MITTEILUNGEN
DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

GDM

97

August 2014

Editorial: Two more years

Liebe Lesende,
mit der Entscheidung der Mitgliederversammlung, mir für zwei weitere Jahre als Schriftführer das Vertrauen auszusprechen, hat der auf dieser Veranstaltung anwesende Teil unserer Mitglieder (so etwa 10–15 %) Ihnen allen nun auch für zwei weitere Jahre mich als Herausgeber der Mitteilungen eingebrockt. Da ist zunächst einmal ein herzliches Dankeschön angebracht, ob eines gewissen Wiederwahlautomatismus und in Ermangelung von Gegenkandidat(inn)en aber auch die nötige Bescheidenheit, den Vertrauensvorschuss nicht allzu hoch zu gewichten oder leichtfertig zu verspielen.

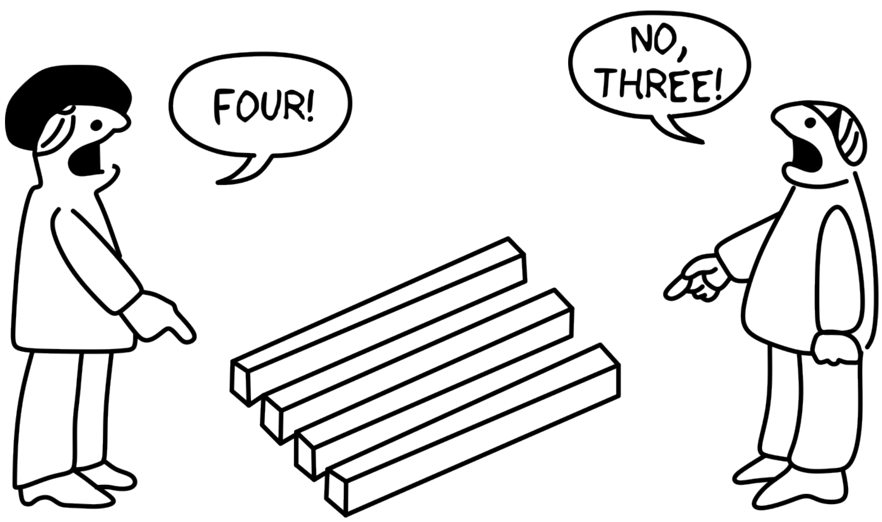
Mit diesem Heft wird zum ersten Mal eine Rubrik „Diskussion“ in Abgrenzungen vom „Magazin“ eingeführt. Die Zuordnung eines Textes zu einer Rubrik ist natürlich immer auch eine willkürliche – Was ist so kontrovers, dass man es gemäß vermutlich eher gediegen-fluffigen Assoziation mit dem Terminus „Magazin“ entsprechend dann doch nicht mehr dieser Rubrik zuordnen möchte? Welche Reaktion auf einen Artikel soll man den „Leserbriefen“ zuordnen, welche verdient es, weiter vorne im Heft als „Diskussionsbeitrag“ geadelt (oder doch: getadelt) zu werden?

Finden werden Sie in dieser Rubrik im aktuellen Heft einige Themen, deren Diskussion nicht nur innerhalb der Mitteilungen der GDM, nicht einmal nur innerhalb der Mathematikdidaktik, z. T. recht heftig geführt wird: Zentrales Abitur, PISA-Testungen, sowie stärker auf unser Fach fokussiert zwei Reaktionen auf die im letzten Heft von Erich Wittmann begonnene Diskussion über zukünftige Perspektiven der Mathematikdidakik, insbesondere desjenigen Teils, den manche bisweilen als „Stoffdidaktik“ bezeichnen, eine Bezeichnung, die von Hans Schupp im aktuellen Heft selbst noch einmal kritisch betrachtet wird.

Im Magazin bleibt auch dieses Heft in gewisser Weise dem paradoxen Motto „Blick zurück nach vorn“ treu. Heinz-Wilhelm Alten wirft einen Blick zurück auf 20 Jahre Publikationsprojekt „Vom Zählstein zum Computer“, Hans Hischer schlägt eine Neuorientierung des Verständnisses von „Vernetzung“ gemäß dem „Kleine-Welt-Phänomen“ vor. Apropos Vernetzung: Ein „Link“ zum letzten Heft wird auch von Hans Walser gesetzt, der uns u. a. einen etwas näheren Einblick darin gibt, was sich mathematisch eigentlich hinter der das letzte Cover ziehrenden „Würfelwelt“ verbirgt.

Zu danken habe ich Ihnen abschließend noch einmal: Wenn Sie dieses Heft erreicht hat, dann ist Ihre Postadresse in der GDM-Datenbank korrekt. Im Mai diesen Jahres haben wir erstmals einen personalisierten „Datenbankabzug“ (Ihre in der GDM-Datenbank abgespeicherten Adressdaten) an alle Mitglieder ausgesandt, was auf ein sehr positives Echo gestoßen ist und von uns nun zweimal jährlich, das nächste Mal voraussichtlich im Dezember 2014 durchgeführt werden wird.

Nun aber viel Freude mit dem aktuellen Heft!
Ihr Andreas Vohns



It is really confusing (Quelle: bryanridgley.com)

ISSN 0722-7817

Inhalt

Rezensionen

Personalia

In eigener Sache

Vorwort des 1. Vorsitzenden

Liebe GDM-Mitglieder,

unsere Gesellschaft ist jung und entwickelt sich zurzeit durch viele Ideen, Aktivitäten und Initiativen weiter. Sie hat aber bereits auch ein gewisses Alter und entwickelt mittlerweile ihre Geschichte. Beide Facetten möchte ich heute thematisieren.

Die Dynamik der GDM spiegelt sich wider im vielfältigen Leben und Wirken unserer Mitglieder und Organe. Dies zeigt sich zum einen in der Arbeit der Arbeitskreise, die bereits auf eine lange Entwicklung zurückblicken können, zum anderen in Neugründungen. Drei von ihnen gab es innerhalb der ersten Monate dieses Jahres.

Zwei neue Arbeitskreise und ein Landesverband

GDM-Arbeitskreis Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik

Im Januar 2014 hat sich der GDM-Arbeitskreis *Interpretative Forschung in der Mathematikdidaktik* konstituiert. Dieser Arbeitskreis knüpft an die Tradition der Arbeitsgruppe *Interpretative Unterrichtsforschung* an, die sich seit Mitte der achtziger Jahre des letzten Jahrhunderts zu regelmäßigen Arbeitstagungen und zu Interpretationssitzungen traf. Sie geht wesentlich auf die Forschungen der Bielefelder Arbeitsgruppe um Heinrich Bauersfeld zurück, die als Anfang der interpretativen Unterrichtsforschung im deutschsprachigen Raum angesehen werden kann.

Zentrales Ziel des Arbeitskreises ist es, den wissenschaftlichen Anspruch empirisch begründeter Theoriebildung zu vertreten. Dabei ist der interpretative Ansatz des Arbeitskreises nicht auf bestimmte mathematische Inhaltsfelder oder Altersstufen beschränkt, sondern offen für eine Vielfalt von Themen und Fragen. Wenngleich der Arbeitskreis primär auf Mathematikdidaktik fokussiert ist, soll die wissenschaftliche Diskussion in enger Beziehung zum wissenschaftlichen Diskurs außerhalb der mathematikdidaktischen Forschung geführt werden.

Der neu gegründete Arbeitskreis plant regelmäßige Arbeitstagungen mit Interpretationssitzungen zu Dokumenten mathematischer Lern- und Entwicklungsprozesse mit methodisch kontrollierten Analyseverfahren. Die Themen können aus allen Bereichen stammen, in denen mathematisches Denken und Handeln sichtbar wird. Sprecherin und Sprecher dieses Arbeitskreises sind Birgit Brandt (Halle) und Frank Förster (Braunschweig).

GDM-Arbeitskreis Problemlösen

Obwohl das Problemlösen seit langem ein klassisches Arbeitsfeld der Mathematikdidaktik ist, gab es bislang keinen GDM-Arbeitskreis zu diesem Thema. Die Idee, einen solchen zu gründen, entstand auf einem Symposium zum Problemlösen im September 2013 und wurde auf der Jahrestagung 2014 in Koblenz konkretisiert. Seit Mai 2014 hat sich diese Gruppe nun als GDM-Arbeitskreis *Problemlösen* konstituiert. Eine erste Herbsttagung soll Mitte Oktober in Münster stattfinden.

Der neue Arbeitskreis richtet sich an Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler sowie Lehrerinnen und Lehrer, die sich im weiten Sinne mit mathematischem Problemlösen und Heuristik beschäftigen. Diese Thematik eröffnet ein weites Feld, das nicht nur klassische und neue Inhalte in den Sekundarstufen umfasst, sondern auch die Ausbildung elementarer Problemlösekompetenzen bereits in der Grundschule, wie sie seit den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts zunehmend in den Fokus der Mathematikdidaktik gerückt sind.

Die Reichweite ist dabei nicht auf den deutschen Sprachbereich beschränkt; so ist es ein Ziel des neuen Arbeitskreises, auch andere Traditionen miteinzubeziehen, insbesondere die lange Tradition für Problemlösen aus Ungarn. Wissenschaft, Forschung, Lehrerbildung und Praxis sollen dabei aufeinander bezogen werden, um den Stellenwert des Problemlösens sowohl in der Weiterentwicklung der Unterrichtskultur als auch in der Lehrerbildung zu stärken. Sprecherin und Sprecher des Arbeitskreises sind Ana Kuzle (Paderborn) und Benjamin Rott (Essen).

Landesverband GDM Schweiz

Auf der letzten Mitgliederversammlung in Koblenz 2014 wurde mit überwältigender Mehrheit eine Satzungsänderung verabschiedet, in der die Bildung von Landesverbänden ermöglicht wird. Weiterhin wurde eine Ordnung für Landesverbände verabschiedet, die es diesen ermöglicht, sich als Verein nach jeweiligem Landesrecht innerhalb der GDM zu formieren.

Diese Änderungen sind von unseren Schweizer Mitgliedern mit Dankbarkeit und Freude aufgenommen und sogleich in die Tat umgesetzt worden: Bereits im April 2014 bildete sich aus dem ehemaligen Arbeitskreis Schweiz-Liechtenstein der Landesverband *GDM Schweiz*. Mit einer Gründungsversammlung vom 3. Juni konstituierte sich dieser Landesverband als Verein nach Schweizer Vereinsrecht. Die vom Arbeitskreis Schweiz-Liechtenstein seit langem beklagten rechtlichen Probleme sind damit geklärt und einer stärkeren und erfolgreicheren Positionierung innerhalb der Schweizer Bildungspolitik steht nichts mehr im Wege. Gleichzeitig bleibt die GDM als Ganzes gewahrt und kann somit nach wie vor die Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum vertreten.

In der GDM Schweiz sind Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler sowie Lehrerinnen und Lehrer vereinigt. Ihre Tätigkeitsfelder sind traditionell stark auf die Verbesserung von Lehrerbildung und Schulpraxis bezogen. Thematisch herrscht eine große Vielfalt, da die Schweizer Gruppe die Didaktik der Mathematik nicht inhaltlich oder methodisch eingrenzt, sondern als Ganzes vertritt. Die Vielfalt ihrer Aktivitäten wird sich u. a. in Vorträgen und Workshops auf dem Lehrerinnen- und Lehrertag der kommenden Jahrestagung in Basel präsentieren. Eines der neuen Themen sind didaktische Konzepte zu mathematischen Lernumgebungen und Unterrichtsszenarien mit Tablets. Vorsitzende der GDM Schweiz sind Esther Brunner (Thurgau) und Lis Reusser (Bern).

Die GDM entwickelt ihre Geschichte – Wer schreibt sie auf?

> *Alle wichtigen Ereignisse haben zuerst eine Wirkung, dann eine Wirkungsgeschichte und schließlich eine Geschichte*
> Ernst Reinhardt (*1932), Schweizer Publizist

Im März 1975 traf sich eine Gruppe von Mathematikdidaktikern bei einer Tagung in Saarbrücken und anschießend in Karlsruhe und gründete einen neuen Verband: die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. 2025 wird sie, wenn weiterhin alles gut läuft, ihren fünfzigsten Geburtstag feiern können. In Vergleich zu anderen wissenschaftlichen Verbänden ist dies noch keine lange Zeit. Dennoch: Die Gründungsphase und die ersten Jahrzehnte der GDM haben nicht nur ihre Wirkungen gezeitigt, sie sind mittlerweile Geschichte.

Die Gründung fiel in eine von bildungspolitischer Spannung aufgeladene Zeit: Die Neue Mathematik war in ihrer vollen Blüte, Befürworter und Gegner standen sich gegenüber und es war zunächst unklar, wie sich die junge GDM in diesem Spannungsfeld positionieren würde. Ebenso unklar war, welchen Weg die GDM als Verband einschlagen sollte und konnte, wie sich das Verhältnis zu älteren und einflussreicheren Verbänden wie der DMV gestaltet und inwieweit die GDM bildungspolitischen Einfluss gewinnen kann. Unklar war zunächst auch, inwieweit es der GDM gelingt, die Mathematikdidaktik als eigenständige wissenschaftliche Disziplin und sich selbst als wissenschaftliche Organisation zu etablieren.

Heute sind wir eine stabile Gesellschaft, die sich positioniert und viele der Ziele erreicht hat, die sie sich damals gesteckt hatte. Noch sind viele Mitglieder aus der Gründerzeit aktiv, gleichzeitig haben wir aber zahlreiche neue Mitglieder, die manche – möglicherweise auch für heute interessante – Entwicklungen aus den frühen Zeiten nicht kennen. Daher wird es Zeit, sich mit der Geschichte der GDM zu befassen, diese aufzuarbeiten und auch aufzuschreiben.

Dies kann insbesondere auch deswegen interessant und spannend sein, weil die Geschichte der GDM aufs Engste verbunden ist mit der neueren Geschichte der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum. Es gab Ideen und Initiativen, die mit Zuversicht und Aufbruchstimmung verfolgt oder mit Skepsis kritisiert wurden. Es gab Reformideen und Reformversuche, die unterstützt oder bekämpft wurden. Es gab Konflikte, Konfrontationen, Streit um die richtige Richtung.

Dabei ging es zunächst um die Entwicklung des Wissenschafts- und Forschungsverständnisses der Mathematikdidaktik und damit um einen Prozess der Identitätsfindung, der ungeachtet sichtbarer Fortschritte bis heute andauert. Weitere Wirkungsfelder liegen in der Entwicklung von Konzepten zur Verbesserung der Praxis und im Gewinnen von Einfluss auf die Wissenschafts- und Bildungspolitik.

Bereits das Zusammentragen, Ordnen und Darstellen von Fakten ist eine wichtige Aufgabe; es kann den Fluss von Ereignissen rekonstruieren und beispielsweise die Entwicklung von Jahrestagungen, Arbeitskreisen oder Instituten dokumentieren. Die Bewertung von Ereignissen, Strömungen und Konflikten ist natürlich nicht unproblematisch und es wird in manchen Fragen kaum *die* richtige Darstellung geben. Denn auch im Nachhinein können Bewertungen sehr unterschiedlich sein: Was für den einen eine vertane Chance ist, kann für den anderen die Korrektur eines Irrwegs sein. Aber gerade hier kann die GDM von ihrer Vielfalt profitieren und beispielsweise Zeitzeugen zu Worte kommen lassen, die unterschiedliche oder gegensätzliche Strömungen vertreten haben.

Die Idee, dass geschichtliches Bewusstsein im Wissenschafts- und Bildungsbereich helfen kann, Fehler der Vergangenheit zu vermeiden, ist zunächst naheliegend, vielleicht aber auch naiv. Geschichtliches Bewusstsein kann jedoch dazu beitragen, die Probleme oder Erfordernisse der Gegenwart aus Perspektive vergangener Ereignisse und Entwicklungen zu reflektieren.

Aus allen diesen Gründen wäre es wünschenswert, Mitglieder zu finden, die sich für die Aufarbeitung der Geschichte interessieren und bereit sind, sich hierfür zu engagieren. Dies gilt für Mitglieder, die sich bereits mit der Dokumentation der früheren Jahre befasst und möglicherweise Vorarbeiten geleistet haben, genauso wie für neu Interessierte. Die Arbeit an dieser Thematik kann von Einzelpersonen, von Gruppen oder vielleicht auch innerhalb eines neuen Arbeitskreises erfolgen. Wir freuen uns daher, wenn sich interessierte Mitglieder mit Ideen und Vorschlägen an den Vorstand wenden.

Mit freundlichen Grüßen
Rudolf vom Hofe
(1. Vorsitzender der GDM)

Vom Zählstein zum Computer – 20 Jahre Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ der Stiftung Universität Hildesheim

Heinz-Wilhelm Alten

Auswahl der inzwischen beim Springer Verlag Heidelberg erschienenen Bände der Projektgruppe der Stiftung Universität Hildesheim zur Kulturgeschichte der Mathematik (Foto/Grafik: H. Wesemüller-Kock)

Unter dem Titel „Vom Zählstein zum Computer“ gibt die Projektgruppe eine Buchreihe mit dem Untertitel *Geschichte – Kulturen – Menschen* beim Springer-Verlag Heidelberg heraus.

Wie es dazu kam, welche Ziele damit für die Ausbildung von Lehrern für Mathematik und fächerübergreifendem Unterricht verfolgt werden, welche Themen in den bisher erschienenen Bänden der „Gelben Reihe“ behandelt wurden und welche in weiteren Bänden noch bearbeitet werden sollen – darüber habe ich bei der Präsentation dieser Bände in der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, zur Eröffnung der Wissenschaftstage 2008 in München, in der Urania Berlin, für die Teleakademie des SWR [2] in der Universität Karlsruhe 2009 und anderorts oft gesprochen. Hierzu veranstaltete das Institut für Mathematik und Angewandte Informatik der Universität Hildesheim am 14. Februar dieses Jahres ein ganztägiges Kolloquium anlässlich des 20-jährigen Bestehens der Projektgruppe. In verkürzter Form wird darüber im Folgenden berichtet.

1 Weshalb und wozu Geschichte der Mathematik?

Zu dieser Frage ist bereits oft und viel gesagt und geschrieben worden (s. z. B. [10]). Mir ist diese Frage bereits im ersten Semester in den Vorlesungen von Prof. Dr. Conrad Müller an der TH Hannover begegnet, der als Kenner des Sanskrit und Leibniz-Forscher den Stoff jeweils mit kulturhistorischen Erläuterungen bereicherte (dadurch allerdings mit dem Stoff selbst nicht schnell voran kam). So habe auch ich in meinen Vorlesungen für Studenten des

Lehramts, in Lehrgängen mit Studienbriefen des DIFF (Deutsches Institut für Fernstudien) und bei der Weiterbildung graduierter Ingenieure zu Realschullehrern versucht, die mathematischen Begriffe, Sätze und Methoden durch Bemerkungen über ihre Entstehung und den oft mühseligen und langen Weg der Entwicklung zu ihrer heute in Schulen und Hochschulen üblichen Darstellung leichter verständlich zu machen (siehe dazu auch die Aufsätze von E. Wittmann über die genetische Methode und das Buch von H. Hischer [8]).

Vorschläge zur Behandlung des Themas „Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht" für die Ausbildung an Schulen und die Lehramtsausbildung an Universitäten sind seit Jahrzehnten in zahlreichen Forschungsbeiträgen, (eigenständigen) Tagungsbänden, Handbüchern zum mathematischen Unterricht und mathematikdidaktischen Themenheften zu finden (siehe u. a. [1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11]).

Bei der Präsentation des ersten Buches unserer Reihe: Vom Zählstein zum Computer – Mathematik in der Geschichte, H. Wußing u. a. (siehe [16]) habe ich dazu am 11. 2. 1997 ausgeführt:

> Mathematik ist vielen ein Gräuel, für viele Schüler ein gefürchtetes Fach. Mancher Arzt, mancher Ästhet brüstet sich gar damit, Mathematik nie richtig verstanden zu haben (während ein Mathematiker, der zugibt, nichts mit Literatur, Musik und Kunst im Sinne zu haben, Gefahr läuft, als Banause oder gar Fachidiot bezeichnet zu werden). Woran liegt das?

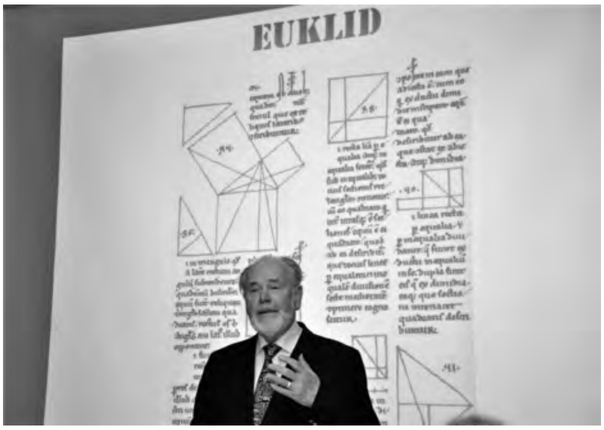
Ist denn nicht Mathematik diejenige Wissenschaft, deren Inhalte eigentlich am einfachsten zu begreifen sein müssten, da ihre Lehrsätze auf klar definierten Begriffen und einem System widerspruchsfreier Axiome beruhen und mit den Schlussweisen der Logik bewiesen werden können, während die Aussagen in anderen Wissenschaften auf Empirie, statistischen Erhebungen und fehlerbehafteten Messungen beruhen, von Meinungen, Einschätzungen oder gar Geschmack und Glauben abhängen und deshalb oft revidiert, modifiziert oder gar verworfen werden müssen? Hingegen ist ein einmal bewiesener Satz der Mathematik auch noch nach Jahrtausenden gültig: jede Schülergeneration muss den Satz des Pythagoras lernen, und die Elemente des Euklid dienten noch im vorigen Jahrhundert als Lehrbuch in Schulen. Dennoch unterliegt die Mathematik sehr unterschiedlichen Werturteilen. Der Philosoph Arthur Schopenhauer hält sie für die niedrigste aller Wissenschaften, da sie auch von Maschinen verrichtet werden könne, wie solche jüngst in England in Gebrauch genommen wurden. Hingegen sagt der auf unseren

Carl-Friedrich Gauß, geehrt von der Deutschen Bundesbank auf einem Zehn-Mark-Schein

Zehnmarkscheinen abgebildete Göttinger Mathematiker Carl-Friedrich Gauß: *„Mathematik ist die höchste aller Wissenschaften und ihre Krone ist die Zahlentheorie"*, während der scharfsinnige und spöttische Göttinger Physiker Georg Christoph Lichtenberg meint, die Mathematiker hätten jenen Geruch von Heiligkeit an sich, mit dem sich auch die Theologen umgeben.

Wie dem auch sei: die Mathematik ist seit eh und je ein unentbehrliches Werkzeug des Menschen und deshalb seit altersher Hauptfach in den Stundenplänen von Schulen und anderen Bildungsanstalten. Doch zurück zur eingangs gestellten Frage: „Woran liegt es, dass Mathematik vielen Schülern und Studenten so schwer fällt?" Sicher liegt es auch daran, dass logisches Denken nicht jedermanns Sache ist, dass gerade die Präzision und Klarheit der Begriffe und Sätze Hemmschuhe beim Verständnis sind, weil die Tragweite der Begriffe und Theoreme erst im Nachhinein erfasst wird und die Notwendigkeit oder Hinlänglichkeit der Voraussetzungen erst beim oft mühseligen und langwierigen Beweis sichtbar wird. Die Diskussion über diese Frage und Überlegungen zur Bewältigung dieses Übelstandes beschäftigen Lehrer und Didaktiker der Mathematik, füllen Tagungsbände und Zeitschriften. Ein Grund für die Schwierigkeiten von Schülern und Studenten mit dem Verständnis von Mathematik ist sicherlich auch die Anforderung, in wenigen Jahren die Ergebnisse eines Jahrtausende währendes Prozesses in sich aufzunehmen, zu verarbeiten, zu verstehen. Sie lernen die Ergebnisse der Bemühungen vieler Generationen von Mathematikern, die fertigen Produkte eines langwierigen Prozesses, nicht die Produktion, die Entstehung dieses großartigen Gebäudes.

Die Ursachen und Anlässe für die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden bleiben den meisten verborgen: das oft Jahrzehnte oder gar Jahrtausende währende Ringen um den passenden Begriff, Irrwege und Misserfolge des um



H.-W. Alten bei der Buchpräsentation zu Band 2: *6000 Jahre Mathematik – eine kulturgeschichtliche Zeitreise, von Euler bis zur Gegenwart* am 15. Januar 2009 in der Stiftung Universität Hildesheim vor dem Hintergrund ausgewählter Bilder, hier eine Seite zur Geometrie des Euklid aus der frühen Neuzeit (Foto: Andreas Schmidt)

„Tempel der Mathematik“, wie er von der Projektgruppe zu Beginn geplant wurde. Die Themen von drei der vier Säulen wurden bereits als Bücher herausgegeben, die „Säule“ *Zahlentheorie* ist in Arbeit (Grafik: H. Wesemüller-Kock).

Erkenntnis ringenden Forschers, die Streitigkeiten mit anderen Wissenschaften, die innige Verschmelzung mit der kulturellen Entwicklung zwischen Gelehrten, die Zusammenhänge in verschiedenen Ländern und Kulturkreisen – all dies lernen nur wenige kennen. Ich nenne einige Beispiele.

1. Über zwei Jahrtausende haben Gelehrte gebraucht, um die Unabhängigkeit des euklidischen Parallelenpostulates von den übrigen Axiomen Euklids zu beweisen: erst im vorigen Jahrhundert zeigten Riemann, Bolyai und Lobatschewski die Existenz sog. Nichteuklidischer Geometrien.
2. Etwa ebenso lange dauerte es, bis Lindemann 1882 durch den Beweis der Transzendenz von π zeigte, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten nicht möglich ist.
3. Weshalb lernen Kinder schon frühzeitig mit Brüchen zu rechnen, während ihnen das Rechnen mit negativen Zahlen erst viel später zugemutet wird? Ein Blick in die Geschichte zeigt: schon die alten Ägypter rechneten vor 4000 Jahren mit Brüchen, aber bis in die Neuzeit haben Rechenmeister und Mathematiker negative Zahlen nicht als Zahlen anerkannt und nur Gleichungen mit positiven Lösungen betrachtet.

Viele Schüler und Studenten erfahren nichts oder nur wenig von der Entstehung mathematischer Begriffe und Methoden, nichts von den Menschen, die das großartige Gebäude der Mathematik Stück für Stück geschaffen haben, erleben nicht das intellektuelle Abenteuer beim Eindringen in die Geschichte der Mathematik. Auch ihre Lehrer haben in ihrer Ausbildung zumeist nichts oder nur wenig davon gehört. Wird doch Geschichte der Mathematik in den alten Bundesländern nur an wenigen Universitäten fakultativ angeboten und ist kein obligatorisches Studien-oder gar Prüfungsfach für künftige Mathematik lehrer – im Gegensatz zur früher in der DDR und heute noch in der Schweiz geübten Praxis.

Dies ist für mich umso erstaunlicher, als Literaturgeschichte selbstverständlich zum Studium der Germanistik und Kunstgeschichte zwangsläufig zum Studium der Bildenden Kunst gehört.

Der Gedanke, diesem Mangel ein wenig abzuhelfen, führte zur Geburt des Projektes „Geschichte der Mathematik“, das seit einiger Zeit an unserer Universität von einer kleinen Gruppe betrieben wird und von vielen Seiten kräftige Unterstützung erfahren hat.

2 Die Geburt des Projektes „Geschichte der Mathematik“ (GdM)

Schon 1977 war aufgrund meiner Erfahrungen mit den Fernstudienbriefen des DIFF (s. o.) in Hildesheim ein Fernstudienzentrum für die inzwischen gegründete Fernuniversität Hagen eingerichtet worden und wurde 1980 Teil der Zentralen Einrichtung für Fernstudium und Weiterbildung (ZFW) der Hochschule Hildesheim. Anfang 1992 baten mich Dr. A. Djafari, Mathematikhistoriker und Mitarbeiter im Fernstudienzentrum, und dessen Leiter, der Medienwissenschaftler Heiko Wesemüller-Kock, die Schirmherrschaft für ein Projekt „Geschichte der Mathematik“ zu übernehmen, in dem Studienbriefe für das Fernstudium zur Geschichte der Mathematik entwickelt werden sollten. Nach etlichen Besprechungen und Verhandlungen wurde für dieses Projekt vom Institut für Mathematik (heute mit der Ergänzung „... und Angewandte Informatik“, IMAI) und dem ZFW (heute: center for lifelong learning, cl3) die Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ gegründet und deren Arbeit durch eine Kooperationsvereinbarung im April 1994 – also vor 20 Jahren – geregelt. Als Kurzbeschreibung des Projektes legten wir schon damals fest:

Als Teil der Kulturgeschichte soll die Entwicklung der Mathematik von den ersten Anfängen in grauer Vorzeit bis zur kaum noch überschaubaren Fülle ihrer Theorien und Anwendungen im 20. Jh. in einer Weise dargestellt werden, die zum Selbst- und Fernstudium geeignet ist. Die Darstellung soll

- sich an der kulturellen Entwicklung in den verschiedenen Kulturkreisen orientieren und Einflüsse, Strömungen und Zusammenhänge aufzeigen,
- wissenschaftlich präzise und gleichermaßen verständlich für verschiedene Zielgruppen sein.

Adressaten sind an Weiterbildung interessierte Erwachsene, Lehrkräfte in Schulen und Schüler(innen) der Sekundarstufe, Lehrpersonen und Studierende an Akademien, Hochschulen und Universitäten.

Abweichend von der üblichen Darstellung in Standardwerken wird die Entwicklung der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik (Arithmetik und Zahlentheorie, Geometrie, Algebra, Analysis) in getrennten Kursen behandelt. Als Grundlage für alle Nutzer dienen Darstellungen zur

A. Einführung in die Kulturgeschichte der Mathematik
B. Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlbegriffs.

Soweit die Voraussetzungen geschaffen werden können, sollen in einem späteren Projektabschnitt weitere Teilgebiete integriert werden, insbesondere solche, die erst in neuester Zeit entstanden sind, z. B. Mathematische Logik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Angewandte Mathematik, Numerische Mathematik und Scientific Computing. Zur lebendigen Ergänzung und Veranschaulichung ist die Erstellung von Videofilmen vorgesehen.

Die Projektgruppe bestand zu Beginn aus Prof. Dr. Heinz-Wilhelm Alten als Leiter (Institut für Mathematik, heute IMAI), dem Mathematikhistoriker Dr. Alireza Djafari Naini (ZFW/cl3), und dem Medienwissenschaftler Dipl. Soz. Heiko Wesemüller-Kock, (ZFW/cl3). Sie wurde später erweitert durch Prof. Dr. Klaus-Jürgen Förster als stellvertretender Leiter (IMAI), Prof. Dr. Erwin Wagner (ZFW/cl3), Prof. Dr. Jürgen Sander (IMAI), Dr. habil. Karl-Heinz Schlote (IMAI), Prof. Dr. Barbara Schmidt-Thieme (IMAI) und Prof. Dr. Thomas Sonar (Institut Computational Mathematics, Technische Universität Braunschweig). Weitere Experten und die Autoren standen und stehen uns jeweils beratend zur Seite.

3 Der erste Band: Überblick und Biographien

Schon Ende 1992 hatte ich auf Vorschlag von Herrn Djafari Kontakt mit dem Mathematikhistoriker Prof. Dr. Hans Wußing in Leipzig aufgenommen, ihn zum Vortrag *Zur Genesis der Infinitesimalrechnung* im Mathematischen Kolloquium am 17. Juni 1993 eingeladen und dabei zur Zusammenarbeit für Studienbriefe bzw. Bücher zur Mathematikgeschichte gewinnen können.

Nach vier Arbeitstagungen (1993, 1994, 1995), Filmaufnahmen für Videos und regem Briefwechsel entstand anstelle der früher geplanten Studienbriefe und eines „Nullheftes“ zur Einführung als erster Band einer geplanten Buchreihe „Vom Zählstein zum Computer“ das Buch [16] Hans Wußing u. a.: *Überblick und Biographien – Mathematik in der Geschichte*. Es wurde am 11. Februar 1997 im Roemer- und Pelizaeus-Museum in Hildesheim mit dem Vortrag von Herrn Wußing *Entstehung und Ausbreitung der Mathematik – ein intellektuelles Abenteuer* präsentiert.

Am 3. März 1998 wurde der von A. Gottwald und H. Wesemüller-Kock produzierte Film [14] *Vom Zählstein zum Computer – Mathematik in der Geschichte – Altertum* auf der Tagung für Didaktik der Mathematik in München von mir vorgestellt. Der Titel der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ stammt von Frau Dr. Gerlinde Wußing während eines „Brainstormings“ im Hause Wußing in Leipzig, in dem wir oft zu Besprechungen zusammenkamen und von Frau Wußing köstlich bewirtet wurden.

Im Vorwort zu diesem Band schrieb ich:

> Mögen dieser Einführungsband und der Begleitfilm dazu anregen, tiefer in die Geschichte der Mathematik einzudringen und dadurch einen besseren Zugang zur modernen Mathematik und ihren Anwendungen zu gewinnen.

Wunderschön sind auch die ersten Worte von Hans Wußing in diesem Buch, die ich Ihnen nicht vorenthalten möchte:

> Die Hinwendung zur Geschichte der Mathematik kann zu einem intellektuellen Abenteuer der schönsten Art werden. Mathematik aller Schwierigkeitsgrade und all ihrer Teilgebiete tritt uns entgegen, eingebettet in die verschiedenartigsten Kulturen der Menschheit auf allen Kontinenten, verbunden mit den großen Strömungen des menschlichen Denkens in Philosophie und Religion, in historischer Wechselwirkung stehend zu den Errungenschaften der

H. Wußing und H.-W. Alten bei der Arbeit. Bei vielen Arbeitstreffen in Hildesheim und in Leipzig entstanden die Bände *6000 Jahre Mathematik*. (Foto: Gerlinde Wußing)

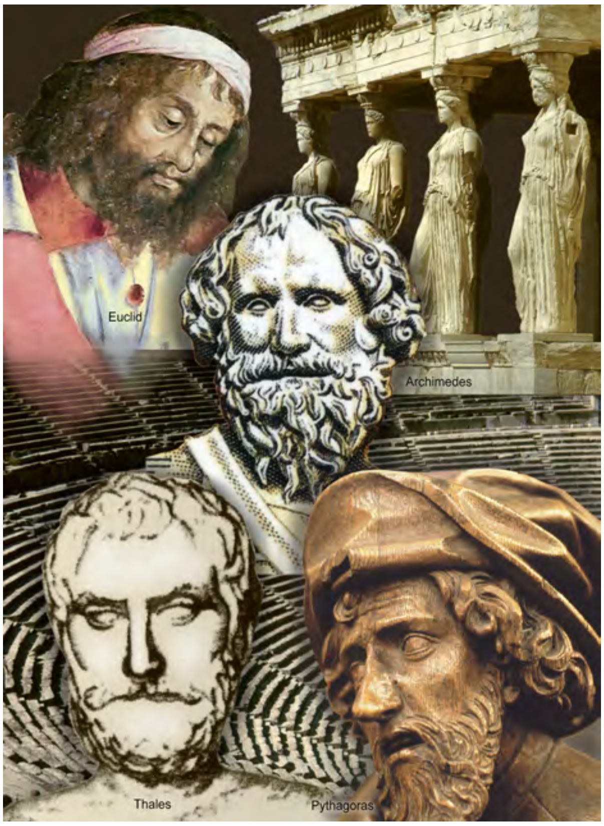
> Menschheit in Naturwissenschaft und Technik als Teil der Geschichte der bildenden Kunst und der Literatur, zur Reflexion verleitend über Vergangenheit und Zukunft des Menschengeschlechtes.

Diese Worte können und sollen als das Credo unserer Buchreihe verstanden werden!

4 „Vom Zählstein zum Computer" im Springer Verlag

War dieser erste Band noch beim Hildesheimer Verlag Franzbecker erschienen, suchten wir nun für die weiteren Bände einen größeren Verlag und fanden ihn im renommierten Springer Verlag Heidelberg, dessen zuständiger Redakteur Clemens Heine mit der Aufnahme der Buchreihe einen erfolgreichen Weg einschlug und uns seitdem stets ein hilfsbereiter und eng verbundener Partner ist.

Die schon unter 1. und 2. beschriebenen Gründe, Ziele und Adressaten, sowie die Inhalte und ihre Darstellung sind auch für diese Buchreihe maßgeblich. Insbesondere ist es ein Anliegen der Projektgruppe, den Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Mathematik, der Entstehung ihrer Begriffe und Methoden und den kulturellen, historischen und politischen Umständen der Zeitläufe aufzuzeigen. Dadurch sollen auch mathematikferne Bildungsbürger verführt werden, sich näher mit der Mathematik als Schlüsselwissenschaft zu befassen. Dazu geben Tabellen am Anfang jedes Kapitels Einblick in wichtige politische und kulturelle Ereignisse der behandelten Epoche und Kul-



Titel zu Kap. 2 aus *5000 Years of Geometry* (englische Übersetzung). Euklid, Archimedes, Thales und Pythagoras entwickelten die Mathematik zur Wissenschaft. Die Ideen und Methoden dieser Gelehrten bilden bis heute wesentliche Grundlagen in vielen Disziplinen, vor allem in den sog. MINT-Fächern (Grafik: H. Wesemüller-Kock)

Titel zu Kap. 5 der Neuauflage des Bandes *4000 Jahre Algebra*. Cardano, Descartes, Euler, Vieta und die ‚Bernoullies' prägten den Aufschwung der Mathematik durch neue Sichtweisen und Methoden vom 16. zum 18. Jahrhundert, insbesondere in Algebra, Analysis und Geometrie (Grafik: H. Wesemüller-Kock) turkreise, Tabellen am Ende die darin gewonnenen wesentlichen Ergebnisse und Inhalte der Mathematik stichwortartig wieder. Aufgaben am Ende jedes Kapitels sollen zum tieferen Eindringen und Verständnis der behandelten Probleme führen. Diese Aufgaben sind von unterschiedlicher Schwierigkeit: Zur Bearbeitung reichen für manche die auf der Mittelstufe der Gymnasien erworbenen Kenntnisse, für andere sind Begriffe und Methoden vonnöten, die erst in der Oberstufe oder im Grundstudium der Mathematik behandelt werden.

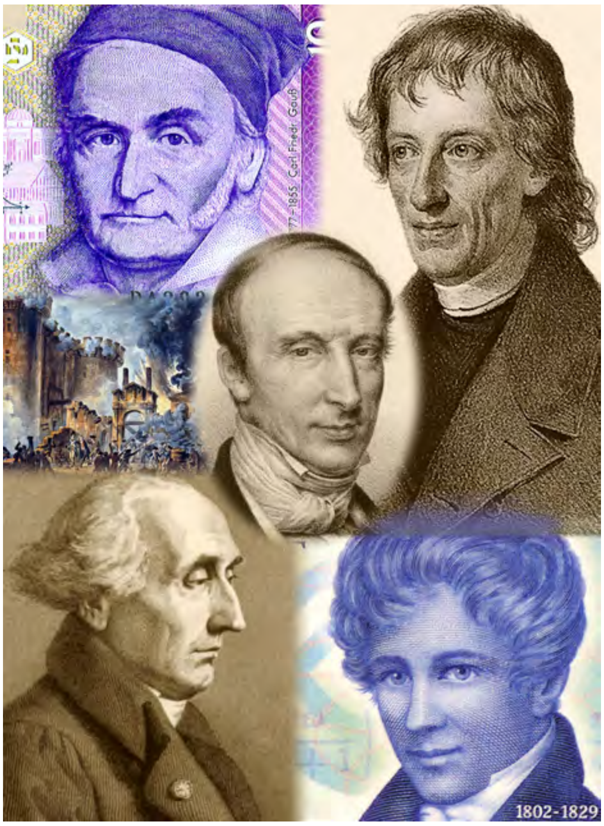
Schließlich strotzen die Bände von farbigen Abbildungen, Landkarten, Photographien und erläuternden Skizzen, ja, die Bände illustrieren die Geschichte der Mathematik im besten Sinn des Wortes. Das ist der phantastischen Arbeit von Heiko Wesemüller-Kock zu danken, der sich als graphischer „Zauberderwisch“ (Zitat: Th. Sonar) erwies.

Für die Geschichte der Geometrie hatte ich bereits 1995 auf Vorschlag von Herrn Djafari mit unserem Kollegen Christoph Scriba Verbindung aufgenommen. Herr Wußing sprach für dieses Thema den Kollegen Peter Schreiber in Stralsund an.

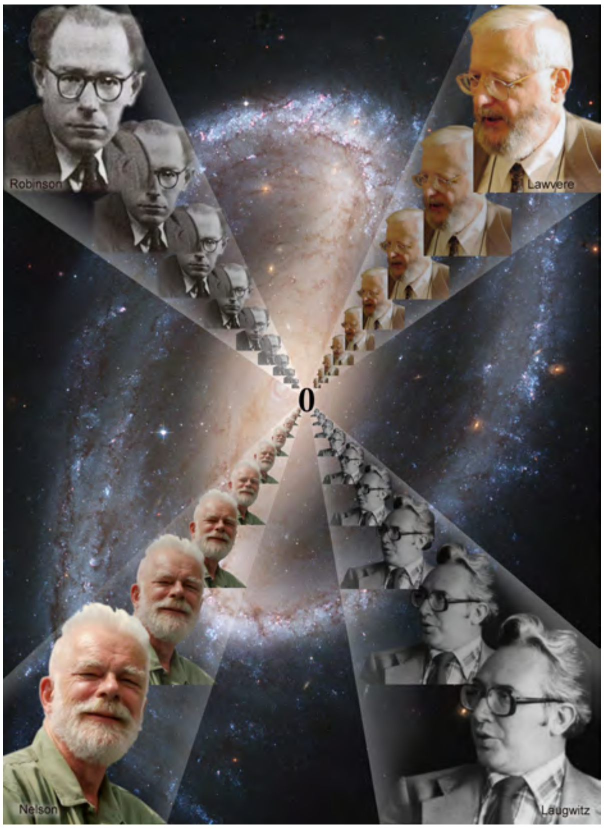
Merkwürdigerweise erfuhr ich an ein und demselben Tag, am 8. März 1997, dass beide bereit seien, als Autoren für diesen Band zur Verfügung zu stehen. So einigte ich mich in einem Gespräch im Restaurant des Hamburger Bahnhofs Dammtor mit beiden, wer über was und wie schreiben sollte.

Viele Diskussionen in der Projektgruppe und mit den Autoren, Briefwechsel, der einen dicken Ordner füllt – dann war es soweit: am 16. November 2000 konnten wir den Band [12] C. J. Scriba/ P. Schreiber: *5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen* mit einem Vortrag des Kollegen Schreiber über *Albrecht Dürer als Geometer* im Musiksaal unserer Universität präsentieren. Das Buch wurde sogar in Russland rezensiert. Ivor Grattan-Guinnes, der große britische Mathematikhistoriker, hoffte auf eine englische Übersetzung „… as there is not a comparable work“ (wird 2015 bei Springer Basel erscheinen).

Am 26. Juli 2013 ist unser Kollege Christoph Scriba verstorben. Mit ihm haben wir einen langjährig für uns tätigen Autor und Berater verloren. Wir gedenken seiner in Dankbarkeit.



Titel zu Kap. 6 der Neuauflage *4000 Jahre Algebra.* Gelehrte wie Carl-Friedrich Gauß, Bernard Bolzano, Augustin-Louis Cauchy, Joseph-Louis Lagrange und Niels Hendrik Abel dominierten die Entwicklung der Algebra vom Ende des 18. Jahrhunderts bis weit in das 19. Jahrhundert hinein (Grafik: H. Wesemüller-Kock)



Titel zu Kap. 11 aus *3000 Jahre Analysis.* Nichtstandard-Analysis ist Thema von Abraham Robinson, Francis William Lawvere, Edward Nelson und Detlef Laugwitz. Sie greifen mit Fragen zu unendlich kleinen und unendlich großen Größen Probleme auf, die bereits in der Antike (Zenon) diskutiert wurden (Grafik: H. Wesemüller-Kock)

Bei der Präsentation des Bandes 5000 Jahre Geometrie; v. l. n. r.: P. Schreiber, C. Scriba, H.-W. Alten, C. Heine, A. Djafari-Naini, E. Wagner, H. Wesemüller-Kock (Foto: Kruse, Hildesheimer Allgemeine Zeitung, 23. Nov. 2000)

Der Film *Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter* gliedert sich in die Teile Orient und Okzident (jeweils ca. 32 Min.). Beispiele aus der Mathematik sind ebenso enthalten wie geschichtlich relevante Entwicklungen aus China, Indien, islamischen Ländern und Europa (eine überarbeitete englische Fassung gibt es seit 2014).

Für die von A. Djafari in Angriff genommene Geschichte der Algebra konnten wir als weitere Autoren wiederum Hans Wußing und seinen langjährigen Mitarbeiter Karl-Heinz Schlote sowie die Kollegen Menso Folkerts von der LMU München und Harmut Schlosser von der Universität Greifswald gewinnen.

Am 28. April 2003 konnten wir den Band [3] H.-W. Alten, A. Djafrai Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wußing: *4000 Jahre Algebra – Geschichte, Kulturen, Menschen* mit den Vorträgen von A. Djafari: *Geschichte der Mathematik im Islam*, H. Wußing: *Die Coß-Vorstufe der Algebra im Europa der Neuzeit* und meinem Beitrag: *4000 Jahre Algebra – Genese eines Buches* vorstellen. Dazu wurden schon Ausschnitte des von H. Wesemüller-Kock und K. A. Gottwald produzierten Videofilms [15] *Vom Zählstein zum Computer – Mathematik in der Geschichte – Mittelalter* gezeigt. Der ganze Film wurde mit einem Vortrag am 20. November 2003 im Kolloquium der Sächsischen Akademie der Wissenschaften präsentiert. Inzwischen liegt er auch in englischer Fassung vor.

Zum neu erschienenen Band *4000 Jahre Algebra* schrieb die Neue Ruhr Zeitung:

> Das Buch ist wunderbar, es ist voll von Geschichte(n) rund um Zahlen und eröffnet so eine Welt, die oft, zu oft verschlossen bleibt.

Als im Dezember 2001 Herr Heine vom Springer-Verlag vorschlug, eine Gesamtdarstellung der Geschichte der Mathematik herauszubringen, war mein erster Gedanke: Hans Wußing! Nach erster Ablehnung des ihn überraschenden Vorschlages erklärte Herr Wußing: „Ich mach's." So entstanden von 2003 bis 2008 – mit vielen Besprechungen in Leipzig und Hildesheim, regem Briefwechsel und Telefongesprächen – die Manuskripte zur Kulturgeschichte der Mathematik. Daraus entstanden unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock und nach kritischer Durchsicht der Kollegen Folkerts und Purkert die beiden umfangreichen Bände [17], [18] H. Wußing: *6000 Jahre Mathematik – eine kulturgeschichtliche Zeitreise*.

Bd. 1, *Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*, wurde am 7. Februar 2008 im Rathaus der Stadt Hildesheim mit dem Autor präsentiert. Herr Oberbürgermeister Machens rief dabei das Jahr der Mathematik in Hildesheim aus.

Bd. 2, *Von Euler bis zur Gegenwart*, mit einem Ausblick von Eberhard Zeidler, Max-Planck-Gesellschaft Leipzig, konnte sodann am 15. Januar 2009 zu meinem 80. Geburtstag mit dem Vortrag von Thomas Sonar: *Richard Dedekind: Auf den Spuren von Gauß in die Zukunft* und meinem Vortrag: *Vom Zählstein zum Computer: Die letzten 300 Jahre* vorgestellt werden.

Die Rezensionen dieser Bände füllen einen Ordner.

> Das Schöne an diesem Buch ist, dass man es an jeder Stelle aufschlagen kann und sofort in den Bann der Geschichte der Mathematik gezogen wird. (Forschung & Lehre 2008, Vol. 15)

Viele der Bilder der Buchreihe wurden in der vom Oberbürgermeister Jung bereits am 9. Juni 2008 eröffneten Ausstellung im Rathaus Leipzig gezeigt.

Im April 2011 ist Hans Wußing verstorben. Mit ihm haben wir nicht nur einen unserer langjährig tätigen Autoren, sondern auch einen Freund verloren. Wir gedenken seiner mit Dankbarkeit für die tatkräftige Unterstützung in nahezu zwei Jahrzehnten und seine zahlreichen Anregungen für die Bände dieser Reihe.

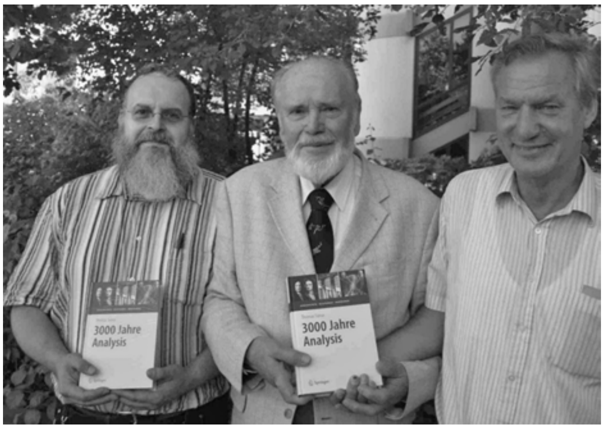


Abbildung 1. Präsentation des Bandes *3000 Jahre Analysis*, v.l.n.r.: Autor Thomas Sonar, H.-W. Alten, H. Wesemüller-Kock (Foto: Lange, Pressestelle Stiftung Universität Hildesheim, 27. Juni 2011)

Für die Geschichte der Analysis gewann Herr Förster den Kollegen Thomas Sonar von der TU Braunschweig. Nach dem Ausscheiden mehrerer der dafür zunächst vorgesehenen weiteren Autoren schrieb Thomas Sonar in erstaunlich kurzer Zeit das gesamte Buch allein. Am 27. Juni 2011 wurde der Band [13] Thomas Sonar: *3000 Jahre Analysis – Geschichte, Kulturen, Menschen* mit seinem Vortrag *Das mächtige Gebäude der Analysis seit Newton und Leibniz* präsentiert. Zum neuen Band schreibt Karl-Eugen Kurrer in der Zeitschrift „Stahlbau" (No. 80, Heft 12, 2011):

> Mit *3000 Jahre Analysis* ist dem Verfasser eine faszinierende Kulturgeschichte der Analysis gelungen. Thomas Sonar versteht es, durch Historisierung der Mathematik, reine Freude an mathematischen Erkenntnissen zu vermitteln.

Inzwischen ist der Band *5000 Jahre Geometrie* in dritter Auflage erschienen, die beiden Bände *6000 Jahre Mathematik* erschienen bei Springer Spektrum im neuen, leuchtend roten Umschlag als Fortsetzung der traditionellen „Gelben Reihe", ebenso im Herbst letzten Jahres die aktualisierte und ergänzte 2. Auflage von *4000 Jahre Algebra* mit einem weiteren Beitrag zur Computeralgebra von Bettina Eick.

5 Wie geht es weiter? (Kolloquium am 14. 2. 2014)

Die Buchreihe ist damit jedoch keineswegs abgeschlossen! Derzeit arbeiten wir an der englischen Übersetzung von *5000 Jahre Geometrie*, welche die Tochter Jana unseres Kollegen Schreiber geleistet hat und als *5000 Years of Geometry* in diesem Jahr bei Springer Basel erscheinen soll. Ferner ist auch ein Band zur *Zahlentheorie* in Vorbereitung, mit dem wir endlich die noch fehlende Säule als Stütze des „Tempels der Mathematik" aufrichten wollen.

Dazu und für weitere ausgewählte Themen aus Gebieten der Mathematikgeschichte, die aus unserer Sicht von Interesse für künftige Publikationen in dieser Buchreihe sind, wurden in dem Kolloquium am 14. 2. 2014 vier faszinierende Vorträge gehalten:

- Ulf Hashagen (Deutsches Museum München): *Die Entwicklung des wissenschaftlichen Rechnens in der deutschen Wissenschaftskultur (ca. 1870–1945)*
- Karl-Heinz Schlote (Stiftung Universität Hildesheim): *Unentbehrliches Hilfsmittel oder gegenseitiges Verkennen – Aspekte der Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an mitteldeutschen Universitäten (ca. 1830–1945)*
- Catherine Goldstein (CNRS Paris): *Zahlentheorie in der Zeit von Fermat*
- Jörn Steuding (Universität Würzburg): *Aspekte analytischer Zahlentheorie in Arbeiten des Hildesheimer Mathematikers Adolf Hurwitz*

Anschließend würdigte Thomas Sonar (TU Braunschweig) in seinem Vortrag *Die Buchreihe der Projektgruppe „Geschichte der Mathematik"* die Arbeit der Projektgruppe und die von ihr herausgegebenen Werke.

Im Blick auf die weitere Entwicklung der Buchreihe kündigte er neben der in Arbeit befindlichen *Zahlentheorie* unter der Schirmherrschaft unseres Kollegen Jürgen Sander und der noch in diesem Jahr bei Springer Basel erscheinenden englischen Übersetzung von *5000 Jahre Geometrie* die englische Übersetzung seines Bandes *3000 Jahre Analysis* an. Als weiterer Band ist die *Geschichte des mathematischen Unterrichts* unter der Schirmherrschaft unserer Kollegin Barbara Schmidt-Thieme (Universität Hildesheim) geplant.

Grußworte des Präsidenten der Stiftung Universität Hildesheim, Prof. Dr. Wolfgang-Uwe Friedrich, des Leiters des Institutes für Mathematik und Angewandte Informatik, Prof. Dr. Klaus-Jürgen Förster, des Leiters des center for lifelong learrning, Prof. Dr. Erwin Wagner, unseres Partners Clemens Heine vom Springer Verlag und meine „Erinnerungen" als Leiter der Projektgruppe schlossen das Kolloquium ab.

Literatur

[1] Henrike Almendinger, Katja Lengnink, Andreas Vohns, Gabriele Wickel (Hrsg.): Mathematik verständlich unterrichten – Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung. Springer Spektrum Wiesbaden 2013

[2] Heinz-Wilhelm Alten: 6000 Jahre Mathematik, eine kulturgeschichtliche Zeitreise, DVD; Teleakademie des SWR, ©Quartino GmbH, München 2011

[3] H.-W. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wußing: 4000 Jahre Algebra – Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2003

[4] Gerd Biegel, Karin Reich, Thomas Sonar (Hrsg): Historische Aspekte im Mathematikunterricht an Schule und Uni-versität. Termessos Verlag Göttingen/Stuttgart 2008

[5] John Fauvel, J. A. van Maanen (Eds.): History in Mathematics Education. New ICMI Study Series (Vol. 6), Kluwer Publishers Dordrecht 2000

[6] Ernst Hairer, Gerhard Wanner: Analysis by its History, 1st ed. 1996, 2nd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008

[7] Wilfried Herget, Silvia Schöneburg (Hrsg.): Mathematik – Ideen – Geschichte. Anregungen für den Mathematikunterricht. Verlag Franzbecker, Hildesheim 2011

[8] Horst Hischer: Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung Springer Spektrum, Wiesbaden 2012

[9] Hans Niels Jahnke, Norbert Knoche, Michael Otte, William Aspray: History of Mathematics and Education: Ideas and Experiencies. Vandenhoek & Ruprecht, 1996

[10] Gregor Nickel: Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. Mitteilungen der GDM 95, Juli 2013

[11] Jürgen Schönbeck, Annette Weber-Förster: Bedeutende Mathematikerinnen – Ausnahmen in der historischen Entwicklung der Mathematik? in: mathematik lehren: Historische Quellen für den Mathematikunterricht. Band 47, Friedrich Verlag Seelze 1991

[12] C.J. Scriba: P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie-Geschichte: Kulturen, Menschen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001, 2. Aufl. 2005, 3. Aufl. 2010

[13] Thomas Sonar: 3000 Jahre Analysis – Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

[14] H. Wesemüller-Kock, K. A. Gottwald: Vom Zählstein zum Computer– Mathematik in der Geschichte – Altertum – © Universität Hildesheim1998

[15] H. Wesemüller-Kock, K. A. Gottwald: Vom Zählstein zum Computer – Mathematik in der Geschichte - Mittelalter. © Universität Hildesheim 2004

[16] Hans Wußing u. a.: vom Zählstein zum Computer – Mathematik in der Geschichte, 1. Überblick und Biographien. Verlag Franzbecker, Hildesheim 1997,

[17] H. Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008

[18] H. Wußing: 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart. Mit einem Ausblick von Eberhard Zeidler. Unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

Für weitere Informationen siehe www.uni-hildesheim.de/fb4/institute/imai/geschichte-der-mathematik/

Heinz Wilhelm Alten, Stiftung Universität Hildesheim, Institut für Mathematik und Angewandte Informatik, Marienburger Platz 22, 31141 Hildesheim, Email: institut@imai.uni-hildesheim.de

Kleine Welten und Netzwerke – Anregungen für die Didaktik

Horst Hischer

In diesem Diskussionsbeitrag wird ein Vorschlag zur Interpretation von „Vernetzung“ mit Blick auf mögliche konstruktive und analysierende Anwendungen in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik angedeutet, ergänzt um wenige inhaltliche Anregungen für den Mathematikunterricht.

1 „Vernetzung“ — was ist das eigentlich?

„Vernetzung“ und „Vernetztheit“ sind derzeit beliebte Termini in der Presse, aber auch in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik: „Alles ist vernetzt“. Jedoch scheint kaum Bedarf an einer expliziten tragfähigen Definition zu bestehen. So wird in [Brandl & Nordheimer 2011, 144] zu Recht bezüglich der Lehrpläne der Bundesländer betont:

> Was unter Vernetzung jeweils konkret verstanden wird, ist selten explizit beschrieben und erschließt sich nur mit Hilfe von Beispielen.

Und man begegnet z. T. der Meinung, dass bedeutende Autoren wie etwa Lietzmann, Wittenberg und Wagenschein bereits Termini wie „Netze“ bzw. „Vernetzung“ als *Metaphern* verwendet hätten. Hierzu sei zunächst auf die „Nachdenkseite“ von Götz Eisenberg mit dem Titel „Vernetzung“ verwiesen, auf der dieser u. a. schreibt (vgl. den entsprechenden Link im Enzyklopädie-Eintrag zu „Vernetzen“ in madipedia.de):

> Ich habe gelernt, bei der Verwendung von Metaphern Vorsicht walten zu lassen. Man muss immer darauf achten, in welchen Kontext man

> sich damit begibt und welche Deutungsmuster man übernimmt. Wer herausfinden will, was eine Katze ist, sollte auch die Mäuse fragen, und wer wissen möchte, was *Vernetzung* ist, sollte auch die Fische fragen.

Auf meiner Suche nach solchen Metaphern bei den o. g. Autoren nannte mir Hans Schupp dankenswerterweise Fundstellen bei Wittenberg und Wagenschein: Sie verwenden hier zwar nicht die Metaphern „Netz“ oder „Vernetzung“, sondern andere wie angeordnete Themenkreise, überschaubarer gedanklicher Bau, durchgespanntes geistiges Gebilde, Vektoren (Wittenberg), ferner Gewebe, System, Zusammenhang, Knotenpunkt (Wagenschein), die man allerdings nachträglich (auch graphentheoretisch) im Kontext von „Netz-Metaphern“ zu sehen geneigt sein mag. Jedoch ist anzumerken, dass solche Gebilde oft eine Baumstruktur aufweisen, wozu mir Anselm Lambert ergänzend und bekräftigend mitteilte, dass Lietzmann 1949 im Vorwort von „Das Wesen der Mathematik“ Mathematik metaphorisch als Baum beschreibt, denn für ihn sei das „historisch gewachsen sein“ immer ein sehr wichtiger Aspekt gewesen.

Immerhin wird mit den Umschreibungen dieser drei Autoren eine „Beziehungshaltigkeit“ gemäß [Freudenthal 1972, 143] angedeutet, wobei schon [Wagenschein 1970, 400] sinngemäß von einer „beziehungsreichen Schlüsselstellung im Gefüge der Mathematik“ spricht. Das passt zur „Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik“, wie es [Wittmann 1978², 125] als eines der Kennzeichen der „genetischen Methode“ nennt, ferner auch zur von [Vollrath 1976] so genannten „Verbindung“ (eine der „methodischen Variablen“), wozu auch Verbindungen des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen „Themenkreisen“ (s. o.) gehören (vgl. auch die Übersicht in [Hischer 2012, 28–31]).

Gleichwohl ist zu fragen: Wenn „Vernetzung“ oder „Vernetztheit“ nicht deutlich mehr bedeuten sollte als die (selbstredenden?) Bezeichnungen „Beziehungshaltigkeit“ oder „Verbindung“ – warum wählt man dann den undefinierten und leider vieldeutigen Terminus „Vernetzung“?

Im wissenschaftlichen Diskurs sollten grundlegende Termini eigentlich nicht einer subjektiv beliebigen Deutbarkeit überlassen bleiben, sie bedürfen vielmehr zumindest bereichsbezogener Definitionen (wobei es deren dann oft konkurrierende bzw. situativ unterschiedliche geben kann und auch gibt). Da aber „Vernetzung“ mittlerweile sowohl in der wissenschaftlichen Didaktik als auch in der Bildungspolitik bei Lehrplänen und auch beim Strukturieren von Schulbüchern offensichtlich sogar wesentlich verwendet wird, halte ich eine Begriffspräzision für erforderlich. Der nachfolgend unterbreitete Vorschlag beruht nicht auf dem (z. B. im Sinne des ersten Zitats) durchaus begehbaren Weg einer abstrahierenden Analyse all der Beispiele und Vorschläge, die in der Didaktik der Mathematik unter „Vernetzung“ bisher subsumiert worden sind und werden, sondern es wird wie folgt gefragt:

Welches Potential bieten einerseits Methoden und Ergebnisse der sog. Netzwerktheorie für Anwendungen in der Didaktik und in der Pädagogik, und was ergibt andererseits eine abstrahierende Analyse der Bedeutungsvielfalt, die mit „Netz“ (und in der Folge auch mit „Vernetzung“) zunächst im Alltagsverständnis (und damit auch im außerwissenschaftlichen Bereich) assoziiert wird?

2 Das Kleine-Welt-Phänomen

Stößt man als Fremder zu einer Versammlung und stellt nach kurzer Unterhaltung fest, dass man mit einem anderen Teilnehmer einen gemeinsamen Bekannten hat, so kommentiert man das sinngemäß etwa mit „Ach, wie ist die Welt doch klein!“. Doch was bedeutet das? Ist es tatsächlich eine „Binsenweisheit“, dass die Welt immer kleiner würde, wie in http://www.taz.de/!82628/ (gültig am 2. 5. 2014) zu lesen ist? Wohl kaum – immerhin wird das „Kleine-Welt-Phänomen“ erst seit Ende der 1990er Jahre statistisch und mathematisch modellierend seriös untersucht. Dazu zunächst zwei Beispiele:

2.1 *Das Kevin-Bacon-Orakel*

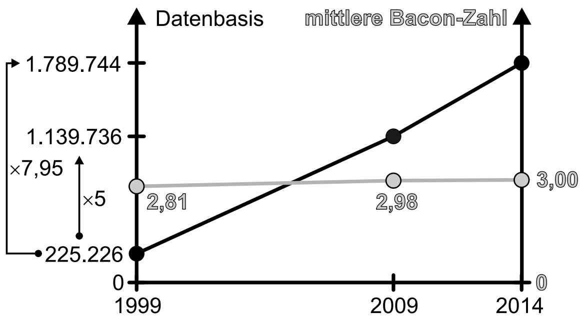
Der bis in die 1990er Jahre kaum bekannte Film- und Fernsehschauspieler Kevin Bacon trat früher vor allem in Nebenrollen auf. 1996 war er dann zu internationaler Bekanntheit gelangt, nachdem im *Time Magazine* die „The Oracle of Bacon“ genannte Website oracleofbacon.org des Informatikers Brett Tjaden als eine der „Top Ten“ ausgezeichnet wurde. Diese Website basiert auf imdb.com, der *Internet Movie Data Base*, einer ständig aktualisierten und öffentlich zugänglichen Datenbank, und sie enthält weitere aktuelle statistische Daten.

Die Eingabe des Namens eines beliebigen registrierten „Akteurs“ in oracleofbacon.org liefert eine Zahl aus $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ als „Abstand“ zu Bacon, genannt *Bacon-Zahl* dieses Akteurs (z. B. „3“ als

Bacon-Zahl von Heinrich George). Das funktioniert wie folgt: Im (zeitabhängigen) Zusammenarbeitsgraphen, dessen Knoten für die in der Datenbank erfassten Akteure stehen, verläuft zwischen zwei Knoten genau dann eine Kante, wenn beide in mindestens einem Film gemeinsam mitgewirkt haben. Die Bacon-Zahl eines Akteurs A ist dann die Länge eines kürzesten Weges in diesem Graphen zwischen A und Bacon, also $d(A, \text{Bacon})$.

Die größte bisher aufgetretene endliche Bacon-Zahl ist 8 (siehe folgende Tabelle), und die mittlere Bacon-Zahl ist seit 1999 erstaunlich stabil, und das trotz nahezu Verachtfachung der Datenbasis. Anfang Mai 2014 gab es weltweit nur sieben in imdb.com registrierte Akteure mit der (größten) Bacon-Zahl 8, und fast 1.150.000 (rund 64 %) der Akteure hatten die extrem niedrige Bacon-Zahl 3.

Bacon-Zahl	1999	2009	1.9.2013	3.5.2014
0	1	1	1	1
1	1.181	2.251	2.796	2.891
2	71.397	22.5506	311.207	331.090
3	124.975	719.767	1.059.651	1.145.508
4	25.665	178.784	266.847	285.450
5	1.787	12.205	21.222	22.156
6	196	1.040	2.157	2.391
7	22	165	226	250
8	2	17	28	7
mittlere Bacon-Zahl:	2,81	2,98	3,00	3,001
Datenbasis:	225.226	1.139.736	1.664.135	1.789.744



2.2 *Die Erdős-Zahl*

Die „Erdős-Zahl" bezieht sich auf den ungarischen Mathematiker Pál Erdős und ist ähnlich wie die Bacon-Zahl definiert. Der zeitabhängige Zusammenarbeitsgraph aller weltweit sowohl lebenden als auch nicht mehr lebenden, jeweils publiziert habenden Mathematiker(innen) – „Autoren" genannt – sei nun *Mathematiker-Graph* genannt und mit $\mathbf{C}_m$ bezeichnet („C" steht für „collaboration graph").

Genau dann verläuft zwischen zwei Knoten (den Autoren) von $\mathbf{C}_m$ in Analogie zum Akteurs-Graphen eine Kante, wenn sie mindestens eine Publikation *gemeinsam* verfasst haben (wobei auch weitere Autoren beteiligt sein können). Für alle Autoren M ist dann $d(M, \text{Erdős})$ deren *Erdős-Zahl*. $\mathbf{C}_m$ basiert auf der von der *American Mathematical Society* gepflegten „MathSciNet" genannten Datenbank. Die Erdős-Zahlen sind abrufbar unter ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html.

Die Autoren mit endlicher Erdős-Zahl bilden den *Erdős-Graph* $\mathbf{C}_e$ (ein Untergraph von $\mathbf{C}_m$). Im Stand von 2010, bei einer Datenbasis von damals rund 268.000, war 13 die größte Erdős-Zahl, und 4,65 war die mittlere Erdős-Zahl – ein wie bei der Bacon-Zahl ebenfalls sehr kleiner Wert (mehr dazu von Jerry Grossman unter oakland.edu/enp/).

Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010	Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010
1	504	8	3146
2	6593	9	819
3	33605	10	244
4	83642	11	68
5	87760	12	23
6	40014	13	5
7	11591		

Mittlere Erdős-Zahl: 4,65
Datenbasis: 268.015

2.3 *Kleine Welten*

Im Erdős-Graphen existiert zwischen je zwei Autoren A und B stets ein Weg über Erdős, und weil die Erdős-Zahl maximal 13 ist, folgt $d(A, B) \leq 26$. Analog ist im Akteurs-Graphen $d(A, B) \leq 16$, doch verschärft gilt sogar $d(A, B) \leq 15$. Dieser maximale Knotenabstand eines Graphen ist hier also angesichts der jeweils großen Datenbasen sehr klein. Damit ist auch der mittlere Knotenabstand jeweils „relativ klein" (was als „schnelle Durchsuchbarkeit" des Graphen beschreibbar ist), und darüber hinaus ist er bei beiden Zusammenarbeitsgraphen sogar nahezu unabhängig von der Knotenanzahl.

In dieser Sichtweise sind die beiden hier vorgestellten Graphen Beispiele für Kleine Welten.

2.4 *Kleine Welten: „Naben" und das „Potenzgesetz"*

In *vollständigen* Graphen sind je 2 Knoten direkt verbunden, d. h., es gilt $d(A, B) = 1$ für alle Knoten A und B – und damit ist jeder vollständige Graph ein trivialer Sonderfall einer Kleinen Welt. Doch wie kann dann bei großen, natürlichen, nichtvollständigen Graphen wie z. B. den gerade betrachteten das Kleine-Welt-Phänomen auftreten?

Grad	Anzahl	Grad	Anzahl	Grad	Anzahl
0	83621	20	945	40	111
1	107647	21	825	41	113
2	71452	22	720	42	99
3	39574	23	665	43	95
4	22815	24	563	44	98
5	15205	25	541	45	67
6	10679	26	468	46	83
7	7917	27	460	47	79
8	6255	28	390	48	68
9	4959	29	364	49	67
10	4141	30	311	50	61
11	3283	31	279	51–60	399
12	2808	32	264	61–70	189
13	2368	33	222	71–80	103
14	1993	34	221	81–90	57
15	1756	35	227	91–100	35
16	1575	36	177	101–150	60
17	1311	37	172	151–200	10
18	1147	38	130	201–504	5
19	1046	39	150		

Die Erklärung findet sich oft in der Existenz „weniger“ Knoten mit extrem hohem Knotengrad, genannt „Naben“ („hubs“). Deren Auftreten ergibt sich in vielen Wachstumsprozessen sowohl empirisch als auch modellierend durch “preferential attachment“: Beim Entstehen neuer Kanten zum „Andocken“ an vorhandenen Knoten werden Knoten mit relativ hohem Grad bevorzugt. Dieses Prinzip heißt “rich get(s) richer“ oder auch (mit Bezug auf das Matthäus-Evangelium 25, 29) „Matthäus-Effekt“: „Denn wer da hat, dem wird gegeben werden, und er wird die Fülle haben [...]“

So „sind“ z. B. Bacon und Erdős jeweils Naben in „ihren“ Graphen (mit jeweils noch weiteren Naben). Naben sind für das Ausfallverhalten von realen „Netzwerken“ bedeutsam: Unter welchen Bedingungen bleibt die Funktionsfähigkeit erhalten, wenn gewisse (nicht zu viele) Knoten oder Kanten ausfallen? Bei gezieltem Angriff auf Naben (deren Zerstörung) kann das Netzwerk Schaden nehmen, im schlimmsten Fall sogar zusammenbrechen. Es ist dann in diesem Sinn instabil. Werden aber zu zerstörende Knoten nicht gezielt ausgewählt, sondern (in nicht zu großer Anzahl) nur stochastisch zerstört, so bleibt das Netzwerk funktionsfähig, es ist stabil. Das wurde sowohl empirisch als auch in Modellierungen bestätigt (vgl. [Hischer 2014, 29 ff.]).

Die Tabelle links zeigt die Häufigkeits-Verteilung der Knotengrade von $\mathbf{C}_e$ im Stand von 2010.

Die erste Abbildung unten stellt diese Daten graphisch dar, die zweite zeigt den Anfangsteil in doppelt-logarithmischer Darstellung, und die letzte zeigt (erkennbar für die Knotengrade von etwa 3 bis 16) einen vergrößerten mittleren Ausschnitt mit einem nahezu „geradlinigen Verlauf“, was in der Netzwerktheorie „Potenzgesetz“ heißt:

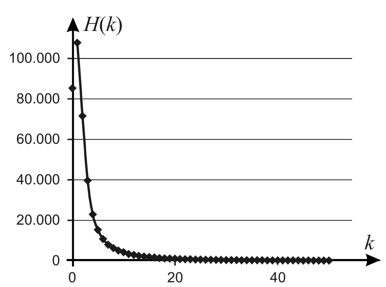
Ist k der Grad eines Knotens und $p(k)$ die relative Häufigkeit der Knotenanzahl in dem Graphen mit dem Grad k, so gilt mit einer Konstanten γ für einen großen Bereich von k die Proportionalität $p(k) \sim k^{-\gamma}$ (*„power law tail“*). Die dritte Abbildung liefert $\gamma_{\text{Erdős}} \approx 2{,}97$, und analog ist $\gamma_{\text{Bacon}} \approx 2{,}3$. Für Kleine Welten gilt dieses „Potenzgesetz“ oft sowohl empirisch als auch in Simulationsmodellen als wichtige weitere Eigenschaft. Die „meisten“ Knoten in solchen Zusammenarbeitsgraphen haben dann einen sehr kleinen Grad. Das Potenzgesetz gilt aber nicht für alle Kleinen Welten, z. B. nicht bei vollständigen Graphen, weil hier alle Knoten denselben Grad haben (vgl. die erste Abbildung!).

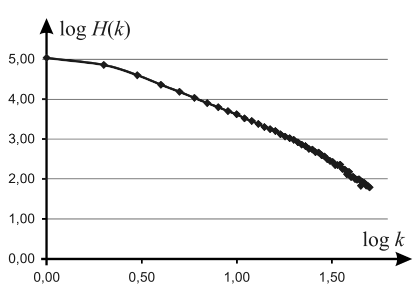
3 Netz, Netzwerke und Vernetzung

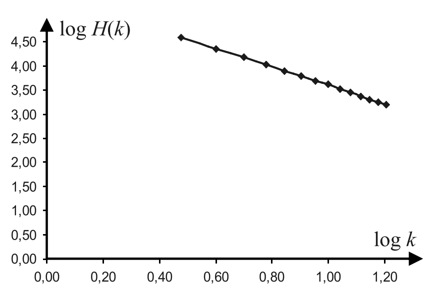
3.1 *Problematisierung*

Das in vielen Bereichen (wie z. B. Soziologie und Biologie) beobachtete *Kleine-Welt-Phänomen* wurde zuerst von Stanley Milgram beschrieben (vgl. [Hischer 2014, 8 f.]) und hat zur Entwicklung der Netzwerktheorie beigetragen (vgl. [Newman 2010]). Ende der 1990er Jahre gelang mit Methoden der Statistischen Physik eine mathematische Modellierung, die ein Verständnis mancher Phänomene wie z. B. dem der „Kleinen Welten“ ermöglichte.

Doch was ist im pädagogisch-didaktischen Kontext unter „Netzwerk“ bzw. „Netz“ zu verstehen? So verwendet z. B. [Hasemann 1988] (also noch vor Etablierung der Netzwerktheorie) im Kontext „kognitionstheoretischer Modelle“ synonym die Termini „Netzwerk“ und „Netz“ (auch „semantische Netzwerke“ bzw. „semantische Netze“ genannt), wobei die Kanten für „semantische







Relationen“ stehen. Strukturell liegen hier (gerichtete) Graphen vor (wie a. a. O. erwähnt).

Sucht man in der Mathematik nach Definitionen für „Netz“ oder „Netzwerk“, so bietet zwar die Graphentheorie mehrere Definitionen für „Netz“ an, die hier jedoch nicht hilfreich sind. Das gilt auch für die Definition von „Netzwerk“ als „zusammenhängender, gerichteter Graph mit genau einer Quelle, genau einer Senke und mit einer Kapazitätsfunktion“ in [Lexikon der Mathematik 2000].

Dies war für mich Anlass für einen eigenen Ansatz zur Entwicklung begrifflicher Präzisierungen für „Netz“, „Netzwerk“ und „Vernetzung“.

3.2 *„Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext*

Eine Sammlung der vielfältigen Bedeutungen von „Netz“ im Alltagsverständnis führt durch Bündelung und Abstraktion zu folgendem Katalog (ausführliche Darstellung in [Hischer 2010, 49 ff.], andeutungsweise auch in [Hischer 2014, 15 ff.]):
Ein Netz

- dient einerseits dem Aufzeigen von Verbindungen bzw. Zusammenhängen,
- dient andererseits dem Herstellen von Verbindungen bzw. Zusammenhängen,
- kann zwar ein Gefangensein bewirken,
- kann aber zugleich Sicherheit bzw. Schutz bieten,
- enthält dennoch oft Schlupflöcher,
- vermag über seinen Inhalt zu täuschen.

Eine Interpretation dieses Eigenschaftskatalogs von „Netz im Alltagsverständnis“ in pädagogisch-didaktischer Sicht lässt drei unterschiedliche Blöcke erkennen:

- *Bestandteile:* Die ersten beiden Eigenschaften beziehen sich auf die Bestandteile eines Netzes (im pädagogisch-didaktischen Kontext sind das Objekte wie Begriffe, Ideen, Dinge, . . . , ggf. Lebewesen), die man wie in der Graphentheorie *Knoten* nennen kann und die durch die oben angesprochenen *Verbindungen* bzw. *Zusammenhänge* als *Kanten* verbunden sind.
- *Benutzer:* Die nächsten drei Eigenschaften betreffen die Benutzer eines Netzes: Sie bilden wie in einem Gemüsenetz den „Inhalt“ eines Netzes, es sind also hier die mit den Bestandteilen umgehenden Benutzer gemeint (z. B. die Schülerinnen und Schüler).
- *Betrachter:* Die letzte Eigenschaft (Täuschung über den Inhalt) betrifft die Betrachter eines Netzes (z. B. Lehrpersonen, die ihre Schülerinnen und Schüler beobachten).

Aus pädagogischer Sicht ist zu beachten: Wie bei einem Spinnennetz oder einem Fischernetz können die Benutzer „Opfer“ eines Netzes werden oder sein, wenn sie sich z. B. in den „Maschen des Netzes“ verfangen, etwa beim Surfen im WWW.

So kann ein materielles Netz für seine Benutzer zum Gefängnis werden, aus dem es sich zu befreien gilt: Menschliche Benutzer eines Netzes laufen damit Gefahr, zum Bestandteil dieses Netzes zu werden – wenn sie etwa bei dessen Benutzung nicht hinreichend „emotionale Distanz“ wahren! Und weiterhin können menschliche Benutzer eines Netzes zu Betrachtern dieses Netzes werden (und umgekehrt), wobei das Netz diese (und ggf. andere) Gruppen (möglicherweise „durchlässig“) trennt.

Eine vierte denkbare Gruppe, nämlich die der Konstrukteure eines Netzes, ist verzichtbar – wir können die Aufgabe der Konstruktion bei den Betrachtern ansiedeln, fallweise auch bei den Benutzern. Insgesamt zeigt sich: Die begriffliche Unterscheidung zwischen Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern eines Netzes ist weder scharf noch absolut, sie ist relativ, sie meint eine zweckbezogene Tendenz, und es ist ein Rollenwechsel möglich.

Ein „greifbares“ materielles Netz (Fischernetz, Spinnennetz, Trapeznetz) wird i. d. R. als *einfacher* (mehrfachkantenfreier) *Graph* beschreibbar sein. Das scheint nach dem hier vorliegenden Ansatz für ein „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext nicht zu gehen.

Vielmehr liegen zunächst Assoziationen mit dem soziologischen „System“ nahe (bei dem ebenfalls die „Betrachter“ eine wichtige Rolle spielen). Dennoch benötigt man den dubiosen Systembegriff wohl nicht:

Das „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“ besteht aus den drei „Trägermengen“ der Bestandteile, der Benutzer und der Betrachter, den (noch näher zu beschreibenden) Beziehungen (Relationen, Operationen) innerhalb dieser drei Trägermengen und schließlich aus strukturellen Beziehungen zwischen diesen drei Trägermengen.

Zur strukturellen Beschreibung der Bestandteile (den „Knoten“ mit ihren Verbindungen als „Kanten“) bieten sich einfache (ggf. gerichtete) Graphen an, die man sich überlagert bzw. kombiniert denken kann, um auf diese Weise ggf. vorhandene Mehrfachkanten (bei „Multigraphen“) zu erfassen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der Benutzer zu den Bestandteilen und der Benutzer untereinander lassen sich bei Bedarf durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen Beziehungen der Betrachter zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, außerdem Beziehungen der Betrachter untereinander, so dass mehrere Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Kombination ein Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext ausmachen.

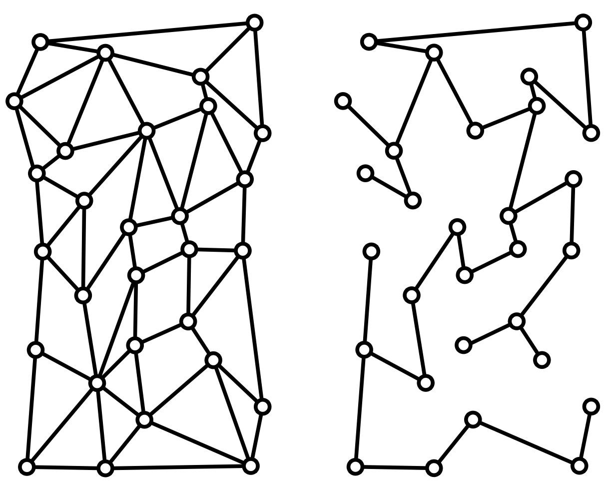
3.3 *Netzgraph, Netzwerk, Vernetzung*

Dazu sei hier zunächst ein kleiner Ausflug in die Welt der (mathematischen) Graphentheorie vorangestellt bzw. nachgeholt (vgl. z. B. [Hischer 2010]): In einem ersten Schritt sind spezielle einfache Graphen zu charakterisieren, die das graphentheoretisch „Innerste" der Netze (nämlich ihre Bestandteile) axiomatisch beschreiben:

Im idealtypischen Fall soll dies ein Netzgraph (Abbildung unten links) sein, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist: (1) ein endlicher, zusammenhängender Graph (ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn zwischen je zwei Knoten ein „Weg" existiert), (2) bei dem jede Kante „Teil einer Masche" ist (eine Masche ist ein sehnenfreier Kreis, und ein Kreis ist ein geschlossener Weg, bei dem jeder Knoten und jede Kante genau einmal vorkommt, also auch ohne Wiederholungen), (3) ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat (der Grad eines Knotens gibt die Anzahl der Kanten an, die mit dem Knoten „andocken", „inzidieren" genannt). In Netzgraphen gibt es dann zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege (siehe Abbildung).

Diese *ideale Vernetzung* würde bedeuten, dass es zu jedem Eingang mindestens zwei Ausgänge gibt, oder anders: dass es *stets verschiedene Wege zu einem Ziel* gibt (was vielleicht als Kennzeichen für einen *offenen Unterricht* deutbar ist …).

In der *Netzwerktheorie* ist „Netzwerk" oft nur ein anderer Name für die dort (in Anwendungs- oder Modellierungssituationen) betrachteten Graphen. Hier wird nun stattdessen vorgeschlagen, „Netzwerk" als abgrenzenden Namen für einen (einfachen) *zusammenhängenden, maschenhaltigen Graphen* (Abbildung unten rechts) zu nehmen, womit dann ein „Baum" kein Netzwerk ist. (Ein Graph sei „maschenhaltig" genannt, wenn er mindestens eine Masche enthält).



Jeder Netzgraph ist damit ein Netzwerk, aber nicht umgekehrt. Ferner: Genau *Netzwerke* sind stets *vernetzt*, *Netzgraphen* sind *ideal vernetzt*, *Bäume* sind aber *nicht vernetzt*, sondern nur *verzweigt*:

Während es in einem Netzgraphen zwischen je zwei Knoten stets mindestens *zwei* verschiedene Wege gibt, liegt bei Bäumen die konträre Situation vor, denn hier gibt es zwischen je zwei Knoten stets genau *einen* Weg. In diesem Sinne sind *Mind-Maps* i. d. R. nicht vernetzt, also keine Netzwerke.

Es gibt graduelle Abstufungen von „Vernetzung", die qualitativ beschreibbar und auch durch *Vernetzungsgradmaße* quantitativ messbar sind (vgl. [Hischer 2010, 110 ff.; 190 ff.]).

4 Konsequenzen

4.1 *„Vernetztes Denken" vs. „Vernetzendes Denken"*

Dies ist nur ein kleiner Zwischenruf, dem eigentlich mehr Platz gebührt:

Vielfach (leider: meistens) wird „vernetztes Denken" propagiert, jedoch fordert [Klafki 2007, 63] in seinem Allgemeinbildungskonzept erfreulicherweise „vernetzendes Denken". So sollte man zwischen „vernetztem Denken" (einer Nutzung bereits vorhandenen Vernetzseins) und „vernetzendem Denken" (der Herstellung neuen Vernetzseins) unterscheiden (vgl. auch hier die Ausführungen in [Hischer 2010]).

4.2 *Kleine Welten und vernetzender Unterricht*

Hier sei zunächst an die in der Didaktik bisher betrachteten „semantischen Netzwerke" gedacht (siehe z. B. [Hasemann 1988]), die der Beschreibung der Struktur von *Unterrichtsinhalten* dienen (sollen): *Knoten* sind z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen, Sätze*, …, auch *Beispiele* unter Einschluss von *Übungsaufgaben*. *Kanten* sind Beziehungen zwischen diesen Knoten: *logische* im Sinne des Schließens und des Folgerns bzw. des Folgens, aber auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrens, Ratlosseins, …, die insgesamt zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung" der Knoten beitragen (können).

Diese Kanten können sowohl *gerichtet* als auch *ungerichtet* sein.

Zur Vermeidung von Missverständnissen sei betont, dass diese nur beispielhaft und nicht abschließend gemeinte Aspektauflistung für Knoten und Kanten aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler zu sehen ist: Was sind für *sie* Ankerpunkte des Wissens (Entdeckens, Behaltens, …), und wie verknüpfen *sie* das alles miteinander, wie „konstruieren" oder „rekonstruieren" *sie* das? Es soll also hier nur *angedeutet* werden, was möglich ist – Konkretes muss weiteren Untersuchungen und Analysen vorbehalten bleiben.

Hier sollten nun die erwähnten *Naben* in den Blick kommen, denn sie ermöglichen *kurze Wege* zwischen den Knoten, und ihr *Ausfallverhalten* ist wichtig: Wie entstehen solche Naben, wie kann man ihre Entstehung und Stabilisierung fördern, wie Wichtiges gegenüber Unwichtigem betonen?

„Vernetzen“ ist dann ein Prozess, bei dem aus bereits vorliegenden Knoten ein *Netzwerk* gebildet und erweitert wird – durch Einziehen neuer Kanten bei vorhandenen Knoten (durch “preferential attachment“?) bzw. durch Einfügung neuer Knoten, gefolgt vom Einziehen weiterer Kanten –*vernetzendes Denken!* Zu Beginn eines solchen Prozesses müssen die ersten Knoten und Kanten noch kein Netzwerk im definierten Sinn bilden. Doch mit der ersten auftretenden Masche liegt dann zumindest eine teilweise Vernetzung vor. Dieser Prozess kann ggf. auf die Entstehung eines Netzgraphen hinauslaufen. Aber auch ein „Schrumpfen“ ist möglich. Aufgrund der unterschiedlichen Kantentypen (gerichtet oder ungerichtet) können die Bestandteile ggf. in mehrere Graphen zerlegt gedacht werden, die sich überlagern.

Diese Andeutungen bedürfen einer Vertiefung an anderer Stelle: Zum Verstehen solcher Vernetzungsprozesse sind möglicherweise einschlägige Erkenntnisse und Methoden u. a. auch aus der (soziologischen) Netzwerktheorie heranzuziehen.

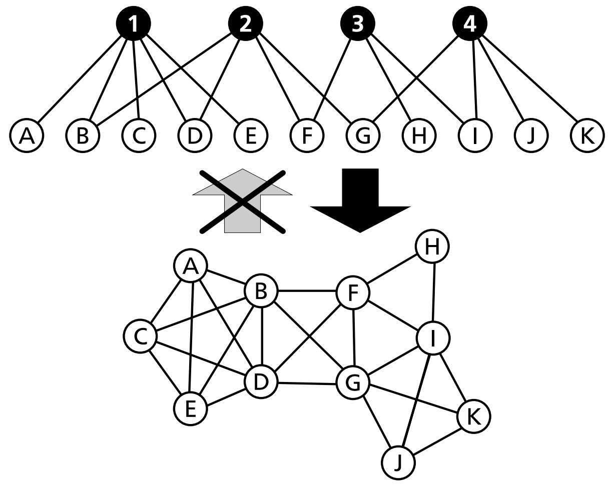
4.3 *Kleine Welten im Mathematikunterricht?*

Hier seien nur einige *inhaltliche Anregungen* für eine neuartige, aktuelle Betrachtung von Graphen im Mathematikunterricht skizziert. Diese *offene Liste* ist jedoch nicht als empfohlene Reihenfolge der Behandlung im Unterricht gedacht:

- „Renaissance“ der Thematisierung endlicher Graphen im Unterricht durch Experimentieren mit „kleinen“ endlichen Graphen.
- „Kleine-Welt-Phänomen“: experimentelle Aneignung empirischen Wissens im WWW mit „großen“ endlichen Graphen (Bacon, Erdős).
- Statistische Datenbankauswertung: Mittelwerte, zeitliche Entwicklungen, Potenzgesetz, ...
- Eigenschaften großer „Netzwerke“: Naben, Ausfallverhalten.
- Netzwerkstatistiken: mittlerer Knotenabstand, mittlerer Knotengrad, ...
- Transfer dieses empirischen Wissens auf andere große „Netzwerke“.
- ...

4.4 *Kleine Welten und soziale Netzwerke*

Was ist ein „soziales Netzwerk“? Man denkt hier vermutlich an Facebook, Twitter usw. – jedoch: Wie sieht eigentlich die Struktur dieser Netzwerke aus? Die Abbildung oben rechts visualisiert Wesentliches (nach [Newman et al. 2001, 02618-2]):



Der obere Graph ist ein *bipartiter Graph*, dessen Knotenmenge in zwei Teilmengen zerfällt, deren Knoten jeweils nicht benachbart sind. Wenn beispielsweise die Ziffern für Filme und die Buchstaben für Akteure stehen, dann liegt ein Zusammenarbeitsgraph wie im Abschnitt 2.1 vor, also ein Akteurs-Graph.

Der untere Graph ist die *unipartite Projektion* des oberen Graphen, sie enthält offenkundig weniger Informationen als der obere Graph. Beides sind Beispiele für *soziale Netzwerke*, wie sie in der Soziologie als *affiliation networks* (also Verwandtschaftsnetzwerke oder Freundschaftsnetzwerke) untersucht werden:

Die Kanten in der unipartiten Projektion stehen für existierende „Gemeinsamkeiten“ der Knoten (hier also für gemeinsame Filme der Akteure), während die obere Darstellung (also der bipartite Graph) auch angibt, welches jeweils die gemeinsamen Filme sind. Es werden sogar *alle* gemeinsamen Filme angegeben (so sind 1 und 2 gemeinsame Filme von B und D).

Ferner kann man die Abbildungen auch als Darstellungen des Erdős-Graphen ansehen oder sich hierbei Schülerinnen und Schüler mit ihren Interessen usw. vorstellen.

Insbesondere schließt sich mit dieser Darstellung sozialer Netzwerke der Kreis zur bisher vorgestellten und unabhängig davon entwickelten Konzeption von „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“: Die Ziffern im oberen Teil des bipartiten Graphen mögen für die Bestandteile (z. B. „Unterrichtsinhalte“) stehen und die Buchstaben für die Benutzer (z. B. Schülerinnen und Schüler). Dann wird deutlich, dass mit diesem bipartiten Graphen ein Teilaspekt von „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“ erfasst wird.

Hinzu kommen die Betrachter, für die Ähnliches gilt, und man kann dann entsprechend die graphentheoretische Struktur (im einfachsten Fall) zu „tripartiten Graphen“ erweitern: Beziehungen zwischen den Benutzern und gewissen Bestandteilen, Beziehungen zwischen den Betrachtern und denselben Bestandteilen und schließlich Beziehungen zwischen den Benutzern und den Betrachtern. (Komplexer wird es bei der Berücksichtigung von Beziehungen unterschiedlichen Typs).

In Abschnitt 3.2 wurde das auf einer Analyse des Alltagsverständnisses von „Netz" basierende Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext vorgestellt. Dieses erweist sich nun in neuer Sicht als ein verallgemeinertes dreifach strukturiertes soziales Netzwerk, das „Pädagogisches Netz" genannt sei.

Wegen der komplexen Beziehungen zwischen den Knoten der drei Ebenen (Bestandteile, Benutzer, Betrachter) wird der entsprechende tripartite Graph in aller Regel nicht planar sein. Berücksichtigt man, dass die in den „Bestandteilen" erfassten Elemente von unterschiedlichem Typ sein können und sein werden, so wird die „Bestandteilsebene" in Teilebenen aufzuspalten sein.

Diese (z. T. noch vagen) Andeutungen mögen zu einer ungewöhnlichen, ungewohnten Sichtweise anregen: Eine derartige graphentheoretisch orientierte Kennzeichnung sozialer Netzwerke bietet im Prinzip ein reichhaltiges Werkzeug zur Erfassung kommunikativer und sozialer Strukturen im Unterricht, welches sich für Untersuchungen, Beschreibungen und Planungen im pädagogischen Rahmen eignet. Entsprechende Methoden sind jedoch an anderer Stelle noch auszuarbeiten und zu erproben.

Dabei ist zu prüfen und zu berücksichtigen, inwieweit konkrete Werkzeuge in der mathematischen Netzwerktheorie und insbesondere in der Soziologie (oder auch in anderen Disziplinen) bereits vorliegen, um (in ggf. modifizierter Form) darauf zurückgreifen bzw. darauf aufbauen zu können.

Für die Planung, Durchführung und Auswertung des Unterrichts spielen sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrpersonen (und ggf. weitere Betrachter) eine wesentliche Rolle. Mit Hilfe des beschriebenen „Pädagogischen Netzes" werden diese explizit berücksichtigt. Damit sei ein interessantes Forschungs- und Entwicklungsfeld umrissen.

Ich danke Wilfried Herget, Anselm Lambert und Hans Schupp für wertvolle kritisch-konstruktive Rückmeldungen zu diesem Beitrag.

Literatur

Brandl, Mathias & Nordheimer, Swetlana [2011]: *Zufällig vernetzt? Vernetzungen mit Stochastik im Lehrplan und darüber hinaus.* In: R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Münster: WTM-Verlag, S. 143–146.

Freudenthal, Hans [1973]: *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Klett.

Hasemann, Klaus [1988]: Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse, In: *Journal für Mathematikdidaktik*, **9** (1988) 2/3, 95–161.

Hischer, Horst [2010]: *Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? – Vernetzung als Medium zur Weltaneignung.* Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, Horst [2012]: *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hischer, Horst [2014]: *Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik.* Erscheint in einem Tagungsband. Vorab als Preprint: www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint342.pdf

Klafki, Wolfgang [2007]: *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik – Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik.* Weinheim/Basel: Beltz (6., neu ausgestattete Auflage; 1. Auflage 1985).

Lexikon der Mathematik [2000]: Mannheim/Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Lietzmann, Walter [1949]: *Das Wesen der Mathematik.* Braunschweig: Vieweg.

Newman, Mark [2010]: *Networks. An Introduction.* Oxford: Oxford University Press.

Newman, Mark E. J. & Strogatz, Steven H. & Watts, Duncan J. [2001]: Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. In: *Physical Review* E, 64(2001), 026118, 1–17.

Vollrath, Hans-Joachim [1976]: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht. In: *Der Mathematikunterricht*, **22** (1976) 5, 7–24.

Vollrath, Hans-Joachim [2001]: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe.* Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Wagenschein, Martin [1970]: *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken I.* Stuttgart: Klett (2. Auflage; 1. Auflage 1965).

Wittenberg, Alexander Israel [1990]: *Bildung und Mathematik – Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Stuttgart: Klett. (Erstausgabe 1963, geschrieben in Québec, Kanada.)

Wittmann, Erich Christian [1978]: *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg (fünfte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage; 1. Auflage 1974).

Horst Hischer, Universität des Saarlandes, Fakultät für Mathematik und Informatik; privat: Roonstraße 7, 38102 Braunschweig, Email: hischer@math.uni-sb.de

Eins zu Eins – Kurzfassung eines Vortrages im Arbeitskreis Geometrie

Hans Walser

Es werden exemplarisch geometrische Beispiele aus der Ausbildung Studierender in Geomatik, Kartografie, Vermessungswesen und Geografie vorgestellt. Viele Beispiele mit räumlichen und sphärischen Überlegungen sind für den Schulunterricht geeignet.

1 Längen oder Winkel?

Sind *geografische Länge* und *geografische Breite* eigentlich Längen oder Winkel?

Werden sie als geometrische Längen in einem kartesischen Koordinatensystem abgetragen, ergibt sich die so genannte *Plattkarte* (Abb. 1).

In der Parameterdarstellung

$$\left.\begin{array}{l} x(\phi,\lambda) = \cos(\phi)\cos(\lambda) \\ y(\phi,\lambda) = \cos(\phi)\sin(\lambda) \\ z(\phi,\lambda) = \sin(\phi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \lambda \in [-\pi, \pi] \end{array}$$

erscheinen geografische Länge λ und geografische Breite ϕ hingegen als Winkel.

Der Parameterbereich $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \lambda \in [-\pi, \pi]$ entspricht der Plattkarte (Abb. 2).

Für Mathematiker geht der Gedankengang von links nach rechts, vom Parameterbereich zur Kugelfläche. Kartografen arbeiten von rechts nach links, von der Realität zur Karte. Jede Parametrisierung der Kugel liefert eine Karte, wenn der Parameterbereich mit Geoinformation gefüllt wird.

2 Plattkarte im Hochformat?

Frage eines Studierenden: Können wir in der Parameterdarstellung die Ausmaße des Parameterrechteckes vertauschen? Wir arbeiten dann mit der Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{array}{l} x(\phi,\lambda) = \cos(\phi)\cos(\lambda) \\ y(\phi,\lambda) = \cos(\phi)\sin(\lambda) \\ z(\phi,\lambda) = \sin(\phi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \phi \in [-\pi, \pi], \\ \lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \end{array}$$

Das Parameterrechteck ist jetzt im Hochformat statt im Querformat. Die Rückseite (eurozentrisch gesehen) der Erdkugel, den Pazifik also, erreichen wir nicht mehr durch geografische Längen über 90°W oder 90°E hinaus, sondern indem wir die

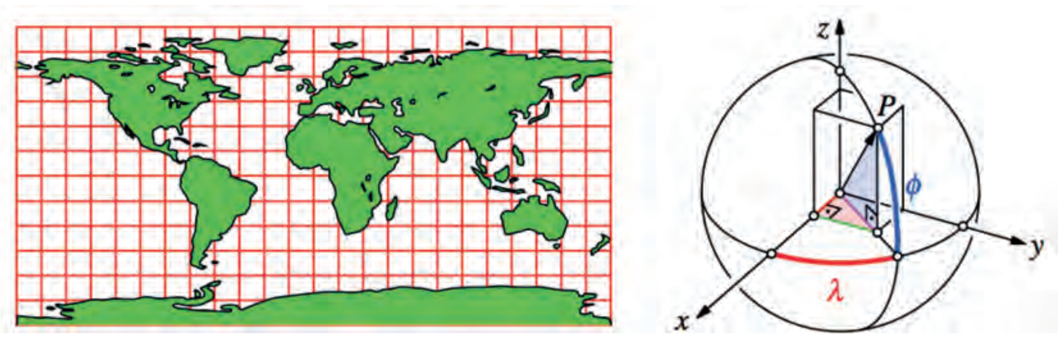


Abbildung 1. Plattkarte. Parameterdarstellung

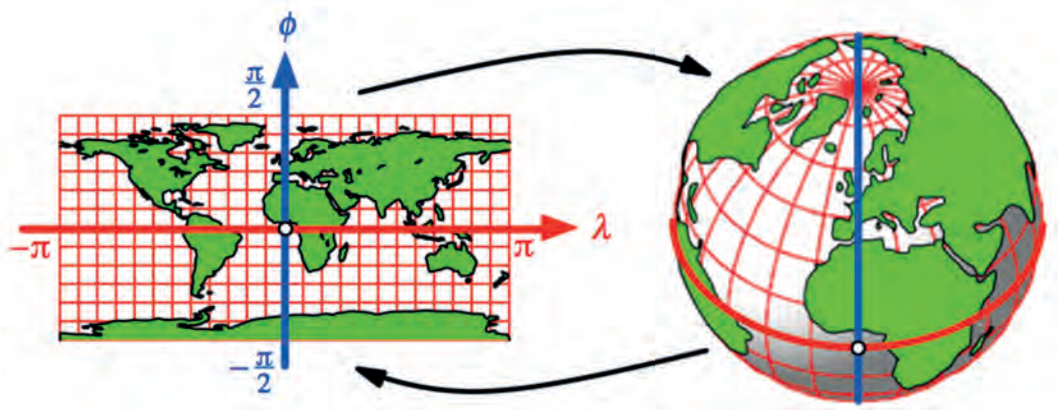


Abbildung 2. Plattkarte als Parameterbereich

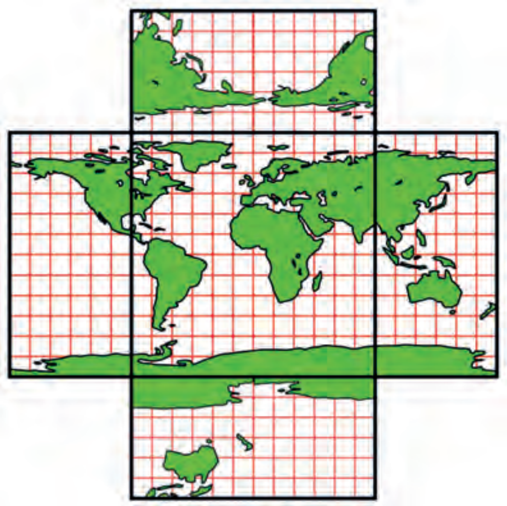


Abbildung 3. Abschneiden und Ansetzen

Meridiane über die Pole hinaus nach hinten verlängern.

Mit dem neuen Parameterrechteck ändert sich äußerlich gar nichts; der Computer plottet dieselbe Kugel.

Jetzt aber stellt sich die Frage: Wie sind die äußeren Teile der üblichen Plattkarte abzuschneiden und neu anzusetzen, damit sich die dem Hochformat entsprechende Karte ergibt (Abb. 3)?

Die vier Teile müssen *spiegelbildlich* angesetzt werden. Um das einzusehen, überlegen wir uns, wie sich die Meridiane auf der „Vorderseite“ (eurozentrisch gedacht) über die Pole hinaus auf die „Rückseite“ fortsetzen. Aus dem Meridian für 30°E wird der Meridian für 150°W. Die Meridiane überkreuzen sich in den Polen.

Wenn wir die Karte auf den Kopf stellen und den Pazifik studieren, stellen wir fest, dass sich Japan und Kalifornien je auf der „falschen“ Seite befinden. Spiegelbildliche Karten sind für uns ungewohnt; falsch sind sie aber nicht. Das Beispiel illustriert vielmehr, wie sehr wir uns an bestimmte Standards in der Kartendisposition gewöhnt haben.

3 Immer gerade aus

... so geh hübsch sittsam und lauf nicht vom Wege ab!

Eine *geodätische Linie* ist eine Kurve auf einer Oberfläche, auf der subjektiv immer geradeaus gefahren wird. Sie hat also keine Seitenkrümmung nach links oder rechts. Auf der Ebene sind die geodätischen Linien die Geraden. Wenn wir uns auf der Kugel subjektiv „gerade aus“ bewegen, bewegen wir uns auf einem Kreis, welcher denselben Radius und denselben Mittelpunkt hat wie die Kugel. Solche Kreise heißen *Großkreise* oder *Orthodromen*. Ihre Trägerebene geht durch den Kugelmittelpunkt.

Großkreise spielen eine wichtige Rolle in der sphärischen Geometrie; sie übernehmen die Rolle der Geraden. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche, gemessen auf der Kugeloberfläche (also nicht in einem geradlinigen Tunnel), ist ein Großkreisbogen.

Der Äquator und alle Meridiane sind Großkreise, nicht aber die übrigen Breitenkreise, welche so genannte *Kleinkreise* sind.

Wie sieht der kürzeste Bogen mit den Endpunkten $P(30°S, 60°W)$ und $Q(60°N, 60°E)$ in der Plattkarte aus?

Zunächst ist man versucht, in der Plattkarte eine Strecke von P nach Q einzuzeichnen (Abb. 4).

Das ist aber eine falsche Idee, wie durch Abzählen der entsprechenden Netzvierecke auf der Kugel plausibel wird. Tatsächlich geht der Großkreisbogen „oben durch“.

4 Großkreise als Geraden auf der Karte?

In der Plattkarte erscheinen nur die Meridiane und der Äquator gerade. Die übrigen Großkreise werden gekrümmt dargestellt.

Gibt es Karten, in denen alle Großkreise als Geraden erscheinen?

Anekdote: Bei der Planung der Eisenbahn St. Petersburg–Moskau (Nikolaibahn, gebaut

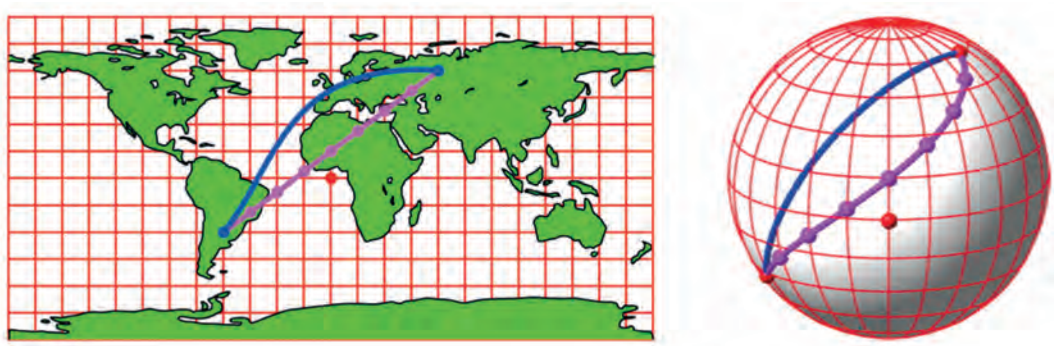


Abbildung 4. Welche Lösung ist die richtige?

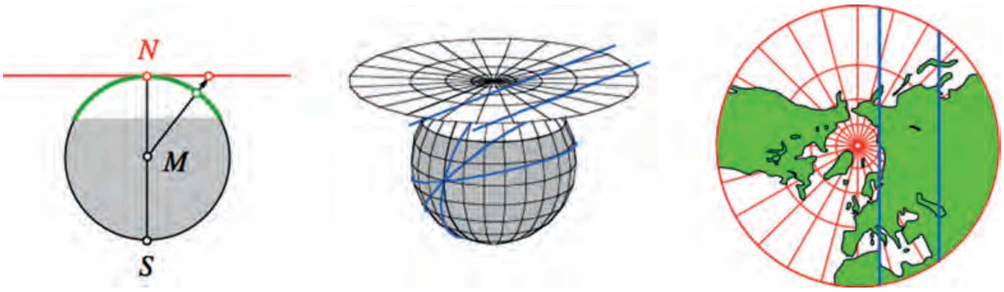


Abbildung 5. Tangentialebene im Nordpol

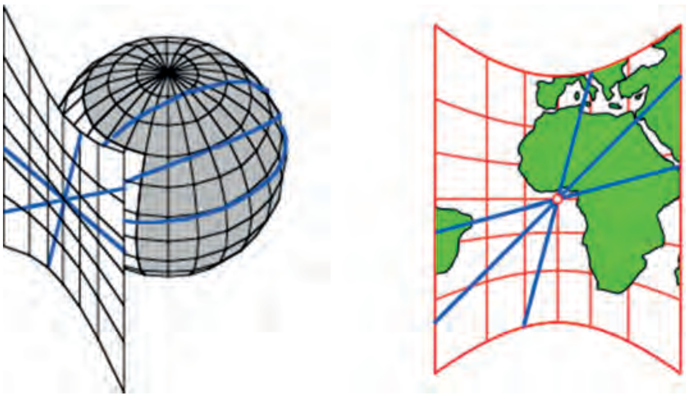


Abbildung 6. Tangentialebene im Äquator

Abbildung 7. Flechtwürfel als Globus

1842–1851) wurde lange um die Linienführung gestritten. Zar Nikolaus I. (1825–1855) beendete den Streit, indem er auf einer Karte eine gerade Linie zwischen St. Petersburg und Moskau einzeichnete. Ist diese Linienführung optimal?

Die so genannte *gnomonische Projektion* ist eine Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus auf eine Tangentialebene. Da Großkreise in einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen, ist ihre Projektion die Schnittgerade dieser Kreisebene mit der Projektionsebene. Wir erhalten also Karten, in denen jeder Großkreis gerade dargestellt wird.

Das griechische Wort *Gnomon* heißt eigentlich *Schattenzeiger*. Gemeint ist ein senkrechter Schattenstab auf einer Horizontalsonnenuhr.

In der Abbildung 5 wird auf die Tangentialebene im Nordpol projiziert. Es kann nur die nördliche Halbkugel abgebildet werden, das Bild des Äquators ist im Unendlichen. Praktisch brauchbar ist die Abbildung nur für eine Polkappe.

In der Abbildung 6 berührt die Projektionsebene in einem Äquatorpunkt.

Die Breitenkreise erscheinen in dieser Karte als Hyperbeln, da die Projektionsstrahlen durch Punkte auf einem Breitenkreis einen Kegel bilden, dessen Achse parallel zur Projektionsebene ist. Klassisches Kegelschnittbeispiel.

Durch Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkt aus auf den Umwürfel der Kugel erhalten wir sechs gnomonische Karten. Die Website *Würfelwelten* gibt eine Bastelvorlage mit drei Streifen, aus denen ein Würfel-Globus (Abb. 7) geflochten werden kann.

5 Maßstab eins zu eins

Gibt es eine Karte im Maßstab 1 : 1? — Die Antwort ist ein salomonisches Jein.

Wir arbeiten exemplarisch mit einer Plattkarte von 40 cm Breite und 20 cm Höhe (Abb. 8). Für die Erde nehmen wir eine Kugel mit dem Umfang 40 000 km an.

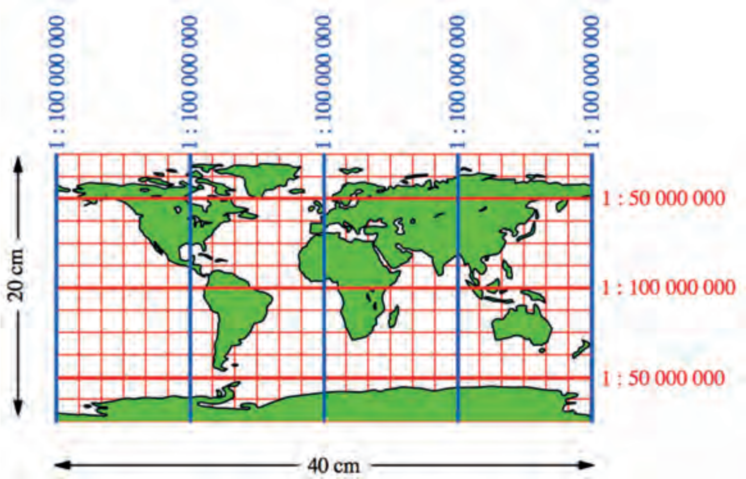


Abbildung 8. Maßstäbe

Am Äquator haben wir daher den Maßstab 1 : 100 000 000. Auf den Meridianen haben wir ebenfalls den Maßstab 1 : 100 000 000, aber das gilt nur in der Süd–Nord-Richtung. Weil die Breitenkreise kürzer sind als der Äquator, haben wir auf den Breitenkreisen in West–Ost-Richtung einen größeren Maßstab. Für 60°N ist der Breitenkreis wegen $\cos(60°) = 0.5$ genau halb so lang wie der Äquator, somit haben wir auf diesem Breitenkreis in der West–Ost-Richtung einen doppelt so großen Maßstab, also 1 : 50 000 000.

Gegen die Pole hin wird der Maßstab in West–Ost-Richtung immer größer und geht gegen Unendlich. Somit haben wir zwischen dem Äquator und den Polen je eine geografische Breite, auf welcher der Maßstab in West–Ost-Richtung genau 1 : 1 ist.

Das ist allerdings sehr nahe an den Polen. Da die Bilder der Breitenkreise in unserer Karte die Länge 40 cm haben, suchen wir also diejenigen Breitenkreise, die auch in Wirklichkeit den Umfang 40 cm und somit den Radius 6,37 cm haben. Zwischen diesen beiden Breitenkreisen und den Polen mit wächst der Maßstab in West–Ost-Richtung von 1 auf Unendlich.

In Süd–Nord-Richtung haben wir nach wie vor den Maßstab 1 : 100 000 000.

Auf der Plattkarte sind die Maßstäbe also richtungsabhängig. Zwischen den Extremen mit dem Maximum in West–Ost-Richtung und dem Minimum in Süd–Nord-Richtung variieren die Maßstäbe stetig.

Leider gibt es keine Karte, welche in allen Punkten und in allen Richtungen immer denselben Maßstab hat. Das heißt, es gibt keine verzerrungsfreie Karte. Dies war den Kartongrafen empirisch schon immer bekannt. Gauß gab mit seinem Theorema egregium den Beweis dazu.

6 Flächentreu und winkeltreu

Hingegen gibt es flächentreue Karten (equivalent) ohne Verzerrung der Flächenverhältnisse, und winkeltreue Karten (conformal) ohne Winkelverzerrungen. Die Plattkarte ist weder flächen- noch winkeltreu.

Die Abbildung 9 zeigt die flächentreue Karte von Archimedes-Lambert.

Das Auseinanderziehen in West–Ost-Richtung in Polnähe wird kompensiert durch ein Zusammenpressen in Süd–Nord-Richtung. Die Abstände zwischen den Breitenkreisen werden gegen die Pole hin verkürzt dargestellt.

Es gibt aber noch andere flächentreue Karten, zum Beispiel die flächentreue Karte von Mercator-Sanson. Die Idee dabei ist, von der Plattkarte ausgehend die zu großen Maßstäbe in der West-Ost-Richtung durch Einbrutzeln zu kompensieren

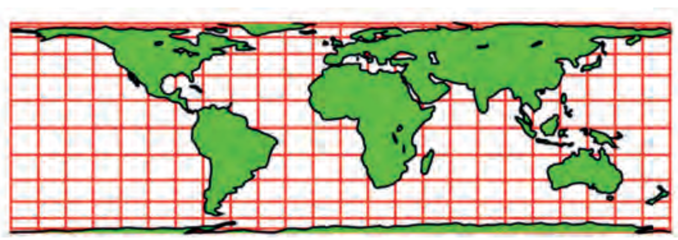


Abbildung 9. Flächentreue Karte von Archimedes-Lambert

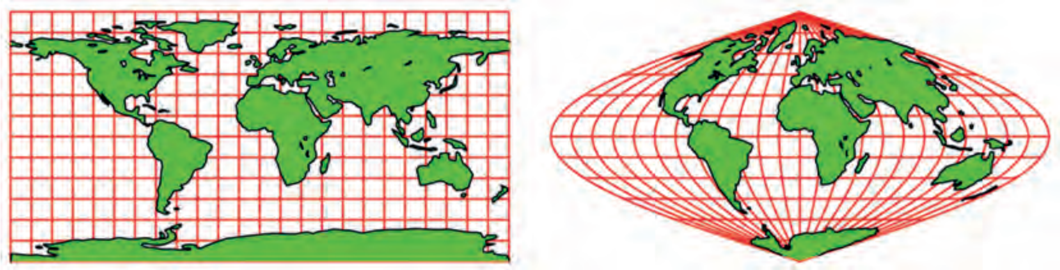


Abbildung 10. Einbrutzeln an den Polen. Karte von Mercator-Sanson

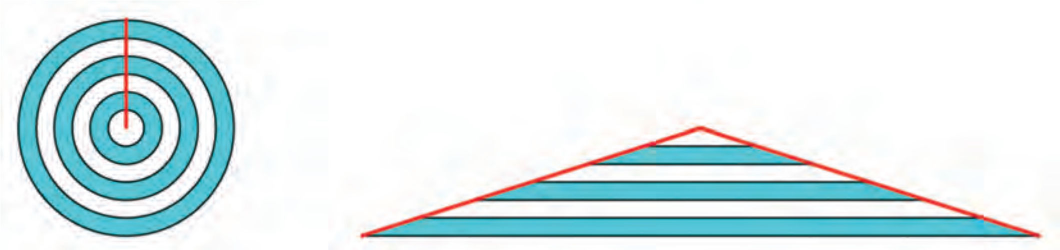


Abbildung 11. Kreis und Kreisfläche

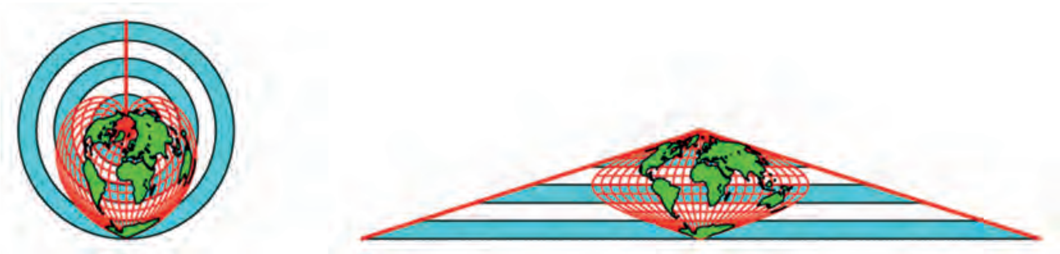


Abbildung 12. Einpassen der Mercator-Sanson-Karte

(Abb. 10). An den Polen wird sogar auf einen Punkt eingebrutzelt. Die Meridiane werden verbogen.

Diese flächentreue Karte von Mercator-Sanson führt zu einer Erinnerung an die Schule. Der Flächeninhalt eines Kreises wird bei bekanntem Kreisumfang $2r\pi$ gemäß Abbildung 11 hergeleitet (Prinzip von Cavalieri).

Wir denken uns einen Kreis aus 2d-Zwiebelschalen und schneiden von oben her bis in die Mitte ein. Dann fallen die Schalen auseinander und bilden ein flächengleiches gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $2r\pi$ und der Höhe r. Daraus ergibt sich der Flächeninhalt $r^2\pi$.

Wir können die Mercator-Sanson-Karte bündig in das Dreieck einpassen (Abb. 12).

Nun wickeln wir das Dreieck wieder auf und erhalten in der Kreisscheibe eine neue flächentreue Karte, die Herzkarte von Stab-Werner (Abb. 13).

Und nun noch die wichtigste aller Karten, die winkeltreue Karte von Gerhard Mercator.

Abbildung 13. Flächentreue Karte von Stab-Werner

Mercator schuf die winkeltreue Seekarte für die aufkommende Hochseeschifffahrt (Abb. 14). Noch heute wird in der Hochseeschifffahrt fast ausschließlich die Mercator-Karte verwendet. Sie ist auch Grundlage von fast allen offiziellen staatlichen Karten.

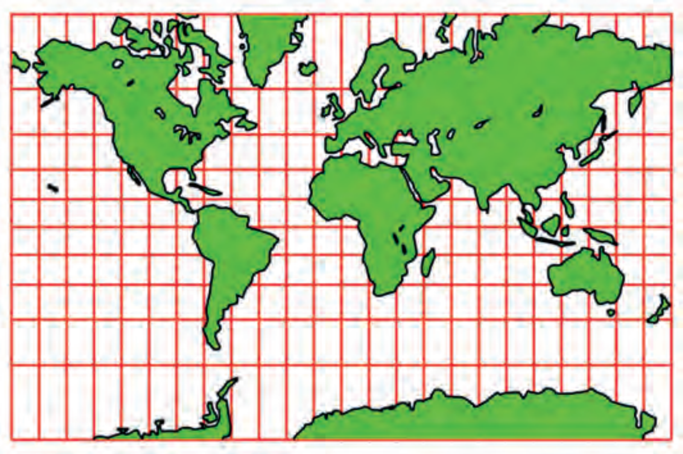


Abbildung 14. Winkeltreue Mercator-Karte

Die Abstände zwischen den Bildern der Breitenkreise werden gegen die Pole hin gespreizt dargestellt und zwar so dass die Maßstäbe in Süd-Nord-Richtung jeweils gleich groß werden wie in West-Ost-Richtung. Wir haben eine lokal isometrische Abbildung. Daher die Winkeltreue.

Dieses Spreizen hat allerdings zur Folge dass sich die Pole im Unendlichen befinden. Die reale Karte ist also oben und unten abgeschnitten, was bei der Darstellung von Grönland sofort auffällt.

7 Die schönste Kugel

Welches ist die schönste Kugel? Welches ist die „rundeste" Kugel?

Zwei von drei Personen sprechen die mittlere der drei Kugeln (Abb. 15) als die schönste oder auch die „rundeste" an. Die restlichen Personen bevorzugen die Kugel links.

Der geometrische Hintergrund der drei Kugeldarstellungen ist folgender.

In der Kugel links haben alle Netzvierecke die gleiche Maschenweite 15°. Sie sind überall gleich hoch. In Äquatornähe sind sie annähernd quadratisch, gegen die Pole hin werden sie immer schmaler.

In der mittleren Kugel sind alle Netzvierecke annähernd quadratisch. Dieses Netz ergibt sich, indem wir auf die Mercator-Karte ein Quadratnetz legen und auf die Kugel übertragen. Wegen der Winkeltreue bleiben die Quadratformen erhalten. Gegen die Pole hin haben wir unendlich viele Netzvierecke.

In der Kugel rechts haben alle Netzvierecke denselben Flächeninhalt. Gegen die Pole hin werden sie zwar schmaler, dafür entsprechend höher. Dieses Netz ergibt sich, indem wir auf die flächentreue Karte von Archimedes-Lambert ein Quadratnetz legen und auf die Kugel übertragen. — Bis jetzt habe ich einen einzigen Menschen angetroffen (Fachlehrer für bildnerisches Gestalten und Mathematik), dem diese Kugel am besten gefiel.

Websites: Würfelwelten (abgerufen 27. 1. 2014)

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelwelten/Wuerfelwelten.htm

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/W/Wuerfelwelten/Wuerfelwelten.pdf

Dr. Hans Walser, Mathematisches Institut, Rheinsprung 21, 4051 Basel, Schweiz, Email: hwalser@bluewin.ch

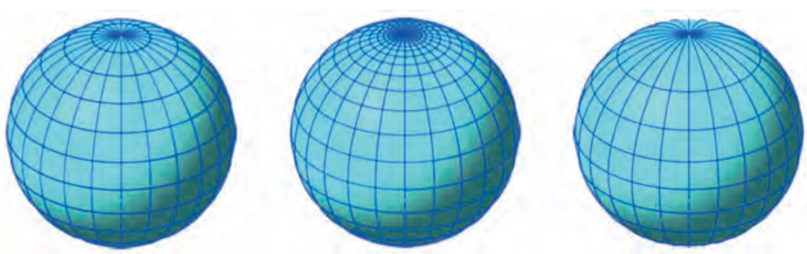


Abbildung 15. Drei Kugeln

Hamburger Mathematikabitur im Kreuzfeuer der Kritik

Gabriele Kaiser und Andreas Busse

Das Hamburger Mathematikabitur war in den letzten Monaten im Kreuzfeuer der Kritik, insbesondere auch auf politischer Ebene. So haben einige Abgeordnete der Hamburger Bürgerschaft unter Bezug auf die steigende Abiturientenquote in Hamburg am 27. 11. 2013 eine Große Anfrage an den Hamburger Senat zum Niveau des Hamburger Abiturs gestellt, in der sie folgendes fragen:

> Vor diesem Hintergrund muss man sich die Frage stellen, ob ein derartiger Anstieg der Abiturientenquote, wie er in Hamburg und anderen Großstädten zu beobachten ist, nur über eine Veränderung der Leistungsansprüche erklärbar ist. Ist das Niveau des Abiturs in Hamburg in den vergangenen Jahren gesunken? (Drucksache 20/10116 der Bürgerschaft der Freien und Hansestadt Hamburg – 20. Wahlperiode)

Konkret wird unter Bezug auf eine frühere Kleine Bürgerschaftsanfrage an den Senat die Frage nach der Anzahl der Abituraufgaben in den Fächern Mathematik und Biologie gestellt und gefragt, worin die angeblich höhere Modellierungs- und Problemlösekompetenz in den Abituraufgaben seit 2008 bestehe. Die anfragenden Abgeordneten beziehen sich in ihrer Anfrage auf Diskussionen bzgl. der Hamburger Studie „Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern“ (KESS-Studie), in denen die Leistungen der Hamburger G8- und G9-Abiturientinnen und -Abiturienten verglichen wurden. Diese Ergebnisse wurden von H. P. Klein in Zweifel gezogen und es wird in Zusammenhang von einer Untersuchung der Hamburger Zentralabituraufgaben von 2005 bis 2012 ein Niveauverlust im Hamburger Abitur festgestellt (FAZ, 11. Oktober 2013).

Diese Untersuchung ist nun in den Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Band 22/2014, Heft 2, 115–121) erschienen, in einem Artikel von Th. Jahnke, H.P. Klein, W. Kühnel, Th. Sonar und M. Spindler zu „Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013“.[1] Bereits lange vor seinem Erscheinen wurde der Artikel intensiv in der Presse diskutiert, mit Schlagzeilen wie „Mathe-Abitur: Niveau in Hamburg sinkt deutlich“ (Hamburger Abendblatt vom 31. 3. 2014) oder „Klarer Abstieg. Wissenschaftler haben ermittelt: Abiturklausuren werden vielerorts immer leichter – für die richtige Lösung reicht es, den Aufgabentext aufmerksam zu lesen“ (Spiegel vom 31. 3. 2014).

Es ist unstrittig, dass sich die Abituraufgaben in Hamburg und auch in anderen Bundesländern in den letzten Jahren verändert haben, aber viele der in dem Artikel getroffenen Aussagen sind nicht zutreffend. Wir wollen dies im Folgenden zunächst im Detail darstellen, bevor wir uns grundlegend mit dem von den Autoren des Beitrags vertretenen Bild von Mathematik und Mathematikunterricht auseinandersetzen.

Zunächst ist die Berechtigung der bereits im Titel aufgestellten Behauptung „Entwicklung von 2005 bis 2013“ in Frage zu stellen, analysieren Jahnke et al. doch nur Aufgaben aus den Jahren 2005, 2011 und 2013, und aus den Prüfungen in diesen Jahren treffen sie nochmals eine Auswahl. Eine Begründung für diese Auswahl wird von den Autoren nicht gegeben, obwohl alle Hamburger Abituraufgaben im Internet frei verfügbar sind. Es bleibt vollständig offen, inwiefern die getroffene Auswahl repräsentativ für die zeitliche Entwicklung der Aufgabenqualität ist und nach welchen Kriterien diese Auswahl getroffen wurde. Hinweise darauf, dass aus der willkürlich anmutenden Auswahl keine wohlbegründete Aussage über eine zeitliche Entwicklung getroffen werden kann, wie der Titel suggeriert, finden sich an keiner Stelle im Beitrag.

Die Autoren behaupten dann weiter, dass in den Jahren 2005, 2011 und 2013 im Hamburger Abitur im Wesentlichen vier Aufgabentypen vorkommen:

> Typ 1: Minimax-Aufgaben mit Extrema und Steigung einer gegebenen Funktion, auch Flächenberechnungen durch Integrale. [. . .] Typ 2: Aufgaben zur analytischen Geometrie von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum. [. . .] Typ 3: Aufgaben zu Übergangsmatrizen. Typ 4: Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen. (S. 116)

Es ist mitnichten ungewöhnlich, dass in drei Abiturjahrgängen Schwerpunkte gesetzt werden, noch dazu in dieser Allgemeinheit. Die Autoren

[1] Da zum Zeitpunkt der Abfassung des Artikels die DVM Mitteilungen noch nicht erschienen sind, zitieren wir nach den uns vorliegenden Druckfahnen, die von den Autoren zirkuliert wurden.

fahren fort, dass sich die Analysisaufgaben „typischerweise mit betriebswirtschaftlichen Fragen“ befassen. Diese Aussage ist falsch. So werden in Hamburg in allen Fächern zu Beginn der zweijährigen Studienstufe zentrale Schwerpunktsetzungen vorgenommen, im untersuchten Jahr 2011 lagen diese u. a. im Bereich der wirtschaftlichen Anwendungen, im Jahr 2013 war dies aber nicht mehr der Fall. Wie Jahnke et al. zu dieser Behauptung kommen, ist nicht nachvollziehbar. Durch eine gründliche Analyse aller fraglichen Aufgaben wäre diese falsche Aussage nicht zustande gekommen.

Die Autoren stellen dann fest:

> Es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass diese o. g. vier Typen von Aufgaben im Unterricht reichlich geübt werden, weil sie offenbar von Jahr zu Jahr als Typen bestehen bleiben. (S. 116)

Es bleibt völlig unklar, wie die Autoren zu dieser Behauptung kommen, zumal hier ganz geschickt plötzlich eine zeitliche Konstanz der Aufgaben behauptet wird, die aus den drei Jahrgängen nun wirklich nicht zu schließen ist. Jahnke et al. fahren fort:

> Normalerweise geschieht das von Januar bis März des Prüfungsjahres. Bei G8 wird so die gymnasiale Oberstufe auf die 11. Klasse und dann die Monate August bis Dezember der 12. Klasse reduziert, weil direkt danach die Vorbereitung auf das die schriftlichen Aufgaben im Abitur beginnt. (S. 116)

Es stellt sich die Frage, wie die Aufgabenanalysen der Autoren mit G8 und mit dem Niveau der Hamburger Abituraufgaben zusammenhängen, und es drängt sich der Verdacht auf, dass diese Diskussion zum angeblichen Niveauverfall des Hamburger Abiturs in eine größere Diskussion eingebettet werden soll. Unabhängig davon stimmen diese Aussagen nicht, da bis 2013 das Abitur in Hamburg jeweils im Februar stattgefunden hat. Die Autoren stellen aber weitere Mutmaßungen und Behauptungen auf, die in keiner Weise wissenschaftlich gedeckt sind. So schreiben sie weiter:

> Zudem können die Lehrer zwei aus sechs (2005: drei aus sieben) Aufgaben für ihre Prüflinge auswählen. Vermutlich ist von einer intensiven Vorbereitung und ggf. Spezialisierung auf ganz bestimmte Aufgabentypen auszugehen. Wie man hört, sind Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht beliebt. Es soll routinemäßig vorkommen, dass Lehrer die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur kurz streifen und durchblicken lassen, dass sie dieses Thema im Abitur nicht auswählen werden. (S. 116)

Wir fragen uns, auf welcher empirischen Basis Jahnke et al. diese Behauptungen aufstellen. Sicherlich gibt es überall auf der Welt Lehrerinnen und Lehrer, die für die Prüfung und nur für die Prüfung üben, nur: Ist dies typisch für Hamburg und hat sich dieses in den letzten Jahren geändert und woher weiß man dieses aus Aufgabenanalysen? Die Behauptung, dass das Sachgebiet Stochastik nur gestreift würde, ist übrigens aus ganz anderen Gründen zum Teil zutreffend: In den betrachteten Jahren 2005, 2011 und 2013 war entweder das Sachgebiet Stochastik oder das Sachgebiet Lineare Algebra/Analytische Geometrie je nach Unterrichtsgang nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung. Das jeweils fehlende Sachgebiet hatte seinen Platz in der mündlichen Prüfung und war damit durchaus in den Prüfungen vertreten.

Als weiteren zentralen Indikator dafür, dass die Aufgaben leichter geworden seien, verweisen Jahnke et al. beim Vergleich der Kurse auf grundlegendem Anforderungsniveau mit denen auf erhöhtem Anforderungsniveau auf die Tatsache, dass zum Teil identische Aufgabenteile verwendet werden. Diese Kritik ist verwunderlich: Selbstverständlich beinhalten erhöhte Anforderungen auch grundlegende Anforderungen. Gewisse Routinetätigkeiten werden von Abiturientinnen und Abiturienten beider Anforderungsniveaus erwartet. In der Regel ist es aber im Hamburger Abitur so, dass bei identischen Aufgabenteilen in einfacheren Fällen die Prüflinge des erhöhten Anforderungsniveaus weniger Punkte als die des grundlegenden Anforderungsniveaus erzielen können; Erstere müssen ihre Punkte schwerpunktmäßig bei den komplexeren Aufgabenteilen erzielen. Außerdem gibt es eine Reihe weiterer Merkmale, mit denen sich die Aufgaben des erhöhten Anforderungsniveaus von denen des grundlegenden abheben: zusätzliche mathematische Inhalte, mehr Teilaufgaben oder Variation in zentralen Details (die ja bekanntlich einen sehr großen Effekt auf den Schwierigkeitsgrad haben können). Grundsätzlich ist die Verwendung einer identischen Ausgangssituation mit zum Teil gleichen, zum Teil verschiedenen Teilaufgaben ein wirksames und anerkanntes Instrument, um die Unterschiede in den Anforderungen im Sinne einer Transparenz für alle Beteiligten besonders deutlich hervortreten zu lassen. In der didaktischen Diskussion wird seit Jahrzehnten gefordert, dass Grundkurse nicht „ausgedünnte“ Leistungskurse sein sollen, sondern dass Leistungskurse durch Anreicherungen aus Grundkursen entstehen sollen (W. Blum und G. Törner (1983). Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 221).

Die oben aufgelisteten Schwerpunktsetzungen und Praktiken beim Hamburger Abitur, die die

Fehler der Autoren deutlich machen, sind durch Rückgriff auf öffentlich verfügbare Informationen leicht erhältlich, u. a. in der bereits erwähnten öffentlich zugänglichen Antwort auf eine Große Anfrage an den Hamburgischen Senat „Wie steht es um das Niveau des Hamburger Abiturs“ vom 27. 11. 2013 (Bürgerschaftsdrucksache 20/10116).

Unsere zentrale Kritik an den Ausführungen der Autoren des Beitrags bezieht sich jedoch auf grundlegendere Fragen zum Bild von Mathematik und vom Mathematikunterricht. Man muss sich die Frage stellen, mit welcher Legitimation das Fach Mathematik flächendeckend für alle Abiturienten und Abiturientinnen unterrichtet werden soll. Diese Legitimation liegt auch – nicht nur – in dem Beitrag, den die Inhalte des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung liefern. Die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts ist bereits 1975 von Heinrich Winter in seinem Beitrag „Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?“ (in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7(3), 106-116) vertreten worden. Die von ihm formulierten drei Grunderfahrungen, die der Mathematikunterricht allen Schülerinnen und Schüler ermöglichen soll, wurden in die Bildungsstandards Mathematik für alle Schulabschlüsse aufgenommen. Das Verstehen der Art und Weise, wie die Anwendung der Mathematik in zunehmendem Maße die gesellschaftliche Realität formt, ist dabei ein zentraler Bestandteil. Dabei geht es weniger darum, eine Virtuosität im Umgang mit Algorithmen zu erlangen, sondern vielmehr um ein vertieftes Verständnis mathematischer gestützter Argumentationen. Die Einsicht, dass bei Anwendung mathematischer Theorie auf reale Probleme notwendigerweise Vereinfachungen vorzunehmen sind und mathematisch gewonnene Resultate daher immer einen Interpretations- und Beurteilungsschritt nach sich ziehen müssen, um die Tragweite eines Ergebnisses abschätzen zu können, ist eine zentrale Komponente einer Erziehung zur Mündigkeit, wie dies in allen allgemeinbildenden Schulen angestrebt wird. Diese Kompetenzen erlangt man sicherlich nicht mit einem auf mathematische Theorie reduzierten Unterricht. Ein Realitätsbezüge und Modellierungen einbeziehender Unterricht, wie er in Hamburg seit vielen Jahren praktiziert wird, ist in diesem Sinne angemessen und zielführend.

Dabei hat in den letzten zehn Jahren – nicht nur – in Hamburg eine Akzentverschiebung in diesem Sinne sowohl im Unterricht als auch in den Prüfungsaufgaben (auch in den Prüfungen der Sekundarstufe I) stattgefunden. Sind die Anforderungen deshalb gesunken? Jahnke et al. behaupten das und versuchen dies, anhand der erwähnten Aufgabenanalysen zu belegen. Dabei bezieht sich eine mehrfach in den Ausführungen genannte Kritik auf die kontextualisierte Darstellung der Situation. Jahnke et al. schreiben:

> Statt mit mathematischen Problemen müssen die Abiturienten mit Formulierungsproblemen kämpfen. Sie müssen umfangreiche, relativ schwer verständliche und nicht immer eindeutige Texte in Mathematik umsetzen, die dann selbst gar nicht mehr schwierig ist und die von Jahr zu Jahr weiter vereinfacht wird. (S. 120)

Diese Argumentation verkennt vollständig die Komplexität der kognitiven Prozesse, die zum Verstehen der Situation und zum Heranziehen der passenden mathematischen Theorie notwendig sind. Bei den aktuellen Hamburger Abituraufgaben muss man nicht nur wissen, wie man ein mathematisches Verfahren durchführt, sondern es wird vom Prüfling auch verlangt, aus dem zur Verfügung stehenden mathematischen „Werkzeugkasten“ ein zur realen Situation passendes Konzept auszuwählen. Das setzt eine Analyse der textlich und bildlich geschilderten Situation sowie tragfähige Grundvorstellungen verschiedener mathematischer Konzepte voraus. Nur so kann ein zur Situation passender Begriff oder ein adäquates Verfahren ausgewählt werden. Die Interpretation und Beurteilung des mathematisch gewonnenen Ergebnisses erfordert weitere vernetzte kognitive Aktivitäten. Diese Übersetzungsprozesse sind alles andere als trivial. Es ist sicherlich richtig, dass weniger mathematische Theorie zur Bewältigung der Aufgaben notwendig ist. Jedoch haben sich die Anforderungen in Richtung der Übersetzungs- und Interpretationsprozesse verlagert, die ein vernetztes Wissen erfordern.

Diese Aussage soll an zwei Beispielen illustriert werden, zunächst an einem paradigmatischen Beispiel aus der Hamburger Studienstufe: Mithilfe einer Modellgleichung zum Fischwachstum in einem Gewässer soll die Frage beantwortet werden, zu welchem Zeitpunkt man im Sinne einer Nachhaltigkeit fischen solle. Hier sind verschiedene kognitive Schritte vonnöten. Zunächst muss der Aspekt der Nachhaltigkeit operationalisiert werden. Dies könnte etwa dadurch geschehen, dass man der Zeitpunkt der stärksten Reproduktion ermittelt. Diese umformulierte Frage führt zu der Überlegung, dass eine maximale Reproduktionsrate dem maximalen Wert der Ableitungsfunktion entspricht. Die Maximalstelle der Ableitung ermittelt man üblicherweise über die Nullstelle der zweiten Ableitung. Die Interpretation und Beurteilung des Ergebnisses führt auf der Ebene des realen Problems zu einer Antwort auf die ursprüngliche Frage nach dem günstigen Zeitpunkt des Fischens, die unter Berücksichtigung expliziter und impliziter Annahmen entsprechend vorsichtig formuliert werden sollte.

Das zweite Beispiel ist dem Hamburger Abitur 2012 (grundlegendes Niveau) entnommen. Es geht um die Produktion eines teuren und nur bedingt lagerfähigen Impfstoffes, bei dem sichergestellt werden soll, dass er stets in ausreichender Menge vorhanden ist. Ein funktionaler Zusammenhang zwischen Zeit und Absatzmenge wird als Modell vorgegeben. Eine der sechs Teilaufgaben bezieht sich im Kontext der Kostenreduktion auf die Frage des Zeitpunkts der stärksten Nachfrageabnahme. Hier müssen die Schülerinnen und Schüler Übersetzungsprozesse anstellen, die den Aspekt der stärksten Abnahme mit dem Konzept von erster und zweiter Ableitung in Verbindung setzen. Eine weitere Fragestellung bezieht sich auf die Erlösprognose bei einem Verkauf der Produktionsrechte an einen anderen Hersteller. Hier sind mehrere verschiedene kognitive Schritte vonnöten. Zunächst muss eine Analyse der Fragestellung stattfinden, um die verschiedenen zentralen Aspekte zu identifizieren wie produzierte Menge, Verkaufszeitpunkt, Erlös. Dann müssen angemessene mathematische Konzepte ausgewählt werden (in diesem Beispiel Stammfunktion und proportionaler Zusammenhang), die dann situationsadäquat anzuwenden sind. Das erzielte mathematische Ergebnis ist in der Sprache des Sachkontextes zu interpretieren.

Jahnke et al. bezeichnen diese Art von Aufgaben als „Minimax-Aufgaben", die sich in der Bildung der ersten und zweiten Ableitung sowie in Flächenberechnungen durch Integrationen erschöpfen. Damit wird das kognitive Anspruchsniveau solcher Aufgaben völlig unterschätzt.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die in den letzten Jahren im Hamburger Abitur gestellten Aufgaben eine deutlich breitere Palette von Anforderungen stellen, die über das hinausgeht, was in den frühen Jahren üblich war. Die Aufgaben sind dadurch nicht nur komplexer, sondern in der Regel auch länger geworden. Damit wird das Argument, die reduzierte Anzahl von Aufgaben hätte zu einer Verkürzung und Verflachung geführt, ad absurdum geführt. Wir halten es für unabdingbar, dass Abiturientinnen und Abiturienten die Schule mit einer Sichtweise von Mathematik und mit mathematischen Kompetenzen verlassen, die sie in einer immer komplexeren Welt bestehen lassen.

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Dr. Andreas Busse, Universität Hamburg, Fakultät für Erziehungswissenschaft, Von-Melle-Park 8, 20146 Hamburg, Email:
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de
andreas.busse@uni-hamburg.de.

An Open Letter: To Andreas Schleicher, OECD, Paris

Heinz-Dieter Meyer und Katie Zahedi

Der im Folgenden abgedruckte offene Brief erschien am 6. 5. 2014 parallel im Online Journal „Global Policy" und auf der Internetseite von „The Guardian"[1]*, er wurde von etwa 120 Erstunterzeichner/innen aus 12 Staaten mitgezeichnet, darunter auch einige Mitglieder der GDM. Im Sinne der vollständigen Offenlegung: Auch ich habe diesen Brief mitunterzeichnet.*

Zwischenzeitlich ist (ohne explizite Angabe einer Autorenschaft) auf den Internetseiten der OECD die im Anschluss an den Brief abgedruckte Reaktion erschienen.[2] *Auf den Seiten der Gesellschaft für Bildung und Wissen finden Sie auch eine deutschsprachige Übersetzung des offenen Briefs.*[3]

Heinz-Dieter Meyer als einem der Autoren des Briefes wurde zudem die Möglichkeit einer Rückantwort gegeben, diese ist im Anschluss an die Antwort der OECD abgedruckt. Da nicht alle Texte in deutscher Sprache verfügbar sind, werden sie hier einheitlich im englischsprachigen Original wiedergegeben.

Andreas Vohns

[1] Vgl. http://www.globalpolicyjournal.com/blog/05/05/2014/open-letter-andreas-schleicher-oecd-paris bzw. http://www.theguardian.com/education/2014/may/06/oecd-pisa-tests-damaging-education-academics
[2] Vgl. http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/OECD-response-to-Heinz-Dieter-Meyer-Open-Letter.pdf
[3] Vgl. http://bildung-wissen.eu/wp-content/uploads/2014/05/offener-brief-schleicher-autoriserte-fassung.pdf

Dear Dr. Schleicher,
We write to you in your capacity as OECD's director of the Programme of International Student Assessment (PISA). Now in its 13th year, PISA is known around the world as an instrument to rank OECD and non-OECD countries (60+ at last count) according to a measure of academic achievement of 15 year old students in mathematics, science, and reading. Administered every three years, PISA results are anxiously awaited by governments, education ministers, and the editorial boards of newspapers, and are cited authoritatively in countless policy reports. They have begun to deeply influence educational practices in many countries. As a result of PISA, countries are overhauling their education systems in the hopes of improving their rankings. Lack of progress on PISA has led to declarations of crisis and "PISA shock" in many countries, followed by calls for resignations, and far-reaching reforms according to PISA precepts.

We are frankly concerned about the negative consequences of the PISA rankings. These are some of our concerns:

- while standardized testing has been used in many nations for decades (despite serious reservations about its validity and reliability), PISA has contributed to an escalation in such testing and a dramatically increased reliance on quantitative measures. For example, in the United States, PISA has been invoked as a major justification for the recent "Race to the Top" program, which has increased the use of standardized testing for student-, teacher-, and administrator evaluations, which rank and label students, as well as teachers and administrators according to the results of tests widely known to be imperfect (see, for example, Finland's unexplained decline from the top of the PISA table);
- in education policy, PISA, with its three-year assessment cycle, has caused a shift of attention to short-term fixes designed to help a country quickly climb the rankings, despite research showing that enduring changes in education practice take decades, not a few years to come to fruition. For example, we know that the status of teachers and the prestige of teaching as a profession has a strong influence on the quality of instruction, but that status varies strongly across cultures and is not easily influenced by short-term policy;
- by emphasizing a narrow range of measurable aspects of education, PISA takes attention away from the less measurable or immeasurable educational objectives like physical, moral, civic, and artistic development, thereby dangerously narrowing our collective imagination regarding what education is and ought to be about;
- as an organization of economic development, OECD is naturally biased in favor of the economic role of public schools. But preparing young men and women for gainful employment is not the only, and not even the main goal of public education, which has to prepare students for participation in democratic self-government, moral action, and a life of personal development, growth, and well-being;
- unlike United Nations (UN) organizations such as UNESCO or UNICEF that have clear and legitimate mandates to improve education and the lives of children around the world, OECD has no such mandate. Nor are there, at present, mechanisms of effective democratic participation in its education decision-making process;
- to carry out PISA and a host of follow-up services, OECD has embraced "public-private partnerships" and entered into alliances with multi-national for-profit companies, which stand to gain financially from any deficits – real or perceived – unearthed by PISA. Some of these companies provide educational services to American schools and school districts on a massive, for-profit basis, while also pursuing plans to develop for-profit elementary education in Africa, where OECD is now planning to introduce the PISA program;
- finally, and most importantly: the new PISA regime, with its continuous cycle of global testing, harms our children and impoverishes our classrooms, as it inevitably involves more and longer batteries of multiple-choice testing, more scripted "vendor"-made lessons, and less autonomy for our teachers. In this way PISA has further increased the already high stress-level in our schools, which endangers the well-being of our students and teachers.

These developments are in overt conflict with widely accepted principles of good educational and democratic practice:

- no reform of any consequence should be based on a single narrow measure of quality;
- no reform of any consequence should ignore the important role of non-educational factors, among which a nation's socio-economic inequality is paramount. In many countries, including the United States, inequality has dramatically increased over the past 15 years, explaining the widening educational gap between rich and poor which education reforms, no matter how sophisticated, are unlikely to redress;
- an organization like OECD, as any organization that deeply affects the life of our communities,

should be open to democratic accountability by members of those communities.

We are writing not only to point out deficits and problems. We would also like to offer constructive ideas and suggestions that may help to alleviate the above mentioned concerns. While in no way complete, they illustrate how learning could be improved without the above mentioned negative effects:

- develop alternatives to league tables: explore more meaningful and less easily sensationalized ways of reporting assessment outcomes. For example, comparing developing countries, where 15-year olds are regularly drafted into child labor, with first world countries makes neither educational nor political sense and opens OECD up for charges of educational colonialism;
- make room for participation by the full range of relevant constituents and scholarship: to date, the groups with greatest influence on what and how international learning is assessed are psychometricians, statisticians, and economists. They certainly deserve a seat at the table, but so do many other groups: parents, educators, administrators, community leaders, students, as well as scholars from disciplines like anthropology, sociology, history, philosophy, linguistics, as well as the arts and humanities. What and how we assess the education of 15 year old students should be subject to discussions involving all these groups at local, national, and international levels;
- include national and international organizations in the formulation of assessment methods and standards whose mission goes beyond the economic aspect of public education and which are concerned with the health, human development, well-being and happiness of students and teachers. This would include the above mentioned United Nations organizations, as well as teacher, parent, and administrator associations, to name a few;
- publish the direct and indirect costs of administering PISA so that taxpayers in member countries can gauge alternative uses of the millions of dollars spent on these tests and determine if they want to continue their participation in it;
- welcome oversight by independent international monitoring teams which can observe the administration of PISA from the conception to the execution, so that questions about test format and statistical and scoring procedures can be weighed fairly against charges of bias or unfair comparisons;
- provide detailed accounts regarding the role of private, for-profit companies in the preparation, execution, and follow-up to the tri-annual PISA assessments to avoid the appearance or reality of conflicts of interest;
- slow down the testing juggernaut. To gain time to discuss the issues mentioned here at local, national, and international levels, consider skipping the next PISA cycle. This would give time to incorporate the collective learning that will result from the suggested deliberations in a new and improved assessment model.

We assume that OECD's PISA experts are motivated by a sincere desire to improve education. But we fail to understand how your organization has become the global arbiter of the means and ends of education around the world. OECD's narrow focus on standardized testing risks turning learning into drudgery and killing the joy of learning. As PISA has led many governments into an international competition for higher test scores, OECD has assumed the power to shape education policy around the world, with no debate about the necessity or limitations of OECD's goals. We are deeply concerned that measuring a great diversity of educational traditions and cultures using a single, narrow, biased yardstick could, in the end, do irreparable harm to our schools and our students.

Sincerely,
Heinz-Dieter Meyer, State University of New York (SUNY Albany)
Katie Zahedi, Principal, Red Hook, New York

Response to points raised in Heinz-Dieter Meyer 'Open Letter' (OECD)

Their concerns

> *MEYER: "PISA ... has caused a shift of attention to short-term fixes designed to help a country quickly climb the rankings, despite research showing that enduring changes in education practice take decades, not a few years to come to fruition."*

There is nothing that suggests that PISA, or other educational comparisons, have caused a 'shift to short-term fixes' in education policy. On the contrary, by opening up a perspectives to a wider range of policy options that arise from international comparisons, PISA has provided many opportunities for more strategic policy design. It has also created important opportunities for policy-makers and other stakeholders to collaborate across borders. The annual International Summit of the Teaching Profession, where ministers meet with union leaders to discuss ways to raise the status of the teaching profession, is an example. Not least, while it is undoubtedly true that some reforms take time to bear fruit, a number of countries have in fact shown that rapid progress can be made in the short term e.g. Poland, Germany and others making observable steady progress every three years.

MEYER: "by emphasizing a narrow range of measurable aspects of education, PISA takes attention away from the less measurable or immeasurable educational objectives"

Mr. Meyer does not seem to be aware of the full range of reporting of PISA. PISA assesses an unprecedented range of learning outcomes and their contexts, including student performance measures, measures of social and emotional dimensions, student attitudes and motivations, equity issues, and parental support. Member countries review the measurement domains ever three years and extend the breadth of the measures covered continually.

MEYER: "unlike United Nations (UN) organizations such as UNESCO or UNICEF that have clear and legitimate mandates to improve education and the lives of children around the world, OECD has no such mandate. Nor are there, at present, mechanisms of effective democratic participation in its education decision-making process"

OECD's mandate is provided by the member countries of the OECD, much the same as in UNESCO and UNICEF. Decision-making in PISA (and in all OECD activities) is carried out by member countries. In PISA, the decision-making body is the PISA Governing Board which has representatives from all member countries.

MEYER: "to carry out PISA and a host of follow-up services, OECD has embraced "public-private partnerships" and entered into alliances with multinational for-profit companies, which stand to gain financially from any deficits – real or perceived – unearthed by PISA. Some of these companies provide educational services to American schools and school districts on a massive, for-profit basis, while also pursuing plans to develop for-profit elementary education in Africa, where OECD is now planning to introduce the PISA program;"

There are no 'public-private partnerships' or other 'alliances' in PISA of the type Mr. Meyer implies. All work relating to the development, implementation and reporting of PISA is carried out under the sole responsibility of the OECD, under the guidance of the PISA Governing Board. The OECD does, of course, contract specific technical services out to individuals, institutions or companies. Where it does, these individuals, institutions or companies are appointed by the OECD following an open, transparent and public call for tender. This transparent and open process ensures that each task is carried out by those entities that demonstrate they are best qualified and provide the best value for money. No individual academic, institution or company gains any advantage from this since the results of all PISA-related work are placed in the public domain.

MEYER: "... PISA , with its continuous cycle of global testing, harms our children and impoverishes our classrooms, as it inevitably involves more and longer batteries of multiple-choice testing ..."

Mr. Meyer does not seem aware that PISA is only administered to a small fraction of students and that only around a third of the PISA items are in multiple-choice format. Moreover, the length of the PISA tests has not increased since the first survey in 2000. Measurement is based on a sample of schools and a sample of 15-year-olds within each school; no student would ever be involved in successive surveys. The claim that a two-hour test could 'endanger the well-being' of students and teachers is thus unfounded.

MEYER: "... no reform of any consequence should ignore the important role of non-educational factors, among which a nation's socio-economic inequality is paramount. In many countries, including the United States, inequality has dramatically increased over the past 15 years, explaining the widening educational gap between rich and poor which education reforms, no matter how sophisticated, are unlikely to redress;"

Rather than taking an ideological stance like Mr. Meyer, who seems to imply that social inequalities are immutable to policy intervention, the PISA reports devote considerable detail to analysing the links between social inequality in the student population and learning outcomes empirically. These analyses show that poverty is not destiny and that the impact which social background has on learning outcomes varies very significantly across countries and policy contexts. Germany provides an example where social inequalities have risen between 2003 and 2012 while the impact which social background has on learning outcomes has significantly declined over the same period, to no small part in the wake of educational reforms introduced in light of results from PISA 2000.

MEYER: "... develop alternatives to league tables: explore more meaningful and less easily sensationalized ways of reporting assessment outcomes. For

> *example, comparing developing countries, where 15-year olds are regularly drafted into child labor, with first world countries makes neither educational nor political sense and opens OECD up for charges of educational colonialism"*

Less than 1 % of the PISA reporting is devoted to league tables. The view of the OECD is that it should be up to individual countries to decide to what extent they wish to be compared internationally and it rejects the rather patronising view of Mr. Meyer that 'developing countries' should be excluded from such comparisons. Indeed, one of the major findings from PISA is that the world is no longer divided between rich and well-educated countries, and poor and badly educated ones, as Mr. Meyer's suggestions imply.

Rejoinder (Heinz-Dieter Meyer)

I am happy with the results of the letter so far. The letter has been widely reported in the international press and, to date, been supported by more than 3000 signatories from more than a dozen different countries. The signatories include leaders of teacher associations as well as hundreds of widely recognized experts in the field of education research and policy. It has been translated into five different languages, with more translations forthcoming.

The letter expresses concern that a single test, measuring a narrow aspect of public education, is used worldwide to create an atmosphere of "crisis" and urgency for action, justifying reforms that are narrowly based on improving the economic fitness of public education, often invasive and calculated to produce short-term gains in the PISA rankings.

In his reply, Dr. Schleicher disputed the claim that PISA encourages a short-term focus on quick fixes to the detriment of gradual improvements over the long haul. For evidence he pointed to gains achieved by countries like Germany which improved from 2006 to 2012 by an average of 10 points on the PISA scale. He did not mention that in the same six year span three-time PISA leader Finland lost 22 points!

Nor did he engage our claim that cultural and historical factors play a nearly all-decisive role rendering between-country comparisons almost meaningless. For example, it has been largely overlooked that all leading PISA countries are Confucian exam system countries. At the point when PISA tests the 15-year-olds in countries like Korea, Japan, China, Singapore, these students are already gearing up for an 'all or nothing' end-of-high school exam that will, once and for all, determine their future chances. While this practice is quite conducive to stir students into artificially inflated performances through cramming, it is demonstrably not conducive to the optimal development of a nation's talent and is coming increasingly under criticism in these countries themselves.

Test Irregularities and Data Intransparency
One of the most contested aspects of PISA has been Shanghai's role in the test. Not only did the OECD allow China to selectively participate in PISA through a district known not to be representative for the country's education system as a whole. OECD also allowed Shanghai schools to exclude the children of migrant workers. By allowing China to participate in PISA on such special terms, the OECD knowingly condoned and contributed to generating artificially inflated outcomes which it then went on to use as proof that Chinese students were "three years ahead" of countries nearer the OECD average.

Private Contractor and Conflict-of-Interest Transparency
To date, OECD has relied extensively on private contractors like Pearson Ltd to carry out the extensive data collection involved with PISA. Given the volume and extent of these assignments, these for-profit-companies stand to sustain significant financial gains from their role in PISA. One of these companies is Pearson Ltd, which OECD has repeatedly used to develop, conduct, or evaluate PISA tests and which a few weeks ago again received the contract to develop the PISA 2015 testing framework.

At the same time, however, Pearson plays a major role in the delivery of testing, test-assessment and instructional improvement services in PISA nations like the United States where the company, according to its own reports, administered 50 million online or paper tests in 2013 from which a large portion of its 500 million profit portfolio derived. Many of these services are officially justified with the need to improve the country's PISA performance.

In other words: Pearson designs and evaluates PISA while also (at least in the case of the US) designing and implementing the instructional and testing services meant to improve the performance it previously diagnosed as insufficient – in both cases earning millions in profit!

Our concerns about conflict-of-interest violations are further heightened by the fact that Dr. Schleicher serves on Pearson's Advisory Board.

We thus repeat our call that OECD make available in easily accessible form all relevant information regarding the private companies that OECD uses in carrying out PISA's tests (including calls for tenders and information on the subsequent bidding and selection process).

This would also include the reporting of instances where OECD officials have official functions in said private companies (and vice versa). Dr. Schleicher's membership on the Pearson Advisory Board would constitute a case in point.

Independent Monitoring and Oversight

The above problems suggest to us that, at present, PISA lacks proper independent oversight. We call for the establishment of a commission of representatives of the international education community, made up of individuals from the United Nations and its affiliate organizations, as well as from organizations of teachers, researchers, and administrators. Members of such an independent body should have access to PISA data at any of its stages as well as monitor test design and implementation.

Heinz-Dieter Meyer, Department of Educational Administration and Policy Studies, University at Albany, State University of New York, 1400 Washington Avenue Albany, NY 12222, USA, Email: hmeyer@albany.edu
Katie Zahedi, Linden Avenue Middle School, 65 West Market Street, Red Hook, NY 12571, USA, Email: kzahedi@rhcsd.org

Zum Selbstverständnis der Mathematikdidaktik – Ergänzungen zum Beitrag von Erich Ch. Wittman in den GDM-Mitteilungen 96/2014

Günter Graumann

Man könnte meinen, dass einige ältere Herren ihrer früheren Zeit nachhängen und die neuen Sichtweisen jüngerer Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker nicht verstehen. Das ist meines Erachtens aber nicht zutreffend. Ich für meinen Teil kann etwa sagen, dass ich als noch junger Didaktiker in den 1970er Jahren der Stoffdidaktik sehr kritisch gegenübergestanden habe,[1] insbesondere den rein aus fachmathematischer Sicht diskutierten Erörterungen zur sogenannten „Neuen Mathematik" in der Schule. Es fehlten mir damals die Orientierungen am Kind und am Alltag. Auch habe ich die Einbindung in Konzepte einer geisteswissenschaftlichen Pädagogik bzw. theoretischen Didaktik vermisst.

Obgleich ich die enorme Entwicklung der Disziplin „Mathematikdidaktik" seit dieser Zeit bis heute außerordentlich begrüße, muss ich wie Herr Erich Ch. Wittmann feststellen, dass in den letzten zehn bis fünfzehn Jahren wieder eine Einengung anerkannter Forschungsstandards stattgefunden hat, und zwar dieses Mal in Hinsicht auf empirische Forschung, die wohl heute zumindest als Schwerpunkt in jeder Dissertation und jedem Artikel des JMD vorkommen muss. Ich kann mich diesbezüglich nur voll und ganz den von Erich Ch. Wittmann genannten Kritikpunkten anschließen.

Nebenbei sei bemerkt: Dass Stoffdidaktik nicht nur aus der Sicht der Mathematik betrachtet werden kann, zeigt der nette kleine Beitrag von Horst Hischer „Marlene: ‚Ist Null eigentlich eine gerade Zahl?'" (vgl. auch in den GDM-Mitteilungen 96/2014). Neben der mathematisch-sachlichen Frage, ob Null eine gerade Zahl ist, wird in dem Beitrag das kindliche Denken berücksichtigt und reflektiert und es wird eine Problemlösemethode vorgestellt, so dass die Lösung dem Kind offensichtlich wird und es darüber mit Anderen argumentieren kann.

Ohne auf weitere Einzelheiten des Beitrages von Erich. Ch. Wittmann einzugehen, sei nur der Appell von Herrn Wittmann, dass die mathematikdidaktische Community im deutschsprachigen Raum ihr Selbstverständnis überprüfen muss, noch einmal hervorgehoben.

Die Argumentation von Erich Ch. Wittmann möchte ich allerdings noch wie folgt ergänzen. Physiker wissen, dass blindes Experimentieren zwar möglicherweise ein Suchfeld differenzieren kann, aber echte Experimente setzen immer erst eine Theorie voraus, die durch das Experiment überprüft werden soll. In den mir bekannten empirischen mathematikdidaktischen Forschungen fehlen aber sehr oft solche Theorien. Damit ich nicht falsch verstanden werde, ziehe ich noch einmal den Vergleich mit der Physik heran. Abgesehen von den Ausnahmen Newton und Einstein haben sich physikalische Theorien (etwa zu Optik, Elektromagnetismus, Wärmelehre oder Quantentheorie) in einem mehr oder weniger langen Diskussionsprozess entwickelt. In diesem Sinne sollten in der Mathematikdidaktik Diskussionen über Konzeptionen der Mathematikdidaktik bzw. Teilaspekten der Mathematikdidaktik einen wesentlich höheren Stellenwert in der gegenwärtigen Didaktik einnehmen. Als beispielhafte Felder, in denen solche theorieorientierten Diskussionen schon stattfinden, möchte ich nur auf die Erörterungen um Art, Rolle und Umfang von Problemorientierung im Mathematikunterricht[2] oder die Diskussionen über Lernziele, Bildung und Allgemeinbildung im Mathematikunterricht[3] (insbesondere in dem vor

[1] Vgl. etwa: Graumann, G. & Graumann, S. (1972). Zur Mengenbehandlung im 1. Schuljahr. In: Westermanns Pädagogische Beiträge, Heft 5/1972, S. 279–282 *und* Graumann. G. (1976) Praxisorientiertes Sachrechnen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1976, Hannover 1976, S. 79–83 *sowie* Graumann, G. (1977), Praxisorientierter Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1977, Hannover 1977, S. 98–101.

[2] Vgl. etwa die Veröffentlichungen der von E. Pehkonen und mir 1996 gegründeten internationalen ProMath-Gruppe (siehe: http://www.promath.org/) oder den Aufsatz Graumann, G. & Pehkonen, E. (2007), Problemorientierung im Mathematikunterricht – ein Gesichtspunkt der Qualitätssteigerung. In: Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen 2007, S. 251–291.

[3] Vgl. etwa: Heymann, H.W. (1989). Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? In: mathematik lehren Heft 33, S. 4–9 *und* Graumann, G. (1993). Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. In: Pädagogische Welt Heft 5/1993, S. 194–199 (und 204) *und* Winter, H. (1995), Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, Dez. 95, S. 37–46. (Überarbeitete Fassung in ISTRON Band 8, 2003) *oder* Graumann, G. (2009), Allgemeine Ziele, die mit Tests schwerlich erfasst werden können – erläutert an vier Beispielen aus dem Geometrieunterricht. In: Ludwig, M & Oldenburg, R. & Roth, J. (Hrsg.), Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht (AK Geometrie 2007/08), Franzbecker: Hildesheim 2009, S. 65–74 *und* Graumann, G. (2010), Allgemeine

25 Jahren gegründeten GDM-Arbeitskreis „Mathematik und Bildung“) hinweisen. Auch der Beitrag von Erich Ch. Wittmann in den GDM-Mitteilungen 96/2014 und ähnliche Erörterungen sind als solche Diskussionen zu konzeptionellen Fragen in der Mathematikdidaktik anzusehen. Wie schon gesagt, müssen theoretische, konzeptionelle Erörterungen nicht immer eine in sich geschlossene Konzeption, wie etwa diejenige von Johannes Kühnel oder des Ganzheitlers Johannes Wittmann, betreffen. Es muss vielmehr eine gewisse Pluralität möglich sein, allerdings muss es sich um eine geklärte (und nicht undefiniert schwammige) Pluralität handeln. Im Rahmen welcher Konzeption von Pädagogik bzw. Didaktik bestimmte Aussagen oder Forderungen gemacht werden, das muss in Veröffentlichungen zur Mathematikdidaktik viel deutlicher werden und der Diskussionsprozess darüber sollte einen größeren Raum einnehmen.

Günther Graumann, Deciusstraße 41, 33611 Bielefeld, Email: og-graumann@web.de

Zwischenruf: „Stoff“didaktik?

Hans Schupp

Der Begriff „Stoffdidaktik“ wird seit einiger Zeit immer dann verwandt, wenn gegenwärtig amtierende Mathematikdidaktiker sich von der traditionellen Lehr- und Forschungsweise in ihrer Disziplin abheben möchten, da man sie als zu einseitig, zu mathematikbezogen ansieht. Eigenartigerweise wird er aber auch von denjenigen gebraucht, die sich dieser Sicht verpflichtet fühlen, die sie verteidigen und meinen, dass die aktuelle Öffnung zu zahlreichen a priori gleichberechtigten Bezugsdisziplinen und deren Methoden problematisch ist.

Dass ich zur zweiten Schar zähle (und damit wohl als Stoffdidaktiker gelte) ist kein Geheimnis. Vielleicht aber erstaunt, dass ich nie vom „Stoff“ her gedacht habe. Ich nicht und die allermeisten damaligen Kolleginnen und Kollegen auch nicht. Gar nicht selten mussten wir uns gegen zugeschobenen Stoff geradezu wehren, etwa im Zuge der Neuen Mathematik oder gegenüber Überexaktifizierungen von Definitionen und Beweisen von Seiten mancher Mathematiker.

Ich habe meine Publikationen zwischen 1965 und heute alle noch einmal durchgesehen. Von einer einzigen Ausnahme abgesehen,[1] ist in ihnen der „Stoff“ nur Mittel zum Zweck. Es ging mir und uns (wieder beziehe ich meine Kolleginnen und Kollegen ein) vielmehr um eine Steigerung der Qualität des Mathematikunterrichts, auf allen Stufen und in allen Zweigen. Sie kann aber nur erreicht werden, wenn dessen Ziele ernst genommen und kritisch diskutiert werden. Selbstverständlich sind sie nicht unabhängig von den gewählten Inhalten, keineswegs aber werden sie durch den bloßen „Stoff“ determiniert.

Das ist auch gar nicht möglich. Seit der Metaphysik des Aristoteles weiß man, dass „Stoff“ erst dadurch entsteht und bedeutsam wird, dass man ihm in gestalterischer Absicht eine „Form“ aufprägt. Bildend oder sogar allgemeinbildend wird ein Inhalt erst dadurch, wie man ihn lehrt, lernt und im Unterricht gemeinsam über ihn, seine Verflechtungen und seine Hintergründe nachdenkt.

Mit dieser Sicht fühlten wir uns eingebunden in die Pädagogik. Die damalige Unterrichtslehre wies nicht nur auf die Thematik eines Unterrichtsabschnittes hin, sondern auch auf anthropogene und sozialkulturelle Voraussetzungen, auf Intensionalität, Methodik und Medienwahl.

Ich habe als Fachleiter an der Schule und als Dozent an der Hochschule viele Mathematikstunden junger Kollegen gesehen. Recht häufig habe ich in der anschließenden Besprechung

Kompetenzen: Alter Wein in neuen Schläuchen? – 40 Jahre Lernziele in der Mathematikdidaktik in Deutschland. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, WTM-Verlag, S. 349–352.

[1] Sie betrifft die ersten Auflagen meiner „Abbildungsgeometrie“ (1967 ff.), die zunächst Klarheit schaffen sollten über den Aufbau der schulrelevanten Abbildungen. Dass und wie sie die Geometrieunterricht bereichern können, habe ich erst später aufzuzeigen versucht, vor allem durch das Zusammenspiel von „Figuren und Abbildungen“ (1998).

die Frage gestellt: „Sie haben soeben eine Stunde an einer allgemeinbildenden Schule durchgeführt. Was daran war eigentlich allgemeinbildend?“ Die anschließende Diskussion ergab zwar nicht immer, aber häufig ein Bewusstwerden des Unterschieds zwischen zweifellos wichtigen mathematischen Kenntnissen und den durch sie bzw. über sie hinaus ermöglichten wesentlichen Einsichten.

Ich möchte das, woran wir gearbeitet haben, gerne weiterhin „Mathematikdidaktik“ und nicht „Stoffdidaktik“ nennen. Wie verstehen sich, unter welchem Namen firmieren eigentlich diejenigen, die sich von ihr absetzen möchten?

Hans Schupp, Universität des Saarlandes, Campus E2 4, 66123 Saarbrücken, Email: schupp@math.uni-sb.de

Protokoll zur Mitgliederversammlung der GDM am 13. 3. 2014 in Koblenz

Zeit: 16.30–19.00 Uhr
Ort: Universität Koblenz-Landau, Campus Koblenz

Rudolf vom Hofe begrüßt die Mitglieder und bittet um eine Schweigeminute zum Gedenken an die in jüngerer Zeit verstorbenen Mitglieder:

- Milan Koman (2012, erst 2013 bekannt geworden)
- Gerhard Becker (2013)
- Arnold Kirsch (2013)
- Jörn Rasch (2014)

TOP 1: Bestätigung des Protokolls, Beschluss der Tagesordnung

Die in Heft 96 der Mitteilungen veröffentlichte Tagesordnung wird ebenso wie das in Heft 95 veröffentlichte Protokoll der Mitgliederversammlung vom 7. 3. 2013 in Münster ohne Änderungswünsche angenommen.

TOP 2: Bericht des Vorstands

2.1 *Wahrgenommene Termine im Rahmen der Vorstandstätigkeit (wahrnehmende Personen jeweils in Klammern)*

- 24.03. MNU-Tagung in Hamburg: Treffen der befreundeten Verbände (R. vom Hofe)
- 19.04. Festkolloquium zum 65. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker in Duisburg (H.-G. Weigand, R. vom Hofe – eigene Kosten)
- 07.05. MathEduc in Berlin (Th. Jahnke, U. Kortenkamp)
- 16./17.05. GFD-Mitgliederversammlung in Berlin (R. vom Hofe)
- 14.06. Festkolloquium zur Verabschiedung von Werner Blum in Kassel (R. vom Hofe – eigene Kosten)
- 28.06. Festkolloquium zum 60. Geburtstag von Rolf Biehler (R. vom Hofe – eigene Kosten)
- 27.09. Symposium zum Problemlösen an der TU Braunschweig (S. Ruwisch – eigene Kosten)
- 28.07. PME Kiel (S. Ruwisch – eigene Kosten)
- 14.09. 30. Jubiläum des GDM-Arbeitskreises Geometrie in Marktbreit (R. vom Hofe – eigene Kosten)
- 25.09. Vorstandssitzung in Köln (R. vom Hofe, S. Ruwisch, Chr. Bescherer, A. Vohns)
- 27.09. Bundesfachleitertag der MNU (R. vom Hofe – eigene Kosten)
- 25. 10. Vorstands- und Beiratssitzung in Frankfurt (Vorstand und Beirat)

2.2 *Vernetzung in fachdidaktischen Gesellschaften*

Rudolf vom Hofe berichtet: Die Beziehungen zu MNU, GFD und DMV sind weiterhin gut. Auf dem MNU-Bundeskongress in Hamburg (24.–28. 3. 2013) hat ein gemeinsames Treffen dieser drei Verbände stattgefunden. Der MNU-Bundeskongress 2014 wird in Kassel (10.–14. 4. 2014) stattfinden. Die GFD plant weiterhin eine eigene Zeitschrift.

2.3 *Nachwuchsförderung*

Für das *Nachwuchsprogramm im Rahmen der Jahrestagung in Koblenz* geht Dank an Imke Knievel, Alexander Meyer, Christine Plicht, Stefanie Rach, Florian Schacht, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht.

Andreas Vohns und Sebastian Schorcht berichten über die *Summerschool 2013* in Ossiach (16.–20. 9.). Dank geht an die Organisator(inn)en (Franz Picher, Sebastian Schorcht, Andreas Vohns) und die Expert(inn)en (Regina Bruder, Willi Dörfler, Stephan Hußmann, Thomas Jahnke, Philipp Mayring).

Stefan Ufer berichtet über das *Doktorand(innen)kolloquium 2013* in München. Dank geht an die Organisatoren (Hedwig Gasteiger, Kristina Reiss, Stefan Ufer) und die Expert(inn)en (Hedwig Gasteiger, Leonie Herbartz-Emden, Aiso Heinze, Michael Neubrandt, Stefan Ufer).

Susanne Schnell und Alexander Meyer laden ein zur *Seasonschool 2014 „Fachdidaktische Entwicklungsforschung in der Mathematikdidaktik“* vom 28. 9.–2. 10. 2014 in Dortmund/Hagen, nähere Informationen: https://www.mathematik.tu-dortmund.de/sites/gdm-season-school-2014.

Hans-Georg Weigand lädt ein zum *Doktorand(inn)enkolloquium* vom 17.–19. 9. 2013 in das Kloster Bronnbach, nähere Informationen: http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/wissenschaft/dokkolgdm/

2.4 *Gemeinsame Kommissionen*

Kommission für Lehrerbildung

Susanne Prediger berichtet: In der Kommission wurde im letzten Jahr eine Stellungnahme „Wider die Nivellierung des gymnasialen und nicht-gymnasialen Sekundarschullehramts“ erarbeitet (abgedruckt in Heft 95 der Mitteilungen), als nächste Aktivität ist eine Tagung zum Thema „Praxisphasen in der Mathematiklehrerbildung an Hochschulen“ (21./22. 3. 2014) geplant.

Kommission „Übergang Schule–Hochschule“

Gilbert Greefrath berichtet: In der Kommission Schule–Hochschule der drei Fachverbände DMV, MNU und GDM sind als Vertreter der GDM zur Zeit Bärbel Barzel, Rolf Biehler und Gilbert Greefrath tätig. Die Kommission hat im Herbst 2013 Fachexpert(inn)en der Bildungsadministration aller 16 Bundesländer zu einer Tagung nach Münster eingeladen. Thema war die Festschreibung von Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik, ihre Umsetzung in Kerncurricula der Länder, die Entwicklung musterhafter Abituraufgaben sowie die Möglichkeiten einer Vereinheitlichung. Die Initiative der Tagung erfuhr hohe Akzeptanz, so dass für 2014 eine Folgetagung geplant ist. Daneben hat sich die Kommission mit der Frage des Einsatzes digitaler Mathematikwerkzeuge in Unterricht und Prüfungen beschäftigt und zu diesem Thema eine Stellungnahme vor dem Hintergrund der neuen Situation in Baden-Württemberg veröffentlicht. Die Kommission sieht mit den in Baden-Württemberg formulierten Vorgaben einen Rückschritt in die Aufgabenkultur vor 20 Jahren und den technologischen Stand der 1970-er Jahre sowie die Gefahr einer großen Verunsicherung für Lehrpersonen.

2.5 *Kommende Tagungen*

Die nächsten Jahrestagungen der GDM finden statt in

2015: Basel-Solothurn 9.–13. 2. 2015
2016: Heidelberg

Gabriele Kaiser berichtet über den *International Congress on Mathematical Education (ICME-13)*, der von der GDM als Veranstalterin getragen und vom 24.–31. 7. 2016 in Hamburg stattfinden wird: Im Juni 2013 hat ein Treffen des International Programme Committee stattgefunden, auf dem u. a. die Entscheidung über die Hauptvorträge getroffen wurde. Ferner sind zwei Panels, fünf Survey Teams, bislang ca. 50 Invited Lectures (früher: Regular Lectures), 54 Topic Study Groups, ein thematischer Nachmittag mit drei Strängen (European Didactic Traditions, German-speaking Traditions in Mathematics Education, Legacy of Felix Klein) geplant und die Vorbereitungen für diese Aktivitäten sind unter reger Beteiligung der deutschsprachigen Community (u. a. in jeder Topic Study Group mindestens ein Team Member aus dem deutschsprachigen Raum) angelaufen. Gabriele Kaiser bedankt sich noch einmal bei allen involvierten Personen für deren Mitwirkung und bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik für die finanzielle Unterstützung. Nähere Informationen zum ICME-13 unter: http://icme13.org/

2.6 *Bericht der Schriftführung*

Andreas Vohns berichtet über Stand und Entwicklung der Mitgliederzahlen: In 2013 sind rückwirkend zum 1. 1. aufgrund des durch die unterjährig erfolgte Beitragserhöhung erwirkten Sonderkündigungsrechts 63 Personen ausgetreten, regulär zum 31. 12. weitere 39 Personen. Zum 1. 1. 2013 sind 65 Personen neu eingetreten, zum 1. 1. 2014 bislang 33 Personen. Damit sind sowohl die Neueintritte als auch die Gesamtzahl der Mitglieder gegenüber dem Vorjahr stabil geblieben. Hinsichtlich der Adressverwaltung muss leider berichtet werden, dass es bei jeder Aussendung der MGDM zu etwa 15–30 Versandrückläufen aufgrund fehlerhafter (veralteter) Adressangaben kommt. Es ist angedacht, allen Mitgliedern der GDM halbjährlich ihre aktuell in der Datenbank enthaltenen Daten mit der Bitte um allfällige Aktualisierung zuzusenden.

TOP 3: Bericht der Kassenführerin bzw. des Kassenprüfers

Bericht der Kassenführerin.

Christine Bescherer berichtet: Dank der letztjährigen Erhöhung der Mitgliedsbeiträge hat sich die Kassenlage der GDM gegenüber dem Vorjahr wie erwartet deutlich entspannt. Im Jahr 2013 standen Ausgaben in Höhe von € 87.980,88 Einnahmen in Höhe von € 103.171,30 gegenüber, zum 2. 3. 2014 befanden sich € 17.364,71 auf dem Konto der GDM. Sie erläutert ferner detaillierter die Zusammensetzung der Ausgabenposten. Für das Jahr 2014 sind nach derzeitigem Planungsstand Ausgaben in Höhe von ca. € 94.500 und Einnahmen in Höhe von € 105.000 zu erwarten. Hinzu kommen die i. W. aus den Zusatzbeiträgen für den ICME 13 gedeckten, für das Jahr 2014 mit € 20.000 € angesetzten Kosten für die Vorbereitung dieses Kongresses. Christine Bescherer erinnert auch noch einmal daran, dass reduzierte Mitgliedsbeiträge für pensionierte Mitglieder rechtzeitig und für Nachwuchsmitglieder zudem jährlich neu zu beantragen sind.

Bericht des Kassenprüfers.
Fritz Hasselbeck berichtet: Die Kasse wurde eingehend geprüft. Gegenstand der Prüfung waren der Anfangsbestand aus dem Jahr 2012, Einnahmen- und Ausgabenbelege mit den dazu gehörigen Rechnungen sowie der Jahresabschluss 2013. Das datumsgemäß geordnete Kassenjournal, die Kontoauszüge der Bank und die Rechnungsbelege stimmen in Termindaten und aufgeführten €-Beträgen voll überein. Buchungsklassen und Wertstellungen sind im Kassenjournal genau dokumentiert. Die Rechnungsbeträge sind im Konto-Korrent vom 1. 1.–31. 12. 2013 sachlich korrekt verbucht, die Nachweise für Einnahmen und Ausgaben sind vollständig abgeheftet. Die Bearbeitung des GDM-Kontos erfolgte gründlich und gewissenhaft, die Anlage des Kontodepots von Frau Bescherer zum Rechnungsjahr 2013 liegt übersichtlich und klar vor.

Fritz Hasselbeck empfiehlt unter diesen Bedingungen die Entlastung der Vorstandschaft und der Kassenführerin.

TOP 4: Entlastung des Vorstands

Susanne Prediger empfiehlt der Mitgliederversammlung die Entlastung. Der Entlastung wird einstimmig bei vier Enthaltungen zugestimmt.

TOP 5: Satzungsänderung/Verabschiedung einer neuen Ordnung

Rudolf vom Hofe berichtet: Der Arbeitskreis Schweiz–Liechtenstein hat sich in den letzten Jahrzehnten sehr erfolgreich entwickelt und macht heute über ein Zehntel der Mitglieder der GDM aus. Von den anderen Arbeitskreisen der GDM, die sich mit speziellen Themen oder Methoden der Mathematikdidaktik befassen, unterscheidet sich dieser Arbeitskreis dadurch, dass er die Mathematikdidaktik innerhalb der deutschsprachigen Region Schweiz-Liechtenstein allgemein und umfassend vertritt und damit auch als Ansprechpartner für die dortige Bildungspolitik auftreten möchte. Dies ist für diesen Arbeitskreis aufgrund der bestehenden GDM-internen Regelungen bislang nicht möglich. Der Arbeitskreis Schweiz-Liechtenstein ist daher mit der Bitte an Vorstand und Beirat herangetreten, zu überprüfen, ob die Strukturen der GDM so geändert werden können, dass dieser Arbeitskreis (1) bildungspolitische Stellungnahmen innerhalb der Schweiz abgeben, (2) sich als Verein nach Schweizer Recht formieren und (3) dabei dennoch weiterhin innerhalb der GDM verbleiben kann. Die Angelegenheit ist im Vorstand und Beirat unter Hinzuziehung von Vereinsjuristen intensiv diskutiert und ein Lösungsvorschlag gefunden worden, der von Vorstand und Beirat getragen wird.

Rudolf vom Hofe stellt daher zunächst folgenden Antrag auf Satzungsänderung/-ergänzung:

1. In „§ 13. Beirat“ soll die Passage:
   „Der Beirat hat höchstens 15 Mitglieder. Sie werden von der Mitgliederversammlung für drei Jahre gewählt. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich. Jedes Jahr sind etwa ein Drittel der Mitglieder zu wählen.“
   ersetzt werden durch:
   „Der Beirat hat höchstens 15 gewählte Mitglieder. Sie werden von der Mitgliederversammlung für drei Jahre gewählt. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich. Jedes Jahr sind etwa ein Drittel der Mitglieder zu wählen. Anerkannte Landesverbände können zusätzlich jeweils ein Mitglied in den Beirat entsenden.“
2. Folgende Passage soll als „§ 14. Ordnungen“ neu aufgenommen werden:
   „Die Bestimmungen zu Untergruppen des Vereins wie Arbeitskreise, Landesverbände und Kommissionen werden durch Ordnungen geregelt. Diese Ordnungen sind nicht Teil der Satzung, müssen jedoch mit dieser in Einklang stehen. Ordnungen von Arbeitskreisen und Landesverbänden werden von der Mitgliedersammlung, Ordnungen von Kommissionen vom Vorstand beschlossen.“

Der Antrag wird von der Mitgliederversammlung einstimmig angenommen.

Der erste Vorsitzende erläutert im Folgenden, dass neben der Satzungsänderung die Verabschiedung einer „Ordnung für Landesverbände der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)“ nötig ist. Diese Ordnung regelt das Procedere, wie Untergliederung der GDM (im aktuellen Fall: der Arbeitskreis Schweiz/Liechtenstein) den Status „Landesverband“ beantragen und erhalten können. Er erläutert im Folgenden kurz den Inhalt dieser Ordnung (die Ordnung ist in diesem Heft vollständig abgedruckt auf S. 43).

Er stellt schließlich Antrag auf Verabschiedung der „Ordnung für Landesverbände der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)".

Der Antrag wird von der Mitgliederversammlung einstimmig angenommen. Esther Brunner dankt im Namen des Arbeitskreises Schweiz/Liechtenstein herzlich für die Unterstützung durch die verabschiedete Satzungsänderung/Annahme der Ordnung für Landesverbände.

TOP 6: Wahlen

2. Vorsitz.
Silke Ruwisch wird als zweite Vorsitzende zur Wiederwahl vorgeschlagen. Es gibt keine weiteren Vorschläge (Ja-Stimmen: 116, Nein-Stimmen: 2, Enthaltungen: 3, Ungültige Stimmen: 4). Silke Ruwisch nimmt die Wahl an.

Schriftführung.
Andreas Vohns wird zur Wiederwahl vorgeschlagen (Ja-Stimmen: 108, Nein-Stimmen: 1, Enthaltungen: 3, Ungültige Stimmen: 0). Andreas Vohns nimmt die Wahl an.

Beirat.
Es scheiden aus: Roland Keller (keine Wiederwahl möglich), Ulli Kortenkamp (Wiederwahl möglich), Timo Leuders (keine Wiederwahl möglich) und Edith Schneider (keine Wiederwahl möglich).

Es kandidieren: Gabriella Ambrus, Bärbel Barzel, Michael Gaidoschik, Gilbert Greefrath, Ulli Kortenkamp, Matthias Ludwig, Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Jürgen Roth, Anna Susanne Steinweg.

Gewählt werden: Gabriella Ambrus (44 Stimmen), Bärbel Barzel (65 Stimmen), Michael Gaidoschik (49 Stimmen) und Ulli Kortenkamp (76 Stimmen).

Gilbert Greefrath (33 Stimmen), Matthias Ludwig (34 Stimmen), Elisabeth Rathgeb-Schnierer (32 Stimmen), Jürgen Roth (41 Stimmen) und Anna Susanne Steinweg (27 Stimmen) werden nicht gewählt.

Alle gewählten Personen nehmen die Wahl an.

TOP 7: Madipedia & MathEduc

Ulli Kortenkamp berichtet: *MathEduc* ist eine Einrichtung des FIZ-Karlsruhe. MathEduc ist die international einzige kommentierte Literaturdatenbank zur spezifischen Erfassung mathematikdidaktischer Beiträge aus Forschung, Theorie und Praxis im internationalen Rahmen. Sie umfasst derzeit etwa 150 000 Einträge, wobei mittlerweile zu mehr als 1500 Einträgen Book Reviews vorliegen. Editor-in-Chief ist Thomas Jahnke, die GDM ist Teil des Coordinating Committees. Mitwirkung im Rahmen von Book Reviews (die parallel in den Mitteilungen der GDM erscheinen) ist weiterhin dringend erwünscht.

Madipedia ist ein Angebot der GDM in Kooperation mit FIZ Karlsruhe unterstützt durch das DZLM. Madipedia ist als Online-Nachschlagewerk zur Mathematikdidaktik konzipiert, es umfasst Angaben zu ca. 400 Personen und ca. 400 Dissertationen aus dem deutschsprachigen Raum. Madipedia ist als Wiki implementiert, daher auf Eintragungen aus der Community selbst angewiesen. Ulli Kortenkamp bittet daher um Mitarbeit an Madipedia (s. Beitrag in diesem Heft).

TOP 8: Zeitschriften

8.7 Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)
Rolf Biehler berichtet: Die Zahl der Institutionen, die weltweit einen Online-Zugang zum JMD haben, hat sich seit 2010 beinahe verdoppelt auf nunmehr fast 5000 Institutionen, auch die Zahl der Online-Zugriffe auf das JMD hat sich im selben Zeitraum deutlich positiv entwickelt. Die Retrodigitalisierung des JMD ist abgeschlossen, Mitgliedern der GDM stehen alle Jahrgänge seit 1980 online über die Datenbank der GDM zur Verfügung. Bibliotheken, die das JMD abonnieren, erhalten kostenfrei Zugriff auf alle Jahrgänge ab 1997, ein Zugriff auf ältere Jahrgänge muss einmalig zu einem Preis von maximal € 850 erworben werden.

Die derzeitige Heftplanung sieht für das Jahr 2015 ein Heft mit spezifischem Themenschwerpunkt (2/2015: Lehrerfortbildung/Multiplikatoren Mathematik – Konzepte und Wirkungsforschung) vor. Für 2016 sind zwei solche Hefte geplant: 1/2016: Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung (in memoriam Arnold Kirsch); 1a/2016: Subject matter analysis from a didactical perspective (Stoffdidaktik). Das zweite Heft (1a/2016) stellt eine Sonderausgabe aus Anlass des ICME in Hamburg dar, es ist daran gedacht, dieses Heft allen Teilnehmer(inne)n des Kongresses zur Verfügung zu stellen. Rolf Biehler weist darauf hin, dass Beiträge in diesen thematisch definierten Heften dem gleichen Review-Verfahren unterliegen wie die weiterhin möglichen und erwünschten Einzelbeiträge zu thematisch ungebundenen Heften des JMD.

8.8 ZDM
Gabriele Kaiser informiert über die Entwicklungen beim ZDM, mit einem Schwerpunkt auf dessen in-

ternationaler Wahrnehmung gemessen in Online-Zugriffszahlen/Article Requests. So entfallen etwa 80 % der Zugriffe auf Artikel des ZDM auf Artikel aus den Jahren 1997–2012, 20 % auf den aktuellen Jahrgang (2013). Die zehn am häufigsten abgerufenen Artikel werden zwischen 300- und 600-mal pro Jahr abgerufen. Zugriffe aus Europa machen mit 31 % (darunter 8 % aus Deutschland) den größten Anteil aus, dicht gefolgt vom asiatisch-pazifischen Raum mit 30 % und dann Nord-Amerika mit 21 %. Die Artikel werden zu etwa 28 % über Google Scholar gefunden, zu 25 % direkt aufgerufen und zu 19 % über die Google-Suche gefunden.

8.9 mathematica didactica
Andreas Eichler informiert über Herausgabemodalitäten sowie Stand und Entwicklung der Beitragseinreichungen zu mathematica didactica.

8.10 Der Mathematikunterricht (MU)
Stefan Deschauer informiert: Herausgeber sind neben ihm selbst Henning Körner und Jörg Meyer, die Rubrik betreut Gerhard König. MU ist themenheftorientiert mit Bezug zum Unterricht und hat traditionell eine gymnasiale Ausrichtung.

TOP 10: Verschiedenes

Torsten Linnemann stellt die Jahrestagung 2015 in Basel vor. Nähere Informationen: http://www.gdm2015.ch/.

Der Vorstand bedankt sich bei den Mitgliedern für die gute Zusammenarbeit.

Protokoll: Andreas Vohns

Ordnung für Landesverbände der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)

§ 1 GDM-Landesverband

Verfolgt ein GDM-Arbeitskreis das Ziel, die Mathematikdidaktik innerhalb eines Landes außerhalb Deutschlands in Wissenschaft und Unterricht allgemein zu vertreten, so kann er den Status „GDM-Landesverband“ beantragen.

Ein GDM-Arbeitskreis mit dem Status „GDM-Landesverband“ ist berechtigt, in bildungspolitischen Fragen als GDM-Landesverband Stellungnahmen abzugeben.

§ 2 Korporative Mitgliedschaft

Es steht einem GDM-Landesverband frei, einen Verein nach dem jeweiligen Landesrecht zu gründen. Dieser kann die korporative Mitgliedschaft in der GDM beantragen und ist dann berechtigt, als Verein unter gleichem Namen aufzutreten.

§ 3 Anerkennung

Die Anerkennung eines Vereins „GDM-Landesverband“ als korporatives Mitglied in der GDM kann erfolgen, wenn:

(1) die Zielsetzung des Vereins „GDM-Landesverband“ mit der Zielsetzung der GDM vereinbar ist;
(2) die Mitgliedschaft im Verein „GDM-Landesverband“ die Mitgliedschaft in der GDM voraussetzt.

Die Anerkennung eines Landesverbandes erfolgt nach dem gleichen Verfahren wie die Anerkennung eines GDM-Arbeitskreises.

§ 4 Finanzierung

Die GDM stellt einem Verein „GDM-Landesverband“ Mittel zur Vereinsarbeit zur Verfügung. Diese betragen in der Regel 25 % der Mitgliedsbeiträge der Mitglieder des GDM-Landesverbands.“

Diese Ordnung wurde in der Mitgliederversammlung am 13. 3. 2014 an der Universität Koblenz beschlossen.

Satzung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V.

§ 1. Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (e. V.) mit Sitz in Berlin verfolgt ausschließlich und unmittelbar gemeinnützige Zwecke im Sinne des Abschnitts „Steuerbegünstigte Zwecke" der Abgabenverordnung.
Zweck des Vereins ist die Förderung von Wissenschaft und Forschung im Gebiet der Didaktik der Mathematik und damit verbunden die Förderung von Bildung und Erziehung.
Der Satzungszweck wird verwirklicht durch die Mitwirkung bei und Unterstützung von wissenschaftlichen Veranstaltungen und Forschungsvorhaben, durch finanzielle Unterstützung wissenschaftlicher Publikationen und durch Zusammenarbeit mit entsprechenden Institutionen im Inland und im Ausland.

§ 2. Die Gesellschaft ist selbstlos tätig; sie verfolgt nicht in erster Linie eigenwirtschaftliche Zwecke.

§ 3. Mittel der Gesellschaft dürfen nur für satzungsmäßige Zwecke verwendet werden. Die Mitglieder erhalten keine Zuwendungen aus Mitteln der Gesellschaft.

§ 4. Es darf keine Person durch Ausgaben, die dem Zweck der Gesellschaft fremd sind, oder durch unverhältnismäßig hohe Vergütungen begünstigt werden.

§ 5. Bei Auflösung der Gesellschaft oder bei Wegfall steuerbegünstigter Zwecke fällt das Vermögen an die Studienstiftung des Deutschen Volkes (e. V.), die es unmittelbar und ausschließlich für gemeinnützige Zwecke zu verwenden hat.

§ 6. Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr.

§ 7. Erwerb der Mitgliedschaft
Die Gesellschaft nimmt persönliche, korporative Mitglieder und Ehrenmitglieder auf. Die Aufnahme neuer Mitglieder erfolgt auf schriftlichen Antrag beim Schriftführer durch Beschluss des Vorstandes. Personen, die sich um die Mathematikdidaktik oder um die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik verdient gemacht haben, kann nach Beratung mit dem Beirat durch einstimmigen Beschluss des Vorstands die Ehrenmitgliedschaft angetragen werden.

§ 8. Rechte und Pflichten des Mitglieds
Jedes Mitglied ist berechtigt
(a) zur Teilnahme an den Veranstaltungen der Gesellschaft und zur Ausübung der Rechte in der Mitgliederversammlung,
(b) zur Inanspruchnahme aller etwa bestehenden oder noch zu errichtenden Einrichtungen der Gesellschaft nach Maßgabe der dafür geltenden Bestimmungen.

Jedes Mitglied ist verpflichtet, sich für die Ziele der Gesellschaft einzusetzen und den von der Mitgliederversammlung beschlossenen Beitrag zu entrichten.

§ 9. Verlust der Mitgliedschaft
Die Mitgliedschaft erlischt durch Tod, Kündigung oder Ausschluss.
Die Kündigung durch das Mitglied ist bis zum 31. Dezember eines jeden Jahres zulässig. Die Kündigungserklärung ist nur wirksam, wenn sie mindestens drei Monate vorher in schriftlicher Form einem Vorstandsmitglied zugegangen ist.
Der Ausschluss kann nur durch einstimmigen Beschluss des Vorstandes ausgesprochen werden. Gegen diese Ausschließung ist innerhalb von 2 Monaten nach Zustellen des Beschlusses Berufung an die Mitgliederversammlung möglich, die über den Einspruch entscheidet.

§ 10. Organe der Gesellschaft sind:
1. Der Vorstand
2. die Mitgliederversammlung
3. der Beirat

§ 11. Vorstand
Der Gesamtvorstand besteht aus
1. dem Ersten Vorsitzenden
2. dem Zweiten Vorsitzenden
3. dem Schriftführer
4. dem Kassenführer

Die Vorstandsmitglieder werden regelmäßig durch die Mitgliederversammlung für zwei Jahre gewählt. Jedes Jahr ist die Hälfte der Mitglieder des Vorstandes zu wählen. Vorherige Abberufung durch die Mitgliederversammlung ist möglich. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich.
Der Erste und der Zweite Vorsitzende vertreten die Gesellschaft im Sinne des § 26 BGB und sind Vorstand im Sinne des Gesetzes.
Soweit in dieser Satzung vom Vorstand die Rede ist, ist immer der gesamte Vorstand gemeint.
Der Vorstand beschließt mit Stimmenmehrheit. Bei Stimmengleichheit entscheidet die Stimme des Ersten Vorsitzenden.

§ 12. Mitgliederversammlung
Die Mitgliederversammlung findet jeweils

einmal im Jahr statt. Die Tagesordnung muss wenigstens folgende Punkte enthalten:

1. Bericht des Vorstandes über das abgelaufene Geschäftsjahr
2. Rechnungslegung des Kassenführers
3. Bericht des Kassenprüfers
4. Entlastung des Vorstandes
5. Wahl des Kassenprüfers, der nicht dem Vorstand angehören darf, für das nächste Geschäftsjahr
6. Wahlen zum Vorstand

Alle Mitgliederversammlungen werden schriftlich einberufen mit einer Frist von einem Monat unter Angabe der Tagesordnung. Jede ordnungsgemäß einberufene Mitgliederversammlung ist beschlussfähig. Bei den Abstimmungen entscheidet die Mehrheit der Stimmen der anwesenden Mitglieder. Für eine Satzungsänderung oder für die Auflösung ist eine Dreiviertelmehrheit aller anwesenden Mitglieder erforderlich. Die Anträge dazu müssen mit der Einladung zur Mitgliederversammlung im Wortlaut bekannt gegeben werden.

Der Erste Vorsitzende, bei dessen Verhinderung der Zweite Vorsitzende, leitet die Mitgliederversammlung.

Über die Mitgliederversammlung fertigt der Schriftführer ein Protokoll an, das vom Versammlungsleiter gegenzuzeichnen ist.

Der Vorstand kann in besonderen Fällen eine außerordentliche Mitgliederversammlung einberufen. Der Vorstand muss innerhalb von zwei Monaten eine außerordentliche Mitgliederversammlung einberufen, wenn dies von mindestens 20 % der Mitglieder unter Angabe der Zwecke und Gründe schriftlich verlangt wird.

§ 13. Beirat

Der Beirat berät den Vorstand und die Mitgliederversammlung in den allgemeinen wissenschaftlichen Leitlinien und Zielsetzungen der Gesellschaft.

Beiratsmitglieder sollen solche Persönlichkeiten sein, die in besonderer Weise geeignet sind, die Ziele der Gesellschaft zu fördern. Der Beirat hat höchstens 15 *gewählte* Mitglieder. Sie werden von der Mitgliederversammlung für drei Jahre gewählt. Eine Wiederwahl ist höchstens zweimal möglich. Jedes Jahr sind etwa ein Drittel der Mitglieder zu wählen. *Anerkannte Landesverbände können zusätzlich jeweils ein Mitglied in den Beirat entsenden.*

§ 14. *Ordnungen*

Die Bestimmungen zu Untergruppen des Vereins wie Arbeitskreise, Landesverbände und Kommissionen werden durch Ordnungen geregelt. Diese Ordnungen sind nicht Teil der Satzung, müssen jedoch mit dieser in Einklang stehen. Ordnungen von Arbeitskreisen und Landesverbänden werden von der Mitgliedersammlung, Ordnungen von Kommissionen vom Vorstand beschlossen.

§ 15. Auflösung der Gesellschaft

Für die Beschlussfassung über die Gesellschaftsauflösung gilt § 12. Für die Verwendung des Gesellschaftsvermögens ist § 5 zu beachten.

§ 16. Sollte eine Bestimmung unwirksam sein, so wird dadurch die Gültigkeit der übrigen Bestimmung nicht berührt.

Diese Satzung wurde auf der Mitgliederversammlung am 7. März 1996 in Regensburg verabschiedet, gem. Beschluss der Mitgliederversammlung am 3. März 2005 in Bielefeld in § 1 und § 7 aktualisiert und ergänzt sowie gem. Beschluss der Mitgliederversammlung am 13. März 2014 in Koblenz in § 13 geändert und um §14 ergänzt. *Änderungen/Ergänzungen vom 13. März 2014 sind kursiv hervorgehoben.*

Gründungsversammlung der GDM Schweiz vom 3. 6. 2014

Am 3. 6. 2014 wurde die „GDM Schweiz“ als Landesverband der GDM gegründet. Dadurch ist die rechtliche Situation der „GDM Schweiz“ geklärt. Die GDM Schweiz verfügt nun über eigene Statuten nach Schweizer Vereinsrecht, bleibt aber ein Teil der GDM, deren Sitz in Deutschland liegt.

An der Gründungsversammlung, die in Räumlichkeiten der Pädagogischen Hochschule in Zürich stattfand, nahmen rund 30 Mitglieder teil. Ebenso viele hatten sich entschuldigt und gleichzeitig bekräftigt, dass sie das Vorhaben unterstützen. Die anwesenden Mitglieder wurden von den beiden Co-Vorsitzenden des Arbeitskreises Schweiz-Liechtenstein der GDM, Esther Brunner und Lis Reusser, herzlich willkommen geheissen.

Lis Reusser übernahm für den Vorstand des Arbeitskreises die Verabschiedung von Roland Keller, der über lange Jahre den Arbeitskreis beinahe in Personalunion führte und sowohl als Vorsitzender des AKs wie als Mitglied im Beirat der GDM mitarbeitete. Seine Verdienste um den Verein sind immens. Nicht zuletzt wurden auf seine Initiative hin die Strukturen des bisherigen Arbeitskreises analysiert und die rechtlichen Grundlagen zur Gründung der GMD Schweiz geschaffen. Ebenfalls herzlich verabschiedet wurde mit Rita Krummenacher ein zweites langjähriges Vorstandsmitglied.

Nach der Wahl von zwei Stimmenzählenden folgten die Vereinsgeschäfte. Die neuen Vereinsstatuten wurden einstimmig verabschiedet. Diese waren zuvor sowohl von einem Schweizer wie von einem deutschen Juristen geprüft und vom Vorstand der GDM und dem Beirat akzeptiert worden.

Als weiteres Geschäft standen Wahlen – die ersten ordentlichen Wahlen überhaupt in der GDM Schweiz – an. Gewählt in den Vorstand wurden Esther Brunner, Lis Reusser, Gabriela Schürch und Christof Weber (alle bisher) und neu Peter Flury.

Esther Brunner und Lis Reusser wurden einstimmig als Co-Präsidentinnen bestätigt.

Für die Vertretung der GDM Schweiz im wissenschaftlichen Beirat der GDM stellten sich zwei Personen zur Wahl. Gewählt wurde Esther Brunner. Damit ist die GDM Schweiz mit einer der beiden Co-Präsidentinnen im wissenschaftlichen Beirat der GDM vertreten.

Als Rechnungsrevisoren gewählt wurden Albert Gächter und Guido Beerli.

Die Kassierin, Gabriela Schürch, informierte kurz, dass der Mitgliederbeitrag für 2014 bereits auf 140 Fr. festgelegt worden war und dieses Geschäft deshalb erst 2015 wieder ansteht. Gemäss Ordnung für die Landesverbände der GDM werden uns in Zukunft ca. 25 % des Mitgliederbeitrags für die Aktivitäten unseres Landesverbandes zur Verfügung stehen.

Lis Reusser informierte ferner über den Lehrerinnen- und Lehrertag an der GDM 2015 in Basel. Die Jahrestagung in Basel wird von der FHNW ausgerichtet und verantwortet. Christine Streit vom Organisationskomitee hat die GDM Schweiz darum gebeten, ihre Mitglieder dafür zu gewinnen, Workshops für den Lehrerinnen- und Lehrertag anzubieten. Wir hoffen, dass viele Kolleginnen und Kollegen sich zur Verfügung stellen, so dass ein attraktives Programm zu Stande kommt.

Einen Ausblick gab Lis Reusser auch auf die nächste geplante fachdidaktische Diskussion, die am 8.9.2014, 18.45-20.45h an der PHZH zum Thema „Fachdidaktisch *app*-gestützte Unterrichtsszenarien mit *Tablets*“ von den beiden Kollegen Bernhard Dittli und Philippe Sasdi angestossen wird. Fernziel des Inputs und der nachfolgenden Diskussion ist die Erarbeitung von Qualitätskriterien für Apps und Co.

Esther Brunner stellte anschliessend kurz die neue Website – mit einem Logo in Schweizer Rot – vor, die gegenwärtig im Aufbau begriffen ist und unter www.gdmschweiz.ch oder www.didaktik-der-mathematik.ch demnächst online gehen wird. U. a. wird die Site einen passwortgeschützten Mitgliederbereich aufweisen.

Das Traktandum Verschiedenes wurde nicht genutzt und die Versammlung nach einer knappen Stunde geschlossen. Zur Feier der Gründungsversammlung wurde anschliessend in einem Restaurant angestossen.

Wir sind sehr dankbar für die Unterstützung der GDM, insbesondere des Vorsitzenden, Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, der Vorstandsmitgliedern und der Mitgliedern des wissenschaftlichen Beirats und freuen uns, nun als *Landesverband* zur GDM zu gehören!

Esther Brunner und Lis Reusser
Co-Präsidentinnen der GDM Schweiz

Notwendigkeit von wissenschaftlich qualifiziertem Personal für die universitäre gymnasiale Mathematiklehrerbildung

Stellungnahme der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung Mathematik der DMV, MNU und GDM

Es herrscht große Einigkeit darüber, dass ein Mathematiklehramtsstudium in allen Schulformen dazu dienen soll, den wissenschaftlichen Hintergrund für das benötigte Professionswissen aufzubauen, sowohl im fachwissenschaftlichen als auch im fachdidaktischen Bereich.

Es sollte daher selbstverständlich sein, dass für die Ausgestaltung des Studiums jeweils Fachleute zur Verfügung stehen, denn nur mit Verankerung im wissenschaftlichen Bereich der Fachwissenschaft bzw. Fachdidaktik können Studierende adäquat an diesen herangeführt werden:

Für eine erfolgreiche Ausbildung von künftigen Lehrkräften für die gymnasiale Oberstufe ist es zwingend erforderlich, dass Studierende mit Fragestellungen der mathematischen Forschung in Kontakt kommen. Hierbei sollte das Fach in seiner Breite abgedeckt sein. Dies kann nur gewährleistet werden, wenn die entsprechenden Fachbereiche ausreichend mit wissenschaftlich qualifiziertem Personal, insbesondere Professuren der verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik, ausgestattet sind.

Ebenso kann kein Mathematiklehramtsstudium ohne auch in der Forschung erfahrende Fachdidaktik-Professorinnen und -Professoren auskommen, da nur die intensive, auf Forschung basierende Beschäftigung mit mathematischen Lehr-Lernprozessen die wissenschaftlichen Hintergründe für eine akademische Ausbildung von Lehrkräften bietet.

Die Gemeinsame Kommission Lehrerbildung betrachtet daher mit Sorge, dass in einigen Bundesländern die Anforderungen an die wissenschaftliche Qualifikation des ausbildenden Personals in der Breite nicht hinreichend berücksichtigt werden. Die Bundesländer, Universitäten und Akkreditierungs-Agenturen werden aufgefordert, für die Einhaltung der angesprochenen Standards zu sorgen.

Im Namen aller Kommissionsmitglieder:
Prof. Dr. Susanne Prediger
Kommissionsvorsitzende, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de

„Vielleicht stehen Sie ja auch schon drin?"

Ulrich Kortenkamp

Da gab's doch diese Dissertation von wie hieß sie noch mal?

So ein interessanter Artikel … wer ist das eigentlich, der das geschrieben hat? Was macht der denn noch?

Da möchte jemand eine Stelle haben – mal vorsichtshalber „googeln"? Oder „facebooken"? Oder lieber doch in einem Nachschlagewerk für die Mathematikdidaktik nachschauen?

Wenn Sie schon einmal vor einer solchen Frage standen, dann werden Sie *Madipedia* zu schätzen wissen. Schauen Sie doch mal bei diesem besonderen Angebot der GDM unter http://madipedia.de vorbei!

Madipedia ist ein Wiki[1] für die Mathematikdidaktik, welches von der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) betrieben und vom Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) unterstützt wird.[2]

[1] *Wiki* (hawaiisch für „schnell") bezeichnet ein besonderes System für Webseiten. Benutzer können diese nicht nur lesen, sondern auch direkt im Webbrowser ändern.
[2] Kortenkamp, U., Fleckenstein, S. (2013): Madipedia – Das Wiki für die Mathematikdidaktik, http://madipedia.de/wiki/Madipedia_-_Das_Wiki_für_die_Mathematikdidaktik (aufgerufen am 9. 5. 2014).

In *Madipedia* werden Informationen zur deutschsprachigen mathematikdidaktischen Landschaft und zu mathematikdidaktischen Inhalten aufgebaut und entwickelt, und zwar durch kooperatives Arbeiten im Internet.

Insbesondere werden auch Informationen bewahrt und gesichert, die sonst nur schwer zugänglich wären – z. B. wurden und werden historische Dissertationen gezielt gesucht und verzeichnet. So entsteht ein wertvolles Archiv, gepaart mit aktuellen Informationen. Derzeit sind über 450 Personen und ebenso viele mathematikdidaktische Dissertationen verzeichnet.

Sie sind gefragt!

Alle in der Mathematikdidaktik aktiven Personen – also gerade die Mitglieder der GDM – können zu *Madipedia* beitragen.

Sind Sie schon eingetragen? Und Ihre Dissertation? Besuchen Sie http://madipedia.de, verwenden Sie das Suchfeld oben rechts und kontrollieren Sie den Eintrag; ist alles richtig und vollständig? Sind die Informationen noch aktuell?

Was können Sie selbst tun?

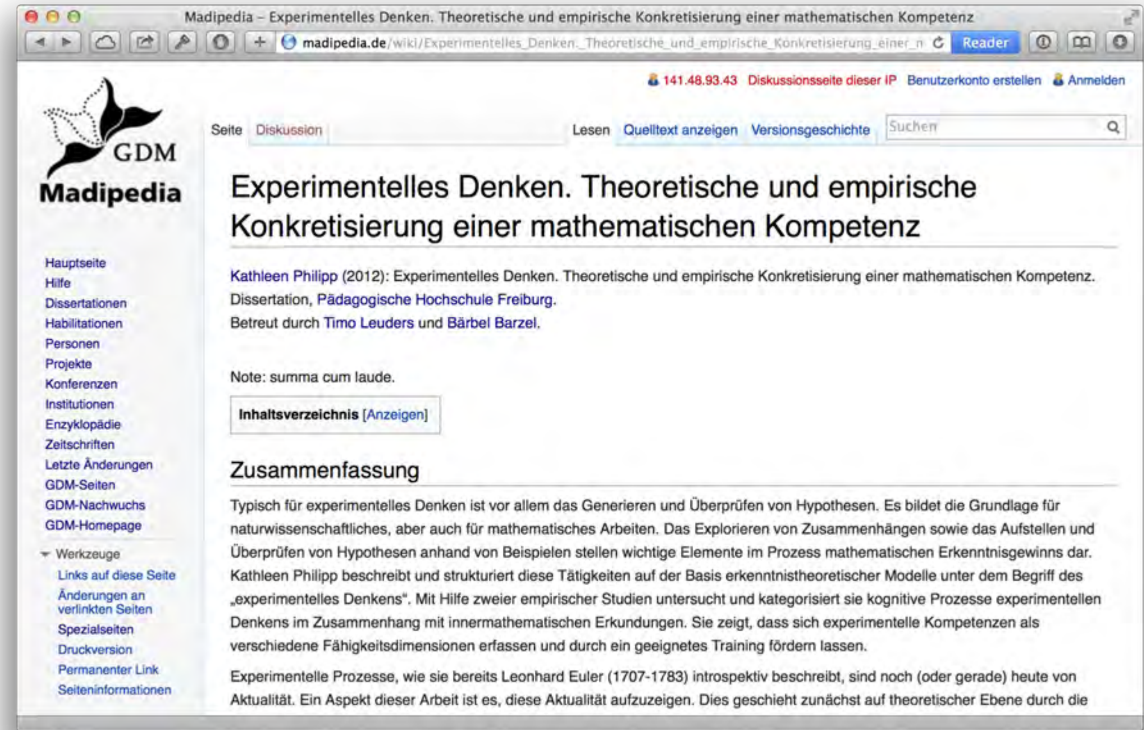
Sie können Fehler leicht selbst korrigieren, Informationen ergänzen oder ganz neue Einträge erstellen wenn Sie angemeldet sind. Die Anmeldung geht schnell und wird auf den Hilfe-Seiten http://madipedia.de/wiki/Hilfe:Inhaltsverzeichnis erklärt.

Und wenn Sie mehr Hilfe benötigen? Dann können Sie sogar telefonisch unter (0345) 55-24614 oder per Mail an helpdesk@madipedia.de persönliche Unterstützung durch das freundliche *Madipedia*-Team bekommen.

Ambitionierte Wiki-Nutzer können noch mehr: Konferenzseiten erstellen, Projektinformationen hinzufügen, Artikel mit Schlagworten versehen, Arbeitsgruppen beschreiben, Enzyklopädie-Einträge verfassen und Vieles mehr. Damit helfen Sie allen an der Mathematikdidaktik interessierten Menschen, Fragen, wie z. B. die in der Einführung, noch schneller zu beantworten – Danke!

In den nächsten Mitteilungen der GDM werden wir wieder berichten: Unter anderem über einen Satzungsvorschlag und die weitere Entwicklung der Enzyklopädie.

Ulrich Kortenkamp, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik, Didaktik der Mathematik, 06099 Halle (Saale)
Email: ulrich.kortenkamp@mathematik.uni-halle.de



Arbeitskreis Empirische Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik (ehemals: Arbeitskreis Vergleichsuntersuchungen)

Soest, 21./22. Februar 2014

Gabriele Kaiser und Timo Leuders

Am 21. und 22. Februar 2014 veranstaltete der Arbeitskreis sein Frühjahrstreffen im Tagungshaus Soest. In vier Vorträgen unter dem Rahmenthema „Videogestützte Forschung in der Mathematikdidaktik" wurden aktuelle Projekte vorgestellt und diskutiert.

Analyse der Testaufgaben aus der Studie TEDS-FU.
Andreas Busse, Sigrid Blömeke, Martina Döhrmann, Gabriele Kaiser, Johannes König, Jessica Benthien, Patricia Klein, Ute Suhl

Die Online-Studie TEDS-FU als Follow-Up (FU) der Studie TEDS-M (Teacher Education Development Study in Mathematics) erweitert die Konzeption von TEDS-M (Blömeke, Kaiser & Lehmann 2010) um situative Aspekte sowie um den Bereich der Erkennung typischer Schülerfehler. TEDS-FU umfasst neben einer Befragung zu Beliefs, Berufszufriedenheit, Schulerfahrungen etc. auch videobasierte Tests zu situativem mathematikdidaktischen und allgemeinpädagogischen Wissen, Tests zu mathematischem, mathematikdidaktischem und allgemeinpädagogischem Wissen in einem digitalen Papier-und-Bleistift- Format sowie einen Test zur Erkennung von Schülerfehlern unter Zeitdruck.

Die Studie TEDS-FU erfasst in einem längsschnittlichen Design diejenigen Lehrerinnen und Lehrer, die sich als Teilnehmende der Vorgängerstudie TEDS-M am Ende Ihres Referendariats befanden und die sich zur Teilnahme an der Folgestudie bereit erklärt hatten. Die Versuchspersonen hatten bei der der Teilnahme an TEDS-FU in der Regel drei bis vier Jahre Berufserfahrung. TEDS-FU wurde strukturgleich sowohl für Lehrkräfte der Primarstufe als auch für solche der Sekundarstufe I durchgeführt. Dabei wurden die einzelnen Testteile der Schulstufe angepasst. In dem vorliegenden Papier werden Testaufgaben ausschließlich von der Sekundarstufenstudie betrachtet.

Die gesamte Erhebung zu TEDS-FU wurde mit Unterstützung des Deutschen Instituts für internationale pädagogische Forschung (DIPF) internetbasiert durchgeführt. Zur Erstellung der digitalen Testumgebung wurde der dort entwickelte CBA ItemBuilder (Rölke 2012) eingesetzt. Im Folgenden werden vier der oben genannten Sekundarstufenteiltests genauer betrachtet. Im Einzelnen handelt es sich um den videobasierten mathematikdidaktischen Test MPCK-V, den videobasierten allgemeinpädagogischen Test GPK-V, den allgemeinpädagogischen Test GPK-PB im digitalen Papier- und-Bleistift-Format sowie den mathematikdidaktischen Test MPCK-PB im digitalen Papier-und-Bleistift-Format.

Die für die Studie TEDS-FU entwickelten Video-Onlinetests zum situativen mathematikdidaktischen und pädagogischen Wissen umfassen drei Videovignetten mit kurzen Unterrichtssequenzen, zu denen jeweils nach dem Ansehen mathematikdidaktische und allgemeinpädagogische Fragen gestellt werden. Die Domänen Mathematikdidaktik und Allgemeinpädagogik werden dabei in den Fragestellungen nicht explizit getrennt, sondern die Anordnung der Fragen orientiert sich an den in den Videovignetten gezeigten Situationen. Die Videovignetten haben eine Dauer von jeweils zwei bis dreieinhalb Minuten und stellen Szenen zu zentralen Themenbereichen des Mathematikunterrichts der Jahrgangsstufen 8 bis 10 wie funktionale Zusammenhänge oder Körperberechnungen dar. Um eine hinreichende Dichte von Ansatzpunkten für angemessene Testaufgaben in den Videovignetten zu erzielen, wurden keine authentischen Unterrichtssituationen, sondern drehbuchgeleitete Inszenierungen mit Jugendlichen verwendet. Es kamen 38 geschlossene Items (22 beim Test GPK-V und 16 beim Test MPCK-V) in Form von Likertskalen (angelehnt an Klieme, Pauli & Reusser 2005) sowie 36 offene Items (jeweils 18 in den beiden Videotests) zum Einsatz. Die Items in ihrer Gesamtheit erfordern Wahrnehmung, Analyse und die Nennung von Handlungsoptionen. Die mathematikdidaktischen Anforderungen beziehen sich u. a. auf die Nennung von Erklärungswegen, auf die fachdidaktische Analyse von Bearbeitungsprozessen sowie auf die Identifikation von Aufgabentypen, mathematischen Kompetenzen und Leitideen. Die allgemeinpädagogischen Anforderungen berühren u. a. die folgenden Bereiche: Classroom Management, pädagogische Einschätzung von Situationen, pädagogische Analyse von Bearbeitungsprozessen sowie Umgang mit Heterogenität.

Bei dem in der Studie TEDS-FU verwendeten Onlinetest zum mathematikdidaktischen Wissen MPCK-PB handelt es sich um eine digitalisierte Fassung eines entsprechenden Papier-und-Bleistift- Tests aus der Vorgängeruntersuchung TEDS-M. Der Test MPCK-PB besteht aus 12 Aufgaben mit insgesamt 28 Items. Im Rahmen der TEDS-FU-Studie standen für den Test 20 Minuten Bearbeitungszeit zur Verfügung.

Beim Test GPK-PB handelt es sich um eine reduzierte und digitalisierte Fassung des allgemeinpädagogischen Papier-und-Bleistift-Tests aus der Vorgängeruntersuchung TEDS-M. Der Test GPKPB besteht aus 13 Aufgaben mit insgesamt 39 Items. Im Rahmen der TEDS-FU-Studie standen auch für den Test 20 Minuten Bearbeitungszeit zur Verfügung.

Für erste Ergebnisse aus dem Projekt siehe u. a.: König, J., Blömeke, S., Klein, P., Suhl, U., Busse, A., & Kaiser, G. (2014). Is teachers' general pedagogical knowledge a premise for noticing and interpreting classroom situations? A video-based assessment approach. Teaching and Teacher Education, 38(2014), 76–88. Weitere Publikationen sind in der Begutachtung.

COACTIV-Video: Eine unterrichtsnahe Erfassung fachdidaktischen Wissens mittels Videovignetten.
Georg Bruckmaier, Stefan Krauss, Dominik Leiss, Werner Blum und Michael Neubrand

Es ist ein aktuelles Forschungsdesiderat der Mathematikdidaktik, fachdidaktisches Wissen unterrichts- und handlungsnäher als in den bestehenden Konzeptionen (u. a. in COACTIV und TEDS) zu erfassen. Im Unterschied zur Erhebung der drei bestehenden Facetten fachdidaktischen Wissens im Rahmen von COACTIV („Erklären und Repräsentieren", „Aufgabenpotential" und „Schülerfehler und -schwierigkeiten") wurde dazu im vorliegenden Fall kein Papier-und-Bleistift-Test, sondern ein computergestütztes und vignettenbasiertes Instrument („COACTIV-Video") eingesetzt.

Die Lehrkräfte sollten dazu im Anschluss an kurze inszenierte Unterrichtsvideos angeben (ohne Zeitbeschränkung), wie sie den Unterricht weitergestalten würden („didaktisch sinnvolle" Weiterführung des Unterrichts). Insgesamt wurden drei Videos zu den Themen „Dreisatz", „Bruchungleichungen" und „Elementare Statistik" eingesetzt. Aus den von den Lehrkräften angegebenen Unterrichtsfortführungen wurde die „situative Unterrichtskompetenz" als Maß für die fachdidaktische Kompetenz der Lehrkräfte bestimmt. Dazu wurden pro Video fünf Dimensionen erhoben und jeweils dreistufig (Codes 0–1–2) kodiert. Die Dimensionen lauten im Einzelnen:

- Dimension 1: Schülerorientierung: Wer wird in den Mittelpunkt der Handlung gestellt – Lehrer (Code 0) oder Schüler (Code 2)?
- Dimension 2: Methodische Orientierung: Wie genau wird das weitere methodische Vorgehen beschrieben (detaillierte Beschreibung: Code 2)?
- Dimension 3: Verständnisorientierung: Welche Kompetenz wird schwerpunktmäßig thematisiert – Kalkül (Code 0) oder Verständnis (Code 2)?
- Dimension 4: Fachliche Präzision Wie genau wird das weitere inhaltliche Vorgehen beschrieben (detaillierte Beschreibung: Code 2)?
- Dimension 5: Ergreifen der didaktischen Chance: Handelt es sich um eine adäquate Intervention, die die spezifische didaktische Chance der gegebenen Situation nutzt (Nutzen der Chance: Code 2)?

Aus den einzelnen fünf Dimensionen wurden für die situative Unterrichtskompetenz (Summenscore über die fünf Dimensionen), die fachübergreifende „methodische Kompetenz" (bestehend aus Dim. 1 und 2) und die „fachspezifische Kompetenz" (Dim. 3, 4 und 5) Summenwerte gebildet.

Es ergaben sich für die situative Unterrichtskompetenz dabei folgende zentrale Ergebnisse:

1. Mit dem videovignettenbasierten Instrument gelang eine reliable Erfassung situativer Unterrichtskompetenz.
2. Es bestätigte sich die postulierte zweidimensionale Struktur situativer Unterrichtskompetenz mit einer fachübergreifenden methodischen Facette und einer fachspezifischen Facette.
3. Zwischen den Schulformen ergaben sich erwartungsgemäß (teilweise deutliche) Unterschiede zugunsten gymnasialer Lehrkräfte (Validierung 1).
4. Mit Drittvariablen wie dem fachdidaktischen Wissen, dem Fachwissen und lerntheoretischen Überzeugungen zeigten sich erwartungskonforme und signifikante Zusammenhänge (Validierung 2).
5. Situative Unterrichtskompetenz erwies sich nicht als signifikanter Prädiktor für die Unterrichtsqualität (mit den Facetten „kognitive Aktivierung", „effektive Klassenführung" und „konstruktive Unterstützung"), jedoch zeigte sich ein signifikanter Einfluss der fachspezifischen Kompetenz (bestehend aus den Dim. 3, 4 und 5) auf die kognitive Aktivierung (prädiktive Validität).

Chancen und Grenzen des Videovignetteneinsatzes zur Erhebung fachspezifischer Kompetenzen von Lehrkräften.

Anke Lindmeier, Imke Knievel, Aiso Heinze

Die fachspezifischen professionellen Kompetenzen von Lehrkräften sind die kontextspezifischen und erlernbaren kognitiven individuellen Dispositionen, die benötigt werden um die Anforderungen des Unterrichtens (Vor-und Nachbereitung sowie Unterricht an sich) zu bewältigen. Ausgehend von dieser Definition greifen bekannte Tests zur Erfassung des Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens zu kurz. Lindmeier (2011) schlägt ein erweitertes dreigliedriges Kompetenzstrukturmodell zur Beschreibung der fachspezifischen professionellen Kompetenzen von Lehrkräften vor, das sich aus dem (1) Basiswissen, der (2) reflexiven und der (3) aktionsbezogenen Kompetenz zusammensetzt. Vor allem zur Erfassung der unterrichtsnahen Konstrukte greifen bekannte Papier-Bleistift Formate zu kurz, da damit nicht die charakterisierenden Anforderungen der Kompetenz implementiert werden können.

In diesem Vortrag wird beispielhaft eine videovignetten-basierte Operationalisierung der aktionsbezogenen Kompetenz für Mathematiklehrkräfte der Sekundar- und Primarstufe wie im Programm vACT vorgeschlagen vorgestellt. Die Ergebnisse ($N = 22 + 85$) bestätigen, dass mit Hilfe der videobasierten Erfassung andere Facetten der fachspezifischen professionellen Kompetenz von Lehrkräften, die über das Basiswissen hinausgehen, erfasst werden können. Allerdings bleiben auch mit diesem Zugang messtheoretische Schwierigkeiten bestehen. Der Beitrag diskutiert zudem auf Grundlage unserer Erfahrungen exemplarisch die Chancen und Grenzen der videobasierten Zugänge.

Analysieren des Umgangs mit Repräsentationen im Mathematikunterricht als Expertisebereich von Mathematiklehrkräften – Video- und textbasierte Erhebungsformen.

Anika Dreher, Marita Friesen, Julia Ollesch, Sebastian Kuntze, Markus Vogel

Vorgestellt werden Forschungsansätze im Rahmen des neu bewilligten Promotionskollegs der Pädagogischen Hochschulen Heidelberg und Ludwigsburg. In zwei Teilprojekten wird der Umgang mit Repräsentationen im Mathematikunterricht untersucht. Dabei stehen diesbezügliche Analysekompetenzen von angehenden und praktizierenden Mathematiklehrkräften im Forschungsfokus. Die Expertise in diesem Bereich soll mit Hilfe videobasierter Vignettentests untersucht werden.

Es kann dabei angeknüpft werden an eine aktuelle Studie zum Analysieren textbasierter Vignetten, die vorgestellt und diskutiert wird. Vor dem Hintergrund der Rolle von Repräsentationswechseln in Spannungsfeld zwischen Lernhilfe und Lernhürde für mathematischen Kompetenzaufbau nimmt diese Studie spezifisches Noticing von Lehrkräften in den Blick. Da das Fokussieren auf bestimmte Geschehnisse im Mathematikunterricht und deren Beurteilung durch die Brille entsprechender Wissenskomponenten und Sichtweisen geschieht, werden außerdem Zusammenhänge von solch spezifischem Noticing mit professionellem Wissen und Sichtweisen der Lehrkräfte untersucht. Das Design der Studie berücksichtigt sowohl angehende als auch praktizierende Lehrkräfte ($N = 67 + 77$), um Einblick in mögliche Unterschiede zwischen Experten und Novizen zu erhalten. Die Ergebnisse weisen auf deutliche Unterschiede zwischen dem spezifischen Noticing der beiden Teilstichproben hin und zeigen außerdem, dass das Erkennen der potentiell hinderlichen Rolle von inhaltlich nicht notwendigen Repräsentationswechseln für das Verständnis von Lernenden sowohl von situierten als auch von globalen Wissenskomponenten und Sichtweisen der Lehrkräfte geprägt sein kann.

Die nächste Sitzung des Arbeitskreises findet am 13./14. November 2014 wieder im Tagungshaus Soest statt. Nähere Informationen und Anmeldung über die Webseite http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreis_Empirische_Bildungsforschung_in_der_Mathematikdidaktik

Gabriele Kaiser, Universität Hamburg, Fakultät EPB, Von-Melle-Park 8, 20146 Hamburg
Email: gabriele.kaiser@uni-hamburg.de
Timo Leuders, Pädagogische Hochschule Freiburg, IMBF, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
Email: leuders@ph-freiburg.de

Arbeitskreis Vernetzungen im Mathematikunterricht

Karlsruhe, 16.–17. Mai 2014

Astrid Brinkmann und Thomas Borys

Die 6. Tagung des Arbeitskreises „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ fand an der Pädagogischen Hochschule in Karlsruhe am 16. und 17. Mai 2014 statt.

Wie in den vergangenen Jahren auch, gliederte sich das sehr reichhaltige Veranstaltungsprogramm in einen Lehrerfortbildungstag und einen arbeitskreisinternen Teil.

Am ersten Tag des Veranstaltungsprogramms fand ein Lehrerfortbildungsnachmittag statt. Neben Lehrer/innen konnten wir auch Mitstreiter/in der Didaktik der Mathematik vom Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Karlsruhe, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Kollegen der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe und viele Studierende begrüßen. Der zweite Tag war arbeitskreisinternen Themen gewidmet.

Die Vorträge mit Abstracts des Tagungsprogramms waren:

Freitag, den 16. Mai (im Rahmen der Lehrerfortbildung)

Michael Bürker, Tübingen: Modellierung schrittstabiler Prozesse

Im Vortrag soll die Modellierung schrittstabiler Prozesse im Mittelpunkt stehen. Dies sind Prozesse, die von linearen Funktionen $x \to mx + b$ oder additiv erweiterten Exponentialfunktionen des Typs $x \to ca^x + d$ beschrieben werden. Wir werden zeigen, dass solche Funktionen besonders gute Modelliereigenschaften besitzen. Z. B. werden wir zeigen, wie man auf sehr elementare Weise ohne Benutzung von Differentialrechnung mit Schülern der Mittelstufe Spar- und Tilgungsprozesse sowie Prozesse modellieren kann, bei denen nicht die momentane, sondern die diskrete Änderungsrate eine entscheidende Rolle spielt. Diese Modellierungen werden dabei mit geometrischen Modellen wie dem so genannten Drei-Säulen-Modell vernetzt.

Matthias Gercken (Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Karlsruhe): Untersuchungen zur Bevölkerungsentwicklung mit dem Leslie-Modell

Im Mai 2013 wurden die neuen statistischen amtlichen Einwohnerzahlen Baden-Württembergs, seiner Städte und Gemeinden auf Basis des Zensus 2011 bekannt gegeben. Der nächste Zensus wird im Jahr 2021 stattfinden, bis dahin gelten diese Zahlen zur Fortschreibung der amtlichen Einwohnerzahlen. Da die Einwohnerzahl in Deutschland für Verwaltung und Politik von großer Bedeutung ist, besteht nicht nur Interesse an der gegenwärtigen Einwohnerzahl, sondern auch an Prognosen für die Zukunft.

Im Vortrag wird vorgestellt, wie im Rahmen eines Projekts im Unterricht nach Einführung von Matrizen und dem Leslie-Modell Bevölkerungsprognosen für die Stadt Karlsruhe entwickelt wurden. Von einfachen zu komplexen Modellen wurden Szenarien entwickelt, die einzelne Stadtteile beleuchten und sogar Demographen der städtischen Verwaltung zum Staunen brachten. Ein Ausflug in die Welt von 107×107-Matrizen, der nicht nur Schülerinnen und Schüler fasziniert hat.

Astrid Brinkmann, Münster; Thomas Borys, Karlsruhe: Mit Maps vernetzend Lernen und Lehren

Graphische Darstellungen von Vernetzungen wie MindMaps, ConceptMaps und hiervon abgewandelte Map-Formen eignen sich in besonderer Weise zum strukturierten Lehren und Lernen im Mathematikunterricht. Lässt man Schüler/innen auf klassische Weise Maps zu einem Thema erstellen, können individuell sehr unterschiedliche Darstellungen entstehen. In Unterrichtsprozessen kann es aber der Lehrperson darauf ankommen, dass ganz bestimmte Inhalte mit ihren Vernetzungen betrachtet werden sollen. Für solch eine inhaltliche Eingrenzung stellen wir verschiedene methodische Vorgehensweisen vor und geben Beispiele für den Unterricht an. Des Weiteren eignen sich einige der hier vorgestellten methodischen Vorgehensweisen auch dazu, dass die Schüler/innen in das Arbeiten mit Maps im Mathematikunterricht eingeführt werden.

Samstag, den 17. Mai

Matthias Brandl, Passau: Mathematik und Literatur: Narrative Didaktik als Vernetzungsinstrument

Lerninhalte und ihre zugehörigen Lehr-Lern-Prozesse fokussieren häufig allein auf den inhaltlich-analytischen Aspekt. Narrative Didaktik steht dem logisch-diskursiven Prozess gegenüber und ergänzt ihn auf synergetische Art und Weise, indem sie auch den affektiven Anteil des Lernprozesses miteinbezieht. Literaturtheoretische Techniken sorgen dabei für eine Vernetzung abstrakter mathematischer Lerninhalte mit literarischen Elementen. Der Vortrag geht auf die Hintergründe einer narrativen Didaktik ein und illustriert diese an Beispielen.

Mutfried Hartmann, Karlsruhe: Variieren und Analogisieren als Werkzeuge eines vernetzenden Mathematikunterrichts
Vernetzen von Inhalten kann einerseits in der Rückschau eines bereits erarbeiteten Stoffgebiets geschehen: Zusammenhänge und gemeinsame Strukturen werden identifiziert, schaffen Übersicht und erleichtern effektives Memorieren. Andererseits kann Vernetzen aber auch bedeuten, Wissensnetze aktiv zu erweitern, indem bewusst immer wieder weitere Maschen nach demselben Muster geknüpft werden. Dieser Aspekt des Vernetzens wird oft unterschätzt. Variieren und Analogisieren sind bei diesem Vorgehen zentrale Techniken. Durch diese werden automatisch Inhalte generiert, die nicht nur ähnliche Strukturen wie bereits bekannte Inhalte aufweisen. Indem Neues an Bekanntes angeknüpft wird, gewinnt bisher Erarbeitetes in der subjektiven Wahrnehmung des Lerners eine höhere Bedeutung. Nicht zuletzt wird dabei zusätzlich kreatives Potential der Lernenden freigesetzt.

Ana Donevska Todorova, Berlin: Connecting Multiple Modes of Description and Thinking of the Concept Dot Product of Vectors in a Dynamic Geometry Environment
There exist many different connections in mathematics education and they can be analyzed from a wide spectrum of perspectives. This article discusses connections between three modes of description and thinking (Hillel, 2000; Sierpinska, 2000) of concepts in linear algebra and analytic geometry. The concept of dot product of vectors is in the focus of the analysis. The aim is investigation of how do students recognize, link between, translate one into another and manipulate multiple modes of description and thinking of dot product of vectors in a designed dynamic geometry environment at upper secondary education. It seems that utilization of the three modes: geometric, arithmetic and structural, brings the abstraction of the formal linear algebra theory a bit closer to the upper high school students in an adapted and 'consumable' form for this level of education.

Weitere Tagungsordnungspunkte betrafen Informelles bzw. Organisatorisches:

Planung der nächsten Tagungen

Michael Bürker wird im Herbst 2014 die 7. Tagung des Arbeitskreises in Tübingen organisieren. Diese interne Tagung wird voraussichtlich am 8. Oktober 2014 stattfinden.

Matthias Brandl übernimmt die Organisation der 8. Tagung des Arbeitskreises, die voraussichtlich im Frühjahr 2015 an der Universität Passau stattfinden wird. Bei dieser Tagung soll wieder ein Lehrerfortbildungsprogramm angeboten werden. Nähere Infos sind zu finden unter www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html.

Schriftenreihe „Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht" des Arbeitskreises, herausgegeben von Astrid Brinkmann

2013 sind Band 3 (Herausgeber: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Michael Bürker) und der Materialband zu Band 1–3 (Herausgeber: Matthias Brandl, Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß) bei Aulis erschienen, siehe auch www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html.

Band 4 ist in Arbeit und wird von Thomas Borys, Matthias Brandl und Astrid Brinkmann herausgegeben. In diesem Band sollen zu den Artikeln auch Schüler-Arbeitsblätter und Kopiervorlagen direkt mit veröffentlicht werden.

Autoren, die einen Artikel für die Schriftenreihe anbieten möchten, wenden sich bitte an Astrid Brinkmann: astrid.brinkmann@math-edu.de. Informationen und Formatvorlage findet man unter: www.math-edu.de/Vernetzungen/Schriftenreihe.html

Das gesamte Tagungsprogramm und weitere Informationen zu den Tagungen des Arbeitskreises können im Internet unter der Adresse www.math-edu.de/Vernetzungen/Tagungen.html abgerufen werden. Allgemeine Informationen zum Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht" findet man unter www.math-edu.de/Vernetzungen.html. Interessierte sind als weitere Mitglieder herzlich willkommen. Bitte wenden Sie sich ggf. an die Sprecherin des Arbeitskreises Frau Astrid Brinkmann.

Astrid Brinkmann, Universität Münster, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Fliednerstraße 21, 48149 Münster
Email: astrid.brinkmann@math-edu.de

Thomas Borys, Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Bismarckstraße 10, 76133 Karlsruhe
Email: borys@ph-karlsruhe.de

Arbeitskreis Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in Österreich

Wiener Neustadt, 21.–22. November 2013, und Koblenz, 10. März

Edith Schneider

Die Herbsttagung 2013 des AK „Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in Österreich" fand vom 21.–22. November 2013 in Wiener Neustadt statt. Es nahmen ca. 30 Kolleginnen und Kollegen von verschiedenen österreichischen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen teil. Wie bereits bei den beiden vorhergehenden Herbsttagungen war auch 2013 erfreulicher Weise wieder eine gute Durchmischung von Universitäten und Pädagogischen Hochschulen gegeben, sodass diesbezüglich von einer anhaltenden Entwicklung ausgegangen werden kann.

Im Rahmen der GDM-Tagung 2014 in Koblenz fand am 10. März ein AK-Treffen statt.

Die Herbsttagung 2014 ist für September/Oktober 2014 vorgesehen.

Der erste Teil der Herbsttagung des AK sowie das jährliche AK-Treffen im Rahmen der GDM-Tagung war der Tradition folgend Berichten aus für die österreichische Mathematikdidaktik relevanten Kommissionen sowie dem Austausch über aktuelle institutionelle Entwicklungen, Besonderheiten, Probleme an österreichischen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sowie Kooperationen gewidmet. Hier ein kurzer Einblick in einige ausgewählte Berichtspunkte:

Von Seiten des AK wurde eine *Stellungnahme zum Gesetzesentwurf für die Neuorganisation der LehrerInnenbildung* („PädagogInnenbildung NEU") in Österreich abgegeben. Dabei wurden insbesondere zwei Punkte angesprochen: Zum einen wurde eine der Eigenständigkeit der Fachdidaktiken entsprechende explizite Darstellung und ausreichende Verankerung der Fachdidaktiken im Verhältnis zu den Fachwissenschaften und Erziehungswissenschaften für das Sekundarstufenlehramt eingefordert, zum anderen eine angemessene Einbeziehung schulfachbezogener wie auch fachwissenschaftlicher Ausbildungsinhalte im Lehramtsstudium für den Primar- und Elementarstufenbereich. In beiden Lehrämtern fehlte im Gesetzesentwurf eine entsprechend klare und deutliche explizite Festlegung.

Die relativ *hohe Anzahl an Studienanfänger(inne)n für das Lehramt Mathematik* sowohl an den Universitäten (Gymnasiales Lehramt) wie auch Pädagogischen Hochschulen (Lehramt für Hauptschulen und Neue Mittelschulen, Grundschullehramt) ist nach wie vor anhaltend. Zur Zeit gibt es in Österreich eine große Nachfrage an Mathematiklehrer(inne)n, insbesondere im Bereich der Sekundarstufen, vor allem bedingt durch eine hohe Anzahl an Pensionierungen. Es ist zu erwarten, dass diese Situation noch einige Jahre anhält. Dies führt zur (problematischen) Situation, dass an manchen Standorten Lehramtsstudierende bereits vor Abschluss ihres Studiums von Schulen eingestellt werden. Die Situation des Mangels an Mathematiklehrer(inne)n könnte durch die Umorganisation der Lehrer(innen)bildung und den damit verbundenen Änderungen (siehe unten) zusätzlich verschärft werden.

Das Besetzungsverfahren für die in Österreich *erste Professur für Didaktik der Mathematik in der Grundschule* konnte zu einem positiven Abschluss gebracht werden. Mit 1. März 2014 wurde Herr Prof. Michael Gaidoschik an die Alpen-Adria-Universität Klagenfurt berufen. Es handelt sich dabei um eine Verbundprofessur mit der Pädagogischen Hochschule Kärnten, da die Ausbildung von Grundschullehrer(inne)n in Österreich ausschließlich an den Pädagogischen Hochschulen angesiedelt ist.

Der jährlich in Klagenfurt stattfindende *Fachdidaktiktag Mathematik* fand 2013 am 24. September statt. Das Programm umfasste Vorträge von R. Fischer zu „PädagogInnenbildung NEU – Die Reform der LehrerInnenbildung in Österreich", von B. Thaller zu „Wie gut oder schlecht sind unsere Studienanfänger wirklich? Eine Lernstandserhebung an der Schnittstelle Schule – Universität/Hochschule" und von E. Schneider zu „Ergebnisse der Standards M8 Testung aus fachdidaktischer Sicht".

Im Rahmen der *Tagung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* wurde auch 2013 wieder ein LehrerInnentag veranstaltet. Die Veranstaltung fand in Innsbruck statt. Die 2012 in Österreich neu gegründete *Österreichische Gesellschaft für Fachdidaktik (ÖGFD)* veranstaltete am 23. September ein Symposium zu „Fachdidaktik zwischen Forschung, Lehre und Bildungspolitik" mit anschließender Mitgliederversammlung. Die GDM ist Gründungsmitglied der ÖGFD und wird durch den AK „Mathematikdidaktik und Mathematikunterricht in Österreich" vertreten.

Über erste Erfahrungen mit der Umsetzung des neuen *Dienstrechts für Mitarbeiter(innen) der Pädago-*

gischen Hochschulen wird berichtet. Es zeigt sich, dass die Umsetzung des Dienstrechts an den einzelnen PHs sehr unterschiedlich gehandhabt wird, insbesondere sind die Interpretationen der Stellenbeschreibungen von PH zu PH sehr unterschiedlich.

Im zweiten Teil der Herbsttagung wurden aktuelle, die österreichische Mathematikdidaktik (mit)betreffende Entwicklungen und Themen präsentiert und diskutiert:

LehrerInnenbildung Neu

2013 wurden die Richtlinien für eine Lehrer(innen)bildung NEU in Österreich gesetzlich verankert. Es wird künftig zwei „große" Lehramtsstudien geben: ein Lehramststudium für den (Elementar- und/oder) Primarstufenbereich und ein Lehramtsstudium für (den gesamten) Sekundarstufenbereich. Die LA-Ausbildung setzt sich zusammen aus einem 8-semestrigen Bachelor-Studium und einem 1–2-jährigen Master-Studium sowie einer Induktionsphase. (Die Umsetzung letzterer ist abhängig von den Rahmenbedingungen der Novellierung des Lehrer(innen)dienstrechts und damit von der jeweils zuständigen Schulbehörde). Träger der Lehrer(innen)bildung neu sollen (regionale) Verbünde von Universitäten und Pädagogischen Hochschulen sein, die gemeinsam die Lehrer(innen)bildung anbieten; welche Institution dabei die Leadership wofür übernimmt, ist in Entwicklungsprozessen auszuhandeln. Ebenso vorgesehen sind Aufnahmeverfahren für beide Lehramtsstudien, die von den jeweiligen verbünden/Institutionen entwickelt werden sollen. Die Vorgaben der Lehrer(innen)bildung Neu sollen bis spätestens 2016 österreichweit organisatorisch und inhaltlich/curricular umgesetzt werden.

Zur Begleitung der Umsetzung der gesetzlichen Vorgaben wurde vom Wissenschaftsministerium und vom Unterrichtsministerium gemeinsam ein 6-köpfiger Qualitätssicherungsrat (QSR) eingesetzt. Andreas Schnider (Religionspädagoge) ist Vorsitzender, Roland Fischer (Mathematikdidaktiker) ist Mitglied dieses QSR.

Andreas Schnider, der im QSR auch einer der zwei für den Primarstufenbereich zuständigen Mitglieder ist, und Roland Fischer, der einer der zwei für den Bereich Fachdidaktik Zuständigen ist, waren Gäste auf der Herbsttagung 2013. R. Fischer und A. Schnider erläutern in einem kurzen Input die Motive und Elemente der Lehrer(innen)bildung Neu und Veränderungen, die sich in der LB für den Primar- und Sekundarstufenbereich ergeben und bitten um Unterstützung des GDM-AK bei der Prüfung bzw. Beobachtung der wissenschaftlichen und professionsorientierten Voraussetzungen im Bereich der Mathematikdidaktik. Wichtig ist dem QSR dabei insbesondere eine Förderung von Qualitätsdiskussionen an den einzelnen Institutionen bzw. in den einzelnen Verbünden; als Voraussetzung für die Durchführung einer qualitätsvollen Lehrer(innen)ausbildung im jeweiligen Bereich/Fach muss aus Sicht des QSR eine Institution im jeweiligen Bereich/Fach eine entsprechend wissenschafts- und professionsorientierte Arbeitseinheit haben (mindestens drei wissenschaftlich arbeitende Personen, davon mindestens eine Person habilitiert und mindestens eine Person promoviert).

Es werden von R. Fischer und A. Schnider auch Tabellen präsentiert, die im Sekundarstufen- und im Primarstufenbereich die Situation der Fachdidaktiken an den österreichischen Universitäten und Pädagogischen Hochschulen nach Fächern gegliedert darstellen. Die vorliegenden Zahlen und die jeweils zugrundeliegenden Kriterien und die Informationsbasis werden diskutiert und z. T. deutlich in Frage gestellt. Es wird vereinbart, die Daten in die jeweiligen Institutionen zu tragen und dort hinsichtlich der Korrektheit zu reflektieren.

Der QSR wird die von den einzelnen Verbünden oder Einzelinstitutionen entwickelten Curricula getrennt nach Fächern bzw. Bildungsbereichen einer Begutachtung durch (ausländische) Gutachter(innen) zu unterziehen.

An die Präsentationen von A. Schnider und R. Fischer schließt auf der Herbsttagung eine angeregte und zum Teil kontroversielle Diskussion an sowie ein Austausch unter den Teilnehmer(inne)n über den Stand der Diskussionen bzw. Entwicklungen zur Lehrer(innen)bildung Neu an den einzelnen Institutionen. Dies dient der gegenseitigen Information und Angleichung der Informationsstände, da die Positionen wie auch der Entwicklungsstand hinsichtlich neuer Curricula innerhalb Österreichs sehr unterschiedlich sind. Ebenso heterogen sind die Entwicklungen bzgl. des Zusammenschlusses von Institutionen in Entwicklungsverbünden und die Positionen bzgl. deren Sinnhaftigkeit.

Am AK-Treffen im März wurde vereinbart auf der Herbsttagung 2014 einen thematischen Schwerpunkt auf die Präsentation und Diskussion von einzelnen/ausgewählten bis dorthin entwickelten Curricula für das Fach Mathematik zu legen.

Projekt „Lernstandserhebung an der Schnittstelle Schule – Universität/Hochschule".

Auf Initiative von B. Thaller hat sich im AK zu o. g. Thema eine Projektgruppe mit Vertreter(inne)n von Universitäten und Pädagogischen Hochschulen (M. Burtscher, Ch. Juen-Kretschmar, K.-J. Fuchs, W. Peschek, J. Ranz, S. Reindl, E. Schneider, K. Singer, B. Thaller) gebildet. Es wurden in einem ersten Schritt ein Testheft und ein Fragebogen entwickelt, die genauere Kenntnis bzgl. des Ausgangsniveaus und -einstellungen von Studienanfänger(innen) des LA-Studiums Mathematik (Gymnasiales LA wie auch LA für Hauptschule/neue Mittelschule sowie das Grundschullehramt) ermöglichen sollen. Testheft und Fragebogen wurden zu Beginn des WS 2013/14 an einer Reihe von Universitäten und Pädagogischen Hochschulen eingesetzt. Die Ergebnisse wurden zunächst AK intern präsentiert. Über die weitere Vorgehensweise wird innerhalb der Projektgruppe diskutiert.

Technologieeinsatz bei der kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung
Ab 2018 ist in Österreich ein verpflichtender Einsatz von Technologie im Rahmen der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung im Fach Mathematik („Zentralmatura“) vorgesehen. Im AK wird über eine Initiative, „KOMMT – Kompetenzorientierter Mathematikunterricht mit Technologien“, die den Einsatz von Technologien im Mathematikunterricht in Form von Lehrer(innen)fortbildungsveranstaltungen unterstützen soll, berichtet und diskutiert. Insbesondere werden im AK auch Probleme – vor allem im organisatorischen Bereich –, die sich mit der verpflichtenden Verwendung von Technologie bei der Zentralmatura ab 2018 ergeben, besprochen, auch die Frage der Verwendung welcher Technologie und der Sinnhaftigkeit verbindlicher Vorgaben bzgl. des zu verwendeten Produkts von Seiten des Unterrichtsministeriums wird andiskutiert. Hier ist und wird insbesondere die Schulpraxis gefordert sein.

Edith Schneider, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Institut für Didaktik der Mathematik, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich
Email: edith.schneider@aau.at

Jahrestagung der GDM in Koblenz

Ein Rückblick auf die Jahrestagung 2014 in Koblenz
Engelbert Niehaus, Renate Rasch, Jürgen Roth, Hans-Stefan Siller, Wolfgang Zillmer

Die diesjährige Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik fand am Campus Koblenz der Universität Koblenz-Landau, vom 10. bis 14. 3. 2014 statt. Durch die Zusammenarbeit der beiden Campi Koblenz und Landau wurde es möglich die Konferenz in Selbstorganisation durchzuführen. Zur positiven Stimmung während der Tagung hat insbesondere auch der strahlende Sonnenschein während der gesamten Woche beigetragen.

Uns als Tagungsleitung war es ein besonderes Anliegen eine Tagung auf dem aktuellen Stand der Konferenztechnik in einer ansprechenden Umgebung zu gestalten, in der nicht nur der wissenschaftliche Disput, sondern auch ein intensiver persönlicher Austausch möglich ist.

Insbesondere die Einführung des Konferenzmanagementsystems *ConfTool*, das an die Struktur der GDM-Jahrestagungen angepasst wurde, ermöglicht eine große Kontinuität, über die nächsten Tagungen hinweg. So können sich in Zukunft bereits registrierte Benutzer über ein vertrautes System zu den Jahrestagungen anmelden, Beiträge hochladen und vieles mehr. Darüber hinaus lieferte die mobile App *Conference4me* einen schnellen und komfortablen Zugriff auf das gesamte Tagungsprogramm in *ConfTool* und die Möglichkeit der Zusammenstellung eines individuellen Vortragsprogramms. Aktuelle Ankündigungen konnten in Koblenz über den Twitter-Kanal der GDM-Tagung, sowie die Tagungs-Homepage jederzeit abgerufen werden. Vortragsverlegungen und Vortragsausfälle wurden zusätzlich auf Info-Bildschirmen am gesamten Campus eingeblendet.

Neben den technischen Innovationen gab es bei der Jahrestagung 2014 auch eine bedeutende Neuerung hinsichtlich des inhaltlichen Konzepts. Der *Tag der Nachwuchsförderung* wurde in das Programm der GDM-Jahrestagung aufgenommen. Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler konnten in Form eines 15-

minütigen Vortrags Ideen zu einem Dissertationsprojekt vorstellen, das sich noch in den Anfängen befindet. An die Präsentation schloss sich jeweils eine 20-minütige Diskussion an, die von zwei erfahrenen Chairs moderiert wurde. In dem für den Tag der Nachwuchsförderung vorgesehenen Zeitfenster fanden ausschließlich Vorträge des wissenschaftlichen Nachwuchses statt. Die von der GDM-Nachwuchsvertretung durchgeführte Evaluation dieses Tags lässt darauf schließen, dass dieser Tag von der Zielgruppe durchaus positiv erlebt wurde. Wir hoffen damit auch für zukünftige GDM-Jahrestagungen eine inhaltliche Anregung gegeben zu haben, die weitergeführt wird.

Wir möchten uns an dieser Stelle noch einmal bei den Teams der Vorgängertagungen in Weingarten und Münster für die wichtigen Informationen sowie bei den Sponsoren, die die diesjährige GDM-Tagung finanziell und materiell unterstützt und so zum Gelingen der diesjährigen Tagung beigetragen haben, bedanken. Herzlichen Dank auch an all jene, die im Anschluss an die Jahrestagung 2014 und bereits während der Tagungswoche, viele positive Rückmeldungen und Ermunterungen geäußert haben.

Der „Tag der Nachwuchsförderung" auf der Jahrestagung 2014 – ein Modell für die Zukunft!?

Nachwuchsvertretung der GDM

Die Nachwuchsvertretung der GDM hat es sich zur Aufgabe gemacht, Angebote für Nachwuchswissenschaftlerinnen und Nachwuchswissenschaftler anzubieten und so zur Förderung des Nachwuchses beizutragen. Aufgrund der großen Nachfrage wurden bei der diesjährigen Jahrestagung in Koblenz neben vielfältigen bewährten Angeboten und Aktivitäten (wie der Expert/innensprechstunde, dem Nachwuchstag am Sonntagnachmittag und Montagvormittag sowie dem Kneipenabend) eine Reihe von neuen Angeboten geschaffen, wie ein Postdoc-Workshop oder eine Informationsveranstaltung zum Publizieren der Dissertation. Diese Veranstaltungen wurden von den Mitgliedern der Nachwuchsvertretung organisiert und von Expertinnen und Experten (Prof. Dr. Stephan Hußmann für den Postdoc-Workshop bzw. Verlagsmitarbeiterinnen) gestaltet.

Neben diesem Angebot haben die lokalen Organisatoren auf der diesjährigen Jahrestagung den *Tag der Nachwuchsförderung* eingeführt. Der Tag der Nachwuchsförderung ist ein weiteres Angebot, dass darauf abzielt, den wissenschaftlichen Nachwuchs zu unterstützen. Im Rahmen dieses Beitrages loten wir aus, inwiefern die besondere Strukturierung des Tags der Nachwuchsförderung den Bedürfnissen des Nachwuchses entgegen kommt und an welchen Stellen wir Optimierungspotential sehen. Als Nachwuchsvertretung haben wir eine Evaluation des Tages der Nachwuchsförderung aus Sicht von Vortragenden und Zuhörenden durchgeführt, deren Ergebnisse wir hier vorstellen.

Tag der Nachwuchsförderung als neues Format

Die Intention der lokalen Organisatoren der Universität Koblenz-Landau war es, mit dem Tag der Nachwuchsförderung einen neuen Raum für Doktorandinnen und Doktoranden zu schaffen, in dem – ähnlich zu den Doktorandenkolloquien der GDM – Expertinnen und Experten Rückmeldungen zu Promotionsprojekten geben sollen, die sich noch in den Anfängen befinden. Dazu wurden den Slots Chairs zugeordnet, die eine Moderation der Slots übernehmen sollten. Bei diesen Nachwuchsslots sollte die Vortragszeit im Unterschied zu normalen Slots nur 15 Minuten, die Diskussionszeit dafür 20 Minuten betragen, um eine etwas ausführlichere Diskussion zu ermöglichen. Eine Zuordnung zu diesem Format wurde von den Teilnehmenden bei der Anmeldung selbst vorgenommen. Insgesamt haben am Tag der Nachwuchsförderung laut Programmheft 30 Vorträge in zwei Zeitslots stattgefunden.

Als Nachwuchsvertretung betrachten wir die Einführung des Tags der Nachwuchsförderung auch als einen Beitrag zu einer grundsätzlichen Diskussion um Struktur und Durchführungsmodi der Jahrestagung an sich. Bei einer derartigen Diskussion werden häufig die steigende Anzahl der Vorträge und die damit verbundene Auslastung von Raum- und Zeitkapazitäten sowie die frühe Präsentation neubegonnener Dissertationsprojekte zum Teil kontrovers gesehen. Die Beurteilung einer solchen Neugestaltung des Tagungsmodus kann aus unterschiedlichen Perspektiven jeweils sehr unterschiedlich ausfallen je nachdem, ob aus organisatorischer Sicht von Seiten der Tagungsleitung, aus inhaltlicher Sicht von Seiten des Nachwuchses oder aus systematischer Sicht mit Blick auf die grundsätzliche strukturelle Ausrichtung der Tagung argumentiert wird.

Evaluation des Tags der Nachwuchsförderung

Um den Tag der Nachwuchsförderung zu evaluieren, hat die Nachwuchsvertretung Fragebögen für Vortragende und Zuhörende konzipiert.

Insgesamt haben *23 Vortragende die Fragebögen* zur Einschätzung des Tages der Nachwuchsförderung abgegeben. Der eingesetzte Fragebogen bestand aus einer Abfrage über die Motivation, sich für einen Slot des Tages der Nachwuchsförderung anzumelden sowie diverser Wahrnehmungen des eigenen Vortragsslots, z. B. der Konstruktivität der Diskussion. Insgesamt hatten die meisten der vortragenden Doktorandinnen und Doktoranden ihr Dissertationsprojekt in den Jahren 2012 (acht Personen) und 2013 (neun Personen) begonnen. Zwei Personen gaben an, seit dem Jahr 2011 in ihrem Projekt zu arbeiten. Zu vier Personen liegt keine eindeutige Angabe vor. Eine Person war zum Zeitpunkt des Vortrags promoviert und stellte ein neues Projekt vor.

Die *Fragebögen für das Auditorium* wurden bei jedem Vortrag auf dem Tag der Nachwuchsförderung über die Chairs durch die Tagungsleitung verteilt. An dieser Stelle möchten wir allen Beteiligten danken, die diese Evaluation möglich gemacht haben. Entsprechend konnten Personen, die mehrere dieser Slots besucht haben, mehrere Fragebögen ausfüllen. Insgesamt sind 429 Fragebögen aus dem Auditorium in die Auswertung eingeflossen.

Neben den Fragebögen wurden von den Mitgliedern der Nachwuchsvertretung einige Vorträge anhand eines Beobachtungsbogens aus Zuhörersicht evaluiert.

Ausgewählte Evaluationsergebnisse

Perspektive der Vortragenden

Tabelle 1 fasst die Ergebnisse der Frage nach der Motivation der Vortragenden zusammen, einen Vortrag zum Tag der Nachwuchsförderung anzumelden. Die Antworten waren vorgegeben (ein offenes Feld wurde nicht genutzt), Mehrfachnennungen waren möglich. Die Hauptmotivation scheint demnach in der Diskussion mit Fachpublikum zu bestehen, wobei nicht zu rekonstruieren ist, ob und inwiefern sich diese Vortragenden andere Rückmeldungen als bei normalen Vorträgen erhofften.

In Abbildung 1 sind die Ergebnisse zur Wahrnehmung des eigenen Vortragsslots zusammengefasst. Die Frage zum Zeitkontingent fällt vergleichsweise negativ aus: So halten 39 % (9 von 23 Personen) der Befragten die Länge der Vortragszeit von 15 Minuten für (eher) nicht ausreichend. Die Rückmeldequalität, die Besucheranzahl und die Atmosphäre wurden von der Mehrheit der Referentinnen und Referenten positiv eingeschätzt. Die sehr positiven Wahrnehmungen führten vermutlich auch zur Zustimmung der Frage, ob dieses Format auf der Jahrestagung 2015 in Basel erneut angeboten werden soll. Insgesamt scheinen die Vortragenden mit der Konzeption und Durchführung des Tages zufrieden zu sein.

Perspektive des Auditoriums

Es gab insgesamt eine relativ große Beteiligung der Zuhörerinnen und Zuhörer an der Evaluation (durchschnittlich etwa 14 ausgefüllte Bögen pro Vortrag). In Summe konnten 429 Fragebögen durch die tatkräftige Unterstützung der Mitglieder der GDM in die Evaluation einfließen und ein relativ aussagekräftiges Bild nachzeichnen.

In den Ergebnissen zeigt sich, dass das Zeitkontingent für die Vorträge auch vom Auditorium vergleichsweise schlecht eingeschätzt wird (siehe Abbildung 2). Auf 17,5 % der Fragebögen wurde die Vortragszeit von 15 Minuten als eher nicht oder nicht ausreichend für einen Einblick ins Forschungsprojekt eingeschätzt. Die Qualität der Vorträge wurde von 11 % eher negativ bewertet; allerdings fehlen bei diesen Angaben Vergleichswerte zu normalen Vorträgen. Alle weiteren Einschätzungen fielen genauso positiv aus wie die Einschätzungen der Vortragenden. Die positive Wahrnehmung spiegelt sich auch im Wunsch einer Wiederholung des Konzepts wieder.

Die Ergebnisse zeigen insgesamt eine große Zufriedenheit des Auditoriums mit dem Tag der Nachwuchsförderung. Hervorzuheben ist auch hier die Frage nach der ausreichenden Länge der Vortragszeit.

Ausblicke und Einschätzungen aus Sicht der Nachwuchsvertretung

Die Nachwuchsvertretung ist sich natürlich darüber bewusst, dass eine solche Evaluation keine abschließenden Aussagen über Qualität, Durchführbarkeit und Innovationspotential des Tages der Nachwuchsförderung im Allgemeinen zulässt. Gleichzeitig ermöglicht die Evaluation einige wichtige Einblicke in Rückmeldungen und Akzeptanz sowohl aus Sicht des Auditoriums als auch aus Sicht der Vortragenden.

Tabelle 1. Erhebung der Motivation, am Tag der Nachwuchsförderung vorzutragen

Warum hast Du Dich dazu entschlossen, Deinen Vortrag im Rahmen des Tages der Nachwuchsförderung zu halten?	
Ich habe mir Rückmeldung von erfahrenen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern gewünscht.	21
Ich habe noch keine Ergebnisse, die ich vorstellen kann.	8
Ich wollte in einem „geschützten Rahmen“ vortragen.	3
Ich wollte einen kürzeren Vortrag halten.	3

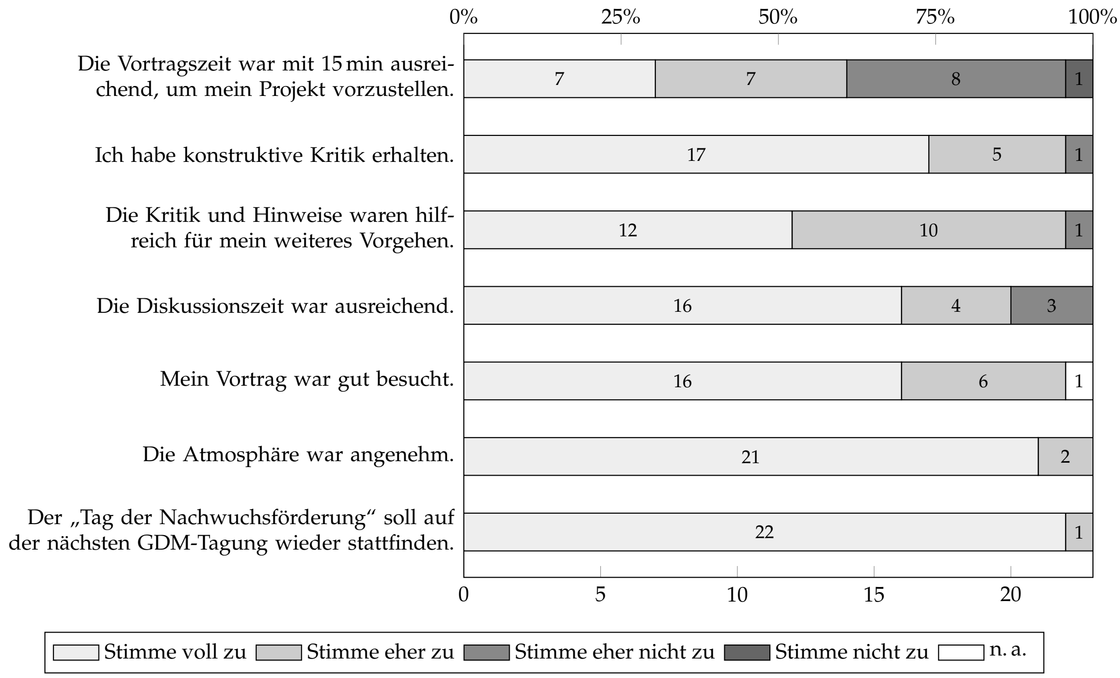


Abbildung 1. Allgemeine Einschätzungen der Vortragenden ($N = 23$) zum eigenen Vortrag und dessen organisatorischer Einbettung auf dem Tag der Nachwuchsförderung

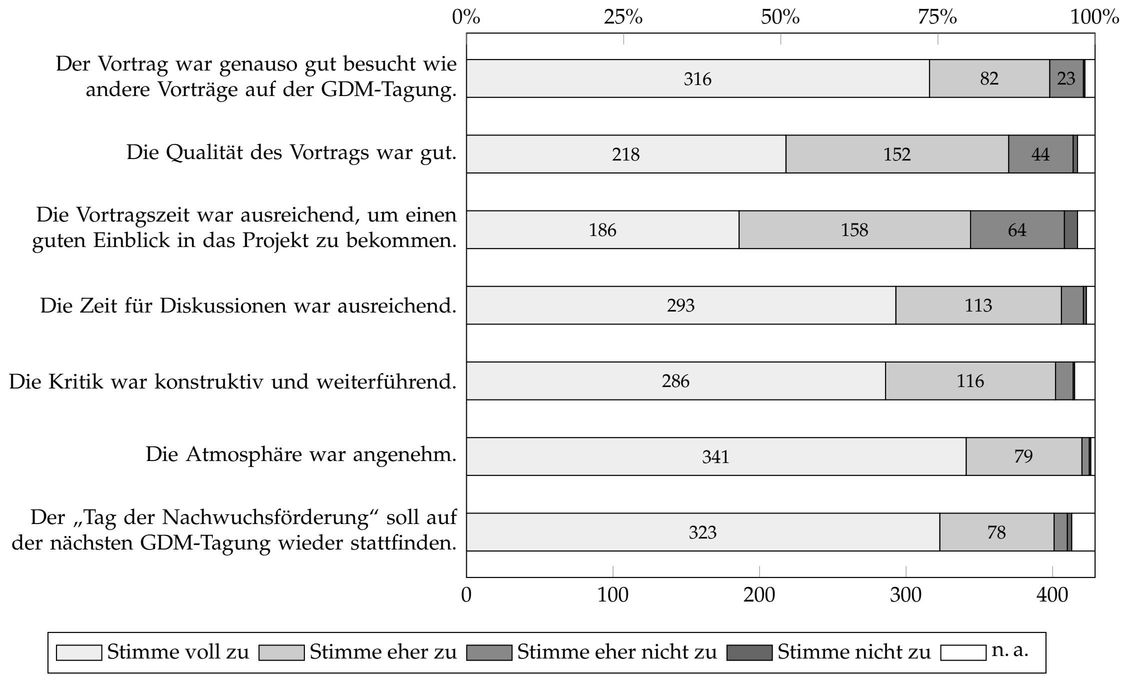


Abbildung 2. Allgemeine Einschätzungen des Auditoriums ($N = 429$) zum Vortrag und dessen organisatorischer Einbettung am Tag der Nachwuchsförderung

Wir möchten hier abschließend einige Anregungen formulieren, die aus Sicht der Nachwuchsvertretung einen Beitrag zur Beurteilung und Weiterentwicklung des Tages der Nachwuchsförderung leisten könnten.

Anforderungen an Vorträge im Rahmen des neuen Formats

Im Rahmen vielfältiger Diskussionen um die eher grundsätzliche Ausrichtung der Tagungsstruktur wird häufig die wissenschaftliche Qualität der Vorträge angesprochen. Die wissenschaftliche Qualität der Jahrestagung insgesamt lebt natürlich zu einem ganz wesentlichen Teil von der Qualität der einzelnen Vorträge. Wenn in der GDM Konsens darüber besteht, die Jahrestagung weiterhin ohne ein Review-Verfahren durchzuführen, unterstützt die Nachwuchsvertretung die Formulierung von Anforderungen für Vortragsinhalte im Rahmen des hier diskutierten Formats.

Die folgenden Anforderungen erachten wir als zentral:

- Notwendigerweise muss bereits eine Forschungsfrage, ein konkretes Forschungsinteresse oder eine Grundfragestellung zu inhaltlichen (Teil-)Aspekten vorliegen. Dies sollte auf Grundlage von Literaturrecherche und ggf. eigenen Vorarbeiten entwickelt worden sein.
- Für einen möglichst guten Einblick in die Forschung oder das Forschungsvorhaben des Vortragenden sollten fundierte Ideen oder Ansätze zur Beantwortung der Forschungsfrage vorgestellt werden, die auch das eigene Forschungsparadigma deutlich machen.
- Ziel des Vortrags soll es sein, den Zuhörerinnen und Zuhörern konkrete, konstruktive Rückmeldung zum geplanten oder begonnenen Forschungsprojekt zu ermöglichen. Eine explizite Schwerpunktsetzung durch den Vortragenden auf konkrete Inhaltsbereiche (z. B. Forschungsfragen, geeignete Instrumente, Theorierahmen etc.) zur Fokussierung des Feedbacks wäre deshalb wünschenswert. In jedem Fall sollte die Möglichkeit bestehen, Rückmeldungen des Auditoriums im weiteren Forschungsprozess noch umsetzen zu können. Es soll demnach kein abgeschlossenes Forschungsprojekt präsentiert werden, sondern ein Projekt im Stadium „Work in Progress“.

Orientierung an der Sache: Umbenennung des Formats

Aus unserer Sicht sind vielfältige Elemente des Tages der Nachwuchsförderung sehr gelungen und werden sowohl vom Auditorium als auch von den Vortragenden so wahrgenommen. Dieses Ergebnis scheint nahe zu legen, das grundsätzliche Konzept des Tages der Nachwuchsförderung auch auf der nächsten Jahrestagung zu wiederholen.

In diesem Zusammenhang erscheint es uns jedoch sinnvoll, eher von der Sache aus zu denken und weniger einen genauen Personenkreis zu definieren. Im Fokus sollte unseres Erachtens stehen, dass in einem offenen Forum „Work in Progress“ präsentiert wird. Das Format der kürzeren Vorträge mit längerer Diskussionszeit zu neueren Projekten könnte so für alle Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler eine konstruktive Plattform bieten. Statt der Bezeichnung „Tag der Nachwuchsförderung“, der zudem dem seit drei Jahren existierenden Angebot des „Nachwuchstags“ ähnelt, wäre ein Name wie „Werkstattvortrag“ oder „Work-in-Progress“ aus Sicht der Nachwuchsvertretung sinnvoller. Dieser Name würde die zuvor genannten Kriterien unterstützen.

Potenzial des Formats und Verantwortung der Betreuenden

Die vielfältigen Rückmeldungen sowie die Auswertung der Evaluation geben zum Teil bestärkende Signale, die traditionelle Tagungsstruktur zu flexibilisieren und Elemente wie den diesjährigen Tag der Nachwuchsförderung im Tagungsprogramm zu integrieren. Insbesondere die Freiwilligkeit der Entscheidung darüber, einen Vortrag im Rahmen des oben skizzierten Konzepts zu halten, bietet die Gelegenheit, Ergebnisse von fortgeschrittenen Dissertationsprojekten auch im Rahmen der „normalen“ Vortragsformate zu präsentieren. In der Schaffung eines Forums zum konstruktiven Austausch über neue Forschungsprojekte liegt aus Sicht der Nachwuchsvertretung das besondere Potential dieses neuen Tagungselementes.

Allerdings sollte die Entscheidung darüber, wann ein Dissertationsprojekt genügend inhaltliche Substanz für einen Vortag besitzt, vor allem auch von den Betreuenden getroffen werden. Im Gegensatz zu weniger erfahrenen Doktorandinnen und Doktoranden besitzen sie den nötigen Einblick in die Forschungslandschaft und die (expliziten bzw. impliziten) Qualitätskriterien einer Präsentation vor der Community, die auch bei „Work in Progress“-Vorträgen eingehalten werden sollten. Gemeinsame Absprachen über Inhalt und Struktur vor allem des ersten (kurzen oder langen) Vortrags sehen wir als einen wichtigen Bestandteil des Betreuungsprozesses an, durch den ein maßgeblicher Beitrag zur Qualitätssicherung des Vortragsprogramms bei der Jahrestagung geleistet wird.

Die Nachwuchsvertretung besteht aus einer Gruppe ehrenamtlich engagierter Mitglieder, die es sich zum Ziel gesetzt hat, die Interessen des wissenschaftlichen Nachwuchses der GDM im Blick zu behalten. Sie fungiert als Ansprechpartner in Fragen des Nachwuchses (Summerschool, Doktorandenkolloquium, Beirat) und organisiert Angebote zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses auf der GDM-Jahrestagung (Nachwuchstag, Nachwuchsforum, Postdoc-Workshop, Talkrunde etc.).
Die derzeitigen Mitglieder sind: Georg Bruckmaier, Christine Gärtner, Alexander Meyer, Angel Mizzi, Christine Plicht, Stefanie Rach, Florian Schacht, Susanne Schnell, Sebastian Schorcht, Ulrike Siebert.

Eröffnungsrede des 1. Vorsitzenden
Rudolf vom Hofe

Sehr geehrte Ehrengäste, liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Mitglieder der GDM,
ich freue mich, hier in Koblenz die 48. Jahrestagung der GDM offiziell eröffnen zu dürfen. Ich möchte bereits jetzt den Veranstaltern dafür danken, dass wir in dieser schönen Stadt zu Gast sein dürfen. Zu Beginn dieser Tagung möchte ich einige Worte zu einem Thema sagen, das alle von uns zurzeit in irgendeiner Weise betrifft, das Thema Inklusion. Dabei möchte ich insbesondere auf einige Beispiele zur aktuellen Entwicklung in Deutschland eingehen.

(1) Inklusion in Deutschland
Am 13. Dezember 2006 wurde von den Vereinten Nationen ein Übereinkommen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen verabschiedet. Bedenkt man, wie in der Vergangenheit in manchen Ländern und in manchen Zeiten mit behinderten Menschen umgegangen wurde, ist dies ohne Frage ein wichtiger Schritt im Zuge einer umfassenden Umsetzung der Menschenrechte. Am 21. Dezember 2008 stimmte der Deutsche Bundestag diesem Vertrag zu.

Das zentrale Anliegen dieser Konvention im Bereich Bildung ist die Einbeziehung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in das allgemeine Schulsystem. Je nach Art der Behinderung soll dieses gemeinsame Lernen zielgleich oder zieldifferenziert erfolgen. Inklusive Bildung soll zum Regelfall werden; Eltern sollen grundsätzlich das Recht haben, dass ihr Kind mit Behinderung eine allgemeine Schule besucht.

Für Deutschland bedeutet dies erhebliche Änderungen der bisherigen Praxis. Hier gibt es etwa eine halbe Million Kinder und Jugendliche mit Behinderungen, nur 18 Prozent von ihnen besuchten im Jahr 2009 eine reguläre Schule. Die anderen gingen auf Sonder- oder Förderschulen und verließen diese meist ohne Abschluss und Berufsperspektiven. Im internationalen Vergleich sind laut einer Studie der Bertelsmann-Stiftung durchschnittlich 85 Prozent der behinderten Kinder und Jugendlichen ins allgemeine Bildungssystem integriert. Wohl kaum einer widerspricht der Idee eines auch für behinderte Menschen gerechten Bildungssystems. Und auch der Idee, dass es bei Inklusion nicht nur um die Integration der sonderpädagogischen Förderung geht, sondern darum, die individuelle Verschiedenheit der Lernenden zum Ausgangspunkt für die Gestaltung des Unterrichts zu machen, wird kaum jemand widersprechen.

Doch wie ist inklusives Lernen konkret zu verwirklichen? An welchen Konzepten kann man sich orientieren? Und wer trägt die Kosten? Hier sind zurzeit sehr viele Fragen offen.

(2) Offene Fragen und Probleme
Da ist zunächst die Frage der Ausstattung der Schulen mit Lehrkräften zu nennen: Viele Lehrer und Wissenschaftler fordern eine Doppelbesetzung für Inklusions-Klassen. Doch dies will kein Bundesland bezahlen. So stellt die Stadt Hamburg, die als eines der ersten Bundesländer die UN-Konvention einer umfassenden Inklusion umsetzte, zurzeit 3,5 Stunden pro Kind und pro Woche für eine Tandembesetzung bereit. Nach Einschätzung vieler betroffener Lehrerinnen und Lehrer ist dies völlig unzureichend.

Anders sieht das die KMK. So erklärt etwa Peter Wachtel, bei der KMK für Inklusion zuständig, im Januar 2013, dass eine Doppelbesetzung nicht in allen Fällen pädagogisch erstrebenswert sei. Die Kinder sollten ja wirklich gemeinsam lernen – durch zwei Lehrer könnten sie ja wieder aufgeteilt werden.

Ein weiteres Problem ist der Umgang mit der Vielfalt der Behinderungen und Lernprobleme: Am klarsten ist, wie die Integration bei kör-


Tagungsimpressionen (Foto: Hanka Pohontsch, © Universität Koblenz) perlich Behinderten zu realisieren ist, hier muss durch bauliche Veränderung für einen entsprechenden Standard gesorgt werden. Doch diese Gruppe macht nur einen kleinen Teil der Förderschüler aus. Etwa 75 Prozent von ihnen haben vielmehr Probleme beim Lernen, beim Sprechen oder in ihrer sozialen und emotionalen Entwicklung. Hinzu kommen die manifesten Lernbehinderungen, die sich als Folge allgemeiner geistiger Behinderungen ergeben. Selbst für gut ausgebildete Sonderpädagogen ist dies ein außerordentlich weites und schwieriges Feld.

Damit stellt sich die Frage nach der Lehrerausbildung: Das Arbeiten mit behinderten Schülerinnen und Schülern haben die Lehrkräfte staatlicher Regelschulen nicht gelernt – und es ist fraglich, inwieweit sie dies durch Fortbildungskurse lernen können. Was in den Ländern hierzu geboten wird, sind – wie beispielweise in Niedersachsen – Kurz-Fortbildungen von 5 Tagen. Nach Berichten sind diese jedoch nicht immer zielführend und enden häufig mit Enttäuschungen: Es werde nicht genügend differenziert, weder nach Fächern noch nach Behinderungen, dabei brauchten Autisten doch eine ganz andere Ansprache als ADHS-Kinder.

Und natürlich stellt sich auch die Frage, inwieweit die für inklusiven Unterricht erforderlichen Kompetenzen in der universitären Lehrerausbildung vermittelt werden können. Hier hat die KMK in einer Rahmenvereinbarung vom Dezember 2012 vorgegeben, dass in der Ausbildung für alle Lehrämter, den „pädagogischen und didaktischen Basisqualifikationen in den Themenbereichen Umgang mit Heterogenität und Inklusion sowie Grundlagen der Förderdiagnostik“ eine besondere Bedeutung zukommt.

Unklar ist jedoch bislang, wie diese neue Aufgabe konkret in universitären Veranstaltungen der Erziehungswissenschaften und Fachdidaktik umgesetzt werden soll und inwieweit bisherige Ausbildungsinhalte dafür gestrichen werden sollen. Bedenkt man die Komplexität der unterschiedlichen Behinderungen und Förderschwerpunkte, so wird leicht klar, dass die Universitäten die hier erforderlichen Kompetenzen in der Lehrerausbildung nur begrenzt vermitteln können und dass in vielen Fällen eine seriöse Betreuung nur durch die gemeinsame Arbeit von Lehrern und zusätzlichen Fachkräften möglich sein wird.

(3) Entwicklung der Schülerzahlen mit Förderbedarf

Ich möchte noch auf einen anderen Aspekt eingehen, nämlich auf die Entwicklung der als mit „sonderpädagogischem Förderbedarf“ eingestuften Schülerzahlen.

Die Bertelsmann-Studie *Inklusion in Deutschland* stellt fest, dass im Schuljahr 2012, also einige Jahre nach Beginn der Umsetzung der Inklusion in Deutschland, der Anteil der behinderten Kinder, die eine Regelschule besuchen, von 18 % auf 25 % gestiegen ist. Dieser positiven Entwicklung steht eine andere gegenüber, die eher nachdenklich macht: Die Schülerzahl an den Sonderschulen nahm in diesem Zeitraum kaum ab, denn immer mehr Schüler wurden mit „sonderpädagogischem Förderbedarf“ eingestuft.

Diese Entwicklung zeigt sich besonders deutlich in Hamburg, wo mittlerweile der größte Anteil behinderter Kinder auf die Stadtteilschulen geht. Schaut man sich hier die Zahlen der Kinder an, die mit „sonderpädagogischem Förderbedarf“ eingestuft werden, so stellt man fest, dass diese sich in den letzten sechs Jahren nahezu verdoppelt haben.

In manchen Bereichen haben sich diese Zahlen sogar vervierfacht. Dies betrifft die Gruppe der Mädchen und Jungen, bei denen Defizite in den Bereichen Lernen, Sprache sowie emotionale und soziale Entwicklung attestiert werden. Für diese Gruppe hat sich bereits die Bezeichnung LSE-Schüler etabliert.

Man kann diese Zahlen sehr unterschiedlich interpretieren. So gibt es die Ansicht, dass diese Entwicklung zu einer besseren Betreuung von Lernenden führt, deren Lernprobleme man bislang nicht ausreichend beachtet hat. Es gibt aber auch Befürchtungen, dass dies zu einer Separierung einer neuen Schülergruppe von den allgemeinen Bildungs- und Benotungsstandards führen kann, mit der Gefahr, dass der Anteil der Schulabgänge ohne Abschluss nicht sinkt, sondern steigt.

(4) Ideen und ihre Missverständnisse

Der Kulturphilosoph Siegfried Kracauer schrieb 1973 folgende Worte „Jegliche Idee wird plump, platt und verzerrt auf ihrem Weg durch die Welt. Die Welt vereinnahmt sie nur nach der Maßgabe ihres eigenen Verstandes und Bedarfs [...] Die Geschichte der Ideen ist eine Geschichte von Missverständnissen“ (Siegfried Kracauer: Geschichte – Vor den letzten Dingen, 1973, S. 19).

Hierin liegt wohl etwas Wahrheit, gerade wenn man an die Umsetzung so mancher Bildungsidee denkt. Und auch in der kurzen Geschichte der Inklusion in Deutschland deuten sich bereits eine Reihe solcher Missverständnisse an; Missverständnisse wie:

- „Die Umsetzung der Inklusion in den Schulen ist kostenneutral möglich“. Oder:
- „Die Kompetenzen für inklusiven Unterricht können in der Universität zeitneutral vermittelt werden“. Ein Missverständnis ist es auch, zu denken:
- „Die Änderungen im Mathematikunterricht können konzeptionsneutral erfolgen“; konzep-

Tagungsimpressionen (Foto: Hanka Pohontsch, © Universität Koblenz)

tionsneutral in dem Sinne, dass bestehende Konzepte zur inneren Differenzierung einfach nur konsequenter als bisher umgesetzt werden. Auch wenn wir von den bisherigen Bildungsreformen so manche Missverständnisse gewöhnt sind, ist es in diesem Falle doch etwas anderes als bei „G8“ oder der „neuen Mathematik“. Es gibt vor allem zwei große Unterschiede: Zum einen handelt es sich bei „Inklusion“ nicht um eine inhaltliche oder methodische Bildungsidee, sondern um ein allgemeines Menschenrecht. Und zum anderen geht es hier nicht um eine Gruppe, die auch gescheiterte Bildungsreformen halbwegs robust übersteht, sondern um eine, die in ganz besonderer Weise auf gesellschaftliche Hilfe und Verantwortung angewiesen ist.

Unsere Aufgabe ist es nun, den Prozess der Inklusion – so gut wir es können – aus der Perspektive des Mathematikunterrichts mitzugestalten. Hierzu gehört die Entwicklung neuer Konzepte für Schule und Lehrerbildung. Es gehört aber auch dazu, die Grenzen unserer Möglichkeiten klar zu benennen. Und es gehört ebenfalls dazu, gegenüber den bildungspolitischen Handlungsträgern auf Entwicklungen hinzuweisen, die den mit Inklusion verbunden Ideen zuwiderlaufen.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, wir haben nun eine Woche Zeit über diese und viele andere Dinge zu diskutieren. Ich wünsche uns allen eine erfolgreiche Tagung mit viel Information, Diskussion und Austausch und zwischendurch vielleicht auch ein wenig Entspannung in dieser wunderschönen Stadt.

Herzlichen Dank.

Tagungseinladungen

9th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 9)

Dear colleagues,
we cordially invite you to attend the *9th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 9)* which will be held in Prague, the Czech Republic, 4.–8. 2. 2015 (see the website www.cerme9.org).

Following the successful CERME conferences in Germany, Czech Republic, Italy, Spain, Cyprus, France, Poland, and most recently in Turkey, this conference will provide another intellectually challenging and culturally enriching experience for mathematics teachers, teacher educators, researchers, and administrators from all education levels around the world.

CERME 9 is going to take place at the Faculty of Education, Charles University in Prague, in the very heart of Prague.

We invite you to attend CERME 9 and submit proposals for papers and posters. There will be 19 Thematic Working Groups covering the whole range of topics in mathematics education research. Please, consult the calls of papers for the groups in order to choose the one which suits you best: www.cerme9.org/scientific-activities/twg-teams/

Important deadlines

01.08.2014	Pre-registration form available on-line
15.09.2014	Deadline for submission of papers
15.09.2014	Pre-registration for the conference
15.09.2014	Deadline for request for financial support
01.10.2014	Deadline for submission of poster proposals
25.11.2014	Deadline for reviewers to submit their reviews
05.12.2014	Decisions about paper or poster acceptance
20.12.2014	Reduced fee registration deadline
10.01.2015	Deadline for revisions of papers
20.01.2015	Papers for presentation at the congress available on the congress website

On behalf of the Local Organizing Committee, the International Programme Committe and the ERME Board

Assoc. Prof. Nada Vondrová

Arbeitskreis „Mathematik und Bildung“

Wir freuen uns Sie auch in diesem Jahr erneut zu einer Herbsttagung des Arbeitskreises „Mathematik und Bildung“ herzlich einladen zu können, und zwar am 14./15. 11. 2014 an der Universität zu Köln am Seminar für Mathematik und ihre Didaktik im Repräsentationsraum der Universität zu Köln, Klosterstraße 79b.

Ein Schwerpunkt der Herbsttagung wird in diesem Jahr darauf liegen, aus einer didaktischen Perspektive auf naturwissenschaftliche Erkenntnis- und Wissensgenese und -aneignung, wie sie in sog. „Teaching the Nature of Science (NOS)“-Ansätzen beschrieben wird, auch auf Mathematik und Bildung zu schauen. Dabei wird es unter anderem um die Frage gehen, was man unter Nature of Mathematics verstehen und welche Bedeutung diese für mathematische Bildung spielen kann und soll.

Als Hauptvortragende wird Frau Prof. Dr. Christiane S. Reiners (Institut für Chemie und ihre Didaktik, Universität zu Köln) in ihrem Beitrag „Die Natur der Naturwissenschaften lehren und lernen“ in das Konzept der Nature of Science einführen. Der zweite Hauptvortrag von Herrn Prof. Dr. Thomas Jahnke (Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Potsdam) reagiert aus Sicht der Mathematik und ihrer Didaktik mit einem Versuch, den Terminus „Nature of Mathematics“ zu substantiieren.

Daneben soll wie in den letzten Jahren die Diskussionen um Bildung im und durch den Mathematikunterricht weiter geführt werden, um den Austausch über gemeinsame Forschungsinteressen und die Planung gemeinsamer Forschungsvorhaben im Arbeitskreis voran zu bringen. Dazu wird es auch wieder zwei Formen der aktiven Beteiligung geben:

- Sie können einen Vortrag (20–25 Minuten) halten, dem sich eine Diskussion (15–20 Minuten) anschließt (bitte bis 15. 9. 2014 Titel und Abstract einreichen), oder
- Sie reichen vorab über die Diskussionsplattform des AK einen ausgearbeiteten Beitrag in schriftlicher Form ein (bis 15. 9. 2014) und können Ihre gesamte Beitragszeit (40 Minuten) auf der Herbsttagung für die Besprechung/ Diskussion dieses Beitrages nutzen (inklusive ein bis zwei kurzen Impulsreferaten und Reaktionen von AK-Mitgliedern auf Ihren Beitrag).

Es werden keine Tagungsgebühren erhoben. Für die Kosten der Mahlzeiten und der Unterkunft muss jeder individuell aufkommen. Die Unterkünfte müssen auch selbst gebucht werden, eine Liste mit Hotels ist auf der Anmeldeseite ersichtlich.

Über eine Anmeldung zur Herbsttagung würden wir uns freuen bis 15. 9. 2014. Für die Anmeldung nutzen Sie bitte folgenden Link: wwwu.aau.at/avohns/akmub/anmeldung2014.php
Für den Arbeitskreis

Markus Helmerich, Andreas Vohns
(Sprecher des Arbeitskreises)
Lokale Tagungsleitung in Köln: Eva Müller-Hill

Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik

Die diesjährige Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik zum Thema *„Werkzeuge nutzen! – Nutzen Werkzeuge?“* findet von Freitag, 26. 9. 2014, bis Sonntag, 28. 9. 2014, an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg in Halle an der Saale statt. Die Herbsttagung findet parallel zur CADGME, der Fifth Central- and Eastern European Conference on Computer Algebra- and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education (http://cadgme2014.cermat.org), statt. Der Arbeitskreis kann durch die internationalen Teilnehmer der CADGME profitieren: Nicht nur die Hauptvorträge (siehe unten) sind gemeinsamer Bestandteil der Tagungen, sondern es können auch wechselseitig Vorträge im nationalen (AKMUI) und internationalen Teil (CADGME) besucht werden. Die CADGME dauert einen Tag länger als die AKMUI-Tagung.

Das Tagungsthema spricht ein zentrales Thema des Einsatzes digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht an. Viele Arbeitskreismitglieder nutzen diese Werkzeuge seit Jahrzehnten und sind subjektiv vom Nutzen der Werkzeuge überzeugt – doch wie kann diese Überzeugung intersubjektiv mit Fakten untermauert werden? Nutzen Werkzeuge tatsächlich? Und wenn ja, wem, wie, wann, wo und warum? Wie kann man andere davon überzeugen, auch Werkzeuge zu nutzen? Oder sollte man das lieber nicht tun? Und in welche Richtung sollten digitale Werkzeuge ggf. weiterentwickelt werden – zum breiteren(?) und tieferen(?) Nutzen.

Das Tagungsthema bietet Raum für die Vorstellung alter und neuer Werkzeuge, für (empirische) Studien und für theoretische Überlegungen. Soziokulturelle Kritik am Werkzeugeinsatz oder Nicht-Werkzeugeinsatz ist ebenso erwünscht wie Vorschläge für weiterzuentwickelnde oder gar neue Werkzeuge und deren Einbindung in den schulischen und außerschulischen Alltag.

Der Arbeitskreis sollte in der Lage sein, sich auf gut Gründe für einen Werkzeugeinsatz zu verständigen – ausgehend von der im Arbeitskreis 2009 erarbeiteten Stellungnahme zum Werkzeugeinsatz im Mathematikunterricht. Ohne überzeugende Argumente und konkrete Handlungsvorschläge können man nicht darauf hoffen, dass der Mathematikunterricht – und damit die Schülerinnen und Schüler – von den vorhandenen und zukünftigen computertechnischen Errungenschaften profitieren … falls das überhaupt gewollt ist.

Die Leiter des Arbeitskreis würden sich freuen, Sie Ende September 2014 in Halle begrüßen zu dürfen – entweder zur Arbeitskreistagung oder auch sehr gerne zur gesamten CADGME!

Weitere Details zur Tagung finden Sie auch auf der Homepage des Arbeitskreises unter http://didaktik-der-mathematik.de/ak/mui und auf der CADGME-Homepage http://cadgme2014.cermat.org.

Tagungsprogramm
Die AKMUI-Tagung beginnt am Freitag, 26. 9. 2014 um 14 Uhr und endet am Sonntag um 13 Uhr. Die Vorträge finden auf dem Campus Heide-Süd der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg statt. Am Samstagabend findet ein gemeinsames Conference Dinner statt. Am Freitag wird ein spezielles Programm für Lehrerinnen und Lehrer angeboten.

Hauptvorträge
Dank der Kooperation mit der CADGME konnten drei hervorragende internationale Hauptvortragende gewonnen werden, die das Werkzeug-Thema aus verschiedenen Perspektiven beleuchten (siehe auch http://cadgme2014.cermat.org/keynote-speakers):

- Freitag nachmittag: Ralph-Johan Back (Abo Akademi University Turku, Finnland) – „Structured derivations in practice: experiences from the E-math project“
- Samstag morgen: Tomás Recio (Universidad de Cantabria, Santander, Spanien) – „Dynamic Geometry and Mathematics: few trains on a two-way track“
- Sonntag morgen: Marcelo de Carvalho Borba (UNESP/Brasilien) – „Math Problem, Facebook and Emergent Classrooms“

Bereits am Freitagmorgen spricht Jürgen Richter-Gebert (TU München) auf der CADGME zu „Mathematics on electronic media in a changing world“. Diesen Vortrag können Sie als AKMUI-Teilnehmer ebenfalls hören, wenn Sie rechtzeitig kommen. Am Montag spricht dann noch Predrag Janičić von der Universität Belgrad zu „Challenges for the Next Generation Mathematics Education Software“, dieser Vortrag ist allein für Teilnehmer der CADGME-Konferenz.

Beitragseinreichungen
Neben den Hauptvorträgen gibt es für den AK-MUI 18 halbstündige Vortragsslots. Am Samstagnachmittag können wir zudem Arbeitsgruppen für bis zu 3 Stunden einrichten. Ihren Vortragsvorschlag schicken Sie bitte bis zum 31. 7. 2014 an keller@mathematik.uni-halle.de. Sollten zu viele Vorträge eingereicht werden, so müssen wir leider eine Auswahl treffen oder versuchen, doch noch Vorträge parallel zu legen. Bei der Auswahl werden Vorträge zum Thema der Tagung bevorzugt.

Unterkunft
Wir konnten für die Nächte von Freitag auf Samstag sowie Samstag auf Sonntag ein spezielles Hotelkontingent (insgesamt 34 Zimmer) im Hotel am Steintor (http://www.am-steintor.de) reservieren. Dort werden alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer des AKMUI auf Wunsch untergebracht. Unser Kontingent wird ab August wieder freigegeben, so dass Sie sich bitte bis spätestens 31. 7. 2014 anmelden müssen.

Arbeitskreis Problemlösen

Gründung des Arbeitskreises
Im Rahmen der GDM-Tagung im März 2014 in Koblenz wurde der *Arbeitskreis Problemlösen* gegründet. Er richtet sich an Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler ebenso wie Lehrerinnen und Lehrer sowie alle weiteren Interessierten, die sich mit Forschung zum (mathematischen) Problemlösen und zur Heuristik im weiteren Sinne beschäftigen. Ziele des Arbeitskreises sind u.a. die Verbesserung des Mathematikunterrichts hinsichtlich des problemorientierten Lehrens und Lernens, die Förderung der zahlreichen Diskussionen und der Austauschs sowie der Aufbau möglicher Kooperationen, um diesen Bereich gezielt weiter zu entwickeln. Mathematikdidaktische Forschung und Lehrerbildung werden im Arbeitskreis aufeinander bezogen, um sowohl der Entwicklung einer neuen Unterrichtskultur als auch der Entwicklung der Kultur der Lehrerbildung und -fortbildung zu dienen.

Als Sprecher wurden (gleichberechtigt) Ana Kuzle und Benjamin Rott gewählt.

Herbsttagung
Am Freitag und Samstag, 17./18. 10. 2014, findet in Münster die erste Herbsttagung des AK Problemlösen statt.

Es gibt die Möglichkeit, zwei Arten von Vorträgen anzumelden: Lang- oder Kurzvortrag.

Die Planung sieht vor, dass am Freitagabend zwei Langvorträge (60 min + 15 min Diskussion) stattfinden. Zu diesen Vorträgen gehört die Gestaltung eines Workshops von 90 Minuten Dauer am Samstagnachmittag. Im Rahmen dieses Workshops kann der Vortrag ausgiebig diskutiert werden, es können Daten gemeinsam analysiert oder Kooperationen organisiert werden. Die Gestaltung bleibt dem Vortragenden überlassen.

Zusätzlich zu diesen beiden Langvorträgen wird es die Möglichkeit geben, am Samstagvormittag mehrere Kurzvorträge (30 min Vortrag inkl. Diskussion, Aufteilung individuell) zu halten. Es besteht die Möglichkeit, Ausarbeitungen für den Tagungsband zu beiden Arten von Vorträgen zu erstellen. Werden zu viele Wünsche für (bestimmte) Vorträge geäußert, entscheidet die Tagungsleitung über die Vergabe der Plätze nach Anmeldungseingang und auf Basis der eingereichten Abstracts.

Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an Benjamin Rott (benjamin.rott@uni-due.de) oder Ana Kuzle (akuzle@uni-osnabrueck.de). Die Anmeldegebühr beträgt 10 Euro ohne bzw. 30 Euro inklusive des geplanten Tagungsbands. Hotelzimmer in Münster sind für 78 Euro pro Nacht (inkl. Frühstück) reserviert und können – wie die Anmeldung zur Tagung – über folgende Website gebucht werden: https://lama.uni-paderborn.de/index.php?id=17617

Landesverband: GDM Schweiz

Einladung zur Fachdidaktischen Diskussion vom 8. 9. 2014 an der PH Zürich

Philippe Sasdi, PH Bern und Bernhard Dittli, PH Schwyz werden uns ins Thema *Fachdidaktisch app-gestützte Unterrichtsszenarien mit Tablets* einführen:

„Neue Medien wie Smartphones, Handhelds und Tablets ermöglichen die Umsetzung von interessanten, neuen Ideen im Mathematikunterricht. Durch den Einsatz von Apps werden medienspezifische Vorteile genutzt. Apps werden als Lernspiele, zum Üben, als Tutorials und in weiteren Funktionen eingesetzt. In der Schweiz laufen aktuell 24 Projekte, die sich auf der Primar- und Sekundarstufe 1 mit neuen Medien und Apps intensiv auseinandersetzen (http://www.1to1learning.ch/One2One/Schweiz). Im iTunes- und Google-Play-Store ist eine unüberschaubare Fülle an Mathematik-Apps verfügbar.

Im Rahmen dieser fachdidaktischen Diskussion setzen wir uns mit Chancen, Risiken und Grenzen von Tablets und Apps im Mathematikunterricht auseinander. Verschiedene Apps werden wir ausprobieren und diskutieren. Dabei stehen die folgenden Fragen im Zentrum: Welche medienspezifischen Vorteile bieten Tablets? Welche Apps stehen zur Verfügung und wie lassen sich diese kategorisieren? Wie werden Tablets und Apps in Projektschulen eingesetzt? Wie zeigen sich appgestützte Unterrichtsszenarien mit Tablets, die eine konsequent fachdidaktische Betrachtungsweise ins Zentrum setzten?

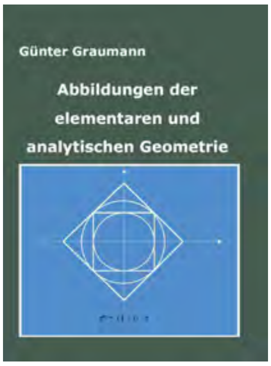
Die Beantwortung der oben genannten Fragen dürfen wir nicht (nur) der Medienpädagogik überlassen. Wir sind in der Fachdidaktik gefordert, uns mit dem Einsatz von mobilen Geräten und Apps auseinanderzusetzen, um qualitativ gute Unterrichtsszenarien zu beschreiben."

Interessierte sind herzliche willkommen. Anmeldungen bitte an: lis.reusser@phbern.ch. Zeit und Ort: 8. September 2014, 18:45–20:45 Uhr, PH Zürich, LAB-K010

Editorischer Hinweis: Wir haben alle Arbeitskreisleitungen um Einladungen zu Herbsttagungen/Nennung der Termine gebeten. Für die Arbeitskreistermine weiterer Arbeitskreise konsultieren Sie bitte ggf. http://madipedia.de/wiki/Arbeitskreise_der_GDM.

Günter Graumann: Abbildungen der elementaren und analytischen Geometrie

Rezensiert von Hans Schupp



Ziel des Autors ist die „systematische Untersuchung der Abbildungen der Elementaren Geometrie". Die „grundlegenden Kenntnisse der Elementaren Geometrie und die Definitionen der üblichen geometrischen Abbildungen" setzt er dabei als bekannt voraus. Für diese verweist er auf sein Buch „Grundbegriffe der Elementaren Geometrie".

Jetzt orientiert er sich an Felix Kleins Erlanger Programm, d.h. er versteht Geometrie als Invariantentheorie von Abbildungsgruppen und führt konsequent erst Kongruenz-, dann Ähnlichkeits- und schließlich affine Abbildungen über ihre Invarianten ein. Das hat den Vorteil, dass sich die zugehörigen Kapitel im Aufbau gleichen und nicht wenige Strukturuntersuchungen analogisiert werden können.

Weiter ist es so recht einfach möglich, nach den ebenen die entsprechenden räumlichen Abbildungen zu betrachten (was meist viel zu selten geschieht). Die zugehörigen Abbildungsgleichungen der Analytischen Geometrie, ihre Synthese und Analyse schließen sich jeweils an.

Ein solcher Lehrgang verbietet sich für den Unterricht aus Zeit- und Anspruchsgründen. Der Autor stellt sich indessen vor, dass er Studierenden und Lehrenden der Mathematik bei der „Vorbereitung und Vertiefung des Kenntnishintergrundes" nützlich sein kann. Er denkt dabei sogar an „interessierte Schülerinnen und Schüler", was der Rezensent angesichts der durchziehenden Satz- und Beweisfülle des Werkes sowie des Schwierigkeitsgrades vieler Beweise für wenig realistisch hält.

Es verbleibt stets und vollständig im Bereich der Abbildungen. Die bekannte „Abbildungsalgebra" dominiert. Wenn der Autor in seinem Vorwort davon spricht, dass Abbildungen „vielfach bei der Gewinnung von Erkenntnissen und dem Beweisen von Sätzen verwendet" werden, so ist nachfolgend davon nicht mehr die Rede.

Das gilt leider auch schon für das Vorgängerwerk. Dort treten Kongruenzabbildungen unvermittelt auf und sind erstaunlicherweise sofort über ihre Invarianten definiert. Sodann werden die vier Typen dieser Abbildungen vorgestellt, aber lediglich als Konstruktionen und ohne Bezug auf diese Invarianten. Ihre Eigenschaften werden vielmehr der Anschauung entnommen. Ganz analog sind die Kongruenzabbildungen des Raumes behandelt. Die Arbeit mit Abbildungen beschränkt sich beide Male auf Symmetrien einfacher Punktmengen; regelmäßige Vielecke und Platonische Körper treten auf, werden aber nicht dynamisiert. Bezeichnenderweise erscheinen die Kongruenzsätze als bloße Erfahrungen bei der Dreieckskonstruktion. Die mathematische und die didaktische Basis für einen späteren, systematisch angelegten Abbildungslehrgang sind demnach recht schmal.

Das offenbart sich gleich in seinem ersten Kapitel. Nach Wiederholen der Definition einer kongruenten Abbildung mittels Invarianten (s. o) wird gezeigt, dass sie überbestimmt ist, d.h. dass alle anderen Invarianten aus Bijektivität und Längentreue folgen. Aber dazu und später beim Nachweis, dass die bekannten Kongruenzabbildungen wirklich solche sind, benutzt der Autor die unbewiesenen Dreieckskongruenzsätze. Das könnte man zwar vermeiden, macht aber diese ohnehin schon nicht trivialen Überlegungen noch umfangreicher. Erst bei der Festlegung der Bestimmungsstücke einer kongruenten Abbildung wird unter der Hand der Kongruenzsatz sss bewiesen.

Wenn es dann um Zweifach-, Dreifach- und allgemein um n-fach-Spiegelungen geht, ist der Autor in seinem Element. Die Spiegelungsalgebra führt er sorgfältig durch; er erhält damit alle vier Abbildungstypen und verkettet (diese Bezeichnung fehlt leider) sie dann in zahlreichen Beispielen.

Die analytische Behandlung der Kongruenzabbildungen folgt zunächst gewohnten Spuren (s. etwa Jehle; Möller; Zeitler), scheut aber auch nicht die teilweise komplizierten Gleichungen bei allgemeiner Lage von Spiegelachsen, Drehzentren und Verschiebungsvektoren. Dass die Gleichungen dann auch mit Vektoren und Matrizen dargestellt werden, führt nicht wirklich weiter. Hier wäre die Herleitung von Abbildungseigenschaften nun auch auf analytischem Wege aufschlußreicher gewesen.

Die kongruenten Abbildungen des Raumes schließen sich an. Sie werden in enger Analogie zur ebenen Kongruenz aufgebaut und vorgestellt. Die eindeutige Bestimmtheit einer solchen Abbildung durch ein Paar kongruenter Dreieckspyramiden leidet darunter, dass nicht deutlich gesagt wird, wie man diese Körperkongruenz de facto erkennt.

Die Analogie erfasst dann auch die analytische Darstellung. Obwohl dort nur noch ausgezeichnete Lagen der Ebenenspiegelungen, Achsendrehungen und Verschiebungen betrachtet werden, lesen sich diese Abschnitte recht mühsam. Das liegt weniger an den Inhalten als an der drucktechnischen Darstellung. Der Text ist dicht gedrängt, obwohl nur etwa ¾ jeder Seite genutzt werden. Die dreidimensionalen Figuren sind (jetzt und später) kaum nachzuvollziehen.

Die nächsten vier Kapitel sind den Ähnlichkeitsabbildungen gewidmet; es folgen vier Kapitel über affine Abbildungen. Da sie den geschilderten Aufbau der Kongruenzabbildungen großenteils übernehmen, sollen sie hier nur zusammenfassend vorgestellt werden.

Am Anfang steht jeweils die Definition per Invariantenangabe sowie die zugehörige Figurenverwandschaft (im Unterschied zur Kongruenz jetzt über die Abbildung). Dann wird die Gruppenstruktur hergeleitet. Es folgt eine herausgehobene Abbildung (die zentrische Streckung bzw. die axiale Streckung (Achsenaffinität oder Scherung)).

Dabei verwundert, dass in einem ansonsten streng abbildungsgeometrisch orientierten Lehrgang der zentrischen Streckung die Strahlensätze vorangehen. Deren Abbildungseigenschaften würden sie vollkommen ersetzen.

Die weiteren Abbildungen derselben Gruppe ergeben sich durch Verkettung der herausgehobenen mit bereits bekannten Abbildung(en). Spezielle Verkettungen führen zu weiteren neuen Abbildungen und mit ihnen zu einer Typisierung der jeweiligen Gruppenelemente.

Wie zuvor schließt sich eine analytische Behandlung und sodann eine synthetische und analytische Weiterführung in den Raum an. (Die Beschreibung von Ähnlichkeitsabbildungen durch komplexe Zahlen stört zwar nicht, bringt aber auch nicht weiter.)

Das alles ist umsichtig und mit ganz wenigen Ausnahmen auch korrekt durchgeführt und wegen der durchziehenden Analogien gut zu verstehen, aber eben deswegen auch recht trocken, zuweilen fast langweilig. Die in Werken gleicher Zielsetzung (s. u.) mitunter gezeigte konstruktive und ästhetische Wirkung der Abbildungen auf Figuren fehlt hier leider völlig. Hat der Autor diesen Mangel selbst gespürt? Die Cover-Figur (s. o.) zeigt als interessante Konfiguration ein Quadrat und seinen Inkreis vor und nach einer Drehstreckung. Innen vermisst man solche Beispiele.

Auf projektive Abbildungen in Ebene und Raum geht der Autor nicht ein. Stattdessen bringt er (synthetisch und analytisch) Grundzüge der Inversion in Ebene und Raum sowie einige wichtige Projektionen vom Raum auf die Ebene. Er schließt mit der stereographischen Projektion.

Graumann detailliert das Erlanger Programm in den Abbildungsbereichen bis zur affinen Geometrie (die Klein 1872 nicht eigentlich interessieren). Er tut dies – wie intendiert – auf systematische, strukturbetonende Weise und überzeugt damit trotz einiger Schwächen. Warum diese Analyse aber auch den Geometrieunterricht anbetrifft und ihn – etwa als eine Hintergrundtheorie – weiterbringen könnte, wird nicht behandelt und bleibt verborgen.

Graumann, G.: *Grundbegriffe der Elementaren Geometrie*. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz 2004

Jehle,F.; Möller, H.; Zeitler, H.: *Analytische Geometrie der Abbildungen*. München: Bayerischer Schulbuchverlag 1968

Klein,F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen: Deichert 1872

Schupp, H.: *Abbildungsgeometrie*. Weinheim: Beltz 1974[4]

Graumann, Günther: *Abbildungen der elementaren und analytischen Geometrie*, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2013, ISBN 978-3-88120-830-7, € 19,80

Hans Schupp, Universität des Saarlandes, Campus E2 4, 66123 Saarbrücken, Email: schupp@math.uni-sb.de

Michael Meyer, Eva Müller-Hill, Ingo Witzke (Hrsg.): Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik

Rezensiert von Jürgen Maaß

Der Sammelband umfasst außer dem Vorwort der HerausgeberInnen vier Sektionen mit insgesamt 16 Beiträgen, die in unterschiedlicher Intensität auf den Jubilar, seine Interessen und Wirkungsfelder bezogen sind.

Die Sektion I hat die Überschrift „Wissenschaftliches Selbstverständnis, wissenschaftstheoretische und methodologische Perspektiven der Mathematikdidaktik" und umfasst drei Beiträge: H. J. Burscheid: Didaktisch relevante Begründungen elementarmathematischer Inhalte (S. 3–18); H. Griesel: Wissenschaftstheorie im Einsatz bei didaktisch orientierten Sachanalysen (S. 19–34); B. Picker: Die dialektische Entwicklung der Didaktik der Arithmetik (S. 35–56).

H. Burscheids und H. Griesels Beiträge vermitteln Erinnerungen an die Anfänge der Mathematikdidaktik in der BRD nach dem Zweiten Weltkrieg. Sie lenken den Blick auf den historischen Kern der Stoffdidaktik, indem sie im Sinne der didaktisch orientierten Sachanalyse von der wissenschaftlichen Mathematik systematisierend auf die Schulmathematik einzuwirken versuchen. Dabei scheinen aus heutiger Sicht die ehemaligen Kontroversen innerhalb dieser Richtung weniger wichtig als die Beobachtung, dass dieser Zweig der Mathematikdidaktik vom Zentrum sehr an den Rand der Mathematikdidaktik gerückt ist.

B. Picker gelingt es mit seinem historisch und mathematisch wohl fundierten Beitrag über die Entwicklung der Arithmetik, eben diese Geschichte als dialektischen Prozess darzustellen – einschließlich der Hoffnung, dass nach dem Scheitern von New Math/moderner Mathematik in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts vielleicht „eines Tages zum dritten Mal ‚das Paradies, das Cantor uns geschaffen hat' (so formulierte es D. Hilbert) für die Schule neu entdeckt wird." (S. 51)

Sektion II steht unter der Überschrift „Theorieentwicklung und Begriffsbildung" (S. 57–164). M. Meyer thematisiert einen zentralen Punkt des Lernens und Verstehens von Mathematik, die „Begriffsbildung durch Entdecken und Begründen" (S. 57–88). Nach seiner Ansicht soll dabei der traditionelle Weg von der Definition über Sätze dazu hin zur Anwendung umgekehrt werden.

M. Neubrand und J. Neubrand haben empirische Forschungen (COACTIV) für ihren Beitrag „Skizzen zum Lehrerwissen über den Begriff Flächeninhalt (eines Rechtecks)" (S. 89–100) analysiert. Das Ergebnis der Analyse ist eine „große Spannweite ... von Vorstellungen ... und didaktischen Prozessen" (S. 98), die auf große Herausforderungen für die Lehrerausbildung und -fortbildung schließen lassen.

E. Ramharter arbeitet in ihrem Beitrag einen historischen Text von Pascal in analytischer und didaktischer Absicht auf: „Alles oder dreimal alles? Pascals Wette in historisch-wissenschaftstheoretischem Kontext" (S. 101–124). Gemeint ist allerdings Pascals didaktische Absicht, über eine wahrscheinlichkeits- und entscheidungstheoretische Argumentation Ungläubige vom Sinn des Glaubens an Gott zu überzeugen.

K. Reimann und I. Witzke analysieren ebenfalls einen historischen Text: „Eulers Zahlauffassung in der ‚Vollständigen Anleitung zur Algebra' (S. 125–144). Es ist für das Verständnis der Schulalgebra höchst lehrreich, wie Euler in dem seinerzeit sehr populären Lehrbuch etwa imaginäre Zahlen erörtert.

H. Weigand schließt die Sektion ebenfalls historisch analysierend: „Die Entwicklung des Grenzwertbegriffs. Ein Beispiel für die Wechselbeziehung von Intuition und Strenge" (S. 145–164) Seine zentrale These ist die „fortwährende notwendige Wechselbeziehung zwischen intuitiven Vorstellungen und exakten mathematischen Beschreibungen." (S. 145)

In Sektion III geht es nach der Überschrift um „Sprache und Semiotik" (S. 165–274). Gleich der erste Beitrag von W. Dörfler über „Bedeutung und das Operieren mit Zeichen" (S. 165–182) geht in seiner Auseinandersetzung mit L. Wittgenstein („In der Mathematik ist alles Kalkül und nichts Bedeutung") über den Rahmen der Sektion III hinaus, indem er hier einen Bogen von Wissenschaftstheorie zur Mathematikdidaktik spannt.

E. Müller-Hill berichtet über empirische Forschungen: „Empirische Auffassungen von Geometrie im Mathematikunterricht unter dem Blickwinkel der Semiotik“ (S. 183–204). Sie argumentiert

> für die These, dass einige der spezifischen Hürden durch eine abrupte Veränderung des zeichentheoretischen Status von geometrisch-zeichnerischen Darstellungen beim Übergang vom propädeutischen zum fortgeschrittenen Geometrieunterricht entstehen: vom ikonischen Abbild zum regelhaft verwendeten Diagramm. (S. 183).

S. Schlicht und I. Witzke schreiben in ihrem Beitrag "Zur Problematik der Diagnose des Invarianzbegriffes im Kindergarten“ (S. 205–232)

> Invarianzbegriffe sind für den Unterricht in der Primarstufe und der Sekundarstufe ein zentrales Thema. Beispiele für solche Begriffe sind ‚Anzahl‘, ‚Länge‘, ‚Fläche‘, ‚Volumen‘ und ‚Gewicht‘. (S. 207).

Die zentrale These von S. Schlicht und I. Witzke ist, dass „der Erwerb von Invarianzbegriffen nicht logisch notwendig ist.“ (S. 205)

H. Rodenhausen möchte mit seinem Beitrag „Empirische Interpretationsansätze im Rahmen einer methodologischen Analyse mathematischer Frage- und Problemstellungen“ (S. 233–254) zeigen,

> dass sich für die Verwendung empirisch-semantischer Methoden im Rahmen einer metatheoretischen Problembeschreibung in der Tat vielfältige Anknüpfungspunkte bieten; im Kern greifen zahllose Aufgabenstellungen auf empirische Interpretationen und Bezugsgrößen zurück. (S. 234)

S. Schmidt beschäftigt sich in seinem Beitrag „Vom Rechnen zu ersten Erfahrungen im elementar-algebraischen Denken. Grundschulkinder unterwegs zu neuen Sprachspielen“ (S. 255–273) ebenfalls mit L. Wittgenstein. Er schlägt vor,

> grundlegende Perspektiven der Spätphilosophie von Ludwig Wittgenstein (1889–1951) für mathematikdidaktische Untersuchungen zu nutzen. (S. 255)

Die Sektion IV umfasst drei Beiträge zu „Historischen, interdisziplinären und fachwissenschaftlichen Perspektiven“ (S. 275–332)

S. Deschauer eröffnet die Sektion mit einem „Glanzpunkt und einer Kuriosität aus einer spätbyzantinischen ‚Schatztruhe‘, dem Cod. Vind. phil. gr. 65 aus dem Jahre 1436“ (S. 275–294). In der Schatztruhe finden sich „tiefliegende“ Ausführungen zu Brüchen und weniger elegante zu Zinsrechnungen. Der anonyme spätbyzantinische Autor „gerät bei der ‚Lösung‘ sichtlich in Nöte–zu unserem Vergnügen.“ (S. 277)

C. S. Reiners bereichert das Buch mit einem Bericht aus der Didaktik der Chemie: „Die Natur der Naturwissenschaften lernen zu lehren. Zum Potential eines expliziten Ansatzes.“ (S. 295–316). Dort ist Kontextualisierung das Zauberwort, „eine notwendige Bedingung“ (S. 295) für die Vermittlung eines adäquaten Verständnisses der Natur der Naturwissenschaften. Die Autorin berichtet dazu von einer Studie, die im Jahre 2012 an der Universität Köln durchgeführt wurde.

R. Struve weist auf die nach seiner Sicht zu Unrecht unterschätzte Spiegelungsgeometrie hin: „Anordnung im Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“ (S. 317–332). Er will im Artikel zeigen,

> dass die von Hjelmslev, Bachmann et al. entwickelte Spiegelungsgeometrie eine größere Allgemeinheit hat, als bisher angenommen: Sie kann nicht nur metrische Geometrien beschreiben, sondern auch angeordnete Strukturen. (S. 317)

Fazit und Anregung zur Diskussion

Das Buch gibt einen lesenswerten Eindruck von Interessengebieten und persönlichen Kontakten des Geburtstages„kindes“. Auch wenn ich es hiermit für die mathematikdidaktischen Bibliotheken empfehle, möchte ich doch zur Wahl des Titels Kritik anmelden. Das Buch erfüllt den im Titel vorgegeben Anspruch zu zeigen, in welchem Sinne welche Bereiche der Mathematikdidaktik „Wissenschaft“ sind, nur in einem aufzählenden oder exemplarischen Sinn, gibt aber keine wissenschaftliche Erläuterung oder Begründung zur Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik.

Für Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik wie Mathematik, Geschichte der Mathematik, Pädagogik, Philosophie, Psychologie, Informatik gibt es dazu recht intensive interne Diskussionen, die zumindest aus der Sicht bestimmter Wissenschaftstheorien oder Wissenschaftssoziologien hinreichend weit gediehen sind, um mit gewissem Recht behaupten zu können, dass es sich um Wissenschaften handelt. Einige dieser Diskussionen sind mitsamt den Theorien in die Mathematikdidaktik importiert worden.

Wie aber steht es mit der Mathematikdidaktik selbst? Hier fehlt aus meiner Sicht in einem Buch mit diesem Titel mindestens ein Beitrag aus wissenschaftssoziologischer Sicht, der reflektiert, in wie weit die Mathematikdidaktik mittlerweile alle üblichen Kriterien erfüllt wie etwa Institute an Universitäten mit ProfessorInnen, AssistentInnen, Promotionen und Habilitationen, Zeitschriften und Tagungen, nachprüfbaren Forschungsresultaten etc. Ebenso vermisse ich einen Beitrag aus wissenschaftstheoretischer Sicht, der genauer untersucht, in welcher wissenschaftstheoretisch akzeptierten Weise (Methodologie) die verschiedenen Arbeitsbereiche der Mathematikdidaktik ihre Wissenschaftlichkeit begründen können und begründen. Zum Teil lässt sich diese Begründung vermutlich zusammen mit einer Theorie etwa aus der Pädagogik importieren. Zum Beispiel bei der interpretativen Unterrichtsforschung haben wir so etwas erlebt.

Wie aber steht es mit jenen Teilen der Mathematikdidaktik, die ihr ganz eigenes, spezifisches, nicht importiertes Produkt sind? Hier ist insbesondere bei der für uns zentralen Stoffdidaktik nachzufragen. Solange wie die Stoffdidaktik die mathematische Richtigkeit einer vorgeschlagenen Neuformulierung mathematischen Stoffes behauptet, kann innerhalb der Mathematik mit der mathematischen Methodologie und der damit verbundenen Wissenschaftlichkeit gearbeitet werden. Die zentrale Behauptung der Stoffdidaktik ist das aber nicht; ihre Behauptung ist vielmehr eine nicht mathematische: Die neu formulierte Sicht auf Mathematik sei für das Lernen dieses Stoffes hilfreich. Manchmal wird diese Behauptung nur versteckt geäußert (dieser Weg, den Satz von X zu beweisen, eröffnet den SchülerInnen den Blick für einen schönen Satz aus der Mathematik), manchmal sehr vehement (wenn das Gebiet Y auf diese Weise unterrichtet wird, sind alle für dieses Gebiet typischen Lernschwierigkeiten behoben!). Gerade ein Buch aus der Kölner Schule, die ja mit Nachdruck auf Wissenschaftlichkeit hin arbeitet, sollte für diesen zentralen Arbeitsbereich der Mathematikdidaktik genauer argumentieren, worin hier die Wissenschaftlichkeit bestehen kann: geht es mit einer lernpsychologischen Argumentation, die im Sinne einer Methodologie der Psychologie „beweist", dass die neue Stoffformulierung dem Lernen entgegen kommt oder mit empirischen (pädagogischen) Untersuchungen?

Insgesamt ist die Frage nach der eigenen Wissenschaftlichkeit in der Mathematikdidaktik nicht so zentral und schon gar nicht so beliebt wie in anderen Wissenschaften. Die Dissertation von H. Bölts würde heute vielleicht anders aufgenommen als damals, und mein Hinweis, dass eine Sammlung einzelner bemerkenswerter Arbeiten von MathematikdidaktikerInnen wie in diesem Buch nicht hinreicht, um ihre Wissenschaftlichkeit zu definieren oder zu beweisen, wird heute hoffentlich zum Anlass für eine Diskussion (z. B. in den weiteren Heften der „Mitteilungen") genommen. Zu einer solchen Diskussion gehören nach meiner Ansicht außer wissenschaftstheoretischen auch ethische Aspekte. Man kann den MathematiklehrerInnen nicht vorwerfen, dass sie den allgemeinen Teil der Lehrpläne nicht lesen und beachten, sondern nur die Stoffkataloge für die einzelnen Klassen, wenn die Mathematikdidaktik nicht selbst vorbildhaft und vernehmlich über Ziel, Sinn und Verantwortung der Mathematikdidaktik reflektiert.

Michael Meyer, Eva Müller-Hill, Ingo Witzke (Hrsg.): *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum sechzigsten Geburtstag von Hurst Struve*, Verlag Franzbecker, Hildesheim 2013, ISBN 978-3-88120-827-7, 342 S., 34,80 Euro

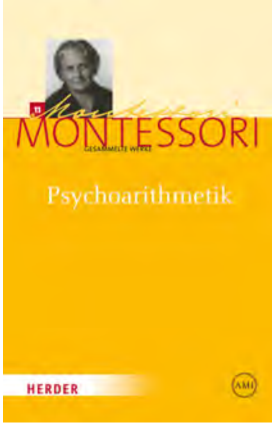
Jürgen Maaß, Universität Linz, Institut für Didaktik der Mathematik, Altenberger Straße 69, 4040 Linz, Österreich, Email: juergen.maasz@jku.at

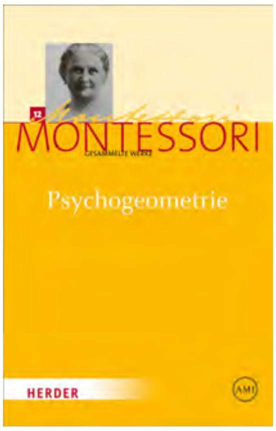
Psychoarithmetik und Psychogeometrie: Quellen zu Montessoris Konzept zum Mathematiklernen von Kindern

Rezensiert von Sandra Thom

Rund 80 Jahre nach ihrem ersten Erscheinen in Spanien liegen die beiden Hauptschriften Maria Montessoris zu Arithmetik und Geometrie, ihren Ideen, wie und womit Kinder Mathematik lernen, nun vollständig in deutscher Übersetzung in einer wissenschaftlichen Edition vor. Möglich wurde dies im Rahmen einer bei Herder erscheinenden Gesamtausgabe der „Gesammelten Werke" Montessoris unter Leitung von Prof. Dr. Harald Ludwig, dem inzwischen emeritierten Leiter des für die Montessori-Forschung seit Mitte des letzten Jahrhunderts international bekannten Montessori-Zentrums Münster.

Anfang der 1930er Jahre verfasst, gingen die meisten Exemplare der in spanischer Sprache verfassten *Psico Aritmetica* (1934) bzw. *Psico Geometria*





(1934) in den Wirren des kurz darauf aufziehenden Spanischen Bürgerkrieges unter und sind heute kaum zu beschaffen. Während die Psychoarithmetik immerhin durch eine italienische Übersetzung (1971) und eine als Loseblattsammlung veröffentlichte, aber in Deutschland nicht vollständig erhältliche deutschsprachige Ausgabe (1989–2011) für den Forscher zugänglich war, gilt dies nicht für die Psychogeometrie: Eine wenig verbreitete niederländische Ausgabe von 1988 mit sehr fehlerhafter deutscher Übersetzung war nur Montessori-Kreisen zugänglich. Eine aktuelle nahezu parallel erscheinende englische Ausgabe (2011) mit Übersetzungen ins Italienische und eine französische Ausgabe ermöglichen erst seit kurzem das Studium von Montessoris mathematischen Schriften. Mit den nun in deutscher Sprache vorliegenden Schriften der Pädagogin schließen die Herausgeber diese Lücke und machen die mathematischen Schriften Montessoris in einer gebundenen Ausgabe mit den originalen farbigen Zeichnungen der spanischen Originalausgabe einer breiten Leserschaft im deutschsprachigen Raum zugänglich.

Montessoris Konzept der Psycho-Handbücher für den Mathematikunterricht

Psychoarithmetik und Psychogeometrie bilden zusammen mit der zwar geplanten, jedoch nicht abgeschlossenen Psychogrammatik eine Trias von drei Schriften, in denen sich die Pädagogin mit den Grundlagen dessen beschäftigt, was für sie in ihrer Dreiheit den „Schlüssel zur Welt“ als Grundlage der Bildung des Menschen bildet und somit zentrale Mittel und Inhalte ihrer Methode abbildet: Zahl, Form und sprachliche Struktur sind universale menschliche Kennzeichen von Kultur und im menschlichen Geist begründet, der ein mathematischer ist. Dabei geht Montessoris Verständnis von Mathematik weit über das heutige Fach hinaus und ist in historisch-philosophischen Traditionen verwurzelt als „menschlicher Instinkt“, den „die Menschheit überall benutzt hat, um sich auszudrücken“.[1] Die originäre Entdeckung bzw. Konstruktion von Kultur wie auch ihre Nachentdeckung und -konstruktion durch das lernende Kind als Teil seiner Einwurzelung in seine Umgebungskultur sind zutiefst verbunden mit dem menschlich-mathematischen Geist, der zu Ordnung und Vergleich, Mustererkennung und Analogieschluss fähig ist.[2] Wenn aber der menschliche Geist ein mathematischer ist, wenn die Inhalte und Grundlagen von Kultur eigentlich vom mathematischen Geist durchzogen sind, weil selbst das Produkt menschlichen Kulturschaffens aus dem mathematischen Geist heraus, wie kann es dann sein, dass das Lernen der mit dem mathematischen Geist eng verbundenen Unterrichtsinhalte wie Geometrie oder Arithmetik für Kinder häufig ein Schrecken ist, eine Klippe, ein Hindernis?[3]

Hier setzen die beiden vorliegenden Werke Montessoris an. Relativ am Ende der Auseinandersetzung Montessoris mit dem schulischem Lernen von Kindern verfasst – Montessori selbst setzt sich in ihren späteren Jahren vor allem mit dem übergeordneten Konzept der Kosmischen Erziehung sowie der Entwicklung im frühen Kindesalter auseinander – beruhen die beiden Werke auf jahrzehntelangen Erkenntnissen aus empirischer Forschung und zahlreichen Erprobungen und verbinden über die Berücksichtigung des mathematischen Geistes die Inhalte des Faches und das kindliche Lernen. Die Psychoarithmetik bringt dabei auf Basis der für Montessori fundamentalen Idee des Stellenwertes auf fachmathematischer Grundlage die zentralen Inhalte des Arithmetikunterrichts mit den psychologischen Erkenntnismöglichkeiten des Kindes in Passung und stellt so einen stark strukturierenden Leitfaden für den genetischen Aufbau von Unterricht dar. Das Entdecken über den mathematischen Geist ist dabei eher eine Art ‚kognitiver Leim‘ des Lehrgangs. Dahingegen stehen im Zentrum der Psychogeometrie die Entdeckungen selbst: Die Psychogeometrie soll gerade keine „grundlegende systematische Untersuchung der

[1] M. M. Montessori (1959) 6
[2] Vgl. vertiefend zum mathematischen Geist: Thom (2010), Kap. 5.
[3] Vgl. M. Montessori (2012b) 5; M. M. Montessori (1959) 6; M. M. Montessori (1961) 139; M. Montessori (2005) 166.
[4] M. Montessori (2012a) 68

Geometrie"[4] sein, sondern bietet unter Berücksichtigung von Interessen und Fähigkeiten der Kinder auf der einen Seite und fachlicher Strukturierung der Inhalte auf der anderen Seite eher eine „Fundgrube [für, S.T.] die didaktische Eigenkreativität des Unterrichtenden"[5], mit der Kinder zahllose geometrische Zusammenhänge entdecken können.

Die Psychoarithmetik – Arithmetik, Algebra und Sachrechnen in der Grundschule

Harold Baumann nutzte für die vorliegende knapp fünfhundertseitige deutsche Ausgabe der *Psico-Aritmetica* neben der spanischen Erstausgabe auch die von einem engen Vertrauten Mario Montessoris 1971 vorgelegte italienische Ausgabe. Grundlage der Neuausgabe ist dabei die von Baumann selbst vor rund einem Vierteljahrhundert vorgelegte deutschsprachige Ausgabe, die als Loseblattsammlung bis 2011 nur unvollständig vorlag. Bekannt ist Baumann vor allem durch seine Chronik der Montessori-Pädagogik in der Schweiz, folgerichtig wird die vorliegende Ausgabe im Anhang durch einen Überblick zum Gesamtwerk der Pädagogin ergänzt. So ist seine Einführung nicht nur deshalb von Interesse, weil er die Schrift Montessoris in den historischen Kontext zu ihren anderen Arbeiten stellt oder die Textgeschichte in gebotener Kürze darlegt, sondern vor allen Dingen wegen seiner Erläuterungen zu den vielen noch wenig bekannten historischen Montessori-Piaget-Beziehungen, die angesichts der trotz aller Kritik immer noch vorhandenen Bedeutung von Piaget für aktuelle Ansichten über das Lernen von Mathematik seine Forschungen auch bei heutigen Mathematikdidaktikern im neuen Licht erscheinen lassen können. In die Psychoarithmetik leitet ein kurzes Vorwort der Montessori-Schülerin und späteren Ausbilderin Giuliana Sorge ein. Bereits dieses Vorwort als Einleitung in den Aufbau des arithmetischen Lehrgangs bis hin zur Algebra jenseits heutiger didaktischer Terminologie, das bereits umfassend einen Einstieg in den Aufbau von Stellenwertverständnis und seine Abstraktion bietet, macht deutlich, dass für ein Durchdringen der vorliegenden Schrift fundierte Kenntnisse des Arithmetiklernens bei Montessori und/oder aktueller Arithmetikdidaktik unumgänglich sind.

In ihrem Vorwort zur Psychoarithmetik fasst Montessori ihre „Methode" zusammen und stellt sie in den nachfolgenden Allgemeinen Betrachtungen der zu ihrer Zeit üblichen Methodik gegenüber, um so Unterschiede und Begründungen ihrer Methode herauszustellen, in der Kinder statt des „üblichen" mühsamen und langweiligen Durcharbeitens der Arithmetik statt dessen in ihrer Methode über systematisches Fortschreiten hin zu algebraischen Entdeckungen jenseits herkömmlichen Grundschulstoffes gelangen. Sie erläutert zunächst die Zahlbegriffsbildung in der Vorschulzeit bei Kindern von etwa drei Jahren als Grundlage für die aufbauende Arbeit mit dem Dezimalsystem. Dazu nutzt Montessori vor allem den Zählzahl-, Kardinalzahl- und Maßzahlaspekt und berücksichtigt über die Teil-Ganzes-Relation ähnlich heutigem Vorgehen im Mathematikunterricht Zahlzerlegung und Aufgabenfamilien. Ausführliche Erklärungen zum mathematischen Inhalt und ganz besonders zum bekannten und Studierenden wie Lehrern in seinen Feinheiten doch häufig so fremden Stellenwertsystem dienen dem Aufbau des Verständnisses beim Lehrer als Basis für seine Arbeit mit dem Kind; mögliche algebraische Zusammenhänge durchziehen dabei immer wieder die anschaulichen Schilderungen möglicher Übungen mit vielen bekanntem wie auch einigen inzwischen nicht mehr genutzten Montessori-Materialien wie einer „Quotientenbörse" (S. 156). Faszinieren können dabei Montessoris Betrachtungen mathematischer Konventionen, wenn sie beispielsweise auf S. 71 kritische Überlegungen zur Gültigkeit des Gleichheitszeichens bzw. der üblicherweise benutzten sprachsymbolischen Darstellung aufstellt, die aus der Handlung mit konkretem Material heraus verständlich sind: Gilt wirklich $2648 : 2 = 1324$?

Im sich anschließenden Primarbereich prägt die fundamentale Idee des Stellenwertsystems die nächsten Kapitel Montessoris Ausführungen zur Arithmetik; dabei gelangt das Kind in einem genetischen Lerngang schrittweise zur Abstraktion vor allen Dingen unter Nutzung des intramodalen Transfers.[6] Der Aufbau von Zahl- und Operationsverständnis geht auf Grundlage des Stellenwertverständnisses Hand in Hand:

> „Zählen und Rechnen [...] können mit Hilfe der einfachen Mechanismen, die das Dezimalsystem birgt, vollzogen werden. [...] Was also eine arithmetische Operation, zum Beispiel die Addition, charakterisiert, ist nicht das Zusammenfügen von Quantitäten, sondern die Vertei-

[5] Ludwig/Winter (2012) XVI
[6] Vgl. Thom (2010) Kap. 5 und 6.

> lung der verschiedenen Einheiten gemäß dem Dezimalsystem. Es gibt demnach nichts zu lernen, was die Operation an sich betrifft, wenn dem Dezimalsystem die ganze Beachtung geschenkt wird, die ihm wirklich zusteht. Die Operationen bestehen darin, gleiche oder ungleiche Dinge zusammenzufügen oder von einem Ganzen einige seiner Teile wegzunehmen oder es auf gleiche Teile zu verteilen. Dies sind also Operationen. Was dann *innerhalb* der Zahlen geschieht, betrifft das Dezimalsystem und nicht die Operationen.[7]

Operationen sind als Handlungen zu verstehen, Addition und Multiplikation als Hinzufügen von ungleichen oder mehreren gleichen Teilen, entsprechend die Gegenoperationen Subtraktion und Division als Wegnehmen bzw. wegnehmendes Verteilen von ungleichen oder mehreren gleichen Teilen. Nach der Einführung erfolgt bei Montessori eine intensive operative Durcharbeitung der Aufgaben ähnlich heutigem Vorgehen. Spätestens wenn der Leser beim Kapitel über die Multiplikation ankommt, muss er jedoch erkennen, dass es sich um eine historische Quelle handelt, wenn Montessori in für Italien typischer, aber für Deutschland bis auf die schriftliche Multiplikation eher unüblicher Schreibweise den Multiplikator „nach hinten" setzt. Hier ist die Edition in Text, Bild und Bildunterschriften nicht stringent; in Verbindung mit einer sich wohl eigentlich auf die schriftliche Multiplikation beziehenden Anmerkung (Anm. 233) lässt dies den Leser trotz eines Hinweises auf die Kommutativität der Multiplikation zunächst einmal rätselnd zurück und verschenkt Möglichkeiten, mit einem kurzen Kommentar einen selten auf bloßer ikonischer Ebene so transparenten räumlich-simultan dargestellten Zusammenhang zu verdeutlichen: der Zuweisung, was nun der Multiplikator und was der Multiplikand ist – der Multiplikand ist das Perlenstäbchen mit einer bestimmten Länge, der Multiplikator gibt die Anzahl der Stäbchen an.

Ein Kapitel zur Zahlentheorie in der Grundschule von Teilbarkeit über Primzahlen, Vielfache, Teiler usw. schließt den aus heutiger Sicht „arithmetischen" Teil der Psychoarithmetik ab, doch auch hier zeigen sich schon Ansätze für die nachfolgenden algebraischen Ausführungen zu Quadratzahlen, Kubikzahlen und Potenzschreibweise, die materialgeleitet erarbeitet werden. Faszinieren können ihre deutlich von historisch-griechischen eher geometrisch abgeleiteten zahlentheoretischen Ausführungen zu Analyse der Teilbarkeit in der Primfaktorzerlegung. Entsprechend wird auch im nachfolgenden eigentlich arithmetischen Kapitel zu Multiplikationsspielen der „Rote Faden" hin zur Algebra erkennbar, wenn die Rechteckdarstellung der Multiplikation distributiv in Binome zerlegt wird. Was zunächst noch konkret mit Zahlen und Material geschieht, verlagert sich in den anschließenden Ausführungen zur Algebra immer weiter hin zur Nutzung algebraischer Terminologie ohne diskrete Mengen, zunächst materialgebunden, später zunehmend losgelöst hiervon als abstraktes Gedankenspiel, wobei Montessori mehrfach auf die Bedeutung der zuvor materialgebunden gewonnenen Vorstellungen des Kindes hinweist, die sie bereits in früheren Schriften grundlegender dargelegt hat.[8]

Die letzten beiden kurzen Kapitel setzen sich durch ihre Anwendungsorientierung deutlich von den vorausgehenden ab, die einen durchgängigen Aufbau von der Arithmetik bis hin zur Algebra erkennen lassen. Montessori stellt in diesen letzten Kapiteln Verhältnisse, Proportionen, Dreisatzrechnung sowie Maße und Gewichte ins Zentrum ihrer Ausführungen, geht auf das dezimale metrische System ein, erläutert Geschichte, Vorteile und zeigt, typisch für die Methode Montessoris, die Beziehungen der Einheiten untereinander auf. Wie durchgängig auch in den übrigen Kapiteln, ist dies zugleich ein Kapitel zur Bildung der Lehrer und gibt zahlreiche methodische Hinweise für die Durchführung praktischer Experimente, die Nutzung von Modellen oder fächerübergreifende Aspekte von Unterricht betreffend, ein wenig schon ihrer Kosmischen Erziehung vorgreifend. Wie auch zuvor (S. 187f.) fordert sie die Nutzung authentischer Sachrechenaufgaben unterschiedlichen mathematischen Inhalts wie sogar antiproportionaler Zuordnungen und geht nebenbei auf unterbestimmte Aufgaben ein, womit wir heute Kinder und Jugendliche zum Modellieren hinführen. Ein Beispiel findet sich auf S. 402: „Ein Elefant frisst in 10 Minuten dreißig Brötchen. Wie viele wird er an einem Tag fressen?" Montessori richtet den Blick auf die Förderung kritischen Denkens. Gerade hier macht sie deutlich, inwiefern Mathematik ein Schlüssel zur Welt sein kann – als Möglichkeit der Weltorientierung und des kritischen Vernunftgebrauchs. Damit bietet diese Schrift Überlegungen zum Mathematiklernen jenseits des häufig nur in der Strukturori-

7 M. Montessori (2012a) 16 und 61
8 Z. B. in M. Montessori (2003) 182

entierung betrachteten Arithmetikcurriculums der Methode Montessoris, die in ihrer Deutlichkeit in keiner anderen Schrift der Pädagogin aufzufinden sind.

Die farbigen Zeichnungen aus der *Psico Aritmetica* werden im Anhang durch Abbildungen aktueller Materialien ergänzt. Sie sind in der Regel eine Momentaufnahme des Materialgebrauchs und verdeutlichen die Ausführungen im Text. Bei genauer Betrachtung erkennt der Leser die unterschiedlichen „Handschriften" bei der Ausführung der Zeichnungen, von denen Giuliana Sorge in ihrem Vorwort zu berichten weiß, dass Lernende an Montessoris *Scuola di Metodo* diese angefertigt hatten. Wie auch die Beschreibungen im Text illustrieren die Abbildungen die Historizität der Ausführungen, die sich durch z. T. eine etwas andere Handhabung, Materialauswahl oder Färbung der Materialien erkennen lässt. Die Anmerkungen geben Hinweise auf Unterschiede zur heutigen Handhabung und in den verschiedenen Editionen. Zu wenig berücksichtigt der Apparat Hinweise auf bereits in der Sekundärliteratur verfügbare exegetische Betrachtungen zu kritischen und für das Verständnis von Schlüsselbegriffen zentralen Stellen in der Übersetzung oder Anmerkungen zu Besonderheiten in Handhabung oder Sichtweise Montessoris; hier folgt Baumann zu sehr seiner älteren deutschsprachigen Ausgabe.

„Die Hand berührt das Offensichtliche, und der Geist entdeckt das Verborgene."[9] – Die Psychogeometrie Montessoris

Analog zur Psychoarithmetik eröffnet Montessori ihre Ausführungen mit einer Beschreibung des zu ihrer Zeit üblichen Geometrieunterrichts mit den hieraus resultierenden negativen Effekten hinsichtlich des kognitiven Lernprozesses des Kindes, um kontrastierend ihre eigene Methode darzulegen. Dabei erwartet den Leser in der Psychogeometrie kein durchgehender Lehrgang, aber zahlreiche Übungen, mit denen die Kinder eine Art ‚geistiger Gymnastik' (S. 72) betreiben und damit als Fernziel einen geometrischen Sinn, also allgemeine Kompetenzen (in heutiger Terminologie) und Interessenskeime für künftige auch analytische Auseinandersetzungen entwickeln sollen. Montessori beginnt ihre Ausführungen mit der Geometrie in vorschulischer Zeit ab etwa vier Jahren: Die Kinder sollen in handlungsorientierter Auseinandersetzung mit ebenen Figuren durch Auslegen und Nachlegen, dekorative geometrische Zeichnungen und später ihren Vergleich und die Differenzierung auch mittels „Namen", also der Objektbegriffe und der Eigenschaftsbegriffe, für die Geometrie in ihrer Umwelt sensibilisiert werden, wobei auch stets die Motorik des Kindes verfeinert werden soll.

Nahtlos und zum Teil parallel vollzieht sich sodann der Übergang zur Geometrie in der Grundschule über das Studium und die Benennung der Winkel und Linien, die anschließend definiert werden, Zeichnenlernen mit verschiedenen Instrumenten wie z.B. einem Zirkel mit Reißfeder für Linien mit dickflüssiger Tinte. Relations- und Eigenschaftsbegriffe werden eingeführt und beispielsweise über Dekorationen der entsprechenden Attribute vertieft – so kann eine „Dekoration" den Umfang besonders hervorheben, eine andere die Mittellinien. Mit ihrer Spezifizierung einiger Vierecksformen, des Kreises, von Polygonen nähert sich Montessori bereits in der Vorschulphase bzw. der Eingangsphase der Grundschule der Spezifizierung und Hierarchisierung von Begriffen zu, wie sie heute ggf. am Ende der Grundschulzeit in Teilen als „Haus der Vierecke" visualisiert werden können. Dabei finden sich durchgängig für den Leser, von Montessori avisiert sind Lehrer und Erzieher, Erläuterungen der verwendeten Inhalte (Begriffe, Definitionen, Konstruktionsanweisungen). Ihre eigene Begrifflichkeit orientiert sich vermutlich am Verständnis ihrer Leser, denn sie verwendet teils unscharfe Begriffe wie z.B. „Linie" statt beispielsweise des an dieser Stelle eigentlich zu erwartenden Begriffs der „Strecke" (S. 36) oder „Gerade" (S. 31). Der umfangreiche wissenschaftliche pädagogische und didaktische Apparat zur Psychogeometrie birgt in den Fußnoten zahlreiche Anmerkungen zu den Einschränkungen hinsichtlich der häufig für heutige Lehre zu unspezifizierten Montessori'schen Begriffe. Die Kommentare und Ergänzungen tragen dabei nicht nur zum Verständnis bei, sondern unterstützen Montessoris ursprüngliche Intention, indem sie heutigen Lesern die Ideen der Pädagogin für ihren eigenen Unterricht zugänglich machen.

Nach diesem sehr großen Teil zu vorschulischer und früher schulischer Bildung legt die Pädagogin im zweiten Kapitel „Einführung in die Grundschulphase" Grundzüge ihrer Methode dar, die auf der Grundlage entdeckenden Lernens über Handlungsorientierung vom Konkreten zum Abstrakten fortschreitet und für deren didaktische Einordnung der Leser von den Herausgebern mit ent-

[9] M. Montessori (2012b) 72

sprechender „moderner“ Terminologie in den Anmerkungen unterstützt wird. Dabei spielen die Wörter, also die Fachsprache bzw. Fachterminologie, für Montessori eine bedeutende Rolle, benötigt das Kind sie doch auch zur Benennung und Erläuterung eigener Entdeckungen, wie sie auf S. 70 erläutert. Der Zugang zu den zu erschließenden geometrischen Begriffen wie der Winkelhalbierenden erfolgt hauptsächlich über die Materialisierung in hierfür vorgesehenen Materialien oder über Konstruktionen mit dem Zirkel.

Die Kapitel III bis VII sind mehr fachinhaltlich strukturiert. Im dritten Kapitel („Vergleich zwischen den Figuren“) werden Figuren hinsichtlich der Flächengröße bzw. ihrer Form (ähnlich/gleich) verglichen, worauf logische bzw. operative indirekte Vergleiche über die Bruchteile bzw. einbeschriebene/umbeschriebene Figuren aufgebaut werden. Pythagoräische Zusammenhänge werden hier ebenso wie im nachfolgenden Kapitel („Das gleichseitige Dreieck“) untersucht und zu „Pythagorasfiguren“ dekoriert. Ebenfalls durch ‚direktes Abmessen oder Überlegen‘ kann das Kind im fünften Kapitel „Der Kreis“ Winkel und Bruchteile untersuchen. Montessori nutzt die Arbeit mit dem Kreis zur Einführung materialorientierter Bruchrechnung und verbindet dann die gemeine Bruchrechnung mit der Dezimalbruchrechnung. Im sechsten Kapitel werden „Anwendungen der Äquivalenz“, verstanden als Flächeninhaltsgleichheit, der verschiedensten geometrischen Figuren von der Berechnung des Flächeninhalts bei Rechtecken über Einheitsquadrate hergeleitet; über die Abwicklung des Umfangs und eine hierdurch mögliche Annäherung an Pi kann auch der Flächeninhalt des Kreises approximiert werden. Heterogene Probleme geometrischer Art zum „Auftauchen“ von rechten Winkeln in der ebenen Geometrie (u. a. in pythagoräischen Zusammenhängen) und zur Quadratur des Kreises beschließen das Werk mit einem letzten Kapitel („Überlegungen“).

Wie auch in der Psychoarithmetik, ergänzen die Herausgeber die Edition um zusätzliche Texte, hier allerdings um Vorträge bzw. Typoskripte Montessoris zur „Psychologie der Mathematik“ (1935) und „Psychogeometrie und Psychoarithmetik“ (1935), in denen die Pädagogin mit nur wenigen Wirkungs- und Erfahrungsberichten die Entwicklung und Durchführung ihrer Methode lebendig werden lässt und aus denen ein didaktischer Forscher faszinierende Einblicke in ihre Art der Ausbildung und Bildung jungen Menschen zu gewinnen vermag. Ein weiterer Anhang mit Abbildungen aus der englischen Ausgabe von 2011 rundet ähnlich wie in der Psychoarithmetik neben einem ausführliches und aktuellen Quellen- und Literaturverzeichnis zum Thema, einem Personenverzeichnis und dem Sachregister die vorliegende Edition ab.

Die hier vorliegende deutschsprachige Ausgabe zieht als Basis neben der spanischen Originalausgabe auch die niederländische und die aktuelle englische Ausgabe heran, die auf einem erst kürzlich im Archiv der AMI gefundenen Typoskript aus dem Besitz Montessoris selbst beruht. Die Übersetzung ist wie auch die Psychoarithmetik gut lesbar und gibt die Gedanken Montessoris zur Geometrie gerade auch durch die Abgleichung mit den anderen Ausgaben verständlich wieder. Dennoch fordern einige der Übersetzungen zur kritischen Nachfrage heraus, wenn etwa „Toda materia de cultura“[10] in der deutschen Übersetzung als „Jedes Fach der Bildung“[11] wiedergegeben wird und so der hier angesprochene Zusammenhang von u.a. Arithmetik und Geometrie zur übergeordneten Kosmischen Theorie auf bloße Schulfächer reduziert wird.

Obgleich in einem vergleichbaren Format wie die Psychoarithmetik innerhalb der „Gesammelten Werke“ erschienen, ist der wissenschaftliche Apparat der Psychogeometrie deutlich umfangreicher: Neben Hinweisen auf Unterschiede in den anderen Editionen oder zum heutigen Aussehen bzw. Gebrauch erhält der Leser Anmerkungen quellenexegetischer Art zum Verständnis der Schrift aus dem historischen Kontext heraus, sei es zum Auftauchen zentraler Begriffe der Methode Montessoris in weiteren Schriften oder auch ihrer Klärung. Aus mathematikdidaktischer Sicht sind besonders die Ergänzungen zu den bei Montessori genutzten Methoden und Begriffen wegweisend für ein gesichertes Verständnis des Textes für den Leser. Dazu werden gegebenenfalls auch die ebenfalls aus der spanischen Originalausgabe übernommenen farbigen Zeichnungen mit Hinweis auf die Korrektur um Fehler verbessert. Der verwendete Apparat und die adressatengerechte, gut lesbare und zielführende Einführung zeigt überdeutlich die wissenschaftliche „Herkunft“ der beiden Herausgeber als auf dem Gebiet der Montessori-Forschung und -Anwendung ausgewiesene Experten aus Pädagogik bzw. Mathematikdidaktik und unterstützt damit *idealiter* die von Montessori selbst genannte und von den Herausgebern in ih-

[10] M. Montessori (1934) 15
[11] M. Montessori (2012b) 10
[12] Ludwig / Winter (2012) XVI

rer Einführung treffend elaborierte Zielsetzung des Werkes als eine Art „Fundgrube“[12] für die Hand des Lehrers, um auf der Grundlage der kognitiven und psychischen Entwicklung Ideen für das Entdecken von Zusammenhängen und Beziehungen zu bieten, die sie selbst in vielen Jahren erprobt hat. Dabei gehen die von ihr erprobten Inhalte weit über die in der heutigen Grundschule erwarteten Kompetenzbereiche hinaus und können durch die der kindlichen Entwicklung angemessenen Methoden und Ideen zudem die unteren Jahrgänge der Sekundarstufe I bereichern.

Montessoris Handbücher – Didaktische Handreichungen für Lehrer?

Während die Psychoarithmetik insbesondere durch den hier deutlich werdenden genetischen Aufbau beim Lernenden eine zentrale Quelle für ein Verständnis der „Methode“ Montessoris hinsichtlich des Mathematiklernens von Kindern darstellt, vermag die Psychogeometrie das Repertoire kreativer Ideen zur handlungsorientierten Auseinandersetzung mit ebener Geometrie bei jedem Lehrenden zu bereichern, ganz gleich, ob im Montessori-Bereich tätig oder nicht. Beide Werke unterstützen die Montessori-Forschung ungemein, zumal in den nun in deutscher Sprache vorliegenden Quellen auch Bereiche involviert sind, deren mangelnde Berücksichtigung in Montessoris Texten dank bislang fehlender Quellen Anlass für zahlreiche Kritik gegeben hat, sei es die Kreativität, die in der Psychogeometrie sehr deutlich zu Tage tritt, oder die Anwendungsorientierung, die sich aus der Psychoarithmetik ergibt: Hier bieten sich durch die nun vorliegenden Quellen Möglichkeiten für differenziertere Betrachtungen der Methode Montessoris.

Psychogeometrie und Psychoarithmetik bedürfen als *historischer Quelle* zum Mathematiklernen von Kindern wie die übrigen Werke Montessoris auch der Interpretation zum Verständnis ihrer sehr scharfsinnigen Ideen, die sich aber auf Grund der Montessori zu ihrer Zeit noch fehlenden Terminologie und Begriffe nicht ohne weiteres erschließen lassen. Angesichts ihres vielschichtigen hochkomplexen Konzeptes bzw. ihrer Methode bei der gleichzeitigen Problematik fehlender Begrifflichkeit und der äußerst blumigen Ausdrucksweise der wortgewandten Italienerin wäre für die weitere Forschung eine deutsch-spanische Ausgabe wünschenswert gewesen, wenngleich dies die Lesbarkeit der Texte beeinträchtigt hätte. Vielleicht kann eine digitale Auflage der Werke Montessoris hier in nicht allzu ferner Zukunft Abhilfe schaffen.

Dass die Editionen selbst bereits die Erstellung quantitativer vergleichender Unterrichtsforschung möglich macht, wie Schneeberger es so enthusiastisch in seinem Geleitwort zur Psychoarithmetik formuliert, bleibt somit fraglich, jedoch regen die deutschen Editionen der bislang nur schwer zugänglichen Texte Montessoris hoffentlich künftig die weitere mathematikdidaktische Forschung zum Thema an: Die in Psychoarithmetik und Psychogeometrie verschriftlichten Erfahrungen Montessoris zeigen überdeutlich das noch nicht annähernd ausgereizte didaktische Potenzial ihrer Methode aus einer Zeit, als Didaktik als Wissenschaft noch nicht geboren war. Dennoch vermochte die Methode Montessoris und ihre Elemente zahllose Pädagogen und Didaktiker zu begeistern und direkt wie indirekt ihren Teil zur Entwicklung heutiger Mathematikdidaktik beizutragen – genannt seien hier *pars pro toto* ihre Ideen zu einer stark strukturorientierten Mathematik, wie sie über das Programm *mathe 2000* in die Didaktik eingeflossen sind, die Vorstellungen des mit ihrer Arbeit vertrauten Wagenscheins zum entdeckend-genetischen Lernen oder auch der tiefe Eindruck, den die Ergebnisse ihrer Arbeit und insbesondere die Ganzheitlichkeit ihrer Methode auf Freudenthal gemacht haben, einen der Ur-Väter der noch jungen Mathematikdidaktik als Wissenschaft und Forschungsgebiet.

Literatur

Baumann, Harold (2012): Einführung des Herausgebers. In: Montessori, Maria: Psychoarithmetik. Die Arithmetik dargestellt unter Berücksichtigung kinderpsychologischer Erfahrungen während 25 Jahren. Hg. v. Baumann, Harold Frank (Maria Montessori – Gesammelte Werke, Bd. 11). Freiburg/Basel/Wien: Herder, XIX–XXV

Ludwig, Harald/Winter, Martin (2012): Einführung der Herausgeber. In: Montessori, Maria: Psychogeometrie. Das Studium der Geometrie basierend auf der Psychologie des Kindes. Hg. v. Ludwig, Harald/Winter, Martin (Maria Montessori – Gesammelte Werke, Bd. 12). Freiburg/Basel/Wien: Herder, IX–XXII

Montessori, Maria (1934): Psico-Geometria. El Estudío de la Geometria Basado en la Psicologia Infantil. Ilustrada con 265 Figuras en Colores. Barcelona: Araluce

Montessori, Maria (1971): Psicoaritmetica. L'Aritmetica Sviluppata Secondo le Indicazioni della Psicologia Infantile Durante Venticinque Anni di Esperienze. Mit einem Vorwort von Mario M. Montessori. Hg. v. Grazzini, Camillo. O.O.: Aldo Garzanti

Montessori, Maria (2003): Entwicklungsmaterialien in der Schule des Kindes. Dörfles: Renate Götz

Montessori, Maria (2005): Das kreative Kind. Der absorbierende Geist (16. Auflage). Hg. v. Oswald, Paul/Schulz-Benesch, Günter (Schriften des Willmann-Instituts). Freiburg/Basel/Wien: Herder

Maria Montessori (2012a): Psychoarithmetik. Die Arithmetik dargestellt unter Berücksichtigung kinderpsychologischer Erfahrungen während 25 Jahren. Hg. v. Baumann, Harold

Frank (Maria Montessori – Gesammelte Werke, Bd. 11). Freiburg/Basel/Wien: Herder
Maria Montessori (2012b): Psychogeometrie. Das Studium der Geometrie basierend auf der Psychologie des Kindes. Hg. v. Ludwig, Harald/Winter, Martin (Maria Montessori – Gesammelte Werke, Bd. 12). Freiburg/Basel/Wien: Herder
Montessori, Mario M. (1959): Mathematik im Leben des Kindes in unserer sich verändernden Welt. In: Mitteilungen der deutschen Montessori-Gesellschaft 7.2 (1959) 5–6
Montessori, Mario M. (1961): Maria Montessori's Contribution to the Cultivation of the Mathematical Mind. In: Internationale Zeitschrift für Erziehungswissenschaften 7 (1961)/ zugleich Kind und Mathematik. International Montessori Congress, 's-Gravenhage: Martinus Nijhoff, 134–141
Thom, Sandra (2010): Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris. Dissertation, Hildesheim: Franzbecker

Sandra Thom, Alter Postweg 25, 26215 Wiefelstede-Heidkamp, Email: sandra.thom@uni-vechta.de

John Stillwell: Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit – Eine mathematische Reise zu den vielseitigen Auswirkungen der Unendlichkeit

Rezensiert von Helmut Albrecht

„Eine mathematische Reise an das Ende der Gedanken" hätte der Springer-Verlag sicher ebenso gut als Untertitel wählen können für die von Roland Girgensohn besorgte deutsche Übersetzung von Stillwells Buch „Road to Infinity". In der Tat stoßen wir Menschen beim Nachdenken über die Unendlichkeit recht schnell an die geistigen Grenzen unseres endlichen Verstands. Vielleicht macht dies aber auch den besonderen Reiz der Wissenschaften insgesamt und insbesondere der Mathematik aus, schrieb doch schon Dedekind: „Für einen mit unbegrenzten Verstande begabten Menschen, dem die letzten von uns durch eine lange Kette von Schlüssen erhaltenen Konsequenzen unmittelbar evidente Wahrheiten wären, würde eigentlich keine Wissenschaft mehr existieren ..."

Stillwell geht es allerdings in seinem Buch nicht darum, die Unendlichkeit zu erklären, er verfolgt vielmehr einen weitergehenden Ansatz: Es soll gezeigt werden, „wie Mengenlehre und Logik sich gegenseitig befruchten und wie sie sich zudem auf die klassische Mathematik auszuwirken beginnen." Er versucht dies auf gut 200 Seiten in sieben Kapiteln, denen allesamt ein „Historischer Hintergrund" beigefügt ist, um „die Thematik in den größeren Zusammenhang der Mathematik und ihrer Geschichte einzuordnen." Der Autor verspricht zudem, dass für das Nachvollziehen seiner Gedanken nur „wenig vorausgesetzt wird, was über die Schulmathematik hinaus geht."

Das erste Kapitel steigt ein bei Cantor und seinen Arbeiten über abzählbare und überabzählbare unendliche Mengen, thematisiert „Hilberts Hotel", die beiden Cantorschen Diagonalverfahren und stellt die Kardinalität des Kontinuums dar.

Das Konzept der Ordinalzahlen bildet das Gerüst für das zweite Kapitel. Die Frage, wie man über die abzählbaren Ordinalzahlen hinaus weiterzählen kann, führt an dieser Stelle über das Auswahlaxiom, die Cantorsche Normalform und Anmerkungen zur Induktion zur Kontinuumshypothese. Der Berechenbarkeitsbegriff in der Mathematik und das Beweisen – insbesondere die damit zusammenhängenden Schwierigkeiten – werden im dritten Kapitel anhand der Gödelschen Unvollständigkeitssätze dargestellt. Dies leitet über zur Logik, der das vierte Kapitel gewidmet ist. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit der Arithmetik und das sechste schließlich mit natürlichen unbeweisbaren Aussagen.

Das siebte Kapitel soll schließlich als Epilog die bisher umrissenen Themen zusammenfassen und aufzeigen, wie die Unendlichkeit den Bereich des Beweisbaren begrenzt und unser Wissen über natürliche Zahlen beeinflusst.

Am Ende hat der Autor den Leser ein gutes Stück auf der „Straße zur Unendlichkeit" begleitet und sicher so manche Aus- und Einblicke in interessante und aktuelle Problemstellungen der Mathematik und des menschlichen Denkens gewährt.

Es ist aber bestimmt auch deutlich geworden, dass diese Straße zur Unendlichkeit – genau wie im richtigen Leben – noch mit sehr vielen Baustellen versehen ist, von denen man sich fragt, ob sie jemals vollendet sein werden. Wer diese Diskrepanz aushält, für den mag das vorliegende Buch eine interessante Lektüre beinhalten. Keinesfalls täuschen lassen darf man sich allerdings von der im Vorwort und auf dem hinteren Buchdeckel befindlichen Anmerkung, wonach der gegenseitigen Befruchtung von Mengenlehre und Logik noch nicht viel Raum in allgemein verständlichen Fragestellungen gegeben worden ist. Wer daraus leichtgläubig folgert, dass Stillwells Buch „allgemein verständlich" sei, wird sich schon nach den ersten Seiten getäuscht sehen. Auch die Angabe des Autors, dass zum Verständnis des Buchs „nur wenig über die Schulmathematik Hinausgehendes" benötigt werde, kann getrost mit einer gewissen Skepsis begegnet werden – einige Semester Mathematikstudium sollten es mindestens sein!

John Stillwell: Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Berlin/Heidelberg 2014, 236 Seiten, ISBN 978-3-642-37844-7, €24,99

Helmut Albrecht, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Institut für Mathematik/Informatik, Oberbettringer Straße 200, 73525 Schwäbisch Gmünd, Email: helmut.albrecht@ph-gmuend.de

Verleihung des Förderpreises der GDM 2014 in Koblenz

Edith Schneider

Der GDM Förderpreis wird alle zwei Jahre an eine Wissenschaftlerin bzw. einen Wissenschaftler aus dem deutschsprachigen Bereich für eine herausragende Dissertation vergeben.

Für den diesjährigen Förderpreis lagen der Jury – Regina Bruder, Tommy Dreyfus, Edith Schneider, Anna Susanne Steinweg, Hans-Georg Weigand – neun ausgezeichnete Dissertationen vor. In einem mehrschrittigen Verfahren bemühte sich die Jury zu einer gemeinsamen Entscheidung zu kommen. Kein leichtes Unterfangen!

Für die Entscheidungsfindung orientierte sich die Jury wieder an folgenden Kriterien:

- Bedeutsamkeit des thematischen Fokus für den Kern der Mathematikdidaktik
- Theoretische und methodologische Fundiertheit
- Einbettung in den Stand der Forschung
- Sauberkeit und Angemessenheit der Methoden
- Argumentative Stringenz und Kohärenz, Gestaltungsintensität, Lesbarkeit

Kriterien, die eine Dissertation aus den ausgezeichneten Dissertation herausheben:

- Innovativität im Sinne des Eröffnens wegweisender Perspektiven (methodisch, inhaltlich, theoretisch, ...)
- Hoher eigenständiger (Forschungs-)Anteil
- Überzeugende Substanz der Ergebnisse
- Herausragende Bedeutsamkeit der Fragestellung

Es ist der Jury bewusst, dass diese Kriterienliste nicht vollständig ist und dass sie auch hätte anders aussehen können. Sie war der Jury jedoch in ihrem Bemühen um eine faire, objektive Entscheidung sehr hilfreich.

Die Entscheidungsfindung war schwierig, da die – an sich erfreuliche! – Verschiedenheit der in den Arbeiten bearbeiteten Forschungsfragen und eingesetzten Forschungsparadigmen eine Auswahl nicht einfach machte. Für die im Zuge dieses Prozesses konstruktiven und stets sachlichen Diskussionen möchte ich mich an dieser Stelle bei den Mitgliedern der Jury bedanken. Sie sind die Grundlage dafür, dass der Liste der bisherigen Förderpreisträgerinnen und Förderpreisträger der GDM ein weiterer Namen hinzugefügt werden kann:

Der Förderpreis 2014 der GDM ergeht an Frau Dr. Kathleen Philipp für ihre Dissertation mit dem Titel *Experimentelles Denken.Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz.* Betreuer und Erstgutachter der Dissertation: Prof. Dr. Timo Leuders, Zweitgutachterin: Prof. Dr. Bärbel Barzel. Die Dissertation ist 2013 in der Reihe „Freiburger Empirische Forschung in der Mathematikdidaktik" erschienen.

Laudatio

Mit ihrer Dissertationsschrift zu Experimentellem Denken thematisiert Frau Philipp ein für den Kern der Mathematikdidaktik relevantes, hoch aktuelles und übergreifendes Gebiet, zu dem zwar in den letzten Jahren in der Mathematikdidaktik viel

Preisträgerin Kathleen Philipp
(Foto: Hanka Pohontsch, ©Universität Koblenz)

gearbeitet wurde – aber nicht im Bereich der Grundlagenforschung, wo ein wesentlicher Teil von K. Philipps Arbeit eingeordnet werden kann. Der Begriff des Experimentierens wird dabei von K. Philipp insbesondere hinsichtlich seiner Anwendbarkeit auf innermathematische Situationen reflektiert.

Eine besondere Bedeutsamkeit der Arbeit von Frau Philipp kommt dem theoretischen Teil zu und liegt in der Schärfung der Theorie des experimentellen Denkens, wo sie den Begriff des „innermathematischen Experimentierens“ in systematische Beziehung zu bestehender (nationaler und internationaler) Literatur bringt und Beziehungen unter anderem zwischen mathematischen, erkenntnisphilosophischen, wissenschaftssoziologischen und naturwissenschaftlichen Ansätzen stiftet bzw. – wo erforderlich - auch Abgrenzungen vornimmt. Die insgesamt stimmige Deskription dieser unterschiedlichen Ansätze und deren komprimierte Zusammenführung und Pointierung wirkt dabei im nachvollziehbaren und sensiblen Ringen um die Positionierung des eigenen theoretischen Konzepts des Experimentierens überzeugend. Die kohärente Darstellungsweise von K. Philipp verliert nie die Forschungsfrage aus den Augen. Ebenso unterscheidet sie stets stimmig zwischen Experimentellem Denken als theoretischem Konzept und dem Prozess des Experimentierens, der sich in Kompetenzen beschreiben und empirisch im Kontext mathematischen Problemlösens untersuchen lässt.

Ebenso bemerkenswert ist der empirische Teil der Dissertationsschrift: In diesem Teil der Arbeit zeigt Frau Philipp in beachtenswerter Weise wie empirisch fundierte Theoriebildung, hypothesenprüfende Absicherung des entwickelten Modells sowie eine Evaluation einer (praxisnahen) Interventionsstudie mit selbst entwickelten Testinstrumenten ineinander greifen können. Qualitative und quantitative empirische Forschung gehen hier – notwendigerweise – Hand in Hand. Konkret erfolgt zunächst mittels qualitativer Methodik eine Ausdifferenzierung und Validierung des theoretischen Modells. Die so gewonnenen empirischen Erkenntnisse bilden dann die Basis für eine Interventionsstudie zur Förderung experimenteller Kompetenzen in innermathematischen Zusammenhängen, die mit quantitativer Methodik evaluiert wird. Dass hier die Methoden der quantitativen Forschung Kathleen Philipp zwangsläufig zu Einschränkungen und Neupositionierungen von Komponenten des Modells führen werden von ihr in großer Klarheit nachvollziehbar und offen dargelegt, Schwierigkeiten werden nicht verschleiert, sondern konstruktiv genutzt und – wenn möglich – inhaltlich erklärt.

Die Arbeit ist konsistent aufgebaut und sehr gut strukturiert. Bemerkenswert ist die Fähigkeit von Kathleen Philipp Theorien knapp und präzise zusammenzufassen ohne diese zu trivialisieren.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Die Dissertation von Frau Philipp besticht durch eine hohe theoretische wie methodische Qualität. Frau Philipp gelingt es dabei in ihrer Dissertation in überzeugender Weise, eine Reihe für die Mathematikdidaktik relevanter Faktoren zu bearbeiten und letztendlich in konsistenter Weise zu einem Gesamten zu vereinen:

- Zum einen substantielle eigene Theoriebildung mit systematischer und solider Verortung und Einbettung in den bisherigen Erkenntnisstand, und qualitativ empirischer Prüfung und Absicherung der Theorie – also ein originärer und relevanter Beitrag zur mathematikdidaktischen Grundlagenforschung;
- zum anderen eine Interventionsstudie mit einem reflektierten Einsatz quantitativer Methoden zur Absicherung von Theorieelementen, die den Anforderungen an eine solide Methodennutzung und Methodenreflexion gerecht wird.

Dabei wird die Wichtigkeit einer unmittelbare Bedeutsamkeit der Forschungsarbeit für die schulische Praxis von Frau Philipp nicht aus den Augen zu verloren.

Die Jury gratuliert Frau Philipp zu dieser herausragenden Leistung, die sie zweifelsfrei als förderpreiswürdig sieht.

Edith Schneider, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Institut für Didaktik der Mathematik, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich
Email: edith.schneider@aau.at

Selbstvorstellung in diesem Jahr gewählter Beiratsmitglieder

Gabriella Ambrus

Liebe Mitglieder der GDM, ich möchte mich herzlich bedanken für die Wahl zum Beirat der GDM in Koblenz und möchte mich Ihnen an dieser Stelle kurz vorstellen.

Nach meinem Abitur 1978 studierte ich Mathematik und Chemie an der Pädagogischen Hochschulfakultät der Universität ELTE (Eötvös Loránd Universität) in Budapest, im Anschluss daran Mathematik für das Lehramt an Gymnasien an der Universität Debrecen. Vier Jahre lang unterrichtete ich als Lehrerin meine beiden studierten Fächer Mathematik und Chemie in einer achtklassigen Schule in Budapest. Im Jahr 1989 wurde mir eine Stelle am Lehrstuhl für Mathematik an der Pädagogischen Hochschulfakultät der ELTE angeboten, an der ich bis 2005 in der Lehrerausbildung tätig war.

In den neunziger Jahren habe ich im Rahmen des TEMPUS Projekts mehrere Monate an der Universität Augsburg und an dem Laboratoire Leibniz in Grenoble verbracht. Die ermöglichte mir, meine Deutsch- sowie Französischsprachkenntnisse weiter zu vertiefen. Darüberhinaus erhielt ich Einblicke in die deutsche und französische Lehrerausbildung. Die Grundlagen meiner Kenntnisse über Cabri-Geometrie habe ich mir in Grenoble angeeignet. Diese konnte ich später in der Lehrerausbildung in Budapest und auch im Rahmen meiner Dissertation gut anwenden. Im Jahr 2004 promovierte ich an der Universität Salzburg mit dem Thema : Übung in der Planung des Mathematikunterrichts. 2005 habe ich ein PhD Diplom an der Universität Debrecen erhalten.

Seit 2005 bin ich an der Universität ELTE tätig als Assistenzprofessor im Mathematikdidaktischen Zentrum.

Neben meiner Tätigkeit in der Lehrerausbildung war ich/bin ich in den letzten Jahren in mehreren ungarischen TÁMOP und internationalen EU-Projekten (LEMA, Mathbridge) beteiligt. Über fachdidaktische Publikationen hinaus arbeite ich noch als Autor und Lektor ungarischer Lehrbücher.

Meine aktuellen Forschungsinteressen sind insbesondere: Die schulische Verwendung von realitätsnahen Aufgaben bzw. Modellierungsaufgaben, Möglichkeiten der ungarischen problemlösenden Traditionen, Etablierung einer neuen Aufgabenkultur in Ungarn, sowie historische Bezüge zu diesen Themen anhand alter Lehrbücher.

Ich nehme regelmäßig als Vortragende an ungarischen und internationalen mathematikdidaktischen Konferenzen teil, und habe im Rahmen der Zusammenarbeit der Universitäten FSU und ELTE je viermal eine Forschungswoche an der FSU in Jena verbracht. An der Arbeit der TTOMC (Zentrum für Didaktik der Naturwissenschaften an der ELTE) bin ich aktiv beteiligt und engagiere mich in der Ausarbeitung von Materialien für die Lehrerausbildung an der ELTE Universität.

Seit 1995 bin ich Mitglied der GDM und seitdem nehme ich regelmäßig an den Jahrestagungen teil.

Ich bin verheiratet, habe ich zwei Söhne und eine Tochter.

Michael Gaidoschik

Liebe GDM-Mitglieder, gerne nutze ich die von den GDM-Nachrichten gewährte Möglichkeit, mich als neu gewähltes Mitglied des GDM-Beirates (herzlichen Dank für die Wahl!) vorzustellen.

Ich wurde 1965 in Hainburg an der Donau in Niederösterreich geboren, maturierte 1983 am Bundesoberstufengymnasium Güssing im Burgenland und studierte an der Universität Wien zunächst Philosophie, ehe ich (zur Erleichterung meiner Eltern) auf das vergleichsweise solide Studium des Lehramts für Gymnasium in den Fächern Philosophie, Psychologie und Pädagogik sowie Latein umsattelte.

Erst nach der Sponsion Ende 1991 begann meine Hinwendung zur Mathematikdidaktik – im Zuge meiner Beschäftigung mit sogenannter „Rechenschwäche", deren (in Wien damals verbreitete) Erklärung durch zu Grunde liegende „basale Teilleistungsschwächen“ mir nie eingeleuchtet hat. Dass Kinder Mathematik treiben müssen, um Mathematik lernen zu können, schien mir einleuchtend, ebenso, dass ich Mathematikdidaktik lernen muss, um Kinder beim Mathematiklernen unterstützen zu können. So lernte ich einerseits aus Büchern, andererseits und vielleicht noch mehr in der Arbeit mit Kindern, veröffentlichte dazu den einen oder anderen Text und wurde bald auch von Volksschullehrkräften und Pädagogischen Instituten eingeladen, meine Erfahrungen in der Fortbildung von Lehrkräften weiterzugeben.

Dabei betrieb ich nolens volens jahrelang Etikettenschwindel: Eingeladen wurde ich hartnäckig als Experte für „Dyskalkulie“, obwohl ich mich, wann immer gefragt und öfter noch ungefragt, für diese Krankheit nicht zuständig erkläre. Referiert habe ich dennoch stets darüber, was ich unter einem guten Mathematikunterricht für die Grundschule verstehe; also über einen Mathematikunterricht, der im Rahmen des in schulischen Strukturen Möglichen Kinder aller Leistungsstufen darin unterstützt, grundlegende mathematische Muster und Strukturen zu erfassen und für sich zu nutzen und damit einen großen Teil der Schwierigkeiten, mit denen ich in meiner Förderarbeit Tag für Tag konfrontiert war, gar nicht erst aufkommen lässt.

Seit 2004 durfte ich dann als Lehrbeauftragter an der PH Wien, später auch der KPH Wien-Strebersdorf auch in der Ausbildung künftiger Volksschullehrkräfte mitwirken – stets an der Kippe zur Verzweiflung über die curricularen Vorgaben, mit denen wir uns in Österreich immer noch herumzuschlagen haben. 2004 begann auch die berufsbegleitende Arbeit an meiner Dissertation („Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres“), die ich 2010 endlich abschließen konnte. Im März 2014 wurde ich dann, zu meiner immer noch anhaltenden Überraschung, als Professor für Didaktik der Mathematik in der Grundschule an die Universität Klagenfurt berufen. Als „Verbundprofessor“ bin ich in der Lehre vorwiegend an der Pädagogischen Hochschule Kärnten tätig, an der Universität forsche ich aktuell und will ich in den nächsten drei Jahren forschen zum Lehren und Lernen des kleinen Einmaleins, des dezimalen Stellenwertsystems und – immer noch und immer wieder – zu Möglichkeiten und Grenzen der unterrichtlichen Unterstützung bei der Ablösung vom zählenden Rechnen. Mitglied der GDM bin ich vermutlich seit 2005, innerhalb der GDM bislang im Arbeitskreis Grundschule und natürlich im Arbeitskreis Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich aktiv – und künftig mit großer Freude auch im Beirat!

Ulrich Kortenkamp

Liebe Mitglieder der GDM, ich bedanke mich herzlich für die Wiederwahl in den Beirat der GDM. Nach 2011 darf ich nun für weitere drei Jahre mitwirken und möchte die Gelegenheit nutzen, mich nun in dieser neu eingeführten Rubrik der Mitteilungen der GDM kurz vorzustellen.

Ich habe von 1989 bis 1995 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Mathematik mit Nebenfach Informatik studiert. Im März 1993 bin ich bereits nach Berlin gezogen, um dort unter anderem bei Emo Welzl an der FU Berlin zu studieren. Unmittelbar nach meinem Abschluss als Diplommathematiker habe ich im April 1995 als Doktorand bei Günter Ziegler an der TU Berlin begonnen. Als sein Mitarbeiter Jürgen Richter-Gebert 1997 einen Ruf an die ETH Zürich erhielt, habe ich die Gelegenheit genutzt und bin mit dorthin gegangen um schließlich 1999 über „Foundations of Dynamic Geometry“ zu promovieren. Mit dieser Arbeit habe ich versucht, die mathematischen und informatischen Grundlagen von DGS zu beschreiben – inklusive der Auswirkungen auf die Nutzung solcher Systeme im Mathematikunterricht. Dabei flossen die Erfahrungen ein, die ich gemeinsamen mit Jürgen Richter-Gebert seit 1996 bei der Gestaltung der interaktiven Geometrie-Software Cinderella gewonnen hatte.

Nach der Promotion habe ich an der Freien Universität Berlin als Wissenschaftlicher Assistent im Institut für Informatik in der Arbeitsgruppe von Günter Rote gearbeitet. Nach einem Jahr als Gastprofessor bei Günter Ziegler an der TU Berlin wurde ich 2004 auf eine Juniorprofessur für Didaktik der Mathematik, ebenfalls an der TU Berlin, berufen. Damit vollzog sich auch mein endgültiger Schwenk in die Mathematikdidaktik, und ich nutzte die Gelegenheit, Unterrichtserfahrung an mehreren Berliner Schulen zu sammeln. Leider wurde die Lehramtsausbildung an der TU Berlin eingestellt (eine politische Entscheidung, die hoffentlich nicht mit meinem Wirken dort zusammenhängt), und 2006 nahm ich dann einen Ruf auf eine Professur für Medieninformatik und ihre Didaktik an der PH Schwäbisch Gmünd an. 2009 konnte ich dann wieder vollständig in die Mathematikdidaktik an der PH Karlsruhe (Nachfolge Ziegenbalg) wechseln. 2012 erhielt ich einen Ruf auf die Nachfolge Herget an der Martin-Luther-Universität Halle, wo ich bis heute den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik innehabe. Gemeinsam mit vielen anderen Kolleginnen und Kollegen bin ich inzwischen für das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) tätig, wo ich die Abteilung B „Informations- und Kommunikationsplattform" leite.

Neben meiner Arbeit in der Mathematikdidaktik, die sich vor allem dem Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht widmet, bin ich seit vielen Jahren auch in der GDM engagiert, der ich im Jahr 2000 beigetreten bin. Seit dem Jahr 2007 bin ich für die Homepage der Gesellschaft zuständig, seit dem Herbst desselben Jahres leite ich gemeinsam mit Anselm Lambert den Arbeitskreis Mathematikunterricht und Informatik. Neben diversen Umstrukturierungen, zum Beispiel für die Mitgliederdatenbank, treibe ich das Nachschlagewerk Madipedia voran, welches seit 2010 stetig wächst. Für die ICME-13 in Hamburg 2016 kümmere ich mich ebenfalls um die Darstellung der Konferenz im Internet. Dabei werden neue Formen der Internetnutzung – soziale Netzwerke wie Facebook und Twitter – immer wichtiger, weshalb ich versuche, auch diese Kommunikationskanäle immer mehr zu nutzen, sofern dies sinnvoll ist. Auch die GDM ist auf Facebook vertreten – wenn sie *mögen*, dann *liken* Sie sie doch!

Ich bedanke mich für das Vertrauen der Mitglieder der GDM und werde versuchen, dies durch meine weitere Arbeit im Beirat nicht zu enttäuschen!

Grußwort des 1. Vorsitzenden der GDM für Hans-Jürgen Elschenbroich zum 65. Geburtstag – Düsseldorf, am 30. 5. 2014

Rudolf vom Hofe

Lieber Hans-Jürgen Elschenbroich, liebe Festgesellschaft,
da die Zeit kurz ist, komme ich gleich zur Sache. Ich hatte das Glück, Hans-Jürgen Elschenbroich in ganz unterschiedlichen Situationen kennenzulernen: als Vortragenden in der Uni Bielefeld sowie auf vielen Tagungen der MNU und der GDM, als ausgewiesenen Fachmann für dynamische Geometriesoftware und als Kollegen im Gespräch am Ende einer Tagung; zum Beispiel im Schlesierhaus der Reinhardswaldschule oder im Rostigen Kegel in Soest. Hierbei konnte ich viele seiner positiven Facetten kennenlernen; heute möchte ich mich auf eine beschränken, die ein wichtiges und durchgehendes Persönlichkeitsmerkmal darstellt: Hans-Jürgen Elschenbroich ist ein Mann der Verbindung und des Ausgleichs, ein Mann der Brücken baut. Und typisch für diese Brücken ist, dass sie (1) begehbar und (2) auf einen festen Grund gebaut sind. Ich möchte dies an drei Beispielen deutlich machen:

Erstens: Brücken zwischen den Verbänden. Die Mathematikdidaktik hat ihren Stellenwert und Einfluss in den letzten Jahren nicht nur in den Schulen und Universitäten, sondern auch gegenüber den bildungspolitischen Handlungsträgern erfolgreich weiterentwickelt. Dies liegt wesentlich daran, dass es uns gelungen ist, die Kräfte der Verbände MNU, DMV und GDM zu bündeln. Ohne Persönlichkeiten wie Hans-Jürgen Elschenbroich, der maßgeblich an der Arbeit der gemeinsamen Kommissionen dieser Verbände beteiligt war, wäre dieser Erfolg und die gemeinsame Arbeit nicht möglich gewesen. Aber es ist nicht nur die Arbeit in den Kommissionen und Arbeitskreisen, die die Leistung Hans-Jürgen Elschenbroichs ausmacht, es ist vor allem das Eintreten für Gemeinsamkeit und die Verbindung von Mathematik, Unterricht und Didaktik, die sich in seiner Person ausdrückt. Dabei war bei aller Vermittlung und Verbindung immer klar, welcher Verband seine Heimat darstellt, es ist die MNU; dies will ich aus Sicht der GDM gerne neidlos anerkennen.

Zweitens: Brücken zwischen Technik und Mathematik. Eine besondere Fähigkeit und Leidenschaft Hans-Jürgen Elschenbroichs ist das Interesse an Technik, an neuen Medien und insbesondere an dynamischer Geometriesoftware. Dies wird eindrucksvoll dokumentiert durch eine Fülle von wissenschaftlichen und praxisorientierten Publikationen, wie man sie selten findet. Bei aller Faszination für die neuen technischen Möglichkeiten wird der Einsatz der Neuen Medien bei Hans-Jürgen Elschenbroich jedoch nie zum Selbstzweck. Auch hier ist die Basis klar: Es ist die Mathematik. Sie wird nicht etwa als sekundäres Anwendungsfeld für neue technische Möglichkeiten verstanden, vielmehr dient die Technik dazu, mathe-

Hans-Jürgen Elschenbroich (Foto: ©MNU)

matische Probleme auf neue Weise zugänglich zu machen. Dies gilt nicht nur für neue Anwendungsprobleme; es wird ganz besonders da deutlich, wo es Hans-Jürgen Elschenbroich gelingt, auch einen klassischen mathematischen Satz – wie etwa den Flächensatz von Pappos – mit Mitteln der DGS so aufzubereiten, dass dieser, unterstützt durch eine medienbasierte zündende Idee, auch heute für Lernende als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras einsichtig werden kann.

Und schließlich sind es auch *Brücken zwischen Wissenschaft und Praxis*, die zum Spezialgebiet Hans-Jürgen Elschenbroichs gehören. Dabei ist es ihm ein Anliegen, neue Ergebnisse der didaktischen Forschung an Lehrende und Studierende zu vermitteln. Aber auch hier ist die Basis unmissverständlich klar: Es geht nicht um wissenschaftliche Ergebnisse oder didaktische Prinzipien als Selbstzweck. Ausgangsbasis und Ziel seiner Arbeiten ist immer die Schulpraxis, hier schlägt bei aller Liebe für die Wissenschaft das Herz des Lehrers. Verbesserung und Innovation der Praxis sind das klare übergeordnete Ziel; der Schlüssel hierzu ist für Hans-Jürgen Elschenbroich die Erhöhung der Aktivität der Schüler, um Erklärungs-, Beurteilungs- und Handlungskompetenz zu entwickeln.

Dass Brücken, wie die von Hans-Jürgen Elschenbroich, begehbar sind und einen festen Grund haben ist nicht selbstverständlich. Manchmal steigen Brücken imposant auf und enden jedoch vor einem diffusen Nichts, manchmal auch vor einem intellektuellen Abgrund. Bei solchen Konstruktionen kann Hans-Jürgen Elschenbroich ein guter Berater für Verbesserungen sein, da er nicht nur Brückenbauer, sondern auch Brückenkritiker ist. Mit einem Beispiel für eine solche Brücke, die eigentlich mit großen roten Warnschildern gekennzeichnet werden müsste und die dennoch häufig betreten wird, möchte ich schließen:

Es handelt sich im einen Beitrag in der Zeit aus dem Jahr 2010, in dem ein Redakteur zunächst darstellt, dass junge Finnen durchschnittlich mit 22,5 Jahren von Zuhause ausziehen, Deutsche dagegen erst mit 24,5 Jahren, was ihn im Hinblick auf das bessere Abschneiden der Finnen bei PISA zu der Folgerung veranlasst: „Es gibt also einen deutlichen statistischen Zusammenhang zwischen dem Schulerfolg und dem Selbstständigwerden.“ Der Artikel hat dem entsprechend den Titel: „Schmeißt sie raus!“.

Hans-Jürgen Elschenbroich schreibt dazu in einem ZEIT-ONLINE-Artikel:

> Wäre nicht eher nach Gründen, die in der Zeit vor dem 16. Geburtstag liegen, zu suchen? Da gibt der Artikel einen kleinen aber bemerkenswerten Hinweis, der vom Autor allerdings nicht aufgegriffen wurde. Denn es wird festgestellt, dass die Finnen „ziemlich früh in ihrem Leben, mit etwa 13 Jahren, zum ersten Mal volltrunken sind, ohne dass ihre PISA-Ergebnisse darunter leiden.

Da liegt es doch eigentlich auf der Hand, dass es daran liegen muss! Oder? Wäre der Artikel nicht besser mit ‚Kippis‘ statt mit ‚Schmeißt sie raus‘ überschrieben worden?“ (Für die Gäste aus Süddeutschland: Ein Kippe ist so etwas wie ein Schäppsle) „Vollrausch für alle, dann klappt‘s auch mit PISA?!?“

Sehr geehrte Damen und Herren vom Ministerium, das ist natürlch keine ernsthafte Empfehlung für NRW; das Zitat endet mit einem Fragezeichen, einem Ausrufungszeichen und dann noch einem Fragezeichen. Im weiteren erklärt Hans-Jürgen Elschenbroich dem Redakteur in einer bewundernswerten Ruhe den Denkfehler seiner falschen Schussfolgerungen und endet mit dem Satz: „Die einzige auf der Hand liegende Schlussfolgerung dürfte meines Erachtens sein: Unterrichtet mehr, verständnisorientiert und lebensnah Statistik!“

Diesem Satz ist nichts mehr hinzuzufügen. Lieber Hans-Jürgen, ich möchte Dir ganz herzlich für Deinen Einsatz für die GDM danken und hoffe, dass Du uns als Brückenbauer und Brückenkritiker auch weiter erhalten bleibst. In diesem Sinne wünsche ich Dir einen wunderschönen Geburtstag und glückliche und erfolgreiche weitere Jahre.

Herzlichen Dank.

Leserbriefe

Sehr geehrter Herr Professor Dr. Vohns,
das Vorwort des 1. Vorsitzenden, Herrn Prof. Rudolf vom Hofe, hat mich als Gründer und ersten Vorsitzenden des GDM-Arbeitskreises Geometrie sehr gefreut. Leider hat sich ein kleiner Fehler eingeschlichen: Die erste Herbsttagung des Arbeitskreises für Geometrie fand 1984 nicht an der TU München, sondern am Gymnasium Neubiberg statt. Man hatte sich damals zwar bemüht, sehr viele Lehrerinnen und Lehrer aus dem Münchner Osten einzuladen, die Resonanz war aber doch nur sehr gering, so dass zukünftig diese Idee nicht weiter verfolgt wurde.

Mit freundlichen Grüßen
Meyer (karlhorst@meyer-muc.de)

Sehr geehrter Herr Vohns,
Anlass des Briefes sind die neuesten Mitteilungen der GDM Nr. 96.

Eigentlich wollte ich schon früher schreiben und mich einfach einmal für die Arbeit bedanken, die (schon früher, aber durch die Zunahme des Umfangs immer mehr) in der Vorbereitung der Hefte steckt. Aber immer wider habe ich es dann doch nicht getan.

Jetzt also, weil mein Name (S. 5 – diese wie alle folgenden Seitenangaben beziehen sich auf das genannte Heft) auftaucht? Die menschliche Eitelkeit gleicht dem mathematischen Epsilon: Beliebig (groß oder klein), aber immer größer als Null. Das ist aber dennoch sicher nicht der Grund.

Schon eher, weil viele Namen auftauchen, die mit persönlichen Erinnerungen verbunden sind. Das sind z. B. die Autoren im Magazin und Werner Blum mit seinem anrührenden Nachruf auf Arnold Kirsch. Dennoch hätte das wohl noch nicht ausgereicht, „zur Feder“ zu greifen, also dafür den Computer anzufahren.

Schon eher, dass die Stoffdidaktik (endlich) wieder ohne schmähende Adjektive auftaucht – im Nachruf von Werner Blum (S. 75 f.) und im Bericht über den Arbeitskreis Geometrie (S. 34 samt der hinteren inneren Umschlagseite – so hoffentlich Anstoß zu einer Diskussion unter Einbeziehung anderer, „modernerer“ Aspekte der Mathematikdidaktik und der Bezugswissenschaften) – oder der Hinweis von Lothar Profke auf den Einstieg in den Geometrieunterricht von der Raumgeometrie aus (S. 32). Aber wahrscheinlich hätte all das auch das noch nicht gereicht.

Endlich sei es gesagt: Das „Merkel-Deltoid“ (S. 1) ist der Grund. Die Formulierung „Merkel-Raute“ kannte ich natürlich. Als ich sie zum ersten Mal las, legte ich irritiert meine Hände flach auf den Tisch und formte mit Daumen und Zeigefinger eine Figur, die man leicht zum Viereck abstrahieren kann – und das Viereck war bei mir (wie wohl bei allen „anatomischen Standardmenschen“) ein Drachen. Also, so dachte ich, ist das eben wieder einmal eine umgangssprachliche Benennung, die mit der mathematischen Begriffsbildung nicht zu vereinbaren ist. Das gilt schließlich z. B. auch für fast alle Stückchen „Würfelzucker“, denn wer würde schon „Quadratische-Säulen-Zucker“ sagen wollen.

Aber nun kommt einerseits der Text und andererseits das Bild zur „Merkel-Raute“ – und da passt einiges nicht mehr zusammen. „Geeignete Neigung der Handflächen erzeugt den gewünschten Rombus“ steht da, und dass es „eben nur auf die ‚richtige' Perspektive“ ankäme.

Je nun – eigentlich müsste man das Sehen und das Fotografieren mit Hilfe einer Zentralprojektion „mathematisieren“. Das erkennt jeder Fotograf, der mit nach oben geneigter Kamera z. B. von der Domplatte in Köln den Dom fotografiert: Die Bilder der Türme neigen sich aufeinander zu – es gibt „stürzende Linien“. Die erwartete Parallelentreue ist bei den über 150 m hohen Türmen verletzt. Man vergleiche z. B. www.wackerart.de/Foto/koeln/Dom-Cologne.html. Warum aber erwarten wir die Parallelentreue? Aus Erfahrung. Ist nämlich das abzubildende Objekt klein gegen die Aufnahmedistanz, so genügt zur mathematischen Beschreibung die Parallelprojektion. Das gilt auch beim Kölner Dom, wenn man im gleichen Foto das oberste (im Raum vertikalen) Fenster in einem Turm anschaut: Das Foto zeigt (nahezu, die Abweichung ist auch mit einem Geodreieck nicht erkennbar) ein Parallelogramm.

Mit der Idee der Parallelentreue zeichnen wir auch (insbesondre im karierten Mathe-Heft) leicht ein (Schräg-)Bild eines Würfels, der auf dem Tisch vor uns liegt. Dass es sich dabei um eine schiefe Parallelprojektion handelt, muss man zunächst nicht wissen. Das (ebene) Bild wird (zumindest in unserem Kulturkreis) problemlos, also auch von Kindern, als (räumlicher) Würfel interpretiert. Die Kinder sagen: „Das ist ein Würfel" (und nicht „Das ist das Bild eines Würfels" – wie es der am 14. 1. 2014 verstorbene Z. P. Dienes einst forderte – auch ein Beispiel für die auf S. 4 erwähnte „Neue Mathematik"). Es ist allgemeiner Sprachgebrauch, bei Bildern den Gegenstand als Namensgeber zu nehmen: „Das ist der Kölner Dom" und nicht „Das ist ein Foto des Kölner Doms" , „Das ist die Merkel-Raute" und nicht „Das ist ein Foto der Merkel-Raute". Dass das erwähnte „Würfel-Schrägbild", das jedes Grundschulkind „erkennt", auch das Schrägbild eines ganz anderen Körpers (nicht einer quadratischen Säule, nein, viel komplizierter) sein kann, weil die Parallelprojektion nicht bijektiv ist, sei nur am Rande erwähnt – es ist hier ohne Bedeutung, soll aber schon darauf hinweisen, dass „offensichtliche" Deutungen oft falsch sind.

Nur bei einer Kugel wäre das Abbilden mit dem Schrägriss, einem Schrägbild als Ergebnis, fatal. Das Bild einer Kugel wäre eine Ellipse, und das widerspricht wieder eklatant unserer Erwartung. Wir erwarten einen Kreis als Bild einer Kugel. Auch das kann man haben: Man muss eben eine senkrechte Parallelprojektion (Normalprojektion) nehmen. Auf jeden Fall ist die (senkrechte und schiefe) Parallelprojektion (im Allgemeinen, die Ausnahme wird gleich erwähnt) parallelentreu: Das Bild zueinander paralleler Graden sind zueinander parallele Geraden.

Bei einer schiefen Parallelprojektion werden Längen von Strecken vergrößert oder verkleinert. Für Ersteres soll hier das Diktum „Zwerge müssen bis zum Abend warten, um lange Schatten zu werfen" als Beleg gelten, für Letzteres, dass der Grundriss (ein Normalriss) eines auf einer horizontalen Ebene stehenden Würfels „nur" ein Quadrat ist – die Länge der Höhen-Kanten ist auf 0 geschrumpft.

Bei einer Normalprojektion werden alle Längen mit dem Kosinus des Neigungswinkels multipliziert. Misst der Neigungswinkel 0°, bleibt die Länge unverändert, sonst wird sie kleiner. Bei 90° wird die Länge 0.

In beiden Fällen gilt aber: Lässt man den uninteressanten Fall der projizierenden Richtung (die, bei der die Länge 0 wird – und das ist der Fall, in dem man auch nicht mehr von „Parallelentreue" sprechen kann) weg, dann werden Längen von Strecken auf einer Geraden immer mit demselben Faktor multipliziert. Das bedeutet, dass das Teilverhältnis invariant ist. Und jetzt sind wir wieder bei dem Merkel-Deltoid. Es kann, egal, aus welcher Richtung betrachtet, aber normale anatomische Verhältnisse (Daumen kürzer als Zeigefinger, damit verschieden lange Diagonalen, nur eine davon wird von der anderen halbiert) vorausgesetzt, niemals eine Raute (jede Diagonale halbiert die andere) werden.

Diese Argumentation „passt" in ein (nicht „das") „Haus der Vierecke" (vgl. S. 33), das die Vierecks-Symmetrien als wichtiges Ordnungskriterium nimmt. Ein anderes, das die Parallelität von Seiten stärker betont, könnte scheinbar auf einen Schlag zum Ziel führen: Eine (echtes) Deltoid hat keine zueinander parallele Gegenseiten. Wo sollten also die zueinander parallelen Gegenseiten der Raute herkommen. Nur wird hier, überlegt man etwas genauer, nicht (nur) die Parallelentreue der Parallelprojektion für die Argumentation gebraucht, sonder (zusätzlich) die Bijektivität der Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere (im Nicht-Ausartungsfall, das Bild ist nicht nur eine Strecke) – ein hier zu weiters Feld. Aber da ist auf S. 1 doch auch das Wikipedia-Bild, und das sieht nun wirklich aus wie eine Raute – das IST eine Raute. Wie geht das denn dann?

Recht einfach: Das eingangs geschilderte Experiment, beide Hände flach auf den Tisch zu legen, hat das Problem nicht adäquat nachgebildet. Frau Merkel hält die Hände ja im Raum. Wenn man das mit den Händen nachmacht und die Hände von der Ausgangslage (beide in einer Ebene) nach und nach in die Lage von Dürers „betenden Händen" (aus der Sicht der/des Betenden – notfalls bei https://de.wikipedia.org/wiki/Betende_Hände nachschauen) bewegt, hat man verschiedene Zwischenlagen. Man kann die Daumen abgespreizt lassen oder – wie bei Dürer – dann fast an die Zeigefinger anlegen. In allen Fällen (außer den uninteressanten Rand-Fällen, der eingangs beschriebenen Ausgangslage und der Endlage, in der die Handflächen aufeinander liegen) liegt kein ebenes, sondern ein räumliches Viereck vor. Dann gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Diagonalen – sie liegen auf zueinander windschiefen Geraden. Damit gibt es keine zwei festgelegte Teilstrecken auf der zunächst nicht halbierten Diagonalen der Ausgangslage, die bei der Parallelprojektion mit dem gleichen Faktor „gestreckt" oder „gestaucht" werden müssten. Die obige Argumentation „passt" also nicht zum realen Problem. Und damit kann als Bild (!) der Hände von Frau Merkel eine Raute entstehen. Die Finger bilden aber ein räumliches Viereck – weder eine Raute noch ein Deltoid.

Oder doch etwas anderes? Silke Burmester (nach SPIEGEL ONLINE – 15. 9. 2013) schreibt:

> Unsere Kanzlerin ist Naturwissenschaftlerin, nicht Ausdruckstänzerin – also pflegt sie ihre Finger zur „Merkel-Raute" aneinanderzulegen.

> Die Wahlkämpfer der CDU erklären das zu ihrem Markenzeichen. Aber womöglich verbirgt sich hinter dem ominösen Trapez etwas ganz anderes.

Aber das mit dem Trapez wäre eine neue Geschichte, und sie wäre wohl weder mathematisch noch anatomisch zu retten.

Und nicht vergessen: Ganz am Anfang des Briefes stand der Dank für die Arbeit mit den Mitteilungen!

Viele Grüße
Kurt Peter Müller

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

▪ ***Vorstand.*** *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Rudolf vom Hofe, Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Universitätsstraße 25, 33615 Bielefeld. Tel. 0931 . 521106-5063, vomhofe@math.uni-bielefeld.de
▪ *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Silke Ruwisch, Universität Lüneburg, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Scharnhorststraße 1 21335 Lüneburg. Tel. 04131 . 677-1731, ruwisch@leuphana.de
▪ *Kassenführer:* Prof. Dr. Christine Bescherer, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Institut für Mathematik und Informatik, Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg. Tel. 07141 . 140-385, Fax. 07141 . 140-435, bescherer@ph-ludwigsburg.de
▪ *Schriftführer:* Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt, Österreich. Tel. +43 (0)463 . 2700-6116, Fax. +43 (0)463 . 2700-99 6116, andreas.vohns@aau.at
▪ *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
▪ *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum
▪ Verleger: GDM ▪ Herausgeber: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns (Anschrift s. o.) ▪ Gestaltung und Satz: Christoph Eyrich, Berlin ▪ Umschlagentwurf: Assoz. Prof. Dr. Andreas Vohns ▪ Druck: Oktoberdruck AG, Berlin
Der Bezugspreis der GDM-*Mitteilungen* ist im Mitgliedsbeitrag der GDM enthalten.