutungswechsel auch gar nicht mehr anstrengungslos verstehen. – In gesellschaftlicher Hinsicht empfinde ich das Eintrittsgeld für diese Tänze ums Goldene Kalb als gefährlich hoch. Es gibt m. E. oberhalb von Wissenschaftlichkeit Wichtigeres für eine „echte" Mathematikdidaktik. Wiegen soziale Funktionen des professionellen Wissen-Schaffens aufgrund des auch von Herrn Schubring verlangten Bezugs zur Lehrerbildung nicht höher als Standesehre und Wissens-Geschäft? Ich meine: ja. Und ich ziehe als Bezugslehre die von Feyerabends „Wider den Methodenzwang" aus wissensökologischen Gründen der Kuhnschen vor. Man denke nur einmal an die neoliberale Denglisierung des einst respektablen Terminus „Kompetenz".

Soll Mathematikdidaktik, welche auch immer, Mathematikunterricht und/oder Lehrerausbildung nützen, dann muss sie sich wohl oder übel auch mit schüler- oder lehrerlehrlingsorientierten Zugängen zu mathematischem Wissen und/oder Mathematiktreiben befassen, wenn sie ihr Wissenschaftlerdasein konstruktiv-spekulativ und prospektiv und nicht nur analytisch-, deskriptiv- oder kontemplativ-retrospektiv rechtfertigen will. Wer wollte Herrn Wittmanns Rettungsversuch des pädagogisch orientierten Mathematikregenerierens als Kern der Mathematikdidaktik im Kontext der Lehramtsausbildung widersprechen – ohne die immerhin personell profitable Rechtfertigung akademischer Mathematikdidaktik aus Lehrplanberatung und Lehramtsausbildung leichtfertig in Frage zu stellen?

Mathematikdidaktik hätte m. E. gar keine Überlebenschance an unseren Hochschulen und Lehrerseminaren, für welche Lehrämter auch immer, wenn sie „Stoffdidaktik", wohlgemerkt im allgemeineren Sinne und mit sozial-empatischem statt akademischen Primat, zugunsten ausschließlich „weicherer" Bezugswissenschaften und/oder Datenanalysen nach- oder unterordnen würde. Dabei sollte eine mathematikdidaktische „scientific Community" ihr Treiben m. E. nicht zuerst ansehensorientiert in Hochschul- und Pfründensystemen überzeugend rechtfertigen, sondern vor allem auch gegenüber den Sozialsystemen, die ihre Ansehensorientierung überhaupt erst ermöglichen und finanzieren. Ohne Reflexionen und Innovationen „im Stofflichen" dürfte das – jedenfalls auf Dauer – schwerlich gelingen. Auch Gert Schubring schrieb ja (s. o.) *„Ohne Lehrerbildung keine Didaktik"*. Da bin ich ganz einverstanden. Aber nicht mit einer „Wissenschaftlichkeit" fixierenden und adorierenden Mathematikdidaktik ohne subjektive Erfahrungshintergründe, soziale Ziele und „instituetische" Rücksichten, wie sie Siegfried Bernfeld schon vor 90 Jahren forderte. Warum war Bernfeld damit wohl in der Mathematikdidaktik so wenig erfolgreich?

Lutz Führer, Am Kupferberg 14, 53619 Rheinbreitbach,
Email: fuehrer@math.uni-frankfurt.de

Was ist Stoffdidaktik?

Peter Bender

Als am 12. 4. 1961 der erste Mensch im Weltall, Juri Gagarin, seine Mission beendet hatte, berichtete er angeblich: „Ich bin in den Weltraum geflogen, aber Gott habe ich dort nicht gesehen.“ Wenn man dieses ironische Späßchen eines Atheisten für Atheisten ernst nimmt, kann man kritisieren: „Wer eine so spezielle Vorstellung von Gott hat, braucht sich nicht zu wundern, wenn er ihn nicht sieht.“

An diese Anekdote musste ich bei der Lektüre von Gert Schubrings Replik „Ein historischer Blick auf die Stoffdidaktik“ (MGDM 98, 2015) auf Erich Wittmanns Artikel „Die Ideologie der Selbstbeschränkung in der Mathematikdidaktik“ (MGDM 96, 2014) denken. Seinen Ausführungen legt Schubring einen sehr speziellen Begriff von (Mathematik-)Didaktik zugrunde, nämlich als die Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik, wie sie sich im 20. Jahrhundert, eigentlich erst richtig in dessen letzten Drittel, entwickelt hat. Da braucht er sich nicht zu wundern, dass er in seinen historischen Quellen diese (mit ihrer Variante „Stoffdidaktik“) nicht findet.

Dieser Begriff geht offensichtlich völlig an dem vorbei, was Wittmann mit seiner Rede von der Stoffdidaktik ausdrücken wollte, nämlich die Entwicklung der Unterweisung in einem Fach aus eben diesem Fach heraus. Gerade wegen der Abwesenheit dieser Wissenschaft (im Schubringschen Sinn) bis vor kurzem hat die Stoffdidaktik (im Wittmannschen Sinn) über Jahrtausende jegliche Unterweisung im Fach Mathematik getragen. Was denn sonst?

Peter Bender, Universität Paderborn, Institut für Mathematik EIM, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, Email: bender@upb.de

Ein anderer historischer Blick auf die „Stoffdidaktik“

Erich Ch. Wittmann

Gerd Schubring hat in seiner Replik (Schubring 2015) auf meinen Beitrag in den gdm-Mitteilungen (Wittmann 2014) das Arsenal, das ihm als ehemaligem Mitglied des früheren IDM der Universität Bielefeld[1] und als Herausgeber des „Handbooks on the History of Mathematics Education“ zur Verfügung steht, voll in Anschlag gebracht, um meine Aussage, die Stoffdidaktik habe den Mathematikunterricht über Jahrhunderte getragen, zu widerlegen. Schubrings Argumente gehen aber an meiner Analyse vorbei, da er ein Bild von „Stoffdidaktik“ hat, das sich von meinem unterscheidet (und vermutlich auch nicht von allen Mitautoren des o. g. Handbuchs geteilt wird).

Unter „Stoffdidaktik“ verstehe ich den Ansatz in der Mathematikdidaktik, bei dem versucht wird, den Mathematikunterricht *aus dem Fach heraus* zu entwickeln. Diese Art von Mathematikdidaktik hat den Unterricht, so behaupte ich, nicht nur seit Jahrhunderten, sondern sogar seit Jahrtausenden getragen. Seit es Mathematik gibt, hat es immer auch Mathematikunterricht gegeben, denn immer ging es darum, das erworbene Wissen an Schüler weiterzugeben. Das o.g. Handbuch unterstreicht dies. Aus dem Fach heraus (woraus denn sonst?) wurden Lehrbücher geschrieben, die sich im Laufe der Jahrhunderte an einen immer breiteren Kreis von Schülern wandten. Die Autoren haben sich mehr oder weniger Mühe gegeben, um ihren Schülern einen Zugang zur Mathematik zu ermöglichen und die gesellschaftlichen Randbedingungen einzubeziehen, und sie waren darin mehr oder weniger geschickt. Es ist aber keine Frage, dass ihre Bücher den Mathematikunterricht getragen haben, zugegeben oft mehr schlecht als recht, aber oft auch mit Erfolg. Im deutschsprachigen Raum war z. B. das zweite Rechenbuch von Adam Ries im 16. und 17. Jhdt. ein Bestseller. Seit mehreren Jahrhunderten ist auch das deutliche Bemühen einzelner Autoren erkennbar, den Unterricht nicht belehrend zu gestalten, sondern die Schüler zu aktivieren und Begründungen

[1] Für die Jüngeren sei angemerkt, dass „das IDM“, so hieß es damals, Anfang der 1970er Jahre mit vielen Millionen der Volkswagenstiftung gegründet wurde sich und nach Emeritierung der drei Direktoren in den neunziger Jahren auflöste.

einzubeziehen. Ich selbst schätze in dieser Hinsicht besonders die „Mathesis juvenilis“ von Johann Christoph Sturm (Ende 17. Jhdt.), die „Demonstrative Rechenkunst“ von Christlieb von Clausberg und vor allem die „Élémens de Géometrie“ und die „Élémens d'algèbre“ von Alexis Clairaut (18. Jhdt.). Im 20.Jhdt. setzte sich das „entdeckende Lernen“ auf breiterer Front durch, wobei für mich persönlich die „Notes on Primary Mathematics“ von 1963, herausgegeben von David Wheeler, die Bücher von W.W. Sawyer (darunter das von Arnold Kirsch übersetzte Buch „Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra“), Freudenthals Bücher „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ und „Didactical Phenomenology of Mathematical Structures“, die von ihm initiierte Entwicklungsforschung am IOWO in Utrecht und nicht zuletzt das Werk von Heinrich Winter Maßstäbe gesetzt haben. In diesen Aufzählungen wird deutlich, dass die „Stoffdidaktik“ (in meinem Sinn) nationenübergreifend ist wie die Mathematik selbst und über die Mathematik im engeren Sinn hinausreicht.

Im Jahr 1978, also nur wenige Jahre nach Gründung der GDM, hat der Philosoph Peter Heintel, Kollege des GDM-Gründungsmitglieds Roland Fischer an der Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt, die Aufgabe der Fachdidaktik folgendermaßen beschrieben (Heintel 1978, 45–46):

> Didaktische Modellbildung, die Modelle von außen an den Stoff, die Fächer, heranträgt, diese belässt, wie sie sind und selbst nur in allgemein pädagogischen Imperativen oder einem operationellen Verfahrensmuster besteht, somit dem Fach äußerlich bleibt, ist abzulehnen ... *Fachdidaktik heißt vielmehr eine im Fach, im Wissen selbst angesiedelte Didaktik*, heißt Aufschlüsselung des Faches nach dem *in ihm selbst vorhandenen und eingefrorenen didaktischen Momenten.*

Die hier formulierte Position hatte der Bildungsphilosoph John Dewey bereits 1904 in einem grandiosen Artikel zur Lehrerbildung sehr klar herausgearbeitet. In diesem Artikel, der in der Mathematikdidaktik leider kaum beachtet wird, gibt es einen langen Abschnitt über die Fachausbildung angehender Lehrer, der mit folgendem Satz beginnt (Dewey 1904/1977, 262):

> I turn now to the side of subject-matter, or scholarship, with the hope of showing that here too the material, when properly presented, is not so *merely* theoretical, remote from the practical problems of teaching, as it is sometimes supposed.

Weiter unten heißt es dann (ibid., 263–264):

> Scholastic knowledge is sometimes regarded as if it were something quite irrelevant to method. When this attitude is even unconsciously assumed, method becomes an external attachment to knowledge of subject-matter. It has to be elaborated and acquired in relative independence from subject-matter, and *then* applied.
> Now the body of knowledge which constitutes the subject-matter of the student teacher must, by the very nature of the case, be organized subject-matter. It is not a separate miscellaneous heap of scraps. Even if (as in the case of history and literature), it be not technically termed "science," it is none the less material which has been subjected to method – has been selected and arranged with reference to controlling intellectual principles. *There is, therefore, method in subject-matter itself – method indeed of the highest order which the human mind has yet evolved, scientific method* [Hervorh. E. Ch. W.]. It cannot be too strongly emphasized that this scientific method is the method of the mind itself. The classifications, interpretations, explanations, and generalizations which make subject-matter a branch of study do not lie externally in facts apart from mind. They reflect the attitudes and workings of mind in its endeavor to bring raw material of experience to a point where it at once satisfies and stimulates the needs of active thought. Such being the case, there is something wrong with the "academic" side of professional training, if by means of it the student does not constantly get object-lessons of the finest type in the kind of mental activity which characterizes mental growth and, hence, the educative process.
> ... Only a teacher thoroughly trained in the higher levels of intellectual method and who thus has constantly in his own mind a sense of what adequate and genuine intellectual activity means, will be likely, in deed, not in mere word, to respect the mental integrity and force of children.
> Of course this conception will be met by the argument that the scientific organization of subject-matter, which constitutes the academic studies of the student-teacher, is upon such a radically different basis from that adapted to less mature students that too much preoccupation with scholarship of an advanced order is likely actually to get in the way of the teacher of children and youth. I do not suppose anybody would contend that teachers really can learn more than is good for them, but it may reasonably be argued that continuous study of a specialized sort forms mental habits likely to throw the older student out of sympathy with

> the type of mental impulses and habits which are found in younger persons.
> *Right here, however, I think normal schools and teacher's colleges have one of their greatest opportunities – an opportunity not merely as to teachers in training, but also for reforming methods of education in colleges and higher schools of education having nothing to do with the training of teachers.* [Hervorh. E.Ch.W.]. It is the business of normal schools and collegiate schools of education to present subject-matter in science, in language in literature and the arts, in such a way that the student both sees and feels that these studies *are* significant embodiments of mental operations. He should be led to realize that they are not products of technical methods, which have been developed for the sake of specialized branches of knowledge in which they are used, but represent fundamental mental attitudes and operations – that, indeed, particular scientific methods and classifications simply express and illustrate in their most concrete form that of which simple and common modes of thought-activity are capable when they work under satisfactory conditions.

Die Kritik in meinem Beitrag zielt genau darauf, dass die von Dewey beschriebene Chance für eine veränderte Lehrerbildung und eine Fachdidaktik aus dem Fach heraus heute nicht mehr systematisch genutzt wird, weil die Richtung der Mathematikdidaktik, die dies leisten kann, in der GDM anders als früher nicht mehr den ihr gebührenden Raum hat.

Um nicht missverstanden zu werden, möchte ich deutlich sagen, dass mein Plädoyer für die Stoffdidaktik nicht so verstanden werden darf, dass ich jede Art von Stoffdidaktik unterschiedslos für gut halte, einfach weil es sich um Stoffdidaktik handelt. Tatsächlich gibt es in der Stoffdidaktik ein breites Qualitätsspektrum und natürlich auch ausgesprochen schlechte Produkte. Das obige Zitat von Dewey liefert Kriterien, mit der man in erster Näherung die Spreu vom Weizen trennen und im Übrigen auch die heutige fachwissenschaftliche Lehrerbildung bewerten kann.

Eine Stoffdidaktik, die sich lediglich darauf beschränkt, gute Lehrbücher zu entwickeln, die entwickelten Konzepte des Lehrens und Lernens aber nicht expliziert und systematisiert, genügt sicherlich nicht mehr den heutigen Forderungen an eine wissenschaftliche Didaktik. Dies schränkt ihren Wert aber keineswegs ein. Dewey verweist in seinem Artikel auf eine informelle Untersuchung in einem College, bei welcher der „beste Lehrer" ermittelt werden sollte. Es stellte sich heraus, dass dies ein Lehrer war, der keinerlei didaktische Ausbildung genossen hatte. Dewey merkt dazu an (ibid., S. 265):

> We have here, I think, the explanation of the success of some teachers who violate every law known and laid down by pedagogical science. They are themselves so full of the spirit of inquiry, so sensitive to every sign of its presence or absence, that no matter what they do and how they do it, they succeed in awakening and inspiring like alert and intense mental activity in those with whom they come in contact.
> This is not a plea for the prevalence of these irregular, inchoate methods. But I feel that I may recur to my former remark: if some teachers, by sheer plentitude of knowledge, keep by instinct in touch with the mental activity of their pupils, and accomplish so much without, even in spite of, principles which are theoretically sound, then there must be in this same scholarship a tremendous resource when it is more consciously used – that is employed in clear connection with psychological principles.[2]

Die Stoffdidaktik durch Theorien aus anderen Bereichen zu erweitern, ist sinnvoll und sehr gut möglich. Dafür habe ich mich auch immer eingesetzt. Diese Theorien sind aber kein Ersatz für die Stoffdidaktik und stehen auch nicht darüber. Genau das ist der Punkt, auf den es mir ankommt. Im Rückblick halte ich es für den entscheidenden Geburtsfehler des IDM, dass an diesem Institut die Entwicklung der Mathematikdidaktik *aus dem Fach heraus* nicht mit ins Zentrum gerückt wurde. Damit wurde eine historische Chance vertan. Zumindest Heinrich Bauersfeld wäre zu einer entsprechenden Ausrichtung in der Lage gewesen. Als Mitarbeiter von Walter Breidenbach, einem prominenten Stoffdidaktiker, hatte er dafür die besten Voraussetzungen. In Bauersfelds Schulbuchwerk *alef* zeigen sich sehr schöne stoffdidaktische Ansätze, die aber leider nicht ausgearbeitet wurden, weil offenbar eine andere Art von Mathematikdidaktik als vorrangig angesehen wurde. Es fehlte damals schon nicht an Kritik am IDM. Freudenthal hat bereits 1975 vom „Bielefelder Zauberberg" gesprochen, Günter Pickert und Jürgen Kühl sind wenig später unter Protest aus dem Beirat des IDM ausgetreten, weil

[2] Ich möchte an dieser Stelle in aller Bescheidenheit anmerken, dass auch ich als junger Referendar, der im Studium keinerlei didaktische Ausbildung erhalten hatte, die Fachleiter mit guten Stunden beeindruckte, die ich einfach aus dem Fach schöpfte. Ich weiß also aus eigener Erfahrung, wovon Dewey redet.

sie mit der eingeschlagenen Richtung nicht einverstanden waren.

Auch ein anderes ehemaliges Mitglied des IDM hat auf meinen Beitrag kritisch reagiert, allerdings in anderer Weise als Gerd Schubring. Rudolf Sträßer übersandte mir eine Kopie seines Artikels „Stoffdidaktik in Mathematics Education" aus der Springer-Enzyklopädie, vermutlich als Zeichen dafür, dass es seiner Meinung nach mit der „Stoffdidaktik" in Deutschland keineswegs so schlecht bestellt sei, wie ich es darstelle. Dieser Artikel bestärkt mich aber in meiner Analyse, denn er ist nach meiner Einschätzung ein Zerrbild dessen, was in Deutschland auf diesem Gebiet geleistet wurde. Walter Breidenbach, Arnold Fricke, Lutz Führer, Wolfgang Kroll, Hans Schupp und Werner Walsch, um einige gewichtige Kollegen zu nennen, sucht man darin vergebens. Neuere Entwicklungen, wie die Öffnung der Stoffdidaktik für Prozesse durch Heinrich Winter, kommen darin ebenfalls nicht vor.

Wie zu hören ist, wird es bei ICME 13 einen thematischen Nachmittag zur „Stoffdidaktik" geben, an dem zwei Bände vorgestellt werden, die innerhalb der GDM vorbereitet wurden. Das ist gut und schön. Es wird auch einen thematischen Nachmittag zu „ Mathematikdidaktik als design science" geben. Auch das ist gut und schön. Ich hätte es allerdings begrüßt, wenn die „Stoffdidaktik" und die Auffassung von Mathematikdidaktik als „design science" in den letzten Jahrzehnten in der GDM wirklich eine Rolle gespielt hätten und die Bände Ergebnis einer langfristigen systematischen Arbeit wären. Man braucht nur die Programme der GDM-Jahrestagungen in den letzten 15 Jahren und die Bände des JMD zu durchmustern, um zu sehen, was in der GDM Priorität hatte. Zu „Mathematikdidaktik als design science" hat es, soweit ich sehe, keinen einzigen Hauptvortrag bei einer Jahrestagung gegeben.

Um Distanz zur Situation in der GDM zu gewinnen, erscheint es mir hilfreich, einen Blick über den Zaun zu werfen. Der Hamburger Volkswirtschaftler Arne Heise hat vor kurzem in einem prägnanten Artikel den Zustand der Wirtschaftswissenschaften beklagt (Heise 2015). In diesen Disziplinen ist die Situation ähnlich wie in der Mathematikdidaktik. Auch dort hat in den letzten Jahrzehnten ein dominierender Mainstream andere Richtungen an den Rand gedrängt, obwohl die aus der Mainstream-Ökonomie resultierenden Fehlsteuerungen der Volkswirtschaften heute deutlich hervortreten. Es bedurfte der Kritik von Studierenden und des prominenten französischen Wirtschaftswissenschaftlers Thomas Piketty, um auf diesen Missstand aufmerksam zu machen. In einem SZ-Interview gab Piketty, Autor des Buches „Das Kapital im 21. Jahrhundert", auf die Frage „Was soll sich an den Universitäten ändern?" folgende Antwort:

Ich habe nichts gegen Theorie, solange sie benutzt wird, um etwas Relevantes zu erklären. Das Problem in der Ökonomie: Forscher arbeiten mit hochentwickelten Modellen und anspruchsvoller Mathematik, um Kleinigkeiten zu erklären, Manchmal zeigen diese Modelle auch gar nichts. Aber man kann einen Doktortitel bekommen und eine ganze Karriere aufbauen, allein um Theoreme zu beweisen. Ohne ein einziges Mal auf Daten aus der Realität zu schauen oder den gesunden Menschenverstand zu benutzen. Das ist doch verrückt und muss sich ändern.

Im gleichen Sinn sollte kritisch hinterfragt werden, welchen Nutzen z. B. diejenigen Bände der Mathematics Education Library und diejenigen Beiträge in den didaktischen Zeitschriften haben, die voll dem heutigen Mainstream folgen. Im Gegensatz zur Stoffdidaktik tragen diese Veröffentlichungen den Mathematikunterricht nicht, was die Protagonisten des Mainstreams aber genauso ignorieren, wie es die Mainstream-Ökonomen ignorieren, dass ihre Modelle mit der Realität nichts zu tun haben.

Ich kann mein Plädoyer für eine Abkehr von der Ideologie der Selbstbeschränkung und die Forderung zu einer Rückkehr zu einem Methodenpluralismus, in dem der mathematisch fundierten Mathematikdidaktik, der Stoffdidaktik (in meinem Sinn), der ihr gebührende Platz in der GDM eingeräumt wird, daher nur wiederholen. Auf Proteste seitens der Studierenden wie in den Wirtschaftswissenschaften können wir leider nicht hoffen, auch nicht auf Proteste seitens der Lehrerinnen und Lehrer. Diese bekommen ja von der Mainstream-Didaktik kaum etwas mit. Soweit sie es mitbekommen, wenden sie sich mit Grausen ab.

Zitierte Literatur

Dewey, J. (1904/1977): The Relation of Theory to Practice in Education. In: Dewey, J., The Middle Works 1899 – 1924, vol. 3, ed. by Jo Ann Boydston. Carbondale/Ill.: SIU Press, 249–272

Heintel, P. (1978): Modellbildung in der Fachdidaktik. Klagenfurt: Carinthia

Heise, V., Aus dem Gleichgewicht. Über den Zustand der Wirtschaftswissenschaften. Forschung & Lehre 5/2015, 376–377

Schubring. G., Ein historischer Blick auf die Stoffdidaktik. Mitteilungen der GDM, no. 98, 2015, 33–34

Wittmann, E.Ch., Die Ideologie der Selbstbeschränkung in der Mathematikdidaktik. Mitteilungen der GDM, no. 96, 2014, 15–19

Erich Ch. Wittmann, TU Dortmund, IEEM,
44221 Dortmund
Email: wittmann@math.tu-dortmund.de

Mathematikdidaktik – mehr als das Design praktikabler Kurse für den Mathematikunterricht

Eine Replik auf Erich C. Wittmann

Rudolf Sträßer

In seinem Text mit dem Titel „Ein anderer historischer Blick auf die ‚Stoffdidaktik' " erwähnt Herr Wittmann auch den von mir für die Springer Enzyklopädie der Mathematikdidaktik geschriebenen Eintrag zu „Stoffdidaktik in Mathematics Education". Wahrscheinlich hat mir deshalb der Herausgeber der Mitteilungen den Text von Herrn Wittmann zugehen lassen mit der Frage, ob ich darauf reagieren möchte. Ich will dies gerne mit einigen kurzen Anmerkungen tun.

Zunächst einmal möchte ich betonen, dass ich froh bin, dass in der mathematikdidaktischen Community eine Diskussion zur Selbstvergewisserung der Mathematikdidaktik stattfindet. Gerade die Abwesenheit solcher Debatten in den letzten Jahren hat m.E. unter Anderem dazu geführt, dass ich von den Herausgebern der Enzyklopädie gebeten worden bin, den genannten Artikel zu verfassen. Seit langer Zeit habe ich es in Gesprächen mit verschiedenen Kolleginnen und Kollegen beklagt, dass sich in den letzten Jahren nirgendwo eine Reflexion auf die Kennzeichen einer (gewiss nicht nur deutschen) Stoffdidaktik findet. Ich habe immer die Stoffdidaktik als wesentlichen Bestandteil der deutschsprachigen Mathematikdidaktik angesehen, was sich auch an der Tatsache ablesen lässt, dass ich schon vor 20 Jahren zum Thema „Stoffdidaktik" auf einer Tagung zu „Trends und Perspektiven" der Didaktik der Mathematik vorgetragen habe (vgl. Sträßer 1996 im Tagungsband einer Klagenfurter Tagung im Jahr 1994). Möglicherweise war diese Publikation ein Hintergrund der Einladung zur Springer-Enzyklopädie – zusammen mit dem erwähnten Mangel an programmatischen Texten zur Stoffdidaktik.

Ähnlich wie wahrscheinlich Herr Wittmann gehe ich davon aus, dass sich die Mathematikdidaktik nicht auf die Stoffdidaktik reduzieren lässt, sondern notwendig einen weiteren Horizont haben muss. Und hier sind dann vermutlich die Unterschiede zwischen den Vorstellungen von Herrn Wittmann und mir zu suchen. In der sechsten mir einfach zugänglichen Auflage seiner „Grundfragen des Mathematikunterrichts" schlägt Herr Wittmann vor, Mathematikdidaktik zwischen vier Einflussgrößen zu denken (vgl. das nachstehend wiedergegebene „Bild 1" aus Wittmann 1981, S. 2).

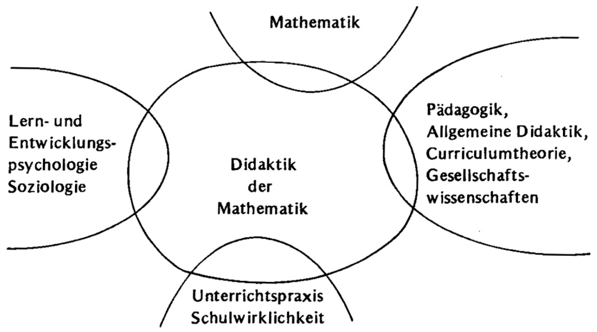
Später hat er dann seine Vorstellungen mit dem Konzept der Mathematikdidaktik als „design science" präzisiert (vgl. z. B. Wittmann 1992, auch international und mit Ergänzungen publiziert in Educational Studies in Mathematics 1995). Indem er einen „Kernbereich" der Didaktik der Mathematik identifiziert (vgl. die Grafik in Wittmann 1992, S. 58) stellt er – wie schon in den „Grundfragen" – die Entwicklungen mathematischer Unterrichtsgänge in das Zentrum der Mathematikdidaktik, was auch dem von Wittmann zitierten Konzept von Griesel entspricht:

> Didaktik der Mathematik ist die Wissenschaft von der Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen im Bereich Mathematik … (Griesel 1971, S. 296, zitiert in Wittmann 1981,S. 1)

Herr Wittman stellt nun in seinem Beitrag für diese Mitteilungen immer wieder heraus, dass diese Kursentwicklung von der (Wissenschaft) Mathematik auszugehen habe, Kurse „aus dem Fach heraus" zu entwickeln seien, was im Übrigen in den Grafiken nicht deutlich wird. Schon im Jahr 1971 hatte Griesel allerdings auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik sein Verständnis von Mathematikdidaktik mit folgender Anmerkung ergänzt:

> In einer nachfolgenden empirischen Untersuchung mag man aber feststellen, dass diese Unterscheidung für den mathematischen Lernprozess bedeutungslos ist. Würde man also die empirische Untersuchung auslassen, so würde man einen ungerechtfertigten Aufwand treiben. (Griesel 1972, S. 80)

Bei einem derartigen Verständnis von Mathematikdidaktik fragt sich demnach, auf welche Weise ein entwickelter Kurs zu evaluieren ist. Ich denke, hier scheiden sich die Geister – siehe weiter unten!



Vorher möchte ich allerdings meine Vorstellungen von Mathematikdidaktik ein wenig explizieren. Möglicherweise aufgrund meiner Fachsozialisation nicht nur in der Mathematik, sondern auch in den Erziehungswissenschaften, gehen meine Vorstellungen zur Mathematikdidaktik vom wohlbekannten didaktischen Dreieck aus, welches die drei wesentlichen Agenten von Unterricht – Unterrichtsgegenstand (in unserem Falle Mathematik), Lehrende, Lernende – ins Verhältnis setzt (für eine Erläuterung und Erweiterung des didaktischen Dreiecks zu einem didaktischen Tetraeder vgl. z. B. Rezat & Sträßer 2012). Eine solche Vorstellung verweist zunächst einmal auf weitere, neben der Mathematik grundlegende Wissenschaftsbereiche, die üblicherweise in den Humanwissenschaften bearbeitet werden[1]

Heinrich Winter hat im Übrigen schon 1985 „reduktionistische Ansätze in der Mathematikdidaktik“ beklagt:

> Die bekanntesten Reduktionen der Mathematikdidaktik sind: Reduktion – und das vor allem – auf mathematischen Inhalt, Reduktion auf Teile etablierter Humanwissenschaften (z. B. auf Teile der Psychologie), Reduktion auf schulalltägliche Traditionen (Praktikerwissen) (vgl. Winter 1985, S. 78).

Bezüglich der Reduktion auf die Mathematik hält er fest:

> Die pädagogische Dimension der Mathematik lässt sich indes eben nicht aus der Mathematik als einem System von Sätzen und methodischen Prozeduren heraus destillieren, ... Dieses Sprechen über Mathematik mit pädagogischem Erkenntnisinteresse ... setzt eine systematische Beschäftigung mit außermathematischen Bereichen und mit pädagogischen Grundvorstellungen voraus (a. a. O., S. 80).

Am Beispiel des Unterrichts über Größen erläutert er:

> Um dieses [unterrichtliche Denken und Handeln, Einfügung RS] verantwortlich zu planen, brauchen wir u. a. auch – und m. E. viel mehr – ein empirisches Wissen über Lebenssituationen, in denen Größen eine für das Kind wichtige Rolle spielen (a. a. O. S. 81).

Die Gefahren einer Reduktion auf die Mathematik fasst Winter zusammen:

> Reduktionen auf Mathematik, und sei es auch auf eine sehr substantielle und beziehungsreiche Mathematik, läßt den Unterricht zu einer theorielosen Unternehmung geraten, die schutzlos den wirklichen oder angeblichen Erfordernissen der Praxis preisgegeben ist und vor allem aber keine Urteilsfähigkeit gegenüber pädagogischen Zielansprüchen entwickelt (a. a. O. S. 82).

Winter warnt auch vor einer Reduktion der Mathematikdidaktik auf die Humanwissenschaften, aber auch:

> Die gelegentlich benützte Formel Mathematikdidaktik = Mathematik + Schulpraxis ist ganz und gar unzureichend. ... Mathematikdidaktik ohne Mathematik ist hohl, Mathematikdidaktik ohne Humanwissenschaften ist borniert (a. a. O., S. 85f.),

um abschließend zu bemerken:

> Die Verpflichtung in der Fachdidaktik zum interdisziplinären Arbeiten im Sinne des systemtheoretischen Paradigmas kann und darf natürlich Schwerpunktbildungen, Spezialisierungen und Arbeitsteilungen nicht ausschließen (a. a. O., S. 87).

Insgesamt kann ich mich einer solchen ausgewogenen, nicht reduktionistischen Sichtweise der Mathematikdidaktik nur anschließen.

Berücksichtigt man nun in der mathematikdidaktischen Arbeit systematisch die menschliche Seite des Mathematikunterrichts, so treten neben die Mathematik (und deren Forschungsmethoden) notwendig auch andere forschungsmethodische Zugänge zum Mathematikunterricht. Verfahren der Humanwissenschaften, z. B. der Psychologie und Soziologie, aber auch die erziehungswissenschaftliche Unterrichtsforschung, werden notwendiger Bestandteil einer wissenschaftlich betriebenen Mathematikdidaktik, die mathematischen Methoden werden durch andere Verfahrensweisen begrenzt. Eben diese Entwicklung ist in den 70er und 80er Jahren durch Arbeiten am Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld,

[1] In seinen „Grundfragen“ stellt sich übrigens Herr Wittmann durch eine ausführliche Beschäftigung mit psychologischen Erkenntnissen mindestens teilweise dieser Thematik, bearbeitet also Teile der in seinem Bild linksseitigen Einflüsse auf die Didaktik der Mathematik. Im Vorwort zur sechsten Auflage liest man sogar: „Von den thematischen Lücken, die unvermeidlicherweise geblieben sind, schmerzt mich der Bereich des "sozialen Lernens" am meisten“ (Wittmann 1981, S. VI). Bei seinem Beitrag für die Mitteilungen kann man den Eindruck gewinnen, dass diese Schmerzen nachgelassen haben, ohne dass die Ursache der Schmerzen behoben wurde.

dem „IDM“, befördert worden.[2] Steinbring 2008 (insbesondere auf den Seiten 303–311) beschreibt diese Beiträge im Detail und zeigt so gleichzeitig, wie sich ein Gleichgewicht der Komponenten des didaktischen Dreiecks entwickelt. Als Folge dieser Entwicklungen in der Mathematikdidaktik relativiert sich die Priorität mathematischer Verfahren in der mathematikdidaktischen Forschung. Die inhaltliche Entwicklung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) spiegelt diese Entwicklung, insbesondere in den jährlichen Tagungen und den im Journal für Mathematikdidaktik veröffentlichten Beiträgen. Dabei mag diese Entwicklung zu einer gewissen Vernachlässigung mathematischer Überlegungen in den veröffentlichten Arbeiten der deutschsprachigen Mathematikdidaktik geführt haben, die Herr Wittmann, prominent auch Thomas Jahnke (vgl. Th. Jahnke 2010: „Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik“) und die auch ich bedauere.[3] Allerdings gehören aufgrund meines Verständnisses von Mathematikdidaktik philosophische, erziehungswissenschaftliche und soziologische Studien durchaus zum „mainstream“ dieser Disziplin. Herr Wittmann polemisiert in seinem Text leider nur gegen den „mainstream“ der GDM, ohne positiv zu beschreiben, was seines Erachtens zu diesem von ihm abgelehnten mainstream gehört. Auf diese Weise wird eine inhaltliche Auseinandersetzung mit Wissenschaftsmethoden jenseits der Methodik der Fachmathematik leider vermieden.

Ich möchte mit einem Zitat schließen:

> Wie die vielen verschiedenartigen Modeströmungen andeuten, bei denen man manchmal von einem Extrem in das andere fällt, scheinen die Menschen dazu zu neigen, eher reinen Prinzipien zu folgen, als ein ausgewogenes Verhältnis zwischen echten oder auch nur scheinbaren Gegensätzen anzustreben und aufrechtzuerhalten. (Aus dem Nachwort von Wittmann 1981, S. 176)

Der Reflexion auf die Mathematikdidaktik als Wissenschaft würde es gut tun, wenn Herr Wittmann sich diese Aussage wieder zu eigen machen würde.

Literatur

Griesel, H. (1972). Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1971* - Vorträge auf der 5. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. April 1971 in Bayreuth. Hannover, Schroede: 72–81.

Jahnke, T. (2010). Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*: Vorträge auf der Bundestagung für Didaktik der Mathematik in München. Münster, WTM: 441–444. URL: https://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2010/BzMU10_JAHNKE_Thomas_Verschwinden.pdf (zuletzt gesehen: 20. 5. 2015)

Rezat, S. & R. Sträßer (2012). “From Triangle to Tetrahedron: Artifacts as Fundamental Constituents of the Didactical Situation.” *ZDM- The International Journal on Mathematics Education* **44**(5): 641–651.

Steinbring, H. (2008). “Changed views on mathematical knowledge in the course of didactical theory development—independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions?” *ZDM* **40**(2): 303–316.

Sträßer, R. (1996). Stoffdidaktik und Ingénierie didactique – ein Vergleich. Trends und Perspektiven. *Beiträge zum 7. Internationalen Kärtner Symposium zur „Didaktik der Mathematik“* in Klagenfurt vom 26.–30. 9. 1994. G. Kadunz u. a. (Hrsg.). Wien, Hölder-Pichler-Tempsky. **23**: 369–376.

Winter, H. (1985). „Reduktionistische Ansätze in der Mathematikdidaktik.“ *Der Mathematikunterricht (MU)* **31**(5): 75–88.

Wittmann, E. C. (1981, 6.Aufl.). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig–Wiesbaden, Friedrich Vieweg & Sohn.

Wittmann, E. C. (1992/1995). „Mathematikdidaktik als ‚design science'.“ *Journal für Mathematikdidaktik* **13**(1): 55–70. Erweiterte englische Fassung 1995 unter dem Titel “Mathematics education as a design science”. Educational Studies in Mathematics **29**(3): 355–374.

Rudolf Sträßer, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen
Email: rudolf.straesser@math.uni-giessen.de

[2] Darin sehe ich – neben anderen Aktivitäten – einen positiven Beitrag des IDM zur Entwicklung der Fachdidaktik. Das IDM hat sich im Übrigen nicht (selbst) aufgelöst, wie Herr Wittmann in seiner Anmerkung 1 schreibt. Diese mathematikdidaktische Adresse besteht auch heute noch und bietet weiterhin mindestens eine der besten Bibliotheken in unserem Fachgebiet.

[3] Zu den Publikationen im JMD ist zu sagen, dass die Herausgeberinnen und Herausgeber nur die Arbeiten publizieren können, die eingereicht werden und den Gutachterprozess mit positivem Ergebnis durchlaufen. Als ehemaliger Herausgeber des JMD weiß ich, dass es an Einreichungen mangelt, die sich mit der Mathematik zur Entwicklung praktikabler Kurse auseinandersetzen.

Das GDM-Doktorandenkolloquium: Profilschärfung und Wahrnehmung durch die Community

Raja Herold, Alexander Meyer, Ulrike Siebert, Daniel Thurm für die GDM-Nachwuchsvertretung

Seit der Gründung der GDM hat sich die deutschsprachige, aber auch internationale Mathematikdidaktik als Disziplin kontinuierlich weiter entwickelt. Die GDM moderiert neue Entwicklungen in der Mathematikdidaktik, stößt aber auch als Antwort auf aktuelle Fragen neue Entwicklungen an. Eine konkrete neue Entwicklung ist die geringe Resonanz des Doktorandenkolloquiums in den letzten Jahren. Passen die Lernbedarfe heutiger Doktorandinnen und Doktoranden noch zu den Lerngelegenheiten, die das Doktorandenkolloquium bieten?

Rudolf vom Hofe, 1. Vorsitzender der GDM, hat in den letzten Mitteilungen die Geschichte der Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses innerhalb der GDM nachgezeichnet. In seinem Beitrag werden die besonderen Herausforderungen der Ausbildung seinerzeit deutlich; er verweist unter anderem auf die problematische Stellung der Didaktik innerhalb mathematischer Fakultäten und Institute und auf die geringe Anzahl an Promovierenden. Das Doktorandenkolloquium bot durch einen Austausch mit anderen Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern Lerngelegenheiten in einer Zeit, in der die Doktorandinnen und Doktoranden spürten, dass ihre Lernbedarfe am eigenen Standort nicht erfüllt werden konnten.

Als wissenschaftlicher Nachwuchs fällt es heute schwer, uns diese Zeit vorzustellen. Keiner von uns innerhalb der Nachwuchsvertretung ist bisher länger als sechs Jahre in der Forschung. Dies ist ein Zeichen dafür, wie viel die GDM in der Gestaltung unserer Disziplin erreicht hat: Wir ernten die Früchte früherer Arbeit – wir erleben heute eine lebhafte, vielfältige Community, die uns vielfältige Lerngelegenheiten bietet und in der Ansprechpartner in wissenschaftlichen und persönlichen Fragen oft verfügbar sind.

Im letzten Jahr musste das Doktorandenkolloquium aufgrund zu geringer Anmeldezahlen abgesagt werden. Wie sind diese Zahlen zu deuten? Sind die Lernbedarfe heutiger Doktorandinnen und Doktoranden anders gelagert und passen sie deshalb nicht mehr zu den Lerngelegenheiten, die im Kolloquium geboten werden? Mit einer Umfrage wollten wir, die Nachwuchsvertretung der GDM, herausfinden, wie die Lernbedarfe heutiger Doktorandinnen und Doktoranden aussehen und wie sie durch die Lernangebote der GDM und der Nachwuchsvertretung befriedigt werden.

Lerngelegenheiten in der GDM heute

Derzeit gibt es in der GDM vielfältige Formate zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses, die jeweils andere Lerngelegenheiten bieten.

- Der *Nachwuchstag* am Sonntag und Montag vor der Jahrestagung der GDM bietet überblicksartige Lerngelegenheiten zu verschiedenen „handwerklichen" Aspekten wissenschaftlichen Arbeitens.
- *Neue Vortragsformate* auf der Jahrestagung, die speziell für den Nachwuchs konzipiert wurden, bieten Möglichkeiten für das Präsentieren und Diskutieren der eigenen Forschung.
- Die *Summerschool* der GDM bietet Lerngelegenheiten zu verschiedenen Forschungsrichtungen und –methoden innerhalb der Mathematikdidaktik.
- Das *Doktorandenkolloquium* bietet vielfältige Gelegenheiten zum Austausch mit Expertinnen und Experten, die zur Kohärenz, Stimmigkeit und Nachvollziehbarkeit des eigenen Forschungsprojekts beitragen sollen.

Hinzu kommen weitere Angebote durch Graduiertenkollegs und universitäre Fortbildungsformate, die allerdings nicht spezifisch mathematikdidaktisch sind und darüber hinaus an bestimmte Standorte gebunden sind.

Die vielfältigen Formate zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses zeigen die Komplexität der Ausbildung zur Wissenschaftlerin bzw. zum Wissenschaftler. Doktorandinnen und Doktoranden sollen heute sowohl sogenannte *Soft Skills* als auch fachliche Kompetenzen zur Teilhabe am wissenschaftlichen Diskurs der Fachdisziplin erwerben. Lernangebote zur Vermittlung der fachlichen Kompetenzen stehen im Fokus der Angebote der GDM.

Summerschool und Doktorandenkolloquium – was kennzeichnet die beiden Veranstaltungsformate?

Während das Doktorandenkolloquium unter geringer Resonanz leidet, erfreut sich die Summerschool seit Jahren großer Beliebtheit. Liegt dies in der subjektiv wahrgenommenen besseren Passung der Lernangebote in der Summerschool begründet oder hat dies rein zeitliche und organisatorische Gründe, z. B. dass nicht beide Formate in einem Jahr besucht werden?

Das GDM-Doktorandenkolloquium soll dem wissenschaftlichen Nachwuchs eine Plattform bieten, bei der die eigene Forschung vorgestellt, diskutiert und vorangebracht werden kann. Dazu präsentieren die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die eigene Forschungsarbeit und entwickeln sie durch konstruktives Feedback von Expertinnen und Experten weiter. Hier vertreten Nachwuchswissenschaftlerinnen und —wissenschaftler in einem Schutzraum *ihre* Forschungsprojekte und *ihre* Ergebnisse – zu einem Zeitpunkt, an dem substanzielle Vorarbeiten am Projekt bereits stattgefunden haben, aber Nachjustierungen noch möglich sind und Unklarheiten bearbeitet werden können. Das Doktorandenkolloquium soll so zur Entwicklung der eigenen Forscheridentität beitragen und dazu befähigen, das eigene Projekt in der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft zu verorten. Das Doktorandenkolloquium erfüllt also Lernbedarfe im Bereich des vertieften Durchdringens des eigenen Projekts, des Herstellens eines kohärenten „Forschungsganzen", des Absteckens des eigenen Forschungswegs durch die mathematikdidaktische Forschungslandschaft.

Die Summerschool der GDM soll einen Überblick über die mathematikdidaktische Forschungslandschaft vermitteln. Auch trägt sie zur Vertiefung der Kenntnisse zu aktuellen und gängigen Forschungsmethoden in den verschiedenen Forschungsrichtungen der Didaktik der Mathematik bei. Bei der Summerschool stehen überwiegend die inhaltliche Breite und das gemeinsame Lernen an exemplarischen Fragestellungen im Vordergrund. Dies ist für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer natürlich oft mit der Thematisierung konkreter inhaltlicher Aspekte des eigenen Forschungsprojekts verbunden.

Zusammenfassend steht bei der Summerschool der Einblick in die vielfältigen (methodischen) Ansätze mathematikdidaktischer Forschung und Forschungsmethoden im Vordergrund, während beim Doktorandenkolloquium das eigene Projekt zu diesen vielfältigen Ansätzen in Bezug gestellt und so tiefergehend reflektiert wird.

Auswertung einer Umfrage zum Doktorandenkolloquium

Um die Frage der Passung des Doktorandenkolloquiums zu den Lernbedarfen von Doktorandinnen und Doktoranden zu klären, haben wir als Nachwuchsvertretung in Abstimmung mit dem Vorstand und dem Beirat der GDM zwei Umfragen konzipiert: eine für Promovierende und eine für deren Betreuende. Insgesamt nahmen 89 Promovierende und 14 Betreuende an der Befragung teil. Einen herzlichen Dank dafür an alle, die teilgenommen haben.[1]

Den meisten Promovierenden ist sowohl die Summerschool (95,5 %) als auch das Doktorandenkolloquium (86,5%) bekannt. Besucht wurde die Summerschool von 37 Doktorandinnen und Doktoranden, das Doktorandenkolloquium nur von 13. Diese deutlich geringere Teilnehmerzahl des Doktorandenkolloquiums kann z. T. durch den Ausfall im letzten Jahr erklärt werden.

Erwartungen an das Doktorandenkolloquium

Zur Erfassung der Erwartungshaltung an das (potenziell zu besuchende oder bereits besuchte) Doktorandenkolloquium, wurden mehrere Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bei möglicher Mehrfachnennung wurden die folgenden Antworten zu circa 50 % gewählt.

- Einblicke in andere Forschungsarbeiten (52,8 %),
- Weiterentwicklung des eigenen Forschungsprojekts (49,4 %),
- Andere Perspektiven auf das eigene Forschungsprojekt (46 %),
- Soziale Aspekte (Kontakte zwischen Promovierenden bzw. zu Professorinnen und Professoren knüpfen) (46 %).

Die Ziele des Doktorandenkolloquiums scheinen sich also mit den Erwartungshaltungen der Promovierenden zu decken.

Abbildung 1 zeigt darüber hinaus, in welchen Phasen der Dissertation Promovierende am Doktorandenkolloquium teilnehmen würden. Dabei wird eine deutliche Präferenz für die Zeit der Einarbeitung in den Forschungsstand sichtbar. Das Kolloquium wird traditionell, wie beschrieben, eher dann besucht, wenn Promovierende bereits substantielle Vorarbeiten geleistet haben. Die Befragung verdeutlicht, dass viele Promovierende dies anders einschätzen und das Doktorandenkolloquium besuchen würden, um Lernbedarfe in der Phase des Einarbeitens in den Forschungsstand zu decken.[2] Möglicherweise ist es Promovierenden zu wenig transparent, welche Lernbedarfe im Doktorandenkolloquium erfüllt werden. Dann könnte hinter der Einschätzung der Promovierenden das Bedürfnis stehen, möglichst viele Lern-

[1] Die Darstellung der Studie in diesem Artikel hat zum Ziel, einen Überblick über diejenigen Ergebnisse zu liefern, die in direktem Bezug zum Kolloquium stehen.

[2] Dabei nehmen wir an, dass das Einarbeiten in den Forschungsstand zu Beginn von Promotionsprojekten erfolgt.

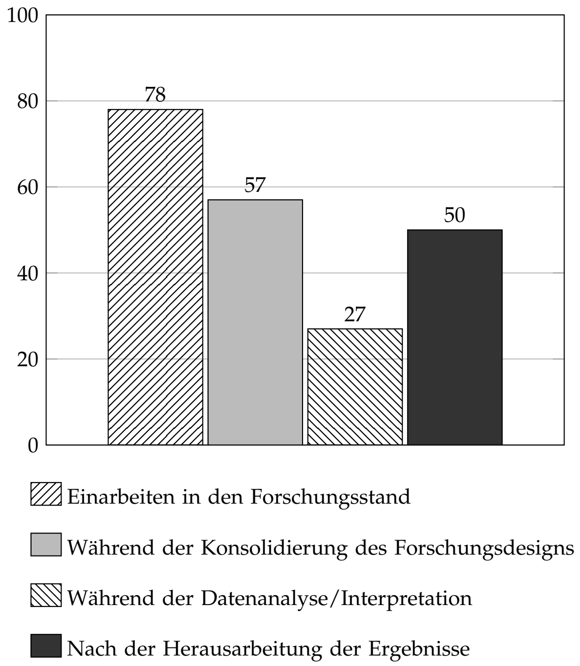


Abbildung 1. Fragestellung „Zu welchen Zeitpunkten würdest Du zu den folgenden Angeboten gehen?" bezogen auf das Doktorandenkolloquium (Mehrfachnennungen möglich), Angaben in absoluten Zahlen.

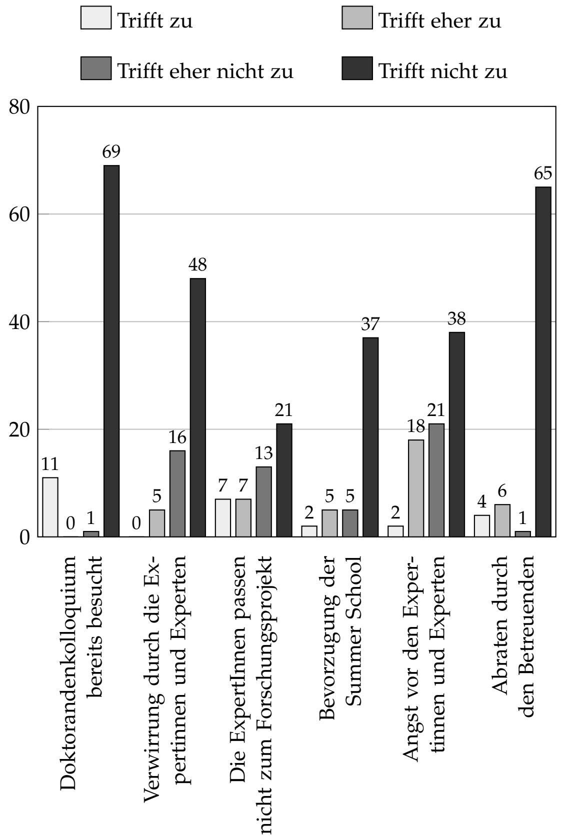


Abbildung 2. Fragestellung „Bitte beurteile die folgenden Aussagen mit Blick auf das Doktorandenkolloquium." Angaben in absoluten Zahlen.

angebote möglichst früh in der Promotionsphase wahrzunehmen, um zu Beginn der Promotion viel zu lernen.

Gründe für die Nicht-Teilnahme

Die Gründe für das Fernbleiben vom Doktorandenkolloquium sind schwer in einer Umfrage zu fassen, aber soweit man sagen kann, vielfältig (s. Abb. 2). Auffällig ist, dass die Wahl der Expertinnen und Experten als mitunter nicht passend angesehen wird. Gleichzeitig geben die Promovierenden jedoch an, Angst vor einer zu harten Kritik der Expertinnen und Experten zu haben. Hier bleibt unklar, ob eine fachliche Un-Passung gesehen wird – 14 Promovierende gaben an, dass die Expertinnen und Experten nicht zu ihrem Forschungsprojekt passen, oder ob das Format des Doktorandenkolloquiums, sich den Urteilen von Expertinnen und Experten stellen zu müssen, unspezifische Ängste hervorruft – und aus dieser Sicht heraus die Wahl der Expertinnen und Experten als angsteinflößend wahrgenommen wird.

In 10 Fällen haben die Betreuenden ihren Promovierenden davon abgeraten, am Doktorandenkolloquium teilzunehmen. Eine stark durch die beteiligten Personen geprägte Veranstaltung wird immer dazu führen, dass manche von der Teilnahme an dieser Veranstaltung absehen bzw. abraten. Diese Problematik ist jedoch nicht gravierend: Wer seine Forschungsrichtung in einem Jahr von den Expertinnen und Experten nicht repräsentiert fühlt, der könnte im nächsten Jahr unter anderen Vorzeichen teilnehmen.

Auswertung der Befragung der Betreuenden

Aus Sicht der Betreuenden profitieren die Promovierenden durch eine Teilnahme am Doktorandenkolloquium auf wissenschaftlich-inhaltlicher und sozialer Ebene. Bei der Einschätzung, was die Promovierenden vom Doktorandenkolloquium mitnehmen würden, antworteten die Betreuenden folgendermaßen:

- Ich kenne das Angebot nicht (1).
- Soziale Aspekte (Kontakte zwischen den Promovierenden bzw. zu Professorinnen und Professoren knüpfen) (10).
- Methodische Weiterbildung (1).
- Einblick in andere Forschungsarbeiten (10).
- Andere Perspektive auf die eigene Forschung (11).
- Weiterentwicklung des eigenen Forschungsprojekts (9).
- Einordnen des Forschungsprojekts in die Community (8).
- Einblick in Prinzipien mathematikdidaktischer Forschung (8).

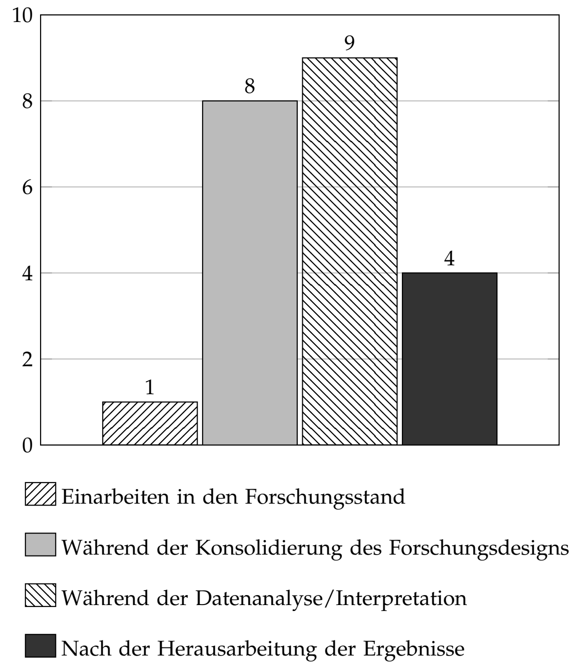


Abbildung 3. Fragestellung „Zu welchen Zeitpunkten würden Sie Ihren Promovierenden zu den folgenden Angeboten schicken?“ (Mehrfachnennung möglich), Angaben in absoluten Zahlen.

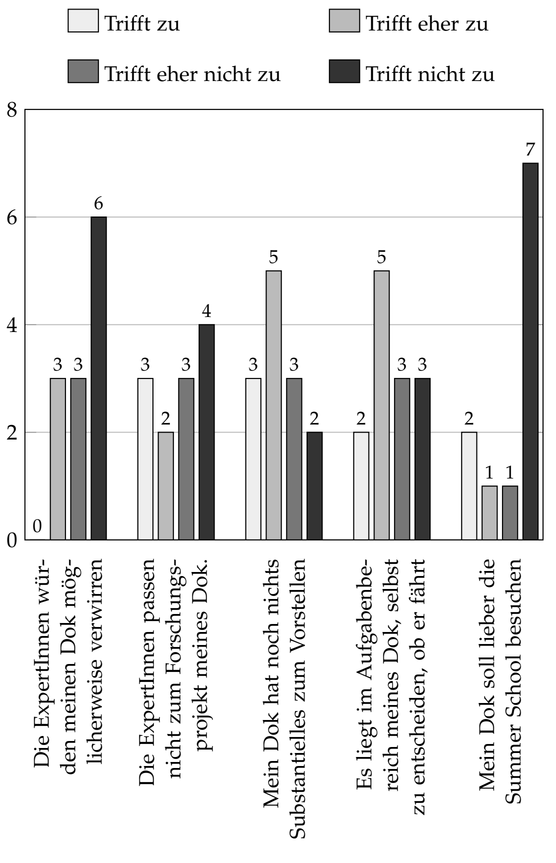


Abbildung 4. Fragestellung „Bitte beurteilen Sie die folgenden Aussagen mit Blick auf das Doktorandenkolloquium.“ (Mehrfachnennung möglich), Angaben in absoluten Zahlen.

Betreuende sehen Lerngelegenheiten im Doktorandenkolloquium, die vor allem Lernbedarfe aus der späteren Phase der Promotion ihrer Doktorandinnen und Doktoranden decken, nicht aus der Anfangsphase (Abb. 3). Dies deckt sich mit der Konzeption des Doktorandenkolloquiums, in der auf die Vorarbeiten der Promovierenden aufgebaut wird.

Betreuende sehen inhaltlich zwei wesentliche Entscheidungskriterien, um Doktorandinnen und Doktoranden zum Kolloquium zu schicken (falls diese Entscheidung nicht den Doktorandinnen und Doktoranden selbst überlassen wird). Ein Kriterium ist die Passung der beteiligten Expertinnen und Experten, ein weiteres ist der Stand der Projekte der Doktorandinnen und Doktoranden (Abb. 4). Diese Kriterien decken sich ebenfalls mit der derzeitigen Konzeption des Doktorandenkolloquiums. Lerngelegenheiten werden dann gesehen, wenn die beteiligten Expertinnen und Experten konstruktiv zum Promotionsprojekt beitragen können. Offen bleibt hier die Beurteilung der Frage, von wem die Teilnahme am Doktorandenkolloquium initiiert werden sollte.

Abschließend sind die befragten Betreuenden (sehr) zufrieden mit dem Nachwuchsangebot der GDM.

Lernbedarfe und Lerngelegenheiten – eine Diskussion

In der heutigen Zeit einer lebhaften mathematikdidaktischen Community und einer allgemein erhöhten Sensibilität gegenüber Fragen der Doktorandenausbildung gibt es vielfältige Lerngelegenheiten für Doktorandinnen und Doktoranden. Gleichsam gibt es aber auch – hier sprechen wir aus unserer eigenen, unmittelbaren Erfahrung – viele verschiedene Lernbedarfe, die in irgendeiner Weise und an irgendeinem Punkt der eigenen Promotion befriedigt werden müssen. Die Befragung hat gezeigt, dass im Großen und Ganzen Klarheit darüber besteht, welche Lernbedarfe das Doktorandenkolloquium befriedigt – bei Unklarheiten können und sollten die Betreuenden den Doktorandinnen und Doktoranden zur Seite stehen.

Das Doktorandenkolloquium ist eine besondere Lerngelegenheit, denn nur sie bietet die Möglichkeit, sich über die eigenen Institutionen sowie über regionale Grenzen hinaus über die eigene Forschungsarbeit mit ausgewiesenen Expertinnen und Experten der Mathematikdidaktik und ihrer Bezugsdisziplinen auszutauschen. Zugleich entstehen Kontakte zu Doktorandinnen und Doktoranden, die vielleicht über lange Jahre bestehen. Beispielsweise haben Georg Bruckmaier, Alexander Meyer und Stefanie Rach dasselbe Kolloquium in Soest besucht und arbeiten jetzt gemeinsam in der Nachwuchsvertretung. Dieses Networking mit Expertinnen und Experten, aber vor allem auch mit Doktorandinnen und Doktoranden wird sowohl von den Promovierenden als auch von den Betreuenden als wichtiges Element des Doktorandenkolloquiums angesehen.

Wenn Doktorandinnen und Doktoranden viele Lerngelegenheiten geboten bekommen, können sie natürlich in ihrer Wahl der Wahrnehmung von Angeboten wählerischer sein. Dennoch reagiert das Doktorandenkolloquium unserer Meinung und Erfahrung nach auf bestehende Lernbedarfe von heutigen Doktorandinnen und Doktoranden.

Damit das Doktorandenkolloquium auch zukünftig als Lerngelegenheit genutzt wird und auf sich verändernde Lernbedarfe reagieren kann, muss dessen Format immer wieder neu durchdacht und aktualisiert werden. Auch wenn die erhobenen Daten dies nicht direkt stützen, so wollen wir doch fünf elementare Bausteine benennen, die wir als Nachwuchsvertretung als das Fundament des Doktorandenkolloquiums ansehen. Ob man auf diesem Fundament eine radikale Neuausrichtung vornehmen kann und will, können und wollen wir hier nicht entscheiden.

Baustein 1: Ganzheitliche Würdigung. Das Doktorandenkolloquium der GDM ist nicht reduziert auf eine Auseinandersetzung mit einem Vortrag, sondern ist auf das Projekt hinter dem Vortrag gerichtet. Weitere Wege der Auseinandersetzung mit dem Projekt sind also willkommen und werden genutzt.

Baustein 2: Offenheit. Jeder Promovierende, der Rückmeldung und Anregungen von Expertinnen und Experten sucht, sollte damit rechnen, auch kritische Hinweise zu erhalten. Er/ sie sollte bereit sein, diese anzunehmen und unter der Voraussetzung zu reflektieren, dass sie vor dem Hintergrund der Qualitätssteigerung des Projekts geäußert wurden. Im Gegenzug verpflichten sich alle Anwesenden zu einer konstruktiven Grundhaltung und einer prinzipiellen Offenheit gegenüber Ansätzen, die nicht den eigenen entsprechen.

Baustein 3: Maßstäbe hinter Kritik offenlegen. Die Maßstäbe zur Bewertung der Projekte, die hinter einer geäußerten Kritik stehen, zum Beispiel in Hinblick auf Gütekriterien mathematikdidaktischer Forschung, sollten stets transparent gemacht werden. So können die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch die verschiedenen Zugriffe mathematikdidaktischer Forschungen kennenlernen und würdigen.

Baustein 4: Anerkennen verschiedener Zugänge. Was „gute" Forschung ist, ist in einer vielfältigen Community immer relativ. Es stellt hohe Anforderungen an Expertinnen und Experten, hier zu vermitteln und aufzuzeigen, in welchen Gebieten der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft ein Projekt „gut" ist, in welchen Gebieten die Ansätze des Projekts aber auch kritisch beurteilt werden (und auch, warum das so ist).

Baustein 5: Wege aufzeigen. Um kritisch-konstruktives Feedback anzunehmen, ist das Aufzeigen des Weges „aber so geht es besser" oder „da kann es (auch) hingehen" fundamental. Im Idealfall werden realistische Alternativen gemeinsam erarbeitet.

Warum sollte ein Doktorandenkolloquium keine Werkstatt sein, in der die Teilnehmerinnen und Teilnehmer gemeinsam überlegen, wie die verschiedenen Potentiale eines Projekts optimal genutzt werden können? So lernen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer an einem konkreten Projekt etwas über „gute" Forschung und beantwortbare Forschungsfragen, während die/ der Promovierende viele Wege zur Vertiefung ihres/ seines Projekts aufgezeigt bekommt. In der Werkstatt entstehen dann Lernendenaktivitäten, die zu den Lernbedarfen der Lernenden – dem wissenschaftlichen Nachwuchs – passen, während die Expertinnen und Experten dafür ein Gerüst und Lerngelegenheiten bereitstellen.

Ausblick – Fortgang des Doktorandenkolloquiums

Derzeitig haben sich 23 Teilnehmerinnen und Teilnehmer (Stand: 05.05.2015) für das diesjährige Doktorandenkolloquium in Würzburg angemeldet. Es zeigt sich also, dass das Angebot in diesem Jahr besser angenommen wird und stattfinden kann.

Wie genau es in Zukunft mit dem Doktorandenkolloquium weitergehen wird, ist aber mit dem diesjährigen „Stattfinden" noch nicht geklärt. Als Nachwuchsvertretung nutzen wir derzeit das Vorrecht der Jugend, um Traditionen kritisch zu hinterfragen und das Doktorandenkolloquium in verschiedene Richtungen neu zu denken. Unser Ziel sind konkretere Vorschläge für dessen Neuaufstellung.

Die Nachwuchsvertretung besteht aus einer Gruppe ehrenamtlich engagierter Mitglieder, die sich zum Ziel gesetzt hat, die Interessen des wissenschaftlichen Nachwuchses der GDM im Blick zu behalten und zu vertreten. Sie fungiert als Ansprechpartner in Fragen des Nachwuchses (z. B.

Summerschool. Doktorandenkolloquien und Beirat) und organisiert Angebote zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses auf der GDM-Jahrestagung (Nachwuchstag, Nachwuchsforum, Postdoc-Workshop, Talkrunde, etc.). Die Mitglieder der Nachwuchsvertretung sind derzeit: Georg Bruckmaier, Kerstin Hein, Raja Herold, Marcel Klinger, Alexander Meyer, Angel Mizzi, Julia Ollesch, Christine Plicht, Stefanie Rach, Florian Schacht, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Ulrike Siebert, Petra Tebaartz, Daniel Thurm.

Raja Herold, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen
Email: raja.herold@uni-due.de

Informationen zum Förderpreis der GDM

Regina Bruder

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vergibt alle zwei Jahre den Förderpreis der GDM für eine herausragende Dissertation an eine Mathematikdidaktikerin oder einen Mathematikdidaktiker. Die bisherigen Preisträgerinnen und Preisträger der GDM waren:
1989: Martin Stein; 1991: Horst Struve; 1994: Manfred Borovcnik; 1996: Reinhard Hölzl; 1998: Petra Scherer ; 2002: Katja Krüger; 2004: Stephan Hußmann; 2006: Andreas Eichler; 2008: Marei Fetzer und Elke Söbbecke; 2010: Sebastian Rezat; 2012: Florian Schacht; 2014: Kathleen Philipp

Im Herbst 2015 wird die Jury wieder eine herausragende Dissertation auswählen und fordert daher alle Mitglieder der GDM auf, potentielle Kandidatinnen und Kandidaten zu benennen. Dabei ist zu beachten, dass die Verteidigung der Dissertation nicht länger als vier Jahre zurückliegen darf. Vorschläge sollen zusammen mit einer ca. zweiseitigen Begründung und fünf Exemplaren oder Kopien der Arbeit *bis zum 1. September 2015* an die Jury-Vorsitzende eingereicht werden. Es wird gebeten, parallel dazu auch eine elektronische Version/einen Weblink auf eine elektronische Version der Arbeit an die Jury-Vorsitzende zu senden.

Die Entscheidung der Jury wird auf der GDM-Tagung in Heidelberg im März 2016 bekannt gegeben werden. Die Jury: Regina Bruder (Darmstadt; Vorsitz), Tommy Dreyfus (Tel Aviv), Andreas Eichler (Kassel), Anna-Susanne Steinweg (Bamberg) und Hans-Georg Weigand (Würzburg).

Anschrift der Jury-Vorsitzenden:
Regina Bruder, TU Darmstadt, FB Mathematik, Schlossgartenstraße 7, 64289 Darmstadt
Email: r.bruder@math-learning.com

Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 12. 2. 2015 in Basel

Zeit: 16.30–18.30 Uhr
Ort: Kollegienhaus der Universität Basel

Rudolf vom Hofe begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an das im Jahr 2015 verstorbene GDM-Mitglied Helmut Wunderling.

TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Die in Heft 98 der *Mitteilungen* veröffentlichte Tagesordnung wird ebenso wie das in Heft 97 veröffentlichte Protokoll der Mitgliederversammlung vom 13. 3. 2014 in Koblenz ohne Änderungswünsche angenommen.

TOP 2: Bericht des Vorstands

2.1 Wahrgenommene Termine im Rahmen der Vorstandstätigkeit (wahrnehmende Personen jeweils in Klammern)

- 26./27.05. GFD Mitgliederversammlung (Berlin, R. v. Hofe)
- 30.05. Grußwort: 65. Geburtstag H.-J. Elschenbroich (Düsseldorf, R. v. Hofe, Chr. Bescherer eigene Kosten)
- 11.07. Grußwort: Ruhestands-Verabschiedung Th. Jahnke (Potsdam, A. Vohns, eigene Kosten)
- 31.07. Sitzung des Vorstands (Kassel, Vorstand)
- 25.09. Tagung des ICME-Vereins (Hamburg, Chr. Bescherer, R. v. Hofe, S. Ruwisch)
- 30.10. Grußwort: Ruhestands-Verabschiedung B. Wollring (Kassel, H.-G. Weigand, eigene Kosten)
- 01.11. Gemeinsame Sitzung von Vorstand und Beirat (Frankfurt, Vorstand & Beirat)
- 24.11. Verleihung der Ehrenmitgliedschaft / Grußwort: 80. Geburtstag H.-J. Vollrath (Würzburg, R. v. Hofe)

2.2 Vernetzung in fachdidaktischen Gesellschaften

Rudolf vom Hofe berichtet: Die Beziehungen zu MNU, GFD und DMV sind weiterhin gut. Die nächste Tagung der (deutschen) Gesellschaft für Fachdidaktik GFD findet vom 28.–30. 9. 2015 in Hamburg zum Thema „Befähigung zu gesellschaftlicher Teilhabe – Beiträge der fachdidaktischen Forschung“ statt. Das 2. Symposium der (österreichischen) Gesellschaft für Fachdidaktik (ÖFGD) hat am 22. 9. 2014 an der Alpen-Adria Universität Klagenfurt stattgefunden.

2.3 Nachwuchsförderung

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Basel* geht Dank an Georg Bruckmaier, Raja Herold, Alexander Meyer, Angel Mizzi, Christine Plicht, Stefanie Rach, Florian Schacht, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Ulrike Siebert und Daniel Thurm.

Susanne Schnell und Alexander Meyer berichten über die *Seasonschool 2014* in Hagen (28. 9.–2. 10.). Dank geht an die Koordinator(inn)en (Alexander Meyer, Susanne Schell) und die Expert(inn)en (Stephan Hußmann, Marcus Nührenbörger, Susanne Prediger, Christoph Selter, Heinz Steinbring, Rudolf Sträßer, Lieven Verschaffel).

Angelika Bikner-Asbahs lädt ein zur *Summerschool 2015* vom 14.–17. 9. 2015 in Bremen, nähere Informationen: http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/summerschool.html

Hans-Georg Weigand lädt zum *Doktorand(inn)enkolloquium* vom 8.–10. 9. 2015 in das Kloster Bronnbach ein, nähere Informationen: http://dgdm.dmuw.de/

2.4 Gemeinsame Kommissionen

Kommission für Lehrerbildung

Susanne Prediger berichtet: Von 2012-2015 waren seitens der GDM als reguläre Mitglieder Timo Leuders, Susanne Prediger und Rose Vogel, als stellvertretende Mitglieder Rainer Danckwerts, Gabriele Kaiser und Hans-Dieter Sill entsandt. Im Beirat wurden für 2015-2018 Timo Leuders, Susanne Prediger und Anna Susanne Steinweg als reguläre Mitglieder und Gabriele Kaiser, Jürgen Roth und Petra Scherer als stellvertretende Mitglieder gewählt. Susanne Prediger dankt den scheidenden Mitgliedern für deren Mitarbeit und berichtet im Weiteren über die Aufgaben der Kommission und deren Tagungs- und Publikationsaktivitäten seit 2011. Die 4. Fachtagung der Kommission wird zum Thema „Heterogenität bewältigen lernen – Herausforderung für die Lehrerbildung“ am 14./15.09.2015 in Mainz stattfinden.

Kommission „Übergang Schule–Hochschule“

Gilbert Greefrath berichtet: In der Kommission Schule-Hochschule der drei Fachverbände DMV, MNU und GDM sind auch in der nächsten Amtsperiode als Vertreter der GDM Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath tätig. Die Kommission hat im Herbst 2014 Fachexpert(inn)en der Bildungsadministration aller 16 Bundesländer zur zweiten Fachtagung „Abiturstandards Mathematik: Bildungspläne und Implementation“ nach Paderborn eingeladen.

2.5 Bericht der Schriftführung

Andreas Vohns berichtet über Stand und Entwicklung der Mitgliederzahlen (Stichtag: 2. 2. 2015): Im Jahr 2014 sind regulär zum 31. 12. 2014 43 Personen ausgetreten, bislang 7 Mitglieder haben ihren Austritt zum 31. 12. 2015 erklärt. Zum 1. 1. 2014 sind 66 Personen neu eingetreten, zum 1. 1. 2015 bislang 23 Personen. Damit sind sowohl die Neueintritte als auch die Zahl der Austritte gegenüber dem Vorjahr weitgehend stabil geblieben. Im Januar 2015 erfolgte zum ersten Mal eine personalisierte Rundmail mit der Rückmeldung in der Datenbank gespeicherter Adressdaten, die zu einer regen Aktualisierungsaktivität geführt hat. Eine solche soll nun zweimal jährlich in Vorbereitung des Versands der Mitteilungen erfolgen.

2.6 Kommende Tagungen

Die nächsten Jahrestagungen der GDM finden statt in

2016: Heidelberg, 7. 3.–11. 3.
2017: Potsdam
2018: Paderborn (gemeinsam mit der DMV)

Gabriele Kaiser berichtet über den *International Congress on Mathematical Education (ICME-13)*, der von der GDM als Veranstalterin getragen und vom 24.–31. 7. 2016 in Hamburg stattfinden wird: Im Vorstand des Gemeinnützigen Vereins zur Durchführung von ICME-13 ist es zu einem personellen Wechsel gekommen: Silke Ruwisch löst Karel Tschacher dort als Kassenwart/in ab. Ein zweites Treffen des International Programme Committee wird im März 2015 stattfinden, dort geht es u. a. um die Festlegung des Ablaufs bzgl. Call for papers, weitere invited lectures, discussion groups. Es fanden und finden intensive Diskussionen mit dem Springer-Verlag bzgl. Publikationsstrategien im Umfeld des ICME statt. Gabriele Kaiser berichtet des weiteren noch über den „Thematic Afternoon" mit seinen drei Strängen (European Didactic Traditions, German-Speaking Traditions in Mathematics Education Research, Legacy of Felix Klein). Sie bedankt sich noch einmal bei allen involvierten Personen für deren Mitwirkung und der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik für die finanzielle Unterstützung. Nähere Informationen zu ICME-13 unter: http://icme13.org/

TOP 3: Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

Bericht der Kassenführerin.
Christine Bescherer berichtet: Die bereits im letzten Jahr festgestellte Entspannung der Kassenlage hat sich auch im Jahr 2014 bestätigt. Im Jahr 2014 standen Ausgaben in Höhe von € 88.113,51 Einnahmen in Höhe von € 99.263,66 gegenüber, zum 7. 2. 2015 befanden sich € 29.072,64 auf dem Konto der GDM. Sie erläutert ferner detaillierter die Zusammensetzung der Ausgabenposten. Für das Jahr 2015 sind nach derzeitigem Planungsstand Ausgaben in Höhe von ca. € 91.500 und Einnahmen in Höhe von € 100.000 zu erwarten. Christine Bescherer erinnert auch noch einmal daran, dass reduzierte Mitgliedsbeiträge für pensionierte Mitglieder rechtzeitig (bis April des Beitragsjahres) und für Nachwuchsmitglieder zudem jährlich neu zu beantragen sind.

Bericht des Kassenprüfers.
Fritz Hasselbeck berichtet: Die Kasse wurde eingehend geprüft. Gegenstand der Prüfung waren der Anfangsbestand aus dem Jahr 2013 (1. 1. 2014), Einnahmen- und Ausgabenbelege mit den dazu gehörigen Rechnungen sowie der Jahresabschluss 2014. Das datumsgemäß geordnete Kassenjournal, die Kontoauszüge der Bank und die Rechnungsbelege stimmen in Termindaten und aufgeführten €-Beträgen voll überein. Buchungsklassen und Wertstellungen sind im Kassenjournal genau dokumentiert. Die Rechnungsbeträge sind im Konto-Korrent vom 1. 1.–31. 12. 2014 sachlich korrekt verbucht, die Nachweise für Einnahmen und Ausgaben sind vollständig abgeheftet. Die Bearbeitung des GDM-Kontos erfolgte gründlich und gewissenhaft, die Anlage des Kontodepots von Frau Bescherer zum Rechnungsjahr 2014 liegt übersichtlich und klar vor.

Fritz Hasselbeck empfiehlt unter diesen Bedingungen die Entlastung der Vorstandschaft und der Kassenführerin.

TOP 4: Entlastung des Vorstands

Christian Spannagl empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei vier Enthaltungen zugestimmt.

TOP 5: Wahlen

1. Vorsitz.
Rudolf vom Hofe wird zur Wiederwahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge. Rudolf vom Hofe wird wiedergewählt (Ja-Stimmen: 111, Nein-Stimmen: keine, Enthaltungen: 3, Ungültige Stimmen: keine). Rudolf vom Hofe nimmt die Wahl an.

Kassenführung.
Christine Bescherer wird zur Wiederwahl vorgeschlagen Es gibt keine weiteren Vorschläge. Christine Bescherer wird wiedergewählt (Ja-Stimmen: 105, Nein-Stimmen: keine, Enthaltungen: 3, Ungültige Stimmen: keine). Christine Bescherer nimmt die Wahl an.

Beirat.
Es scheiden aus: Stephan Hußmann (keine Wiederwahl möglich), Gabriele Kaiser (keine Wiederwahl möglich), Henning Körner (Wiederwahl möglich) und Alexander Meyer (Wiederwahl möglich).

Es kandidieren: Hedwig Gasteiger, Henning Körner, Alexander Meyer und Susanne Prediger.

Gewählt werden: Hedwig Gasteiger (104 Stimmen), Henning Körner (101 Stimmen), Alexander Meyer (106 Stimmen) und Susanne Prediger (104 Stimmen).

Alle gewählten Personen nehmen die Wahl an.

JMD-Beratungskomitee.
Die Amtszeit der Mitglieder Willi Dörfler, Michael Neubrand und Susanne Prediger wurde durch reguläre Wahl im Beirat bis 2018 verlängert. Im Jahr 2014 hat außerplanmäßig Hedwig Gasteiger den Sitz von Andrea Peter-Koop übernommen, sie ist zunächst bis 2016 Mitglied des Beratungskomitees.

TOP 6: Nachwuchsförderung

Rudolf vom Hofe weist auf die anstehende Vergabe des GDM-Förderpreises hin, Arbeiten sind an Regina Bruder bis 1. 9. 2015 zu senden (s. auch ausführlichere Informationen in diesem Heft auf S. 38).

TOP 7: Madipedia & MathEduc

Ulli Kortenkamp berichtet: *MathEduc* ist eine Einrichtung des FIZ-Karlsruhe. MathEduc ist die international einzige englischsprachig verfügbare, kommentierte Literaturdatenbank zur spezifischen Erfassung mathematikdidaktischer Beiträge aus Forschung, Theorie und Praxis im internationalen Rahmen. Sie umfasst derzeit beinahe 160 000 Einträge, wobei in 2014 etwa 6000 neue Einträge hinzugekommen sind. Bis Ende 2014 war Thomas Jahnke Editor-In-Chief, eine Neuwahl steht noch aus. Mitwirkung im Rahmen von Book Reviews (die parallel in den Mitteilungen der GDM erscheinen) ist weiterhin dringend erwünscht.

Madipedia ist ein Angebot der GDM in Kooperation mit FIZ Karlsruhe, unterstützt durch das DZLM. Madipedia ist als Online-Nachschlagewerk zur Mathematikdidaktik konzipiert, es umfasst Angaben zu ca. 400 Personen und ca. 400 Dissertationen aus dem deutschsprachigen Raum. Madipedia ist als Wiki implementiert, daher auf die Eintragungen aus der Community selbst angewiesen. Ulli Kortenkamp bittet daher weiterhin um Mitarbeit an Madipedia.

TOP 8: Zeitschriften

8.1 Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)

Petra-Scherer dankt zunächst Rudolf Biehler als Ende 2014 ausgeschiedenem geschäftsführenden Herausgeber und berichtet: Die Zahl der Institutionen, die weltweit einen Online-Zugang zum JMD haben, hat sich seit 2010 sehr günstig entwickelt, von 2650 in 2010 auf fast 6900 Institutionen Ende 2013, auch die Zahl der Online-Zugriffe auf das JMD hat sich im selben Zeitraum deutlich positiv entwickelt.

Die derzeitige Heftplanung sieht für das Jahr 2015 ein Heft mit spezifischem Themenschwerpunkt (2/2015: Lehrerfortbildung/Multiplikatoren Mathematik – Konzepte und Wirkungsforschung) und für 2016 zwei solche Hefte (1/2016: Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung (in memoriam Arnold Kirsch); 1a/2016: Subject matter analysis from a didactical perspective (Stoffdidaktik)) geplant. Das zweite dieser Hefte (1a/2016) stellt eine Sonderausgabe aus Anlass des ICME in Hamburg dar. Petra Scherer weist darauf hin, dass Beiträge in diesen thematisch definierten Heften dem gleichen Review-Verfahren unterliegen wie die weiterhin möglichen und erwünschten Einzelbeiträge zu thematisch ungebundenen Heften des JMD.

8.2 ZDM

Gabriele Kaiser informiert über die Entwicklungen beim ZDM: Aus organisatorischen Gründen erfolgte eine weitere Umbenennung, der korrekte Name lautet nun: „ZDM – Mathematics Education“. Dem Journal wird gemäß der von Springer erhobenen Daten eine extrem hohe „Author-Satisfaction-Rate“ zugestanden und die Zahl registrierter Downloads hat sich gegenüber dem Vorjahr von 70 000 auf 80 000 erhöht. Die durchschnittliche Zeit von der Einreichung eines Beitrags bis zur 1. Herausgeber(innen)entscheidung betrug zuletzt 66 Tage. Das ZDM ist auch weiterhin nicht im Science-Citation-Index SCI enthalten.

8.3 mathematica didactica

Silke Ruwisch berichtet über Herausgabemodalitäten sowie Stand und Entwicklung der Beitragseinreichungen zu mathematica didactica: Im letzten Jahr wurden 14 Einzelbeiträge publiziert, künftig ist jährlich jeweils ein Themenheft und ein Heft mit freien Themen geplant.

8.4 Der Mathematikunterricht (MU)

Henning Körner informiert: Der MU ist die älteste deutschsprachige Zeitschrift zur Mathematikdidaktik. Herausgeber sind neben ihm selbst Stefan Deschauer und Jörg Meyer. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zur Unterrichtspraxis. Bis Mitte/Ende 2016 ist man thematisch bereits ausgebucht, danach weiterhin an Gastherausgeber/innen interessiert.

TOP 9: Verschiedenes

Christian Spannagl stellt anhand eines Videos (www.youtube.com/watch?v=bec93XfrEJ4) die Jahrestagung 2016 in Heidelberg vor. Nähere Informationen werden rechtzeitig unter www.gdm-tagung.de verfügbar gemacht.

Der Vorstand bedankt sich bei den Mitgliedern für die gute Zusammenarbeit.

Protokoll: Andreas Vohns

Jahresbericht GDM Schweiz

Juni 2014 – März 2015

Esther Brunner und Lis Reusser

1 Gründungsversammlung

Am 3. 6. 2014 fand die Gründungsversammlung der „GDM Schweiz“ als Landesverband der GDM statt. Dadurch ist die rechtliche Situation der „GDM Schweiz“ geklärt. Die GDM Schweiz verfügt nun über eigene Statuten nach Schweizer Vereinsrecht, bleibt aber ein Teil der GDM, deren Sitz in Deutschland liegt. Die Website des Vereins ist noch im Aufbau begriffen, enthält aber bereits die wichtigsten Informationen: www.gdmschweiz.ch oder www.didaktik-der-mathematik.ch.

An der Gründungsversammlung wurden die beiden Co-Vorsitzenden des Arbeitskreises Schweiz-Liechtenstein der GDM, Esther Brunner und Lis Reusser als neue Co-Präsidentinnen der GDM Schweiz gewählt. In den Vorstand gewählt wurden Esther Brunner, Lis Reusser, Gabriela Schürch und Christof Weber (alle bisher) und neu Peter Flury, der das Aktuariat übernimmt. Die Arbeit der zurücktretenden Vorstandsmitglieder Roland Keller und Rita Krummenacher wurde gewürdigt. Als Rechnungsrevisoren wurden Guido Beerli und Albert Gächter gewählt. Als Schweizer Vertretung im Beirat der GDM wurde Esther Brunner gewählt.

Der Mitgliederbeitrag wurde bereits anlässlich der Wintertagung für 2014 auf Fr. 140,– festgelegt.

2 Weitere Anlässe

Fachdidaktische Diskussion (8. 9. 2014)

Am 8. September 2014 trafen sich rund zwanzig interessierte Mitglieder des Landesverbands Schweiz und einige Studierende zu einer fachdidaktischen Diskussion zum Thema Apps und Tablets im Mathematikunterricht. Bernhard Dittli (PH Schwyz) und Philippe Sasdi (PH Bern) zeigten in einem Überblick, wie neue Medien und Technologien Schritt für Schritt Eingang ins Schulzimmer finden. Nach einem Kurzeinblick in mögliche Einsatzfelder von Tablets im Mathematikunterricht, setzten wir uns intensiver mit einzelnen Mathe-Apps auseinander.

Das erste Fazit dieses Abends: Es gibt eine Vielzahl an Mathe-Apps und es kommen laufend neue auf den Markt. Dabei ist es unmöglich, den Überblick zu behalten oder die Angebote alle fachlich zu beurteilen. Es bräuchte einige griffige Beurteilungskriterien, die eine rasche Einordnung einer App zulassen würden.

Das zweite Fazit: Viele Apps basieren auf einem veralteten Lehr-Lernverständnis. Es werden teilweise fragwürdige Veranschaulichungen verwendet und das Übungsverständnis entspricht oft „bunten Hunden“. Es gibt in einigen Apps interessante Ideen, doch oft scheitert das Produkt daran, dass zu vieles in ein Programm gepackt wird.

Das dritte Fazit: Dieser Abend war wohl erst der Anfang einer intensiveren Auseinandersetzung. An einem nächsten Anlass soll der Fokus stärker auf die Chancen von Apps und ihrem Einsatz im Mathematikunterricht ausgerichtet sein.

GDM 2015 in Basel

Um die Jahrestagung der GDM in Basel vom Februar 2015 nicht zu konkurrenzieren, fand im Januar keine Wintertagung der GDM Schweiz statt. Stattdessen wurde den Mitgliedern empfohlen, die GDM-Jahrestagung in Basel zu besuchen. Der Vorstand der GDM Schweiz war an der Tagung in Basel mit Grussworten von Esther Brunner an der Eröffnung und mit einer Begrüssung von Lis Reusser am Tag für die Lehrpersonen eingebunden. Des Weiteren wurde mitgeholfen, Mitglieder aus unseren Reihen als Workshopleitende für den Tag für die Lehrkräfte zu gewinnen. Den Kolleginnen und Kollegen, die einen Workshop für Lehrpersonen geleitet haben und vor allem dem Team der FHNW sei auch von unserer Seite her ganz herzlich für ihr Engagement und ihre grosse Arbeit gedankt!

Fachdidaktische Diskussion (24. 3. 2015)

Nachdem uns unsere Mitglieder Philippe Sasdi, PHBern und Bernhard Dittli, PH Schwyz im Herbst 2014 eine Einführung in ihre Arbeit und Auseinandersetzung mit Apps und neuen Medien im Mathematikunterricht gegeben hatten, war nun Ulli Kortenkamp von der Universität Potsdam zu Gast. Ulli präsentierte u. a. neun Dimensionen, anhand derer Apps und Lernsoftware eingeschätzt werden können. Diese neun Dimensionen teilte er in drei Gruppen ein: die erste Gruppe umfasst objektive Kriterien, die zweite beschreibt subjektive Beurteilungsmerkmale und die dritte

Gruppe erfasst kategoriale Aspekte. Diese Beurteilungsdimensionen wurden von den Anwesenden konstruktiv aufgenommen und anregend diskutiert. Anhand von verschiedenen Beispielen unterschiedlich gelungener Apps wurde versucht die vorgestellten Kriterien anzuwenden.

Auf der Basis dieser Dimensionen sowie den von Bernhard Dittli entwickelten Beurteilungskriterien soll nun in einem weiteren Schritt ein übersichtliches Beurteilungsraster erstellt werden, mit dem Apps und Lernsoftware beurteilt werden können und das den Mitgliedern zur Verfügung gestellt werden kann.

3 Sitzungen

Der Vorstand traf sich in der Zeit nach der Gründungsversammlung bis zur heutigen Jahresversammlung zu drei Sitzungen und beschäftigte sich mit zahlreichen Geschäften. Die erste Sitzung im Spätsommer wurde von zwei grossen Themen dominiert: der Stellungnahme des Vorstands zu Calcularis und einem Austausch mit Daniela Grawehr von der DMK zur möglichen Zusammenarbeit. Diese Themen beschäftigten uns auch an der Wintersitzung, nebst der Organisation der fachdidaktischen Diskussion. Die erste Sitzung im Kalenderjahr 2015 stand im Zeichen des Jahresprogramms.

Der Beirat der GDM tagte im Oktober in Frankfurt und im Februar 15 anlässlich der GDM in Basel. An den beiden Sitzungen nahm Esther Brunner teil.

Esther Brunner nahm zudem an einem Gespräch mit den Entwicklern von Calcularis teil und stellte die Einwände des Vorstands der GDM Schweiz persönlich vor.

Lis Reusser vertrat die GDM Schweiz an den Sitzungen von KOFADIS (Konferenz Fachdidaktiken Schweiz).

4 Geschäfte

Ein dominierendes Geschäft in diesem Berichtsjahr war die Stellungnahme zur Software Calcularis. Es war nicht zu erwarten, dass die Jury auf die Preisverleihung des Worlddidac Awards verzichten würde. Aber für den Vorstand der GDM Schweiz war es wichtig, eine Stellungnahme abzugeben, nachdem sich verschiedene Mitglieder im Zusammenhang mit der geplanten Preisverleihung bei uns gemeldet hatten.

Grundsätzlich gilt, dass der Vorstand nur zu wichtigen inhaltlichen Fragen einer gewissen Tragweite (z. B. Preisverleihung wie im erwähnten Beispiel) eine Stellungnahme abgibt.

Das Thema Lernsoftware/Medien im Mathematikunterricht möchten wir konstruktiv bearbeiten und organisieren deshalb zwei fachdidaktische Diskussionen, von denen wir uns erhoffen, dass wir Kriterien für gute Erzeugnisse erarbeiten und diese dann den Mitgliedern zur Verfügung stellen können.

In eigener Sache hat der Vorstand ein Spesenreglement ausgearbeitet und wird in Zukunft den Vorstandsmitgliedern die Bahnfahrt (2. Klasse, Halbtax) zum Sitzungsort entschädigen.

5 Dank

Zahlreiche Mitglieder haben aktiv zum Gelingen eines ersten Jahres GDM Schweiz mitgetragen. Ihnen sei an dieser Stelle sehr herzlich gedankt.

Allen voran möchten wir unseren Kolleginnen und Kollegen aus dem Vorstand für die konstruktive Zusammenarbeit und Unterstützung danken.

Esther Brunner, Pädagogische Hochschule Thurgau, Unterer Schulweg 3, 8280 Kreuzlingen
Email: esther.brunner@phtg.ch
Lis Reusser, Pädagogische Hochschule Bern, Institut für Heilpädagogik, Fabrikstrasse 8, 3012 Bern
Email: lis.reusser@phbern.ch

Arbeitskreis Vernetzungen im Mathematikunterricht

Passau, 24.–25. 4. 2015

Astrid Brinkmann, Thomas Borys und Matthias Brandl

Die 8. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ fand an der Universität Passau am 24. und 25. April 2015 statt; sie wurde von Matthias Brandl perfekt organisiert.

Das Veranstaltungsprogramm gliederte sich in einen stärker unterrichtspraktisch bezogenen Teil am ersten Tag in Form einer Lehrerfortbildung und einen arbeitskreisinternen Teil am zweiten Tag. Wie bereits bei der 4. Tagung des AKs in Passau 2012 herrschte wunderbares, frühsommerlich anmutendes Wetter. Erfreulich war außerdem, dass an der Lehrerfortbildung nahezu 30 Lehrkräfte bayerischer Gymnasien und Realschulen teilnahmen.

Das gebotene Vortragsprogramm war reichhaltig. Es wurde über Forschungsarbeiten und Projekte berichtet, Handlungsbedarf bzgl. Vernetzungen im Mathematikunterricht aufgezeigt und, insbesondere am Lehrerfortbildungstag, wurden Methoden für einen vernetzenden Mathematikunterricht sowie Beispiele für inhaltliche Vernetzungen vorgestellt und diskutiert.

Freitag, 24. April (im Rahmen der Lehrerfortbildung)

Andreas Gilg (Passau): MINT-Lernumgebungen. Am Beispiel einer Unterrichtsstunde zum Thema „Volumenberechnung“ wurden unterschiedliche Zugänge im methodischen, didaktischen und fachlichen Bereich aufgezeigt. Dabei kann das Thema kumulativ in der 5. Klasse Realschule, aber auch in höheren Jahrgangsstufen an Realschulen und Gymnasien bearbeitet werden. Zudem bietet sich der Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners oder einer CAS-Software an.

Astrid Brinkmann (Münster) und Thomas Borys (Karlsruhe): Maps als Unterrichtsmittel. Graphische Darstellungen von Vernetzungen wie Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte Map-Formen eignen sich in besonderer Weise zum strukturierten Lehren und Lernen im Mathematikunterricht. Das Strukturieren erfolgt durch eine inhaltliche Eingrenzung der Maps, dazu wurden verschiedene methodische Vorgehensweisen anhand von Beispielen für den Unterricht vorgestellt. Im zweiten Teil des Vortags wurde anhand konkreter Unterrichtsmaterialien dargelegt, wie speziell gestaltete Maps gewinnbringend beim Problemlösen und beim Modellieren eingesetzt werden können.

Michael Bürker (Tübingen): Minkowski-Geometrie in der Schule. Vor gut 100 Jahren hat der Mathematiker Hermann Minkowski die Idee der Raum-Zeit geboren, nachdem Albert Einstein 1905 seine spezielle Relativitätstheorie veröffentlicht hatte. Im Vortrag ging es darum, Mathematik und Physik miteinander zu vernetzen und den komplexen und scheinbar widersprüchlichen Phänomenen der Einsteinschen Theorie mit Hilfe schulgeometrischer Methoden nachzugehen. Dabei spielen die sogenannten Minkowski-Diagramme eine wichtige Rolle: Bei diesen Weg-Zeit-Diagrammen werden Ereignissen Punkte zugeordnet und Bewegungen durch Weltlinien beschrieben. Verzichtet man auf die gewohnte Rechtwinkligkeit des Koordinatensystems, hat dies den Vorteil, dass man statt mit komplizierten Gleichungen („Lorentztransformationen“) im Wesentlichen mit den Methoden der Mittelstufengeometrie arbeiten und argumentieren kann. Dem Vortrag liegt ein Schulversuch mit Schülern des Freiburg-Seminars zu Grunde.

Thomas Borys (Karlsruhe): Geheimschriften im Mathematikunterricht. Kryptologie ist eine sehr alte Wissenschaft und bis vor wenigen Jahrzehnten war es eine Wissenschaft für Regierungen, Geheimdienste und Spione. Heute ist die Kryptologie fast überall in unserem Leben, weil viele Anwendungen im Bereich des Computers sich kryptologischer Techniken bedienen, beispielsweise beim Login auf das E-Mail-Account, Arbeiten auf https-Seiten, Online-Banking und Telefonieren mit dem Handy. Wegen dieser Bedeutung im Leben des modernen Menschen sollten kryptologische Themen im allgemeinbildenden Unterricht angesprochen werden. Dafür bietet sich das Fach Mathematik wegen seiner vielfältigen Vernetzungen zur Kryptologie an. Hierzu wurden an verschiedenen Verschlüsselungsverfahren die inhaltlichen Vernetzungen der Kryptologie zu den Inhalten des Mathematikunterrichts dargelegt. Insbesondere wurden dabei auch praktische unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten aufgezeigt.

Samstag, den 25. April (im Rahmen der internen Sitzung)

Alexander Wolff (Hildesheim): Mathematisches Vorwissen sichtbar machen durch Concept Maps. Aus den Erkenntnissen der Lernpsychologie wissen wir um die zentrale Rolle des Vorwissens für den weiteren Wissenserwerb. Es bestimmt und beeinflusst die folgenden Lernprozesse bedeutend mit. Um es in der Schule und somit im Unterricht berücksichtigen zu können, stellt sich die Frage nach der Zugänglichkeit. Wie kann eine Lehrkraft Aufschluss über das Vorwissen als Lernausgangslage der Schülerinnen und Schüler erhalten? Es wurde ein Ansatz vorgestellt, wie dies im Mathematikunterricht in einem ersten Schritt ergründet werden kann und in einem zweiten Schritt über das Arbeiten mit Concept Maps visualisiert und somit sichtbar gemacht werden kann.

Wolfgang Pfeffer (Passau): Übergang Schule–Hochschule: eine qualitative Längsschnittstudie. Aufgrund der hohen Studienabbruchquote von rund 80 % ist der Übergang von der Schule zur Hochschule in Mathematik in den letzten Jahren in den Forschungs-fokus gerückt. Als Gründe für die Schwierigkeiten wurden zum einen der sich verändernde Charakter der Mathematik, von der eher anwendungsorientierten, informellen Schulmathematik hin zu der formal-axiomatisch aufgebauten, abstrakten Hochschulmathematik, sowie die Fähigkeit des selbstregulativen Lernens ausgemacht. Nahezu alle bisherigen Studien wurden quantitativ durchgeführt und nur selten durch qualitative Daten ergänzt. Deswegen wurde diese Studie bewusst als qualitative Längsschnittstudie konzipiert und begleitet dabei eine Gruppe von rund 30 Studierenden die ersten zwei Semester. Im Rahmen dieses Vortrages wurde diese Studie genauer vorgestellt, sowie erste Ergebnisse präsentiert.

Tobias Kaiser (Passau): „Schulmathematik vs. Unimathematik“: Sichtweisen eines Fachmathematikers. Als Dozent im Fach Mathematik in der Lehramtsausbildung Gymnasium hört man von Studenten immer wieder die Frage, wofür man die Inhalte der universitären Vorlesungen zu lernen habe, da diese nichts mit dem Schulstoff zu tun habe und man letzteren ja eh schon könne. Es wurde die Fachlichkeit der Mathematikausbildung begründet und die Verbindungen zwischen „Schul- und Hochschulmathematik“ anhand der Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“ herausgearbeitet.

Matthias Brandl (Passau) und Michael Bürker (Tübingen): Narrative Didaktik – Impulse. Lerninhalte und ihre zugehörigen Lehr-Lern-Prozesse fokussieren häufig allein auf den inhaltlich-analytischen Aspekt. Narrative Didaktik steht dem logisch-diskursiven Prozess gegenüber und ergänzt ihn auf synergetische Art und Weise, indem sie auch den affektiven Anteil des Lernprozesses miteinbezieht. Literaturtheoretische Techniken sorgen dabei für eine Vernetzung abstrakter mathematischer Lerninhalte mit literarischen Elementen. Hierzu wurden Impulsvorträge gehalten.

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Organisatorisches:

Planung der nächsten Tagungen
Barbara Schmidt-Thieme und Alexander Wolff übernehmen die Organisation der 9. Tagung des Arbeitskreises, die voraussichtlich am 22. und 23. April 2016 an der Universität Hildesheim stattfinden wird. Bei dieser Tagung soll wieder ein Lehrerfortbildungsprogramm angeboten werden. Nähere Infos sind zu finden unter: www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html

Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht“ des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann
Band 4 liegt mittlerweile als vollständiges Manuskript vor und wird von Thomas Borys, Matthias Brandl und Astrid Brinkmann herausgegeben. In diesem Band werden zu den Artikeln auch Schüler-Arbeitsblätter und Kopiervorlagen direkt mit veröffentlicht. Geplant ist eine Veröffentlichung noch in 2015.

Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter: http://www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Das gesamte Tagungsprogramm und weitere Informationen zu den Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ findet man unter: www.math-edu.de/Vernetzungen.html. Interessierte sind als weitere Mitglieder stets herzlich willkommen.

Astrid Brinkmann, Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstraße 21, 48149 Münster
Email: astrid.brinkmann@math-edu.de

Eröffnungsvortrag des 1. Vorsitzenden zur GDM-Jahrestagung in Basel 2015

Rudolf vom Hofe

Sehr geehrte Ehrengäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Mitglieder der GDM,

ich freue mich, hier in Basel die 49. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Ich möchte bereits jetzt den Veranstaltern dafür danken, dass wir in dieser wunderbaren Stadt zu Gast sein dürfen. Meinen Eröffnungsvortrag möchte ich einem Kind dieser Stadt widmen, genauer gesagt einem Sohn dieser Stadt, der in vieler Hinsicht etwas mit uns und unserer Gesellschaft zu tun hat. Er war einer der ganz großen Mathematiker mit epochaler Bedeutung und – was vielleicht nicht ganz so bekannt ist – er war auch ein ausgezeichneter Lehrer und Didaktiker: Die Rede ist von *Leonhard Euler*. Ich möchte zunächst von seiner Baseler Zeit berichten, danach kurz sein umfangreiches Wirken in Berlin und St. Petersburg erwähnen und dann einen Blick auf die didaktische Seite dieses großen Mathematikers richten.

Eulers Baseler Zeit

Leonhard Euler, 1707–1783

Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Er war der älteste Sohn des Pfarrers Paul Euler und dessen Ehefrau Margaretha. Schon früh kam der junge Leonhard mit Mathematik in Berührung, und zwar durch seinen Vater. Weil dieser ein Schüler von Jacob Bernoulli gewesen war, – so schreibt Euler in seiner Autobiographie – „trachtete er mir sogleich die ersten Gründe der Mathematik beizubringen, und bediente sich zu diesem End des Christoph Rudolphs Coss," – also des Rechnens mit Unbekannten – „worinnen ich mich einige Jahre mit allem Fleiß übte"[1].

Leonhard Euler besuchte dann das Gymnasium am Münsterplatz, 11 Minuten zu Fuß von hier, am linken Rheinufer gelegen. Auch die höhere Schule kannte damals noch keinen systematischen Mathematikunterricht. Um Leonhard weiter zu fördern, engagierte sein Vater einen mathematikbegeisterten Privatlehrer, den jungen Theologen Johannes Burckhardt.

Johann Bernoulli, 1676–1748

Dieser Förderung ist es zu verdanken, dass der 13-jährige Leonhard ab 1720 neben dem Gymnasium auch die Universität Basel besuchte und die Aufmerksamkeit des großen Johann Bernoulli weckte, der den dortigen Lehrstuhl für Mathematik innehatte. Euler hatte ihn zunächst um mathematische Privatvorlesungen gebeten, doch Bernoulli hatte mit ihm etwas anderes vor, eine Art individuelles didaktisches Konzept für Hochbegabte: Er riet ihm, im Selbststudium einige anspruchsvolle mathematische Werke durchzuarbeiten und dann jeden Samstagnachmittag zu ihm zu kommen und mit ihm die aufgetretenen Schwierigkeiten zu diskutieren. Dieses Verfahren bezeichnete Euler später selbst als „gewiss die beste Methode ..., um in den mathematischen Wissenschaften glückliche Progressen zu machen"[2].

Und er machte äußerst glückliche Progresse. 1723 schloss er als 16-Jähriger mit dem Magistergrad das Grundstudium ab und immatrikulierte sich auf Wunsch seines Vaters zum Hauptstudium an der Theologischen Fakultät. Doch die Mathematik ließ ihn nicht mehr los. Den Plan, auch Theologie zu studieren, gab er zwei Jahre später auf. Umso mehr befasste er sich mit Mathematik und Physik. Dabei lernte er zwei junge Kollegen kennen: die beiden ältesten Söhne seines Professors, Nicolaus und Daniel Bernoulli. Diese wurden nicht nur seine wissenschaftlichen Begleiter, sondern gehörten mit der Zeit auch zu seinen engsten Freunden. 1725 bewarb sich Euler mit einer Abhandlung über den Schall in Basel um den Lehrstuhl für Physik, aber er war für die Universität Basel noch zu jung.

[1] Euler 1767, PFA RAN: F. 136, op.1, Nr. 137, 124ob. Zitiert nach: Bredekamp, H. & Velminski, W. (Hrsg.): Mathesis und Graphe: Leonard Euler und die Entfaltung der Wissenssysteme, Akademie Verlag Berlin, 2010

[2] Ebenda, S. 10

Nikolaus Bernoulli, 1695–1726

Daniel Bernoulli, 1700–1782

St. Petersburg und Berlin

Euler begann sich nun auch für andere Orte und Länder zu interessieren. 1727 bekam er Nachricht von seinen Freunden, den Bernoulli-Brüdern. Sie hatten zwei Jahre zuvor gut dotierte Professuren an der neu gegründeten Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg angenommen und konnten ihm dort nun ebenfalls eine Stelle verschaffen, allerdings als Adjunkt in der medizinischen Abteilung. Euler überlegte nicht lange und immatrikulierte sich in Basel rasch an der Medizinischen Fakultät. Doch schon einige Tage später begab er sich auf die lange und beschwerliche Reise an seinen neuen Wirkungsort, von dem er nie wieder in seine Heimatstadt zurückkehren sollte. Hier traf er auf Christian Goldbach, mit dem er jahrzehntelang in Briefwechsel stand. Seine medizinische Karriere dauerte nicht lange, 1730 erhielt Euler die Professur für Physik und bald danach eine für Mathematik.

1741 wurde er von Friedrich dem Großen an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften berufen. Dort entstanden viele seiner berühmten Werke zur Analysis, Zahlentheorie und Algebra. Nebenbei musste sich Euler um den Bau von Kanälen, die Trockenlegung des Oderbruchs und die hydraulischen Systeme der Brunnenanlagen von Sanssouci kümmern. Letzteres führte schließlich zu einem Streit mit Friedrich dem Großen und zum Ende von Eulers Zeit in Berlin: Friedrich wollte mit einem 30-m-Springbrunnen die höchste Fontäne Europas in seinem Schlosspark haben, aber die Fontäne funktionierte nicht. Eulers Hinweise zur Behebung der Störungen wurden nicht akzeptiert, weil sie zu teuer waren. Aber mit reiner Mathematik allein ließen sich die Probleme leider nicht lösen.

Es gelang übrigens zu Friedrichs Lebzeiten nicht, die Fontaine zum Laufen zu bringen. Heute gehört sie zum Weltkulturerbe und funktioniert, und ich kann Ihnen – ohne der Mitgliederversammlung vorzugreifen – schon mal mitteilen, dass wir sie bald auf einer unserer nächsten Jahrestagungen besichtigen können.

Nach 25 Jahren in Berlin kehrte Euler 1766 zurück nach St. Petersburg, wo nun Katharina die Große als Kaiserin von Russland residierte. Sie schenkte ihm zur Begrüßung 8000 Rubel. Heute bekommt man dafür 111 Schweizer Franken, das sind etwa 112 Euro, damals konnte sich Euler dafür ein Palais direkt an der Newa kaufen. 1771 erblindete er vollständig. Trotzdem entstand fast die Hälfte seines Lebenswerks in der zweiten Petersburger Zeit. Leonhard Euler starb 1783 in St. Petersburg. 866 Arbeiten hatte er während seines wissenschaftlichen Schaffens publiziert. Er gilt als der bedeutendste Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Ein Großteil der noch heute verwendeten mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück: das Zeichen π, das Summenzeichen $\sum$, die Beschreibung von Funktionstermen durch f(x) und natürlich die Zahl e.

Euler als Didaktiker

Prinzessin Friederike Charlotte von Brandenburg, 1745–1808

Neben den zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten hat Euler auch Lehrwerke geschrieben, die eine deutliche didaktische Handschrift zeigen. Das berühmteste ist die „Vollständige Anleitung zur Algebra“, ein Bestseller, der in 127 Sprachen übersetzt wurde und der bis ins 20. Jahrhundert immer wieder neu aufgelegt wurde. Nicht ganz so bekannt ist ein anderes Werk von Euler, die „Briefe an eine deutsche Prinzessin“. Es sind Lehrbriefe an eine Prinzessin von Brandenburg, von ihrem Vater in Auftrag gegeben. Sie residierte übrigens fast in Bielefeld, genauer im damaligen Reichsstift Herford, direkt an der Stadtgrenze von Bielefeld gelegen.

Es geht in diesen Briefen um Philosophie, Physik und auch viel um Mathematik. In den behutsamen Unterweisungen dieser Werke kommen zahlreiche Prinzipen zum Ausdruck, die auch heute noch zu den Methoden guter Lehre gehören; z. B.:

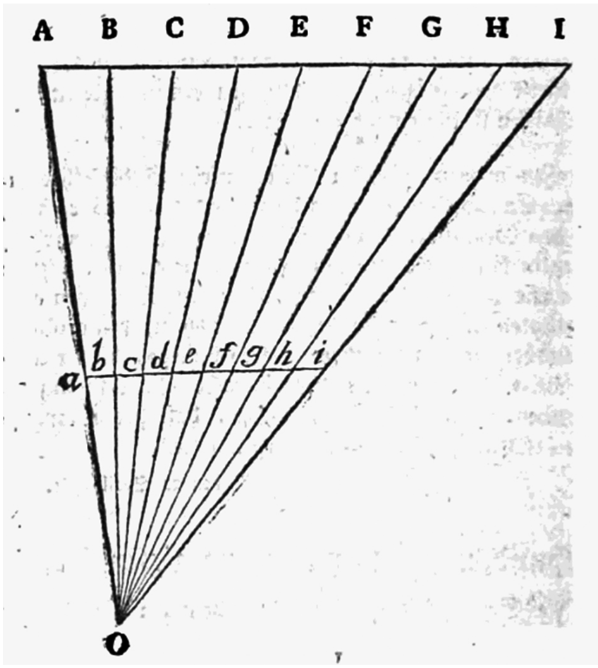
- Erklärung eines Verfahrens zunächst an einem einfachen und greifbaren Fall
- Anwendung auf komplexere, aber immer noch konkret nachvollziehbare Beispiele
- Übertragung der dabei gewonnenen Erkenntnisse auf den allgemeinen Fall
- Überprüfung des Gedankengangs durch Umkehrung der Argumentation

– Vermeidung von Fehlvorstellungen durch das Thematisieren bekannter Irrwege

Neben didaktischem Geschick spürt man beim Lesen dieser Briefe so etwas wie Vertrauen in die Erkenntnisfähigkeit des Lernenden und auch eine gewisse Freude, Verständnis zu wecken.

Ich möchte dies nun anhand einiger Auszüge aus seinem „123. Brief an eine deutsche Prinzessin" aufzeigen. Es geht um die Frage, inwieweit man eine Strecke in immer kleinere Teile zerlegen kann und was dabei herauskommt.

Euler beginnt mit der Feststellung, dass man eine gezeichnete Strecke leicht in zwei Teile zerlegen kann. Aber kann man auch kleine Strecken in beispielsweise 8 Teile zerlegen?



Streckenteilung (Leonhard Euler [1773]: Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie; Bd. 2, Johann F. Junius: Leipzig, S. 180)

Um dies zu zeigen konstruiert er eine große Strecke, die zu der kleinen parallel ist und aus 8 Teilen besteht. Dann verbindet er die äußeren Punkte beider Strecken und erhält als Schnittpunkt dieser Verbindungen den Punkt O. Nun werden die Punkte der Streckenabschnitte der größeren Strecke mit O verbunden, was zu einer entsprechenden Teilung der kleinen Strecke führt. Seine dann folgenden Überlegungen möchte ich nun in Auszügen zitieren:

> Dieses Verfahren lässt sich immer wiederholen, die gegebene Linie *a i* sei auch so klein, wie sie wolle, und die Zahl der Teile werde so groß angenommen, als man wolle. Es ist zwar wahr, dass die Ausführung uns nicht erlaubt, hierin allzu weit zugehen; denn die Linien, die man zieht, haben immer einige Breite, wodurch sie nahe an ihrem Vereinigungspunkte zusammenfließen, wie es Ew. H. [Eure Hoheit] in der gegebenen Figur nahe am Punkte O bemerken werden; aber es ist hier die Frage von dem, was an sich selbst möglich ist, und nicht von dem, was wir im Stande sind, auszuführen. In der Geometrie haben die Linien ganz und gar keine Breite und fließen daher niemals in einander; dass also ihre Teilung keine Grenzen haben muss.
>
> Sobald mir Ew. H. zugeben, dass eine Linie in tausend Teile zerschnitten werden könne; so müssen Sie auch zugeben, dass sich dieselbe in zweitausend zerschneiden lasse, indem man jeden Teil wieder in zwei gleiche Teile zerschneidet; und aus eben dem Grunde muss sie in viertausend Teile und wiederum in achttausend können zerschnitten werden, ohne dass man jemals auf so kleine Teile käme, die sich nicht weiter zerschneiden ließen. So klein man sich eine Linie vorstellen mag; so ist sie immer in zwei Hälften teilbar, jede Hälfte wieder in zwei, und jede dieser Hälften von neuem in zwei, und so fort bis ins Unendliche.
>
> Wer der Ausdehnung diese Eigenschaft ableugnen würde, der würde behaupten müssen, dass man endlich so kleine Teilchen erhielte, die keiner weiteren Teilung fähig wären, und zwar deswegen, weil sie keine Ausdehnung mehr hätten. Gleichwohl müssen alle diese kleinen Teilchen zusammengenommen das Ganze ausmachen, durch dessen Teilung man auf sie geraten ist; und also würde folgen, da man die Größe jedes dieser Teilchen für nichts oder Zero angibt, dass mehrere Zero zusammengenommen eine Größe ausmachen, welches eine offenbare Ungereimtheit sein würde. Denn Ew. H. wissen aus der Arithmetik, dass mehrere Zero addiert immer wieder Zero ergeben.
>
> Man sagt also in der Geometrie mit Recht, dass jede Größe ins Unendliche teilbar sei, und dass man nie mit einer solchen Teilung so weit kommen könne, dass eine noch weitere Teilung an sich selbst unmöglich würde. Aber man muss hier immer das, was an sich selbst möglich ist, wohl von dem unterscheiden, was wir im Stande sind auszuführen. Unsre Ausübung hat allerdings nur sehr enge Grenzen. Wenn man, zum Beispiele, einen Zoll in tausend Teile zerschnitten hat; so sind diese Teilchen schon so klein, dass sie unserem Auge entwischen, und eine noch weitere Teilung würde uns sicher unmöglich sein.
>
> Aber man darf nur diesen tausendsten Teil eines Zolls durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachten, das zum Beispiele etwa tausend-

> mal vergrößert, so wird uns jeder Teil wieder so groß erscheinen, als der ganze Zoll unserem bloßen Auge erschien. Es lässt sich also die Möglichkeit einsehen, jeden dieser Teile wieder in tausend Teile zu zerschneiden; und der nämliche Schluss lässt sich immerfort wiederholen, weil die Gründe immer die selbigen bleiben.[3]

Euler schrieb diesen Text im Jahr 1762, die Zitate stammen aus der zweiten deutschen Auflage von 1773. Wie aktuell sind diese Gedanken? Haben sie noch etwas zu tun mit dem, was mathematische Schulbildung heute ist oder sein sollte?

Sind dies Inhalte für eine aristokratische oder bildungsbürgerliche Erziehung oder kann das Nachdenken über Prozesse, die ins Unendliche führen, auch heute bei Schülerinnen und Schülern Interesse, Staunen und Faszination wecken, z. B. bei Gesamtschülern aus Gelsenkirchen?

Ich glaube schon, und viele Unterrichtsbeispiele können dies bestätigen. Und ich denke, dass wir auch heute bei der Umsetzung kompetenzorientierten Unterrichts diese Art des Denkens, die mit einer gewissen Grenzerfahrung verbunden ist zwischen dem was real gegeben und dem was gedanklich möglich ist, nicht zu kurz kommen lassen sollten. Denn sind es nicht letztlich mathematische Erfahrungen dieser Art, die viele von uns selbst dazu gebracht haben, sich nach der Schule mit Mathematik zu befassen?

Wenn ich überlege, was mir Euler nach dem Lesen dieser interessanten Briefe sagt – oder sagen würde –, dann ist es mit einem leicht verschmitzten Lächeln vielleicht Folgendes:

> Vergesse er nicht, dass Berechnungen zur Ermittlung des günstigsten Hundefutters, des besten Sparkontraktes oder des größten Vorteils beim Einkaufe nicht alles sind, was die mathematische Bildung der Jugend verlangt. Bedenke er, dass im Geiste gar vieler Discipuli ein Wunsch nach Erkenntnis schlummert, für den die Kunst der Mathematica ein trefflich Spielfeld und ein Brunnen der Erkenntnis ist.[4]

Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche und spannende Tagung. Herzlichen Dank!

Was glauben Lernende, wie unser Wissen entsteht, und wie erfasst man dieses Thema?

Bericht über ein Symposium zu epistemologische Überzeugungen

Benjamin Rott

Am Freitag und Samstag, 17. und 18. 4. 2015, fand in Essen ein Symposium zum Thema „epistemologische Überzeugungen“ (= Überzeugungen zur Natur des menschlichen Wissens und seiner Rechtfertigung) statt. Erschienen sind als Experten zu diesem Thema Psychologen (aus Münster und Freiburg) und Mathematikdidaktiker (aus Hamburg, Bremen, Freiburg und Essen). In entspannter und kollegialer Atmosphäre wurden verschiedene Schwierigkeiten – u. a. begriffliche, inhaltliche und messmethodische – diskutiert, die die aktuelle Forschung vor neue Herausforderungen stellen. Hierzu war im Vorfeld eine umfangreiche Literaturliste (aus als bekannt vorausgesetzten „Basisartikeln“ und relativ neuen, evtl. sogar umstrittenen „Diskussionsartikeln“) vereinbart worden. Verteilt über die beiden Tage wurden hierzu mehrere Impulsvorträge von den Teilnehmern gehalten. Die folgenden Ausschnitte aus den Diskussionen sollen den Lesern einen Eindruck vom Symposium und seinen Inhalten ermöglichen:

Der erste Impulsvortrag, gehalten von Elmar Stahl (PH Freiburg), behandelte die Theorie der *cognitive flexibility*, basierend auf einem Artikel von Stahl (2011). Dort wird unterschieden zwischen stabilen epistemologischen Überzeugungen und flexiblen epistemologischen Urteilen, die je nach Situation angewandt werden. Nach der Auffassung von Stahl ist es schwierig, epistemologische Überzeugungen direkt zu messen – v. a. mit den verbreiteten Selbstauskunft-Fragebögen – da in entsprechenden Situationen immer auch andere

[3] Ebenda, S. 181 ff. Die Diktion einiger Wörter wurde der heutigen Schreibweise angepasst.
[4] Hierbei handelt es sich nicht um ein Originalzitat Eulers, sondern um einen retrospektiv-visionären Gedanken, der den Vortragenden nach dem Genuss Badischen Weines überkam, der jedoch ungeachtet dessen demselben auch am nächsten Morgen noch vortragswürdig erschien. Für den Fall möglicher Missverständnisse bittet er um Nachsicht und Vergebung.

kognitive Elemente (inhaltliches und methodisches Wissen, soziale Aspekte etc.) aktiviert würden und das Antwortverhalten mit beeinflussten. Diese Erfahrungen konnten von anderen Teilnehmern bestätigt werden, beispielsweise wurde im Projekt FORMAT (u. a. Timo Leuders, PH Freiburg) festgestellt, dass Änderungen entsprechender Überzeugungen insbesondere mit starken affektiven Erlebnissen (Aha!-Momenten) verbunden sind. Wichtig wäre, so der Tenor in der Diskussionsrunde, neben klassischen Fragebögen auch andere Messverfahren wie konnotative Urteile (CAEB, Stahl & Bromme 2007), Interviews oder Lerntagebücher heranzuziehen. Hier könnten auch Elemente aus der *conceptual change*-Theorie eine sinnvolle Ergänzung der Grundlagen darstellen.

Im Anschluss wurde über Begrifflichkeiten gesprochen. In der aktuellen Forschung werden viele ähnliche Begriffe mit unterschiedlichen Bedeutungen und verschiedene Begriffe mit ähnlichen Bedeutungen verwendet. Man spricht z. B. von epistemologischen oder epistemischen Überzeugungen, von *epistemic cognition* oder *personal epistemology*.

Im zweiten Impulsvortrag stellte Benjamin Rott (Universität Duisburg-Essen) den Versuch von Hannula (2012) vor, die Theorie zu *beliefs*, *motivation*, *emotion* (u. ä.) zu sortieren und die Bezüge deutlicher herauszustellen. Dabei bezieht Hannula neben psychologischen bewusst auch physiologische und soziale Aspekte mit ein und unterscheidet *state* und *trait* Zustände. In dem Artikel wird somit ein dreidimensionales Modell mit 18 Bereichen vorgestellt. In der anschließenden Diskussion stellte sich heraus, dass den meisten Teilnehmern des Symposiums eine solche Unterteilung zu fein ist. Die einzelnen Bereiche könnten nicht mehr sinnvoll unterschieden werden. Manchmal wäre es vielleicht auch gut, wenn Begriffe ein wenig „fuzzy" wären, solange deutlich herausgestellt wird, was aus welchen Gründen gemessen wird.

Im letzte Impulsvortrag am Freitag präsentierte Dorothe Kienhues (Universität Münster) einen Artikel zum *public understandig of science* (Sinatra et al. 2014) vor. Sie stellte die Frage, inwiefern es eine gute Strategie sei, nicht alles in Frage zu stellen, sondern Experten zu vertrauen. In Bezug auf die Mathematik wurde diskutiert, dass die meisten „mathematischen Fehler", die in der Öffentlichkeit wahrgenommen würden, eher in der Verantwortung von Physikern oder Ingenieuren lägen, die falsche Modelle auswählten, als dass die angewandte Mathematik an sich Unsicherheiten aufweisen würde.

Der Samstagmorgen wurde eingeleitet mit Fragen, die Eva Müller-Hill (Universität Köln) an den Artikel von Hofer (2000) stellte. Inwiefern sei es z. B. valide, einen Belief-Fragebogen zweimal nacheinander in Bezug auf verschiedene Disziplinen einzusetzen, um etwas über Disziplinspezifität von Überzeugungen zu erfahren? Mit diesem Verfahren des mehrfachen Einsatzes von Fragebögen hatten einige Teilnehmer des Symposiums gute Erfahrungen gemacht und sahen keine größeren Schwierigkeiten darin, dieselben Fragen zweimal zu stellen. Bei größeren Gruppen wäre es aber natürlich gut, die Reihenfolge zu variieren und/oder zusätzliche qualitative Daten einzuholen, um unterschiedliche Antwortmuster besser zu verstehen und deuten zu können. In diesem Zusammenhang wurde auch darüber diskutiert, inwiefern die Mathematik vielleicht eine „epistemologische Ausnahme" darstelle und in Bezug auf ihre Epistemologie und zugehörige Überzeugungen anders behandelt werden müsste als andere Wissenschaften. Schließlich stellte sich die Frage, inwiefern einzelne Messinstrumente (z. B. Fragebögen) in der Lage seien, das ganze Spektrum von Laien bis Experten sinnvoll abzudecken oder wo Grenzen entsprechender Instrumente lägen, die insbesondere für SchülerInnen oder Studierende entwickelt worden seien. Bei Intelligenztests wäre es beispielsweise auch so, dass es spezielle Tests für Hochbegabte gebe, da die normalen Tests in diesem Bereich nicht mehr sinnvoll zwischen verschieden hoher Testleistung unterscheiden könnten. Schließlich wurde darüber gesprochen, inwiefern kategorische Aussagen („principles in this field are unchainging") mithilfe von Likert-Skalen (strongly disagree, disagree, agree, strongly agree) bewertet werden könnten. Für die Psychologen stellte die kein Problem dar, die Mathematiker hatten da schon eher Bauchschmerzen (man stelle sich vor, die Aussage „alle Primzahlen sind ungerade" sollte auf so einer Skala bewertet werden – kreuzt man „agree" an, weil die Aussage für fast alle Primzahlen stimme oder muss man wegen der Zwei mit „strongly disagree" antworten?).

Der vorletzte Impulsvortrag war von Timo Leuders (PH Freiburg) bewusst als ein wenig „exotisch" angekündigt worden. Im Anschluss an die Diskussion, inwiefern unsere Messinstrumente sensibel für Expertensichten seien, wurde mit dem Artikel von Gowers (2013) die Sicht eines „extremen Experten" (Fields-Medaillen-Träger) auf die Epistemologie der Mathematik, sozusagen als Einzelfallstudie, vorgestellt. Gowers versucht zu ergründen, ob Mathematik entdeckt oder erfunden sei. An verschiedenen Beispielen macht er deutlich, dass dies nicht so pauschal beantwortet werden könne, sondern dass es verschiedene Bereiche der Mathematik gibt, die wie entdeckt wirken, wohin andere ganz eindeutig konstruiert wirken.

Für die Forschung zu epistemologischen Überzeugungen bedeutet dies, das pauschale Aussagen („Mathematik ist eher so oder eher so“) zumindest aus Expertensicht nicht getroffen werden können.

Abschließend wurde der Artikel von Rott, Leuders und Stahl (2015), vorgestellt von Benjamin Rott, diskutiert. Im Artikel wird eine andere Art von Erfassung epistemologischer Überzeugungen dargestellt: Texte von Studierenden auf epistemologische Fragen wurden bewertet, indem nicht nur eine bestimmte Position (*mathematisches Wissen ist sicher* oder *unsicher*), sondern auch die zugehörige Argumentation (*inflexibel* oder *sophistiziert*) erhoben wurde. Abgesehen von ein paar Fragen zur Methode – Hängt die Kodierung, ob eine Aussage sophistiziert ist oder nicht, vielleicht eher mit der Argumentationskompetenz als mit den Überzeugungen zusammen? – wurde die Methode als innovative Ergänzung zum Messproblem gesehen.

Das Symposium endete am frühen Samstagnachmittag mit einer Abschlussrunde, in der der konstruktive Charakter und die flexible Gestaltung der Diskussion hervorgehoben wurden. Die Teilnehmer konnten mit vielen Anregungen die Heimfahrt antreten.

Schlussbemerkung: Die Finanzierung dieses Symposiums verdanken wir einem Teilprojekt des Projekts LeScEd (Learning the Science of Education) aus der BMBF-Förderinitiative KoKoHs (Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor), das an der PH Freiburg von Timo Leuders und Elmar Stahl eingeworben wurde.

Literatur

Gowers, T. (2013). Is Mathematics Discovered or Invented? In: M. Pitici (Hrsg.), *The Best Writing on Mathematics* (S. 8–20). Princeton und Oxford: Princeton University Press.

Hannula, M. S. (2012). The Structure and Dynamics of Affect in Mathematical Thinking and Learning. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 34–60). University of Rzeszów, Poland.

Hofer, Barbara K. (2000). Dimensionality and Disciplinary Differences in Personal Epistemology. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 378–405.

Rott, B., Leuders, T., & Stahl, E. (2015). Assessment of Mathematical Competencies and Epistemic Cognition of Preservice Teachers. *Zeitschrift für Psychologie* 2015, 223(1), 39–46.

Sinatra, G. M., Kienhues, D. & Hofer, B. (2014). Addressing Challenges to Public Understanding of Science: Epistemic Cognition, Motivated Reasoning, and Conceptual Change. *Educational Psychologist* 2014, 1–16.

Stahl, E. & Bromme, R. (2007). The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs. *Learning and Instruction, 17*, 773–785.

Stahl, E. (2011). The generative nature of epistemological judgments: Focusing on interactions instead of elements to understand the relationship between epistemological beliefs and cognitive flexibility. In J. Elen, E. Stahl, R. Bromme, & G. Clarebout (Eds.), *Links between beliefs and cognitive flexibility: lessons learned* (pp 37–60). Berlin: Springer.

Benjamin Rott, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen
Email: benjamin.rott@uni-due.de

MACAS – 2015: Erfolgreiches Jubiläumssymposium an der PH Schwäbisch Gmünd

Astrid Beckmann

Vom 28. bis 30. Mai 2015 kehrte die internationale wissenschaftliche Tagung *MACAS – Mathematics And It´s Connections To The Arts and Sciences* zum 10jährigen Jubiläum wieder an ihren Gründungsort PH Schwäbisch Gmünd zurück. An drei intensiven Tagen diskutierten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus Amerika, Asien und Europa die interdisziplinären Verbindungen zwischen Mathematik und anderen Disziplinen, wie Kunst, Musik, Sprache, Physik, Informatik, Biologie und Geschichte. Dabei wurden theoretische Beziehungen und integrative curriculare Ansätze genauso angesprochen wie die Bedeutung der Interdisziplinarität, der Ästhetik und der Emotionen für das Mathematiklernen. Die Tagung wurde großzügig unterstützt vom Laboratory for Coherent Education and Learning der Syddansk Universität Odense sowie vom Verein der Freunde der PH Schwäbisch Gmünd. Im Herbst wird ein Tagungsband erscheinen. Die nächsten MACAS-Tagungen sind für 2017 in Kopenhagen und für 2019 in Beijing, China geplant.

Astrid Beckmann, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Oberbettringer Straße 200, 73525 Schwäbisch Gmünd
Email: astrid.beckmann@ph-gmuend.de

Tagungseinladungen

ISTRON-Herbsttagung 2015:
Mathematisch Modellieren – Praxisnah
Kaiserslautern, Technische Universität
1.–2. 10. 2015

Die Sprecher der ISTRON-Gruppe freuen sich auch in diesem Jahr zur Herbsttagung der ISTRON-Gruppe herzlich einzuladen. Die Herbsttagung steht unter dem Motto *Mathematisch Modellieren – Praxisnah* und wird vom 1. bis 2. Oktober 2015, veranstaltet durch das Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS), an der TU Kaiserslautern stattfinden. Wie in jedem Jahr besteht die Herbsttagung aus einem internen Treffen der ISTRON-Gruppe und einem Fortbildungstag für Lehrkräfte.

Im Laufe der ISTRON-internen Tagung am 1. 10. 2015 wird die Möglichkeit bestehen, in den Räumlichkeiten des Fraunhofer Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik das tägliche Umfeld der dort arbeitenden Wissenschaftler kennen zu lernen. Des Weiteren beschäftigen wir uns in diesem Jahr mit der Frage, wie mathematisches Modellieren auch in der Abiturprüfung möglich ist. Ein Impuls-Vortrag von Prof. Dr. Werner Blum – dem Gründer der ISTRON-Gruppe – soll eine anregende Diskussion ermöglichen. Der ISTRON-Fortbildungstag am 2. 10. 2015 gibt vor allem Lehrkräften die Möglichkeit, an einem sehr vielfältigen Fortbildungs-Programm teilzuhaben. Als Hauptvortragender wird Prof. Dr. Hans-Stefan Siller „Mit Mathematik Realität begreifen“. Das Aufgreifen realer und realitätsbezogener Problem- oder Fragestellung kann vor allem für Fragen der Sinngebung verwendet werden, sodass neben motivationalen und inhaltlichen Einsichten auch der Ausblick auf weitergehende Mathematik ermöglicht wird. Der zweite Hauptvortragende Prof. Dr. Helmut Neunzert glaubt „Alles Leben ist Problemlösen“. Dieses Zitat von Karl Popper liefert einen anregenden Impuls zur Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen. Zusätzlich gibt es ein reichhaltiges Workshop-Programm und weitere Vorträge, welche die Bedeutung des mathematischen Modellierens für den Mathematikunterricht aufgreifen und anregende Ideen beinhalten. Das Programm können Sie unter der Homepage der ISTRON-Gruppe www.istron-gruppe.de finden.

Für die Tagung fallen keine Tagungsgebühren an. Verpflegungs- bzw. Übernachtungskosten tragen die Teilnehmenden selbst. Eine Liste mit Hotels, die selbst gebucht werden müssen, wird über die Email-Liste der ISTRON-Gruppe mitgeteilt, Weitere Informationen gibt die Tagungshomepage www.istron-gruppe.de [279D?] Tagungen. Über Ihre Anmeldung zur Herbsttagung, die über die Tagungshomepage erfolgt, würden wir uns sehr freuen. Anmeldeschluss ist der 25. 9. 2015.

Lokale Tagungsleitung: Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule, Wolfgang Bock, Martin Bracke, Jana Kreckler.

Für die ISTRON-Gruppe: Gilbert Greefrath, Hans-Stefan Siller

Herbsttagungen der Arbeitskreise

AK Problemlösen
Halle (Saale), Universität Halle-Wittenberg,
3.–5. 9. 2015

Die diesjährige Herbsttagung des Arbeitskreises Problemlösen findet vom 3.–5. September an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg statt. Sie ist zugleich 17. Jahrestagung der europäischen ProMath-Gruppe (Problem Solving in Mathematics Education) mit dem Titel „Learning through Problem Solving“.

In einem Hauptvortrag wird Helmut König (Chemnitz) über Weiterentwickungen von Ideen Pólyas für die außerunterrichtiche Förderung und die Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrerinnen und -lehrer berichten. Darüber hinaus soll das Treffen vor allem Gelegenheit geben, in Workshops und Kurzvorträgen mit längeren Diskussionszeiten aktuelle Forschungsarbeiten zur Diskussion zu stellen.

Ein Tagungsband soll in der Reihe Ars Inveniendi et Dejudicandi des WTM-Verlags erscheinen.

Weitere Informationen findet man unter http://promath.org/meeting2015.html.

Für den AK: Ana Kuzle, Benjamin Rott (SprecherInnen)

AK Geometrie
Saarbrücken, Universität des Saarlandes,
11.–13. 9. 2015

Vom 11. 9. 2015 bis zum 13. 9. 2015 findet die 32. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der

GDM statt. Das diesjährige Tagungsthema ist *Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen*.

Geometrie beginnt mit Phänomenen – außer- wie innermathematischen –, mit deren Erahnen, Erblicken, Erkennen, Erfassen und Erklären. In diesem Prozess bilden sich aus in Zusammenhängen gewollten Eigenschaften Begriffe heraus, werden vernetzt und in ihrem Zusammenwirken wiederum Grundlage mathematischer Struktur und deren Untersuchung.

Ein ebener Spiegel spiegelt, Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden, längentreu und winkeltreu. Er führt uns zur Abbildungsgeometrie und liefert uns Symmetrie. Oder war die Symmetrie zuerst da? Welche Rolle spielen Relationen? Wie kommt es vom Konkreten zum Abstrakten? Welche Eigenschaften interessieren? Warum bleibt vom Spiegel nur noch eine Gerade? Wann? Und umgekehrt: Welche Phänomene benötigen wir für die von uns im Geometrieunterricht gewünschten Begriffe und Strukturen? Und welche wünschen wir uns eigentlich?

Der allgemeinbildende Geometrieunterricht hat schon viele Aufgaben zu erfüllen, etwa (nach Holland) Sprache zur Erschließung der Umwelt zur Verfügung zu stellen, Vorbild wissenschaftlichen Arbeitens zu sein und allgemeine Problemlösefähigkeiten erwerben zu lassen. Bietet gerade die Sichtweise „Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen" ein geeignetes Umfeld, die genannten Ziele besser und darüber hinaus integriert zu erreichen?

Auf der Tagung ist Gelegenheit, diesen Fragen und weiteren gemeinsam nachzugehen, Antwortversuche zu diskutieren und auch ganz neue Fragen zu stellen.

Als Hauptvortragenden konnten wir Aad Goddijn vom Freudenthal Institut gewinnen.

Die Tagung findet an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken statt; die Unterbringung erfolgt in der Hermann Neuberger Sportschule, die am Rand des Campus gelegen ist. Tagungsbeginn ist Freitag um 18 Uhr mit einem gemeinsamen Abendessen. Tagungsende ist Sonntag um 13 Uhr.

Die Tagungsgebühr beträgt mit Übernachtungen und Verpflegung 190,– €, ohne Übernachtungen (aber mit Abendessen Fr. und Mittagessen Sa.+So.) 110,– €.

Weitere Informationen zur Tagung und die Modalitäten der Anmeldung finden Sie gesammelt unter http://www.math.uni-sb.de/lehramt/index.php/ak-geometrie/40-ak-geo/371. Wir hoffen, auch dieses Jahr wieder zahlreiche aktive Gäste in Saarbrücken begrüßen zu dürfen.

Für den AK: Andreas Filler und Anselm Lambert (Sprecher des AK)

AK Interpretative Unterrichtsforschung
Halle (Saale), Universität Halle-Wittenberg, 9.–11. 10. 2015

Nach der Gründungstagung im Oktober 2013 in Braunschweig und der 1. Herbsttagung an der Universität Dresden lädt der AK Interpretative Forschung zu seiner 2. Herbsttagung ein:
Ort: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III Erziehungswissenschaften, Franckeplatz 1, Haus 31
Zeit: Freitag, 9. Oktober (15:00 Uhr) bis Sonntag, 11. Oktober (13:00 Uhr)

Geplant sind wieder *Interpretationssitzungen* von etwa zweieinhalb Stunden Länge sowie ein *Input-Beitrag* mit *Prof. Dr. Georg Breidenstein* (Ethnographische Schulforschung, MLU Halle-Wittenberg). Neben der Interpretationsarbeit wird somit auch Zeit sein, über Methodik und Methodologie der Untersuchung zu diskutieren.

Interessierte melden sich bitte bis 31. 8. 2015 bei: Birgit Brandt (birgit.brandt@paedagogik.uni-halle.de)

Mit dem *Hotel am Steinplatz* ist ein Abrufkontingent vereinbart. Unter http://www.am-steintor.de/pages/modern_2_colors_index.html oder hotel@am-steintor.de und dem Kennwort „AK Interpretative" können Zimmer zu folgenden Konditionen gebucht werden: Einzelzimmer: 44 Euro/Nacht Doppelzimmer: 55 Euro/Nacht (inkl. Frühstück).

Bitte bei der Anmeldung angeben, ob und welche Zimmerreservierung im Hotel Steinberg erfolgte.

Für den AK: Birgit Brandt & Frank Förster (SprecherInnnen)

AK „Frauen und Mathematik"
Würzburg, 15.–17. 10. 2015

Die diesjährige Herbsttagung des Arbeitskreises „Frauen und Mathematik" findet zusammen mit der mathematik-historischen Tagung „MathematikGeschichten" von Do, den 15. 10. 2015, bis Sa, den 17. 10. 2015, in Würzburg statt.

Die Tagung mit Vorträgen rund um das Thema „Rezeption und Bekanntheitsgrad von bedeutenden Mathematikerinnen" beginnt am Do um 9:30 Uhr, der Freitag gilt als Doppeltagung mit dem Schwerpunkt „Frauen in der Geschichte der Mathematik". Am Samstag setzt der Arbeitskreis „Frauen und Mathematik" sein Treffen mit weiteren Aspekten der Genderfrage in der Mathematik fort, vor allem was den Mathematikunterricht und Mathematikveranstaltungen an der Universität betrifft.

Programm der mathematik-historischen Tagung ‚MathematikGeschichten' am 15. und 16. Oktober 2015

- Donnerstag, 9:00 Uhr: Eröffnung der Tagung
- Donnerstag, 10.00 Uhr: Renate Tobies (Universität Jena): „Iris Runge bei Osram und Telefunken: ‚Morgen möchte ich wieder 100 herrliche Sachen ausrechnen.' "
- Donnerstag, 11.30 Uhr: Catherine Goldstein (CNRS, Institut de mathematiques de Jussieu – Paris Rive gauche): Titel N.N.
- Donnerstag, 15 Uhr: Annette Vogt (Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte Berlin): „Emma S. und Wladimir S. Woytinsky – ein vergessenes Forscher-Ehepaar in der Statistik"
- Donnerstag, 16.30 Uhr: Elisabeth Mühlhausen (Felix Klein Gymnasium Göttingen): „TOGETHER – das Mathematikerpaar Grace Emily Chisholm Young und Henry William Young"
- Freitag, 09:00 Uhr: Eva Kaufholz-Soldat (Universität Mainz): „Vom Erinnern und Vergessen. Reflexionen über den Bekanntheitsgrad Sofja Kowalewskajas im Vergleich mit Zeitgenossinnen"
- Freitag, 10:30 Uhr: Cordula Tollmien: „Auch die Tochter ihrer Mutter – Emmy Noethers sozialpolitisches Engagement"

Programm zum Herbsttreffen des AK Frauen und Mathematik am 16. und 17. Oktober 2015

- Freitag, 13:30 Uhr: Hanna Gaspard (Universität Tübingen): „Geschlechtsunterschiede in den Wertüberzeugungen für Mathematik und Interventionsansätze zur gezielten Förderung"
- Freitag, 15:00 Uhr: Vortrag Schulentwicklungsforschung (N.N.)
- Freitag 16:30 Uhr: Christine Ott (Universität Würzburg): „Der Geschlechterdiskurs im und ums Mathematikbuch"
- Samstag, 09:00 Uhr: Sitzung des Arbeitskreises
- Samstag, 10:00 Uhr: Anna Kristina Binder: „Vorstellung des Dissertationsprojekts: Raumvorstellungsvermögen von Grundschulkindern"
- Samstag, 11:30 Uhr: Almut Zwölfer: „Simulierte Welten - Begabtenförderung an der Schule"
- Samstag, 14:00 Uhr: Silke Fleckenstein: „Geschlechtersensibler Mathematikunterricht zum Umgang mit Heterogenität"
- Samstag, 15:30 Uhr: Rose Vogel: „Gender- und diversitätssensible Lehramtsausbildung – ein Seminarkonzept für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik"

Das vollständige Tagungsprogramm und die Anmeldemodalitäten werden veröffentlicht unter: http://www.math.uni-augsburg.de/projekte/ak_frau_math/aktuelles/ und http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~oswald/projekte.html.

Für Rückfragen wenden Sie sich an die Arbeitskreissprecherin Renate Motzer (renate.motzer@math.uni-augsburg.de) oder an die Organisatorin der Tagung Nicola Oswald (nicola.oswald@mathematik.uni-wuerzburg.de).

AK Mathematik und Bildung
Berlin, Freie Universität, 6.–8. 11. 2015

Die diesjährige Herbsttagung des AK Bildung setzt einen inhaltlichen Schwerpunkt mit dem Arbeitsthema „Kritische Mathematikdidaktik und Herausforderungen an mathematische Bildung". In den letzten drei Jahrzehnten haben sich zahlreiche kritische Strömungen etabliert, die die Praxis und Theorie des Mathematikunterrichts gesellschaftskritisch hinterfragen. Kritische Mathematikdidaktik stellt insbesondere immer wieder zur Debatte, was Mathematikunterricht derzeit bewirkt, leisten kann und schließlich leisten soll, und ist daher ein guter Anlass, sich dem Arbeitskreisthema „Mathematik und Bildung" einmal aus einer anderen Perspektive zu nähern.

Neben der Diskussion richtungsweisender Grundlagentexte, die rechtzeitig für alle Tagungsteilnehmer bereitgestellt werden, wird es Schwerpunktvorträge und Gelegenheiten zum Diskutieren und Weiterdenken geben. Mit den Beiträgen von Andrea Hoffkamp (HU Berlin), Hauke Straehler-Pohl (FU Berlin) und Sverker Lundin (Göteborg) stehen bereits drei interessante Gastvorträge auf dem Programm.

Daneben wird es auch freie Beiträge zu Mathematik und Bildung geben.

Wir laden alle Interessierten herzlich zur Teilnahme ein und rufen zur Einreichung von Abstracts für Vortragsbeiträge (reine Vortragszeit 30 Minuten) – zum diesjährigen Schwerpunktthema oder als freien Beitrag – auf.

Abstracts können bis zum 15. September 2015 per Email an eva.mueller-hill@uni-koeln.de eingereicht werden. Der Umfang der Abstracts sollte zwischen 200 und 500 Wörtern liegen.

Eine Anmeldung zur Tagung ist ab dem 15. Juni 2015 möglich. Aktuelle Informationen zum Programm, zu Unterkunftsmöglichkeiten und zu den Anmeldemodalitäten finden Sie unter http://www.uni-potsdam.de/gsp-mathematik/akmub.html. Es wird keine Tagungsgebühr erhoben. Wir bitten um möglichst frühzeitige Anmeldung, spätestens aber bis zum 15. August, um die Raumplanung vor Ort zu erleichtern. Wir freuen uns auf eine produktive und anregende Tagung.

Für den AK: David Kollosche und Eva Müller-Hill (SprecherInnen)

AK „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich Schladming, Hotel Royer, 12.–13. 11. 2015

Die Herbsttagung des GDM-AK Österreich findet im Hotel Royer (Schladming) statt. Wir freuen uns auf zahlreiche Teilnahmen und regen Austausch.

Als mögliche Themenvorschläge für die Herbsttagung 2015 sind derzeit angedacht:

1. Querschnittsthemen (z. B. Inklusion, Heterogenität, usw.) in Curricula und Forschung
2. Vorstellung von aktuellen Nachwuchsaktivitäten (insbesondere Dissertationen)

Wir würden uns freuen, wenn es für die Detailplanung des Programms reiche Meldungen für Präsentationen/Inputs zu den beiden oben genannten Themen gibt. Gerne nehmen wir aber auch weitere Themenvorschläge für die Tagung entgegen.

Bitte senden Sie Ihre Meldungen zu den beiden Themen sowie weitere Themenvorschläge bis spätestens Mittwoch, 30. September 2015, an evelyn.stepancik@ph-noe.ac.at .

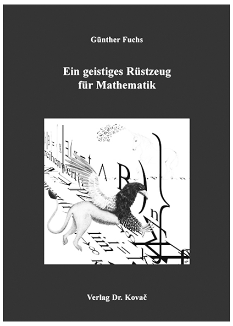
Zu guter Letzt ersuchen wir unter dem Betreff „GDM-AK Herbsttagung 2015" um eigenständige Reservierung des Zimmers bis 12. 10. 2015 im Hotel Royer (Sporthotel Royer Schladming, Europaplatz 583, 8970 Schladming, Tel.: 0043 3687 200-0, http://www.royer.at), da bis zu diesem Termin ein entsprechendes Zimmerkontingent vorreserviert ist.

Für den AK: Evelyn Süss-Stepancik und Markus Hohenwarter (SprecherInnen)

Editorischer Hinweis: Wir haben alle Arbeitskreisleitungen um Einladungen zu Herbsttagungen/Nennung der Termine gebeten. Für die Arbeitskreistermine weiterer Arbeitskreise konsultieren Sie bitte ggf. http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreise_der_GDM.

Günther Fuchs: Ein geistiges Rüstzeug für Mathematik

Rezensiert von Jürgen Maaß



Um dieses Buch zu verstehen, ist es hilfreich zu wissen, dass der Autor von Bruno Buchberger promoviert wurde und als Mathematiklehrer viele Jahre an einem Gymnasium sowie an der PH Tirol gearbeitet hat. Seine Sicht von Mathematik und seine Auffassung über jene Aspekte von Mathematik, die im üblichen Unterricht zu wenig verdeutlicht werden, aber für ein gutes und zum Studium notwendiges Verständnis von Mathematik eigentlich wichtig wären, haben sich in vielen Jahren entwickelt; der letzte Anlass dazu, dieses Buch mit einer systematischen Darstellung seiner Sicht zu schreiben, kam nach seiner Pensionierung durch eine nebenberufliche Tätigkeit als Kursleiter in einem Kurs zur Berufsreifeprüfung. Hier werden in 9 Monaten Berufstätige auf eine Prüfung zur Erlangung der Matura (Abitur) vorbereitet.

Wie lässt sich die besondere Sicht des Autors auf die Mathematik am besten beschreiben? Durch Zitate! Im 2. Kapitel (Titel: „Das abstrakte Universum der Mathematik") schreibt er einleitend:

> Die Ideenwelt der Mathematik ist das Produkt einer Jahrtausende langen Entwicklung und Erfahrung in der Kulturgeschichte der Menschheit. Ein (sehr bescheidener) Teil dieser Ideenwelt wird in diesem Buch vorgestellt. Sie kann nicht durch die Sinne erfahren werden, sondern kommt nur in den Hirnen von Mathematikern und solchen Leuten vor, die Mathematik anwenden... Es hat sich herausgestellt, dass für die Mathematik, d. h. zum Modellieren unserer realen Welt für die Zwecke der Technik, Wirtschaft, Physik, Biologie, etc. etc., erstaunlich wenig grundlegende Konzepte ausreichen, nämlich jeweils gedachte Gegenstände, Vorgänge und Beziehungen. Die Mathematik erklärt nicht, was ein Gegenstand, ein Vorgang oder eine Beziehung ist. Vielmehr wird vorausgesetzt, dass jeder darüber bereits eine klare Vorstellung besitzt. (S. 3)

Was sind in dieser Mathematik Gegenstände etc.?

> Die gedachten Vorgänge in der Ideenwelt der Mathematik heißen auch Funktionen. Sie sind so konzipiert, dass ihre Anwendung auf einen oder mehrere gedachte Gegenstände, welche auch Argumente heißen, genau einen neuen Gegenstand, den so genannten Funktionswert, erzeugt. (S. 4)

Und weiter:

> Eigenschaften und Beziehungen im Universum der Mathematik heißen Prädikate. Sie sind so konzipiert, dass ihre Anwendung auf (d. h. ihre Betrachtung für) einen oder mehrere Gegenstände, die wieder Argumente heißen, zutreffen kann oder auch nicht. (S. 5)

Der Autor erläutert in insgesamt 26 Kapiteln das, was aus seiner Sicht der Mathematik den Weg von der Sekundarstufe zur Universität ausmacht (oder besser: ausmachen müsste, damit die künftigen Studierenden es beim Start eines Studiums leichter hätten): Die Sprache der Mathematik, die Rolle von Bildern, Beweise, Mengen, Mathematische Logik, Formeln, rationale und reelle Zahlen, Anfänge der Linearen Algebra (Cartesische Ebene, Lineare Funktionen und (Un-)Gleichungen), etwas Zahlentheorie und ein Ausblick auf die Analysis.

Es gelingt dem Autor, seine Grundidee in allen Kapiteln konsequent umzusetzen, das Werk ist aus einem Guss. Als Beispiel dafür zitiere ich aus dem Kapitel 12 „Der Wechsel zwischen einer Funktion und ihrem Graph" zunächst die einleitende Bemerkung:

> Die Mathematik erklärt nicht, was ein Objekt, eine Funktion oder ein Prädikat ist. Man kann aber über einzelne (bestimmte) Objekte, Funktionen und Prädikate sprechen, indem man sie mit Individuenkonstanten, Funktionskonstanten und Prädikatenkonstanten (das sind die Begriffe der Mathematik) bezeichnet.
> Insbesondere kann man z. B. nicht definieren, was eine Funktion ist. Sehr wohl kann man aber mit Hilfe der Mengenlehre definieren, was ein Funktionsgraph ist. Bisher haben wir die Gesamtheit der geordneten Paare $(x, f(x))$, wo x über dem Definitionsbereich D_f einer Funktion f läuft, den Graph von f genannt. (S. 113).

Nach einigen weiteren Schritten kommt der Autor dann zur angestrebten Definition eines Funktionsgraphen (S. 113):

$$\phi : M \to N :\Leftrightarrow \phi \subseteq M \times N \wedge \underset{x\in M}{\forall} \ \underset{y}{\exists} !(x,y) \in \phi$$

Für „$\phi : M \to N$“ lies: $\underline{\phi \text{ ist ein Funktionsgraph von } M \text{ nach } N}$“.
Die Zeichenreihe „:→“ ist hier eine 3-stellige Prädikatenkonstante.
ϕ ist ein Funktionsgraph $:\Leftrightarrow \underset{M,N}{\exists}\ \phi : M \to N$

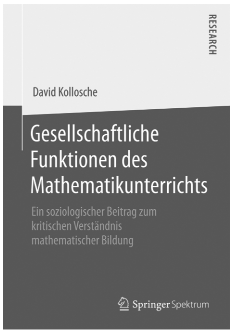
Alle Leser und Leserinnen dieser Rezension haben vermutlich schon die Schublade gefunden, in der sie dieses Buch einsortieren wollen. Mir scheint es dennoch wichtig, an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass ein solches Buch einen Platz in jeder Bibliothek haben sollte, die Lernende beim gründlicheren Verstehen von Mathematik unterstützen will. Zum besseren Verständnis gehört auch je ein Blick von verschiedenen Perspektiven auf die Mathematik. Allerdings glaube ich nicht, dass dieses Buch ohne fachkundige Erläuterung hilfreich ist; ein Schüler oder eine Schülerin, die mit diesem Buch als Weihnachtsgeschenk in der Hand allein versucht, die Lücke zwischen Schulunterricht und universitären Anforderungen zu schließen, wird vermutlich zu dem Schluss kommen, dass eine gut geschrieben Mathematik für Ingenieure oder eine Einführung in die Analysis bzw. Lineare Algebra ihm oder ihr dabei besser hilft.

Günther Fuchs: *Ein geistiges Rüstzeug für Mathematik*. Verlag Dr. Kovać, Hamburg 2014, ISBN 978-3-8300-8039-8, 258 S., 29,80 Euro

Jürgen Maaß, Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenbergerstraße 54, 4040 Linz, Österreich
Email: juergen.maasz@jku.at

David Kollosche: Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts

Rezensiert von Andreas Vohns



Die hier besprochene Dissertation von David Kollosche trägt den Untertitel „Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung“. Tatsächlich liegt die vielleicht größte Stärke und gleichermaßen das größtes Manko der Arbeit zugleich in der konsequenten und in diesem Sinne dann auch ungewöhnlich redlichen Orientierung an einer bestimmten soziologische Theorie, nämlich derjenigen von Michel Foucault. Foucault entlehnt Kollosche nicht einfach nur eine zentrale Analysekategorie („Dispositiv“), sondern er schließt sich darüber hinaus auch recht weitgehend Foucaults Gesellschaftsdeutung (insbes. im Falle der „Governmentalität“) an, orientiert sich an dessen (wenn man es denn so nennen will bzw. darf) methodischem Vorgehen („Genealogie“) und auch an dessen methodologischer Position und wissenschaftstheoretischer Grundüberzeugung (vulgo: „postmoderne Erkenntnistheorie“).

Ein Manko ist das insofern, als man als jemand, dem die Denkwelt Foucaults wenig bis gar nicht vertraut ist (der Rezensent meint sich hier v. a. selbst), doch enorm anstrengen muss, sich in diese erst einmal einzufinden und sie auch beständig im Hinterkopf behalten muss, wenn man sich dann denjenigen Kapiteln 5–8 zuwendet, in denen es um Mathematik und Mathematikunterricht geht. Ein Manko auch deshalb, weil ich vermute, dass sich viele mit dem Foucault entlehnten, recht radikalen Wissenschaftsverständnis und den daraus gezogenen erkenntnistheoretischen Grundannahmen kaum anfreuden werden können und dann eigentlich auch ab S. 6 schon aus der Argumentation aussteigen könnten.

Zum Aufbau der Arbeit: Das erste Kapitel („Wege zum Verstehen“) entfaltet ebendieses erkenntnistheoretische und methodologische Selbstverständnis. Im zweiten Kapitel erfolgt eine Bestimmung zentraler Topoi der Untersuchung, nämlich „Moderne“, „Pädagogik und Schule“, „Mathematikunterricht und -didaktik“ sowie „Mathematik“. Kapitel 3 entspricht am ehesten dem, was in anderen Dissertationen als Aufarbeitung des „Stands der Forschung“ gilt: Es wird ein (bisweilen sehr kritischer) Überblick über sozialkritische Beiträge aus der Mathematikdidaktik gegeben, der in einer Zuspitzung der Forschungsfrage mündet und aus Kolloschés Sicht eine weitere Erschließung der Focaultschen Gesellschaftstheorie nötig macht, der dann Kapitel 4 „Gesellschaft, Subjekt, Macht und Wissen“ gewidmet ist. Die Kapitel 5–8 sind dann der Hauptteil der Untersuchung, wobei die Kapitel 5 „Logik und Gesellschaft“ und 6 „Zeichnenrechnen und Gesellschaft“ zunächst eher auf gesellschaftliche Funktionen der Mathematik zielen, das Kapitel 7 „Aufgaben als Führungstechnik des Mathematikunterrichts“ dann dezidiert auf gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts bezogen ist und Kapitel 8 „Dispositive des Mathematischen“ gewissermaßen noch einmal eine Pointierung und Zuspitzung der vorherigen drei Kapitel auf Mathematikunterricht als „Disziplinarinstitution“ und Mathematikdidaktik als dazugehöriger „Disziplinarwissenschaft“ vornimmt. Die Arbeit schließt in Kapitel 9 mit einem Fazit, das zentrale Erkenntnisse der Analyse rückblickend aufzählt und Perspektiven der Weiterarbeit andeutet.

Dreh- und Angelpunkt von Kolloschés Analyse ist etwas, was man vielleicht am Einfachsten als „Negation von Mathematikdidaktik“ im Sinne Kritischer Theorie bezeichnen kann: Wo Mathematikdidaktik üblicherweise von der Grundannahme ausgeht, dass Mathematikunterricht etwas sei, das zu verändern, verbessern, mit Blick auf mögliche Wirkungen im Interesse der Individuen und der Gesellschaft optimierungsbedürftig und – fähig ist, orientiert sich Kollosche an Nietzsches „Genealogie der Moral“ und Foucaults genealogischer Methode, versucht den Mathematikunterricht in seinem faktischen Geworden-Sein vor dem Hintergrund seines historischen Werdens und gesellschaftlichen Eigenbunden-Seins zu verstehen. Die (negierte) Grundannahme ist dabei, dass der Mathematikunterricht so wie er ist (und sich vielen Reformbestrebungen zum Trotz beständig hält) eben nicht einfach historischen Zufällen geschuldetes Produkt, sondern Ergebnis gesellschaftlicher Emergenz ist, dabei in seinem Geworden-Sein u. U. bereits in einem bislang von der Mathematikdidaktik gar nicht wahrgenommenem Ausmaß bestimmten gesellschaftlichen Funktionen durchaus dienlich (was eine Erklärung für seine Reformresistenz sein könnte).

Kritisches Potenzial liegt in diesem radikalen Perspektivwechsel meinem Eindruck nach vor allem darin, dass das, was Kollosche in den „Dispositiven des Mathematischen“ als gesellschaftlich funktional herausarbeitet, einen ungeheuerlich entzaubernden Blick auf die Gesellschaft der Moderne und auf den in dieser Gesellschaft potentiell durchaus funktionalen Mathematikunterricht wirft. Funktional erscheinen dabei nämlich vor allem jene Züge des Mathematikunterrichts, die auf Anpassung an die bestehenden gesellschaftlichen Verhältnisse abzielen, auf das, was die Menschen „regierbar“ macht, ja ihnen ein Denken anempfiehlt und einimpft, das gerade nicht mehr die offene Ausübung von Macht erforderlich macht, sondern „Selbstführungstechnik“ ist, eine Form der Selbstdisziplinierung etabliert, die einer externen sanktionsbewährten Disziplinierung gar nicht mehr bedarf (so verstehe ich dann auch Foucaults Begriff der „Governmentalität“).

Dabei fördert Kollosche meinem Eindruck nach zunächst wenig neue Einzelheiten über gesellschaftliche Wirkungen von „Mathematik“ und „Mathematikunterricht“ hervor, die nicht diejenigen im dritten Kapitel dargestellten „sozialkritischen Beiträge der Mathematikdidaktik“ vor Kollosche ohnehin bereits in der einen oder anderen Weise thematisieren. Kollosche gelingt durch die Beschreibung der drei „Dispositive des Mathematischen“ (Logik, Rechnen, Mathematisierung) in Kapitel 8 allerdings eine beeindruckend stringente Pointierung, in der die wechselseitigen Beziehungen zwischen Mathematik, Gesellschaft und Unterricht die eigentlich bekannten Phänomene in einen größeren Zusammenhang stellen und tatsächlich helfen, diese in einem neuen Licht zu sehen.

Bedrückend wird die Analyse vor allem dadurch, dass Kollosche „Gesellschaft“, „Mathematik“ und „Mathematikunterricht“ zwar im strikten Weberschen Sinne idealtypisch konstruiert (vgl. Kapitel 1.4, S. 15/16), einem aber nahezu jedes Element des Idealtypus „Mathematikunterricht“ eben auch in der „gefühlten“ existierenden Praxis des Mathematikunterrichts als fest verankert, seinem „üblichen Trott“ fest eingebrannt erscheint. Das soll nun nicht heißen, dass das betreffende Kapitel 8 nicht auch gewisse Angriffsflächen bietet, selbst dann, wenn man Kolloschés methodologisches Bekenntnis zu bewusster Subjektivität und Einseitigkeit (Kapitel 1, v. a. S. 5–6) als grundsätzlich wissenschaftlich vertretbar bereits akzeptiert hat.

Die Zuspitzung und Eindringlichkeit erkauft sich Kollosche beinahe zwangsläufig durch eine gewisse Grobschlächtigkeit der Analyse, wenn etwa das „Dispositiv der Mathematisierung“ keinen Unterschied macht, ob und in welchem Bereich der wissenschaftlichen Kommunikation oder aber der öffentlichen Kommunikation Mathematisierungen stattfinden. Hier gehen andere Autorinnen und Autoren, auch die von Kollosche zitierten (Fischer, Heintz, Ortlieb, Porter) differenzierter vor und decken dadurch gewisse Nuancen der gesellschaftlichen Wirksamkeit von Mathematisierungen auf, die bei Kollosche aus dem Blick geraten.

Schwer verdaulich wird Kolloschés Analyse dann mathematikdidaktisch insofern, als eine Legitimation des Mathematikunterrichts durch dessen Anpassungsleistungen in einer demokratischen Gesellschaftsordnung eigentlich rational nicht vertreten werden kann, bei Kollosche aber Anpassungsleistungen die Hauptsache ihrer gesellschaftlichen Funktionalität ausmachen. Man kann die Rede von der „Negation" der (Mainstream- bzw. idealtypischen) Mathematikdikdidaktik dann hier noch einmal reformulieren: Kollosche diagnostiziert der Mathematikdidaktik, dass sie als gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts eigentlich nur Aufklärung und Emanzipation gelten lassen mag, also einseitig auf mögliche positive Wirkungen fokussiert. Gemessen an diesem Potential ist „real existierender" Mathematikunterricht eigentlich immer defizitär, kommt seinen gesellschaftlichen Funktionen nicht hinreichend nach. Kollosche dreht jetzt den Spieß um: Er greift sich mit Foucault eine kritische Gesellschaftstheorie heraus, deren Kerndiagnose darin besteht, dass die Gesellschaftsordnung der Moderne eben sehr wohl in ganz erheblichem Ausmaß auf Machtverhältnissen und (sublimierter) Machtausübung beruht und Anpassungsleistungen der Gesellschaftsmitglieder für ihren Fortbestand sehr wohl benötigt, in den Formen der Realisierung (Selbstdiziplinierung, Selbstführung, Governmentalität) aber eben deutlich subtiler ist, als vormoderne Gesellschaften dies waren. Wenn man nun (wie Kollosche) danach fragt, was Mathematik und Mathematikunterricht zur Stützung dieser „dunklen Seiten" der modernen Gesellschaftsordnung beitragen können, werden auf einmal viele Züge des didaktisch häufig kritisierten „herkömmlichen" Mathematikunterrichts verständlich in dem Sinne, als sie *diesen* gesellschaftlichen Funktionen als sehr wohl dienlich aufgefasst werden können.

Hiergegen sind mindestens zwei Einwände formulierbar: Zum Ersten ist die Behauptung einer Vereinseitigung der Mathematikdidaktik auf aufklärerische Zielsetzungen m. E. unzureichend belegt. Ich würde zunächst bereits in Frage stellen, dass für die derzeitige Mathematikdidaktik in der Breite bildungstheoretische Überlegungen jenseits legitimatorischer Funktionen einen größeren Einfluss auf das haben, was dann in Forschung und Entwicklung de facto passiert (insofern wäre für mich fraglich, ob der von Kollosche konstruierte „Ideatypus" von Mathematikdidaktik wirklich „kausaladäquat" im Sinne Webers ist). Inwieweit etwa das beinahe gebetsmühlenartige Zitieren der drei Grunderfahrungen von Winter schon eine faktische Orientierung an dessen bildungstheoretischen Vorstellungen ausmacht, hielte ich für diskutierbar. Lässt man sich auf Winters Gedankenwelt ein, so kann man etwa in seinem Text „Bürger und Mathematikunterricht" (Winter 1990) ganz explizit lesen, dass Mathematikunterricht immer in einem Spannungsfeld zwischen Aufklärung und Anpassung stattfindet. Kollosche selbst fokussiert eher die Bildungsvorstellung von Heymann, die (wie Kollosche selbst eingesteht) durchaus Abwehrreaktionen (auch von mathematik*didaktischer* Seite) erzeugt hat und bei der mir Kollosches Einschätzung, Heymanns allgemeinbildende Funktionen des Mathematikunterrichts wären (mit Ausnahme der kulturellen Kohärenz) „allesamt Kategorien, die zuallererst den Schüler emanzipieren und erst >durch ihn< der Gesellschaft nutzen sollen" (S. 226) keineswegs einleuchtet („Verantwortungsbereitschaft", „Einübung in Verständigung und Kommunikation" brauchen etwa ein „soziales Wesen" (also eine Gemeinschaft, die ihm diese Fähigkeiten abverlangt) und sind wohl kaum frei von Anpassungsleistungen, „unmittelbare Lebensvorbereitung" ist immer wieder als Funktionalisierung des Mathematikunterrichts kritisiert worden (in der der freien Entfaltung der Person zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt würde), ja selbst für „Weltorientierung" kann sehr wohl argumentiert werden, dass den Lernenden hier etwas zugemutet wird, was übliche Weltdeutungen überhaupt erst etabliert und sie nicht nur gegenüber diesen emanzipieren will).

Zum Zweiten ist in Frage zu stellen, ob sich eine *konstruktive* Mathematikdidaktik überhaupt in ähnlicher Weise von der Norm „Aufklärung" frei machen könnte, wie Kollosche dies für analytischkritische Zwecke fordert (vgl. Abs. 1.2, S. 6 ff). Selbst dann, wenn der „normale" Mathematikunterricht, so wie er eben ist und geworden ist, für die Gesellschaft der Moderne funktional ist, mag es im analytischen Interesse liegen, diesen Umstand einfach einmal so zu nehmen. Für die Frage, *wie Mathematikdidaktik sein soll*, auch zu ihrer Kritik, gibt das aber m. E. noch wenig her. Mathematikdidaktik als demokratisch legitimierbare Praxis mit dem Ziel der Intervention ist doch schlicht nicht möglich, ohne sich dem Ideal der Aufklärung prinzipiell verpflichtet zu fühlen – mit Adorno (1971, S. 112): „Man kann sich verwirklichte Demokratie nur als Gesellschaft von Mündigen vorstellen." Es ist dann aber schwierig, Mathematikdidaktik gerade dies zum Vorwurf zu machen. Denn: Kollosche konstruiert für konstruktive Mathematikdidaktik letztlich eine Dilemma-Situation, in der eine solche als gesellschaftlich funktionale und gleichzeitig mit dem gesellschaftlichen Selbstverständnis vereinbare Praxis gar nicht mehr möglich wäre: Es ist keine demokratisch legitimierbare Praxis von Mathematikdidaktik denkbar, die als „Disziplinarwissenschaft" im Sinne Kollosches gesellschaftlich funktional ist, weil sie zu einer besseren Erreichung der von Kollosche dem Unterricht zugeschriebenen, i.W. auf Anpassung gerichteten gesellschaftlichen Wirkungen führen würde. Es wäre (in letzter Konsequenz) letztlich nur entweder eine demokratisch illegitime Praxis anpassender Mathematikdidaktik oder eine demokratisch legitimierbare, aber gesellschaftlich tendenziell dysfunktionale und in der Unterrichtspraxis dann auch potentiell unwirksame Praxis aufklärerischer Mathematikdidaktik möglich. Die Mathematikdidaktik, die den Mathematikunterricht „wie er eben ist“ als solchen nimmt und in seinen gesellschaftlichen Funktionen respektiert, wäre in keinem vertretbaren Sinne rationaler oder besser, als diejenige, die Kollosche als ungünstig idealisierende und tendenziell unwirksame eingangs kritisiert, sie wäre einfach nur eine andere.

Da trifft es sich dann ganz gut, dass einerseits Kollosche eben auch nur beansprucht, eine andere Perspektive auf Mathematikunterricht aufzuzeigen (S. 5), nicht eine per se bessere oder richtigere. Andererseits bleibt im Umkehrschluss der Mathematikdidaktik die Möglichkeit, sich von Kollosches Argumentation zu distanzieren, denn Kollosche macht sich prinzipiell in demselben Punkt angreifbar, in dem er die „übliche Mathematikdidaktik“ kritisiert: Gegenstand der Analyse ist und kann prinzipiell (insbesondere wenn man sich postmoderner Erkenntnistheorie verpflichtet fühlt) auch bei Kollosche ja nicht „der gesellschaftliche Beitrag von gegenwärtigem Mathematikunterricht“ im Sinne einer objektiv vorfindbaren Realität sein, die Praxis des Mathematikunterrichts ist auch bei Kollosche eine idealisierte, das „Ideal“ bzw. die „Idealtypen“ von „Unterricht“, „Mathematik“ und „Gesellschaft“ sind nur eben andere und zwar jene, die dem demokratischen Selbstverständnis zuwider laufen, hier nun eben dessen anpassende Leistungen vereinseitigen, nicht dessen aufklärerische, hier wird dystopisch zugespitzt, dort utopisch zugespitzt.

Tatsächlich lesen sich einige Passagen der „Dispositive des Mathematischen“ so, als könne Mathematik ganz prinzipiell nicht dem Ziel dienen, sich seines eigenen Verstandes ohne Führung anderer zu bedienen (weil Mathematik eben immer schon „Selbstführung“, sublimierte Fremdeinwirkung ist). Selbst wenn Mathematik, wie Kollosche wiederholt ins Feld führt, immer auf Disziplinierung des Denkens, auf Beschränkung, Askese und auf den Glauben daran, dass das Vorgehen nach Regeln rationales Denken erzwingen könne, gerichtet ist, so ist damit ja gerade nicht geklärt, ob eine solche „Selbstführung“ nicht bloß gesellschaftlich funktional, sondern sehr wohl auch inhaltlich zweckmäßig und letztlich sogar Mittel der Emanzipation sein kann. Die Möglichkeit emanzipativer Beschäftigung mit Mathematik besteht aber selbst dann, wenn wir Mathematik als einzig dazu fähig einschätzen würden, das zu gewährleisten, was die Kritische Theorie „instrumentelle Vernunft“ (Horkheimer 1947/67) nennt. Mathematikunterricht hätte mindestens noch die Möglichkeit, eben diesen Umstand in den Blick zu nehmen, ja wäre es ohne ein phasenweises Einlassen auf diese mathematische Denkweise ja gar nicht möglich, sie einer kritischen Betrachtung auszusetzen, wenn man sich nicht mit einer Fundamentalopposition (Mathematikverbot) begnügen mag. Hier wird es bei Kollosche dann z. T. auch etwas flach, bzw. eigentümlich tautologisch mit Aussagen wie:

> Abgesehen von den gesellschaftlichen Problemen, die sich durch Mathematisierung ergeben, lässt sich jedes Problem auch ohne Mathematik betrachten, sonst wäre es bereits ein mathematisches Problem. (S. 216)

Mathematik emergiert aber nun einmal gesellschaftlich, sie wird angewandt und mit ihr entstehen gesellschaftliche Probleme, denen Mathematisierungen inhärent sind und gegenüber diesen kann man sich nicht emanzipieren, ohne ihren mathematischen Gehalt selbst einer Analyse zu unterziehen.

Ob Unterricht das dann von sich aus will, oder ob es für die Gesellschaft nicht oft auch ganz angenehm und den Einzelnen recht bequem wäre, dies nicht zu tun (ganz im Sinne der klassischen Kantschen (1784) Diagnose der Bequemlichkeit der Unmündigkeit), wäre mir da als Mathematikdidaktiker letztlich irgendwie auch egal, ja sogar Herausforderung. Ein wertvoller Beitrag ist mir Kolloschs Arbeit aber trotzdem, weil sie mir ungemein hilft, besser zu verstehen, was gesellschaftlich eigentlich gegen das arbeitet, was ich mir unter einem wünschenswerten Mathematikunterricht (und vielleicht noch wichtiger: einer lebenswerten Gesellschaft auch außerhalb der Schule) eigentlich vorstelle.

David Kollosche: *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts. Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung.* Heidelberg: Springer-Spektrum, 2014. ISBN 978-3-658-07344-2, 268 S., 59,99 Euro.

Zitierte Literatur

Adorno, Th. W. (1971). Erziehung zur Mündigkeit. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Horkheimer, M. (1967). Zur Kritik der instrumentellen Vernunft (deutsche Fassung von Eclipse of Reason, 1947). Frankfurt a. M.: Fischer.

Kant, I. (1784). Was ist Aufklärung? Volltext online unter: http://www.gutenberg.org/files/30821/30821-h/30821-h.htm.

Winter, H. (1990). Bürger und Mathematik. In: ZDM (22/4), S. 131–147.

Andreas Vohns, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich, Email: andreas.vohns@aau.at

Ian Stewart: Weltformeln – 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten

Rezensiert von Helmut Albrecht

„Jede mathematische Formel in einem Buch halbiert die Verkaufszahl des Buches." Wenn diese Stephen Hawking zugeschriebene Aussage tatsächlich stimmt, dann müsste das hier rezensierte Werk ein ziemlicher Ladenhüter sein. Zum einen sind es gleich 17 Gleichungen, die zudem nicht nur irgendwo im Text versteckt sind, sondern gar die Hauptrolle in Ian Stewarts Buch „Weltformeln" spielen und die Aufnahme in den Titel geschafft haben. Wer als Autor so vorgeht, muss sich seiner Sache relativ sicher sein und tatsächlich kann man dem laut Klappentext „beliebtesten Mathematikprofessor Großbritanniens" durchaus zutrauen, ein Gespür für populärwissenschaftlich aufbereitete Themen zu haben. Unter Missachtung von Hawkins These stellt er „17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten" in den Mittelpunkt seines 2014 in deutscher Übersetzung erschienenen Werks. Dabei geht es ihm, wie im zitierten Untertitel angedeutet, in erster Linie um die Geschichte und die Geschichten, welche aufs Engste mit den jeweiligen Formeln verwoben sind. Oder, um es anders auszudrücken, Stewart verfolgt keinesfalls eine mathematisch strenge Herleitungen seiner präsentierten Formeln. Wohl werden manche Ideen erläutert, die auf dem Weg zur Gewinnung der Formel wesentlich waren und tatsächlich bemüht Stewart dafür hin und wieder gar weitere Formeln. Dies aber immer auch so, dass mathematisch weniger versierte Leserinnen und Leser den Gesamtzusammenhang nicht aus den Augen verlieren. Dieser Gesamtzusammenhang ist für Stewart die Geschichte der Menschheit, die er mit den 17 Formeln wenigstens bruchstückhaft erleuchtet. Beginnend bei Pythagoras und damit zurückreichend bis zur Wiege der Mathematik zeichnen die ausgewählten Formeln den mathematisch-physikalischen Erkenntnisgewinn der Menschheit bis in die heutige Zeit nach. Die Formeln sind im Buch chronologisch angeordnet und reichen von den alten Griechen bis zur Black-Scholes-Gleichung, die 1973 veröffentlicht wurde.

Jedes der 17 Kapitel wird mit einer grau hinterlegten Seite eingeleitet, auf welcher zunächst die jeweilige Formel oder Gleichung großformatig abgebildet ist. Damit sich der durchschnittliche Leser hier nicht schon ob der vielen mathematischen Hieroglyphen mit Grausen abwendet und Stephen Hawkins Befürchtung Raum greift, erläutert Stewart alle Symbole der jeweiligen Gleichung mit Hilfe von stilisierten Sprechblasen. Weiter gibt es gleich auf jeder ersten Kapitelseite Kurzantworten auf die stereotypen Fragen: „Was sagt sie uns?", „Warum ist das wichtig?" und „Was hat sie gebracht?". Der Leser erfährt damit gleich zu Beginn zusammengefasst die wesentlichsten Dinge über die dargestellte Gleichung in Kurzform. Auf den folgenden 18 bis 44 Seiten werden dann die historischen Hintergründe, die beteiligten Personen und die resultierenden (technischen) Errungenschaften ausführlich erläutert und dargestellt und dies in dem von Stewart hinlänglich bekannten angenehmen, ungemein kompetenten aber nie besserwisserischen Plauderton, der das Lesen nie langweilig werden lässt. Da die 17 Kapitel in sich abgeschlossen sind, lassen sich die einer Formel zugehörigen rund 30 Seiten durchaus in einem Zug lesen, um hernach das Buch erst mal wegzulegen und das Gelesene zu überdenken.

Die Auswahl der Formeln ist natürlich subjektiv und Stewart weist selbst darauf hin, dass mehr als 17 Gleichungen nötig waren, „um uns dahin zu bringen, wo wir heute stehen." Allerdings habe er die Einflussreichsten ausgewählt, die in der Geschichte eine Pionierrolle spielten. Welches sind denn nun diese Weltformeln? In der Reihenfolge des Buchs sind dies der Satz des Pythagoras, die Logarithmen, die Infinitesimalrechnung, Newtons Gravitationsgesetz, die imaginäre Einheit *i*, Eulers Polyederformel, die Normalverteilung, die Wellengleichung, die Fouriertransformation, die Navier-Stokes-Gleichung, die Maxwell-Gleichungen, der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, die Relativität, die Schrödinger-Gleichung, die Informationstheorie, die Chaostheorie und die Black–Scholes-Gleichung.

Man sollte nun nicht darüber diskutieren, in wie weit es sich dabei um mathematische oder physikalische Gleichungen handelt, sondern das Buch einfach lesen. Die Einschränkung auf „mathematische Gleichungen" ist zudem nur im deutschen Titel enthalten, der Originaltitel spricht ganz allgemein von „equations". Mathematiker wie Physiker erfahren einiges an interessantem zeitgeschichtlichen Hintergrund zu grundlegenden Gleichungen ihres Fachgebiets und jede/r naturwissenschaftlich Interessierte bekommt auf rund 500 Seiten angenehmer Lektüre einen fundierten Einblick in die Entwicklung unseres mathematisch-naturwissenschaftlichen Wissens und die daraus resultierenden technischen Errungenschaften.

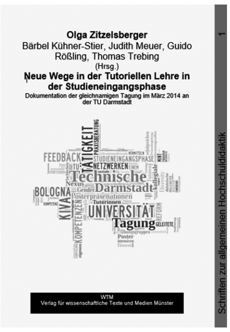
Dass dieses Buch trotz der enthaltenen mathematischen Formeln tatsächlich kein Ladenhüter ist – die 2014 erschienene deutsche Übersetzung ist immerhin schon die 5. Auflage – dafür sorgt der schon erwähnte breite Leserkreis, für den die Lektüre sicherlich kurzweilig und interessant ist. Ebenso ist an der Hochschule ein breiter Einsatz denkbar: Dem Mathematik- und Physikdidaktiker bietet es eine Fülle von Anregungen, den enthaltenen historischen Hintergrund in eine rein formale Herleitung von Formeln und Gleichungen einzubinden. Allen Studierenden, die gerne fragen, „wofür das alles gut ist“, sei es als Pflichtlektüre empfohlen und all denjenigen, die über eine der enthaltenen Themen eine Hausarbeit verfassen müssen, kann das Buch wertvolle zeitgeschichtliche Hintergrundinformationen liefern.

Ian Stewart: *Welt-Formeln – 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten.* Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2014, ISBN 978-3-499-63029-3, 525 S., 12,99 Euro (Titel der englischen Originalausgabe von 2012: *Seventeen Equations that Changed the World*)

Helmut Albrecht, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Oberbettringer Straße 200, 73525 Schwäbisch Gmünd
Email: helmut.albrecht@ph-gmuend.de

Olga Zitzelberger u. a. (Hrsg.): Neue Wege in der Tutoriellen Lehre in der Studieneingangsphase

Rezensiert von Jürgen Maaß



Seit Jahrzehnten haben wir uns daran gewöhnt, dass im ersten Semester des Mathematikstudiums, aber auch in vielen naturwissenschaftlichen und technischen Studienrichtungen viele Studierende ihr eben erst begonnenes Studium wieder aufgeben. Das war schon immer so, sagen viele und gehen zur Tagesordnung über. Viele Fachwissenschaftler und Fachwissenschaftlerinnen klagen aber auch über die Schulen und das sinkende Niveau der Erstsemester. Dazu wird eine Fülle von Beispielen erzählt, die im Kern darauf hinauslaufen, dass ein grundlegendes Verständnis von Schulalgebra, Geometrie oder Analysis fehlt. Nur wenige Fachwissenschaftler und Fachwissenschaftlerinnen gaben sich damit nicht zufrieden und konzipierten z. B. Brückenkurse oder extra Tutorien. Exemplarisch verweise ich neben der aktuellen Reform der Studieneingangsphase in Siegen und Gießen auf einen älteren Versuch in Tübingen (dokumentiert von Helmut Fischer, Peter Schmid und Gerhard Glück 1975). An der Universität Limerick gibt es sogar ein universitäres Nachhilfezentrum für Studienanfängerinnen und Studienanfänger.

Wenn heute die hohen Abbruchquoten immer mehr auf die Tagesordnung gesetzt werden, dann geht die Initiative meist nicht von einzelnen Kolleginnen und Kollegen aus, sondern von außen: Die Wirtschaft fordert mehr qualifizierte Absolventinnen und Absolventen aus dem MINT-Bereich, die Universitätsleitungen reagieren auf Modelle zur staatlichen Finanzierung, in denen die Anzahl erfolgreicher Studierender eine Rolle spielt. Studienabbrecher passen zudem nicht gut ins Bild einer Universität, die die Qualität der Lehre und gute Studienbedingungen zum wichtigen Bestandteil ihres Leitbildes machen möchte.

Das vorliegende Buch thematisiert solche Überlegungen zum Hintergrund der beschriebenen Bemühungen um bessere Qualität von Tutorien nur am Rande. Im Zentrum stehen Berichte über Projekte wie KIVA (=Kompetenzentwicklung durch interdisziplinäre Vernetzung von Anfang an) im Teilprojekt IV, das „den Ausbau der Tutorinnen- und Tutorenqualifizierung und die Erhöhung der Anzahl von Tutorien für Studienanfängerinnen und Studienanfänger zur Aufgabe“ (S. 1) hat. Bemerkenswert ist der Umfang des Projektes: „Seit Projektstart im Herbst 2011 wurden mehr als 500 Tutorinnen- und Tutoren ausgebildet“ (S. 1), an deren Kursen etwa 20 000 Studierende teilgenommen haben.

Bevor ich die einzelnen Beiträge im Tagungsband kurz skizziere, fasse ich den Gesamteindruck zu einer Leseempfehlung für alle an durch bessere Tutorien verbesserten Studienbedingungen interessierten Kolleginnen und Kollegen zusammen: Aus pädagogischer und nicht nur aus ökonomischer Sicht gibt es viele gute Argumente dafür, Zeit und Geld in die Schulung für Tutorinnen- und Tutoren zu investieren. Die Investition lohnt sich sowohl für die Studierenden, die dann in den Tutorien sitzen, als auch für Tutorinnen und Tutoren selbst, die nicht nur pädagogisch und didaktisch fortgebildet werden, sondern durch ihre erfolgreiche Tätigkeit als Tutorin oder Tutor fachlich profitieren. Wer etwas lehrt, versteht es deutlich besser, als wenn es „nur" gelernt wird. Erfahrungsgemäß werden viele Tutorinnen und Tutoren später Assistentinnen und Assistenten oder auch Professorinnen und Professoren. Anders ausgedrückt: Gute Schulungen für Tutorien sind auch eine lohnende Investition für besseren wissenschaftlichen Nachwuchs.

Die Beiträge im Buch sind in vier Gruppen sortiert. In den „allgemeinen Themen zur Hochschullehre" (Gruppe 1, S. 9–46) findet sich als erstes Florian Gröblinghoffs Plädoyer für „Studierendenzentrierung in der Studieneingangsphase". An eine andere pädagogische Theorie erinnert Peter Kossack in seinem Beitrag „Lernen als Prozess der Herstellung von Bedeutung". Lehren heißt in der Schule wie in der Universität nicht nur gut präsentieren, sondern auch und insbesondere dem zu Lernenden einen für die Lernenden einsehbaren Sinn zu geben. Ann-Françoise Gilbert bringt die Genderperspektive ein: „Geschlechtergerecht und genderrelevant? Auf dem Weg zu einer inklusiven universitären Lehre."

Die zweite Gruppe von Texten steht unter der Überschrift „Disziplinärer Zugang zur tutoriellen Lehre" (S. 47–114). Walter Daniel Freyn weist mit Nachdruck darauf hin, dass auch Tutorinnen und Tutoren „führen" müssen – und deshalb in Sachen Führung geschult werden sollen: „Motivierende Führung von Übergruppenleiter_innen/Tutor_innen". Die Studieneingangsphase des Pädagogikstudiums hat als besondere Herausforderung die Eigenschaft, dass die zu lernenden Inhalte auch unmittelbar auf die Situation der Studierenden bezogen sind, pädagogische Praxis und pädagogische Theorie also in besonderer Relation erfahrbar sind. Bärbel Kühner-Stier fragt deshalb nach dem „Studium als Bildungsprozess?" und schreibt von „Zu_mutungen tutorieller Lehre". Clemens Nagel schlägt die Verwendung einer anderen bewährten pädagogischen Methode vor: „Professionalisierung studentischer/tutorieller Lehre in der Studieneingangsphase der Naturwissenschaften durch Aktionsforschung." Wie kann heute ein Buch über Lehren und Lernen ohne Bezug auf E-Learning auskommen? Guido Rößling liefert einen entsprechenden Beitrag: „Unterstützung von Tutor_innen durch E-Learning Elemente". Auf die Nützlichkeit einer bestimmten mathematikdidaktischen Methode weist Thomas Trebing hin: „Tutorien: Das Prinzip der minimalen Hilfe in der universitären Rechenübung".

Auch in der dritten Gruppe von Texten werden aus Pädagogik und Didaktik bekannte und bewährte Methoden auf Tutorien bezogen: „Methoden und Fallbeispiele" (S. 115–142). „Die Themenzentrierte Interaktion als Ressource für tutorielle Lernprozesse" wird von Lisa Baum und Bärbel Kühner-Stier vorgestellt, „Kollegiale Beratung in der tutoriellen Arbeit" von Sonja Frey und Anna Herbst und ein „Workshop szenisches Lernen" von Hartmut Weber.

In der vierten Gruppe geht es um „Evaluation und Ausblick" (S. 143–165). Annette Glathe konzentriert sich auf die Evaluation: „Die Wirkung von Tutorentraining – welche Effekte lassen sich nachweisen?" und Olga Zitzelberger gibt dem Buch abschließend eine strategische Wendung: „Tutorielle Lehre an Universitäten – Anregungen zur Institutionalisierung".

Olga Zitzelberger u. a. (Hrsg.): *Neue Wege in der Tutoriellen Lehre in der Studieneingangsphase. Dokumentation der gleichnamigen Tagung im März 2014 an der TU Darmstadt*. WTM Verlag Münster 2015, ISBN 978-3-942-197-41-0, 169 S, 24,90 Euro.

Literatur

Helmut Fischer, Peter Schmid und Gerhard Glück: Anfängerstudium in Mathematik: Beschreibung und Evaluation eines Unterrichtsversuchs in Tübingen, Hochschuldidaktische Materialien 46, Arbeitsgemeinschaft für Hochschuldidaktik, Hamburg 1975.

Jürgen Maaß, Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenbergerstraße 54, 4040 Linz, Österreich
Email: juergen.maasz@jku.at

Reaktion der Herausgeberinnen und Herausgeber der *Mathewerkstatt* auf die Rezension von Thomas Jahnke

Timo Leuders, Susanne Prediger, Stephan Hußmann und Bärbel Barzel

Das Erscheinen einer Rezension zu unserem Schulbuch Mathewerkstatt 7 in den Mitteilungen hat uns sehr gefreut. Es ist in den letzten Jahren keine Alltäglichkeit, dass in diesem Rahmen Schulbücher rezensiert werden und insbesondere ist es eine Ehre, einen Rezensenten zu haben, der nicht nur erfahrener Mathematikdidaktiker ist, sondern selbst viel Erfahrungen im Bereich der Schulbuchentwicklung hat und daher ein besonderes Augenmaß für die Chancen und Grenzen einer solchen Unternehmung hat.

Sehr erfreut haben wir zur Kenntnis genommen, dass Thomas Jahnke (mit gleichsam mit detektivischem Spürsinn) das Produkt unserer Arbeit analysiert und dabei unsere Absichten recht treffsicher zu Tage gefördert hat. Dabei macht es sich der Rezensent dabei auch etwas schwer, denn diese Absichten haben wir in vielen Veröffentlichungen dargelegt (und übrigens auch im zum Schulbuch gehörenden Lehrerhandbuch, beides zu finden unter www.ko-si-ma.de.) Gleichwohl ist es ein wichtiger Belastungstest, inwieweit die theoretischen Konzeptideen auch im Buch selbst sichtbar werden, denn es muss ja am Ende auch ohne Begleittexte funktionieren.

Ohne auf alle Aspekte der Rezension hier einzugehen, möchten wir zu ausgewählten Aspekten ergänzende Hinweise geben, die für die Leserinnen und Leser der Mitteilungen bei einer Einschätzung des Konzeptes hilfreich sein können.

Dass Hans Freudenthal als Bezugspunkt in der Rezension eine prominente Rolle einnimmt, ist ungemein passend, denn seine didaktischen Überlegungen (und diejenigen aus der nachfolgenden Freudenthal-Rezeption) sind auch die theoretische Basis unseres Verständnisses von mathematischen Lehr-Lern-Prozessen. Insbesondere ist die Entwicklung mathematischer Begriffe aus der „erlebten Wirklichkeit“ uns ein Anliegen, welches wir durch Verwendung sinnstiftender Kontexte und Kernideen umsetzen (Barzel et al., 2011; Leuders et al., 2001).

Hans Freudenthal hat aber neben den Prozessen der „horizontalen Mathematisierung“ (also der genetischen Entwicklung mathematischer Begriffe aus vorstellbaren außer- oder innermathematischen Problemsituationen) auch auf die Bedeutung „vertikaler Mathematisierung“ (also die Vernetzung und Integration mathematischer Konzepte und Ideen im Zuge von Verallgemeinerung oder fortschreitender Schematisierung) hingewiesen. Nahezu jedes Kapitel der Mathematikwerkstatt beginnt mit horizontalen Mathematisierungen, doch folgen oft Etappen vertikaler Mathematisierung wie zum Beispiel die beiden ersten Kernfragen im Kapitel Modellieren mit Variablen zeigen:

- Wie kann ich unterschiedliche Kostenrechnungen aufstellen und beschreiben?
- Wie kann ich Terme aufschreiben, wenn sich die Zahlen immer wieder ändern?

Während die erste Kernfrage unmittelbar am Kontext (was kostet mein Auto?) anknüpft und zunächst zum horizontalen Mathematisierungen einlädt, zielt die zweite Kernfrage auf die Entwicklung der Variablen, dies ist ein Prozess der vertikalen Mathematisierung der sich aus dem Kontextproblem allein nicht schöpfen lässt, sondern zur innermathematischen Verallgemeinerung einlädt. Ein ausgewogenes Bild von Mathematik lässt sich – im Sinne von Heinrich Winters Grunderfahrungen – nur durch Kombination der anwendungs- und strukturorientierten Prozesse erreichen.

Dass mit dem Kapitel „Unser Zahlenlexikon – Zahlenwissen ordnen und vernetzen“ ein ganzes Kapitel der vertikalen Mathematisierung dient (hier der Systematisierung eines über zwei Jahre gestreckten Aufbaus der Brüche und Dezimalzahlen), ist dagegen im Schulbuchkonzept eher selten.

Die Verankerung mathematischer Begriffsbildung in Kontexten kann – auch das hat Thomas Jahnke beschrieben – dazu führen, dass Wissen zu sehr an diesen einen Kontext gebunden wird („Negative Zahlen“ als Mittel um „Raus aus den Schulden“ zu kommen). Dieses Problem gehen wir in der Phase des Erkundens bewusst ein, denn wir haben erlebt, dass nur die konsequente Arbeit in einem Kontext alle Lernenden bei der Begriffsbildung mitnimmt und ein „wildes Kontexthopping“ in dieser Phase nur Irritationen hinterlässt. Im Vertiefen jedoch löst sich die Mathewerkstatt von den Erstkontexten und unterstützt einen Transfer auf weitere Kontexte. Diese Transfers werden dadurch befördert, dass die Erstkontexte so ausgewählt sind, dass sie die Struktur des jeweiligen mathematischen Gegenstands im besonderen Maße widerspiegeln.

Ein gewichtiger Punkt der Rezension ist die Rolle der „Lehrtexte“ und in der Tat ist das eine Schlüsselstelle, die man als Schulbuchentwickler nicht unter den Teppich kehren kann. Will man die „fertige Mathematik“ in „roten Kästen“ im Schulbuch mitteilen? Und wenn ja, an welcher Stelle? Noch vor den individuellen Aktivitäten, die dann bestenfalls mathematisches Nachahmen wären? Oder direkt danach, indem dann alle individuellen Wege „weggewischt“ werden? (Lernende bekommen auch schnell heraus, dass die Lösung des Einführungsproblems zwei Seiten weiter steht). Und wer der Schülerinnen und Schüler kann diese Lehrtexte wirklich lesen und verstehen?

Wir haben uns im Rahmen der iterativen Entwicklung und Erprobung der Mathewerkstatt ein (auch international) neues Konzept entwickelt und in mehreren Erprobungsschritten praxisfähig gemacht: Die Phase des „Ordnens“ nach dem Erkunden ist weit mehr als das Ausfüllen von Lückentexten im Wissensspeicher. Besonders konstruierte Aufgaben ersetzen oder ergänzen ein fragend-entwickelndes Gespräch und beziehen die Lernenden aktiv in Prozesses des Sammelns, Systematisierens und Sicherns ein (Prediger et al. 2011, Barzel et al. 2013). Der Prozess des schüleraktiven, aber lehrer-gelenkten (und abgesicherten) Anlegens von Wissensspeichern, welche in nachfolgenden Kapiteln auch immer wieder aufgegriffen werden, ist ein wesentliches konzeptuelles Element der Mathewerkstatt.

In dieser Phase erstellen die Lernenden mit Unterstützung ihren eigenen Wissensspeicher, der durch die Vorstrukturierung im Schulbuch sich sukzessive zu einem gut geordneten Lexikon zusammenbaut. In den Klassen, in denen die Lehrkräfte auf die Pflege dieses Wissensspeichers genügend geachtet haben, verfügt jeder Lernende über solch ein Lexikon. Für die Klasse, die die zuverlässige Pflege erst lernen muss, gibt es Kopiervorlagen für ausgefüllte Wissensspeicher im Online-Bereich des KOSIMA-Projekts. Nach anfänglichen Irritationen der Eltern (die wohl die Hauptadressaten üblicher Lehrtexte zu sein scheinen), wo man diese zentralen Konzeptelemente findet, erweist sich der Wissensspeicher in den meisten Erprobungsklassen als wichtiges und Nachhaltigkeit stützendes Element.

Damit kommen wir auch schon zu unserer letzten Bemerkung: Thomas Jahnke weist mehrfach darauf hin, dass das eine oder andere Merkmal des Schulbuches noch zeigen muss, wie es in der Praxis funktioniert. Diese Äußerung zeigt, dass er annimmt, das Schulbuch werde, wie viele Schulbücher heute, sozusagen als Schreibtischprodukt von erfahrenen Lehrpersonen und Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktikern gleichsam als „Hypothese“ in die Schulpraxis gegeben, die dann überprüft, ob das Konzept umsetzbar ist. Für die Mathewerkstatt haben wir dagegen vor der Drucklegung umfassende Schritte der Erprobung, der Evaluation einzelner Aspekte, der Revision und der begleitenden, vertiefenden fachdidaktischen Forschung in den zehnjährigen Entwicklungsprozess eingewoben. Nach dem Modell fachdidaktischer Entwicklungsforschung in Zusammenarbeit mit vielen Praktikerinnen und Praktikern können wir mit gutem Gewissen sagen, dass wir in vielerlei Hinsicht wissen, dass und wie viele Elemente unseres Schulbuches in der gelebten Praxis aussehen, nämlich durchaus sehr viel bunter als es sich die Herausgebenden vorher gedacht haben (Hußmann et al. 2011).

Schon jetzt sehen wir in vielen Bundesländern, dass die Mathewerkstatt in Schulen und Lehrerbildung gut aufgenommen und erfolgreich eingesetzt wird. Gleichwohl ist es nicht für alle Lehrkräfte geeignet, sondern für diejenigen, in deren Unterricht Sinnstiftung, Offenheit und Eigenaktivität bereits eine zentrale Rolle spielt.

Literatur zum Konzept und zum Konzept und zur Begleitforschung zur Mathewerkstatt (Weitere Texte unter www.ko-si-ma.de)

Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2012): Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, 93–96.

Barzel, Bärbel / Leuders, Timo / Prediger, Susanne / Hußmann, Stephan (2013): Designing Tasks for Engaging Students in Active Knowledge Organization. In: Watson, Anne; Ohtani, Minoru; Ainley, Janet; Bolite Frant, Janete; Doorman, Michiel; Kieran, Carolyn; Leung, Allen; Margolinas, Claire; Sullivan, Peter; Thompson, Denisse; Yang, Yudong (Hrsg.): ICMI Study 22 on Task Design - Proceedings of Study Conference. Oxford. 285–294.

Barzel, Bärbel / Prediger, Susanne / Leuders, Timo / Hußmann, Stephan (2011): Kontexte und Kernprozesse – Ein theoriegeleitetes und praxiserprobtes Schulbuchkonzept, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, WTM Velrag, Münster, 71–74

Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) - ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419–422.

Leuders, Timo / Hußmann, Stephan / Barzel, Bärbel / Prediger, Susanne (2011): „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen, in: Praxis der Mathematik in der Schule 53(37), 2–9.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Leuders, Timo / Hußmann, Stephan (2011): Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen, in: Mathematik lehren 164, 2–9.

Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
Email: leuders@ph-freiburg.de

Grußwort zur Emeritierung von Bernd Wollring

Universität Kassel, 30. 10. 2014

Hans-Georg Weigand

Lieber Bernd, liebe Festgesellschaft,
ich möchte dir heute im Namen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ganz herzlich zum Geburtstag gratulieren, auch im Namen des 1. Vorsitzenden, Rudolf vom Hofe, der heute leider verhindert ist. Lieber Bernd, Du warst stets ein wichtiger engagierter Begleiter und Berater der GDM. Du warst viele Jahre im wissenschaftlichen Beirat der GDM, du hast für die GDM in der Kommission für Lehrerbildung mitgearbeitet, vor allem aber warst du in der GDM – und das sage ich in meiner Rolle als ehemaliger 1. Vorsitzender – jemand, der nicht nur beratend und als Diskussionspartner zur Verfügung stand, sondern jemand der stets auch Probleme und Chancen frühzeitig erkannt und prospektiv über Reaktionen und notwendige Maßnahmen konstruktiv nachgedacht hat. Dafür sei dir herzlich gedankt.

Doch sollte ich heute nicht nur für die GDM sprechen, sondern – so stand die Bitte auf meiner Einladung zu dieser Feier – „für die GDM und als Freund" ein Grußwort sprechen. Natürlich mache ich das gerne. Kennen wir uns ja schon viele Jahre, haben einen ähnlichen wissenschaftlichen Sozialisationshintergrund und unsere Ansichten, Einstellungen und Vorlieben haben doch eine – mathematisch ausgedrückt – nicht unerhebliche Schnittmenge. Da ist zum einen unsere gemeinsame Auffassung von der Bedeutung der Fach-Mathematik als zentrale Grundlage für jegliches mathematikdidaktische Handeln, da ist unsere Überzeugung, dass Schulentwicklung bei der Unterrichtsentwicklung beginnen muss, da ist aber auch und vor allem unsere außerordentliche Wertschätzung einer kommunikativen Gesellschaftsrunde zu früher und fortgeschrittener Stunde, die Wertschätzung eines Chateaubriand – medium gebraten – mit Sauce béarnaise zu einem mindestens 6 Jahre alten Brunello di Montalcino.

Als Freund etwas öffentlich zu sagen ist ungleich schwieriger als dies für eine allseits bekannte gesellschaftliche Institution zu tun. Was soll man sagen, was darf man öffentlich sagen? Nun, man kann etwa auf die gemeinsame Zeit zurückblicken (was aber nur von bedingtem Interesse für Außenstehende ist), oder man echauffiert sich über die Gegenwart (das erschöpft sich aber schnell in einem „früher war alles besser" und man führt dann Belege an, in denen man sich nur noch selbst zitiert), oder man denkt über die Zukunft nach. Vielleicht ist das die beste Wahl.

Also, was macht man, was machst du, jenseits der 65? Man kann reisen – im Sinne von „Ich bin dann mal weg!", man kann seine Lebenserinnerungen schreiben – aber für wen? Man kann sich allerdings auch anschauen, wie andere diesen Paradigmenwechsel gemeistert haben, und ob diese als Vorbild dienen können. Durchaus.

Da ist Richard Wagner, mit 50 verfolgt, geächtet, verschuldet, doch dann kam König Ludwig II, und dann kam der grüne Hügel in Bayreuth. Und mit 69 Jahren hat er in der Villa Wahnfried den Parsival geschrieben. Da ist Martin Wagenschein, der die Hälfte seines wissenschaftlichen Werkes erst jenseits der 60 geschrieben hat! Theodor Fontane hat mit 59 seinen ersten Roman geschrieben.

Lieber Bernd, wenn du alles das, was du einmal bei vielen offiziellen und inoffiziellen Anlässen gesagt, erzählt hast, wenn du das auch einmal aufschreiben würdest, dann bräuchtest du dir in den nächsten Jahren über Langeweile keine Gedanken machen.

Man sollte aber nicht zu lange warten, mit dem was man noch vorhat. So hatte sich Friedrich II von Preußen so sehr auf das Flötenspiel gefreut, wenn er einmal pensioniert sei: „Darf ich im Flötenspiel den Himmel spüren" hat er vorausschauend gesagt. Mit 60 waren ihm allerdings schon die beiden Schneidezähne ausgefallen und er konnte gar nicht mehr Flöte spielen. Und da ist unser guter alter Heinrich Faust, der sein ganzes Streben in dem Satz zusammenfasst: „Verweile Augenblick, du bist so schön." Man mag ja trefflich darüber streiten, ob er das in seinem Lebern erreicht und damit seine Wette gegen Mephistopheles verloren hat, wenn er – allerdings erst im hohen Alter, gebrechlich und fast schon blind, noch sagen konnte: „Zum Augenblicke dürft' ich sagen: // Verweile doch, du bist so schön!" Und uns plagt seit unserem Deutschunterricht die Frage, ob das nun im Konjunktiv gesagt hat oder nicht?

Aber es gibt andere, für die das Alter kein Problem ist: Lenny Kravitz ist gerade 50 Jahre alt geworden – also Lenny Kravitz, der amerikanische Rockmusiker, sagte vor kurzem in einem Interview der Süddeutschen Zeitung:

> Also, wenn Sie fragen, wie es ist zu altern, kann ich nur sagen: Ich altere nicht. Ich bewege mich zurück, werde jünger.

Und weiter:

> Es beginnt im Kopf, im bewussten Umgang mit sich selbst. Man hat die Wahl, ob man sich um Körper, Geist und Seele kümmern will oder nicht. Es gibt keinen Grund, auf unpassende Art zu altern. Schauen Sie sich Mick Jagger an, er ist 71.

Ja, da sind sie wieder, die Äonen unserer Jugendzeit, immer noch „on stage". Mick Jagger – gerade zwei Konzerte in Deutschland gegeben – rennt stundenlang über die Bühne. Ich sage meinen Studierenden immer wieder, dass man aus einem Video eines Stones-Konzertes mehr über das Sich-Präsentieren vor der Klasse lernen kann als in einem einsemestrigen Kurs über „Kompetentes Auftreten im Klassenzimmer".

Ja, und dann ist da noch Donald Duck, der ist gerade 80 Jahre alt geworden. Und frisch wie eh und je! Aber der lebt ja auch in Entenhausen, jenem legendären Ort, den Carl Barks nicht erfunden, sondern gefunden hat und der sich durch zwei Besonderheiten auszeichnet: Dort gibt es keinen Sex und dort es gibt keinen Tod. Gut möglich, dass beides zusammenhängt. Doch damit zum Schluss, noch drei Weisheiten, über die wir nachdenken sollten:

1. Ein Songtitel von Lenny Kravitz heißt: *It Ain't Over 'Til It's Over*, es wird nicht vorbei sein, solange es nicht vorbei ist! Ja, richtig Lenny, was immer das auch bedeuten mag!
2. Und Donald Duck: „Daisy, du hast es doch gut mit mir!" Natürlich Bernd, so ist es!
3. Und Dr. Heinrich Faust: „Im Vorgefühl von solchem hohen Glück // Genieß' ich jetzt den höchsten Augenblick."

Ja, daran sollten wir uns halten. Schön ist es heute hier zu sein!

Danke, Bernd, und alles Gute!

Hans-Georg Weigand, Universität Würzburg, Didaktik der Mathematik, Campus Hubland Nord, Emil-Fischer-Straße 30, 97074 Würzburg
Email: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

Editorischer Hinweis: Der Text des Grußwortes wurde rechtzeitig für die Mitteilungen *98 übermittelt und versehentlich dort nicht abgedruckt.*

Nachruf auf Helmut Wunderling

Peter Baumann, Thomas Kirski, Helmut Knabe, Erich Rinnert und der Vorstand MNU Berlin-Brandenburg

Am 15. Januar 2015 verstarb im Alter von 81 Jahren StD i. R. Helmut Wunderling. Von 1995 bis 2004 war er Vorsitzender des Berliner Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Fünf Jahrzehnte lang, auch während seiner Tätigkeit an den Europaschulen in Luxemburg und Varese, engagierte er sich mit vielen eigenen neuen Gedanken, den Mathematikunterricht an den Gymnasien zu modernisieren. Das von ihm im Unterricht Erprobte fand seit den 1960er Jahren Niederschlag in zahlreichen Publikationen und Vorträgen, vor allem auf MNU-Kongressen. Zu seinen Themen gehörte nach Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis und Einführung der reellen Zahlen in der Mittelstufe schon früh der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht (inkl. Abitur). Zudem hatte er als Mitherausgeber und Bearbeiter von „Schülkes Tafeln" diese modernisiert und erweitert.

Ganz besonders am Herzen lag ihm die Einführung der Infinitesimalrechnung nach den Ideen von Abraham Robinson: „Non-standard Analysis". Viele Jahre lang hat er seine Analysis-Kurse nach dieser vorteilhaften Methode unterrichtet, und zwar sehr erfolgreich, wie viele Rückmeldungen ehemaliger Schüler gezeigt haben. Als Seminarleiter sowie in zahlreichen Veröffentlichungen und Vorträgen hat er immer wieder dafür geworben, hyperreelle Zahlen im Analysisunterricht zu verwenden. Schließlich hat er im Jahr 2007 – zusammen mit anderen – das erste deutsche Schulbuch zu diesem Thema herausgegeben.

Zahlreichen Kollegen gab er seinen breitgefächerten Kenntnis- und Erfahrungsschatz und seine Begeisterung für Mathematik und Naturerkenntnis weiter. Er durfte erleben, dass nicht wenige seiner ehemaligen Referendare mit Freude und Erfolg ihren Beruf ausüben. Im Vorstand des Berliner MNU-Vereins hat er viele Jahre die Belange des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Berlin und darüber hinaus mit großer Hingabe vertreten. Unter seiner kollegialen Leitung gelang es, jährlich einen mehrtägigen Berliner MNU-Kongress für alle Lehrer der MINT-Fächer mit Erfolg durchzuführen und die Zusammenarbeit mit den Universitäten zu verstärken. Auch nachdem er den Vorstandsvorsitz in jüngere Hände gelegt hatte, nahm er starken Anteil an der Entwicklung des Berlin-Brandenburger Landesvereins. Seine Aktivitäten endeten nicht mit seiner Pensionierung. Auch den Kontakt zu Schülerinnen und Schülern behielt er durch Gestaltung von Arbeitsgemeinschaften und Fortsetzung seiner Mitarbeit im Auswahlausschuss des Bundeswettbewerbs Mathematik bei.

Helmut Wunderling war ein offener, warmherziger Mensch, der gerne half, wenn Not war. Als Fragender, als Ideengeber, als Freund hinterlässt er eine große Lücke.

Thomas Kirski, Email: kirski@nichtstandard.de

Zuerst erschienen in: MNU 2/2015. Wiederabdruck mit freundlicher Genehmigung durch den MNU.

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

▪ ***Vorstand****. 1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de

▪ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de

▪ *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg. Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de

▪ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at

▪ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.

▪ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

▪ Verleger: GDM ▪ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ▪ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ▪ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ▪ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin

Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.