

## Hamburger Mathematikabitur im Kreuzfeuer der Kritik

Gabriele Kaiser und Andreas Busse

Das Hamburger Mathematikabitur war in den letzten Monaten im Kreuzfeuer der Kritik, insbesondere auch auf politischer Ebene. So haben einige Abgeordnete der Hamburger Bürgerschaft unter Bezug auf die steigende Abiturientenquote in Hamburg am 27. 11. 2013 eine Große Anfrage an den Hamburger Senat zum Niveau des Hamburger Abiturs gestellt, in der sie folgendes fragen:

Vor diesem Hintergrund muss man sich die Frage stellen, ob ein derartiger Anstieg der Abiturientenquote, wie er in Hamburg und anderen Großstädten zu beobachten ist, nur über eine Veränderung der Leistungsansprüche erklärbar ist. Ist das Niveau des Abiturs in Hamburg in den vergangenen Jahren gesunken? (Drucksache 20/10116 der Bürgerschaft der Freien und Hansestadt Hamburg – 20. Wahlperiode)

Konkret wird unter Bezug auf eine frühere Kleine Bürgerschaftsanfrage an den Senat die Frage nach der Anzahl der Abituraufgaben in den Fächern Mathematik und Biologie gestellt und gefragt, worin die angeblich höhere Modellierungs- und Problemlösekompetenz in den Abituraufgaben seit 2008 bestehe. Die anfragenden Abgeordneten beziehen sich in ihrer Anfrage auf Diskussionen bzgl. der Hamburger Studie „Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern“ (KESS-Studie), in denen die Leistungen der Hamburger G8- und G9-Abiturientinnen und -Abiturienten verglichen wurden. Diese Ergebnisse wurden von H. P. Klein in Zweifel gezogen und es wird in Zusammenhang von einer Untersuchung der Hamburger Zentralabituraufgaben von 2005 bis 2012 ein Niveauverlust im Hamburger Abitur festgestellt (FAZ, 11. Oktober 2013).

Diese Untersuchung ist nun in den Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Band 22/2014, Heft 2, 115–121) erschienen, in einem Artikel von Th. Jahnke, H.P. Klein, W. Kühnel, Th. Sonar und M. Spindler zu „Die Hamburger Abituraufgaben im Fach Mathematik – Entwicklung von 2005 bis 2013“.<sup>1</sup> Bereits lange vor seinem Erscheinen wurde der Artikel intensiv in der Presse diskutiert, mit Schlagzeilen wie „Mathe-Abitur: Niveau in Hamburg sinkt deutlich“ (Hamburger Abendblatt vom 31. 3. 2014) oder „Klarer Abstieg.

Wissenschaftler haben ermittelt: Abiturklausuren werden vielerorts immer leichter – für die richtige Lösung reicht es, den Aufgabentext aufmerksam zu lesen“ (Spiegel vom 31. 3. 2014).

Es ist unstrittig, dass sich die Abituraufgaben in Hamburg und auch in anderen Bundesländern in den letzten Jahren verändert haben, aber viele der in dem Artikel getroffenen Aussagen sind nicht zutreffend. Wir wollen dies im Folgenden zunächst im Detail darstellen, bevor wir uns grundlegend mit dem von den Autoren des Beitrags vertretenen Bild von Mathematik und Mathematikunterricht auseinandersetzen.

Zunächst ist die Berechtigung der bereits im Titel aufgestellten Behauptung „Entwicklung von 2005 bis 2013“ in Frage zu stellen, analysieren Jahnke et al. doch nur Aufgaben aus den Jahren 2005, 2011 und 2013, und aus den Prüfungen in diesen Jahren treffen sie nochmals eine Auswahl. Eine Begründung für diese Auswahl wird von den Autoren nicht gegeben, obwohl alle Hamburger Abituraufgaben im Internet frei verfügbar sind. Es bleibt vollständig offen, inwiefern die getroffene Auswahl repräsentativ für die zeitliche Entwicklung der Aufgabenqualität ist und nach welchen Kriterien diese Auswahl getroffen wurde. Hinweise darauf, dass aus der willkürlich anmutenden Auswahl keine wohlbegründete Aussage über eine zeitliche Entwicklung getroffen werden kann, wie der Titel suggeriert, finden sich an keiner Stelle im Beitrag.

Die Autoren behaupten dann weiter, dass in den Jahren 2005, 2011 und 2013 im Hamburger Abitur im Wesentlichen vier Aufgabentypen vorkommen:

Typ 1: Minimax-Aufgaben mit Extrema und Steigung einer gegebenen Funktion, auch Flächenberechnungen durch Integrale. [...] Typ 2: Aufgaben zur analytischen Geometrie von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum. [...] Typ 3: Aufgaben zu Übergangsmatrizen. Typ 4: Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen. (S. 116)

Es ist mitnichten ungewöhnlich, dass in drei Abiturjahrgängen Schwerpunkte gesetzt werden, noch dazu in dieser Allgemeinheit. Die Autoren

<sup>1</sup> Da zum Zeitpunkt der Abfassung des Artikels die DVM Mitteilungen noch nicht erschienen sind, zitieren wir nach den uns vorliegenden Druckfahnen, die von den Autoren zirkuliert wurden.

fahren fort, dass sich die Analysisaufgaben „typischerweise mit betriebswirtschaftlichen Fragen“ befassen. Diese Aussage ist falsch. So werden in Hamburg in allen Fächern zu Beginn der zweijährigen Studienstufe zentrale Schwerpunktsetzungen vorgenommen, im untersuchten Jahr 2011 lagen diese u. a. im Bereich der wirtschaftlichen Anwendungen, im Jahr 2013 war dies aber nicht mehr der Fall. Wie Jahnke et al. zu dieser Behauptung kommen, ist nicht nachvollziehbar. Durch eine gründliche Analyse aller fraglichen Aufgaben wäre diese falsche Aussage nicht zustande gekommen.

Die Autoren stellen dann fest:

Es ist mit Sicherheit anzunehmen, dass diese o. g. vier Typen von Aufgaben im Unterricht reichlich geübt werden, weil sie offenbar von Jahr zu Jahr als Typen bestehen bleiben. (S. 116)

Es bleibt völlig unklar, wie die Autoren zu dieser Behauptung kommen, zumal hier ganz geschickt plötzlich eine zeitliche Konstanz der Aufgaben behauptet wird, die aus den drei Jahrgängen nun wirklich nicht zu schließen ist. Jahnke et al. fahren fort:

Normalerweise geschieht das von Januar bis März des Prüfungsjahres. Bei G8 wird so die gymnasiale Oberstufe auf die 11. Klasse und dann die Monate August bis Dezember der 12. Klasse reduziert, weil direkt danach die Vorbereitung auf das die schriftlichen Aufgaben im Abitur beginnt. (S. 116)

Es stellt sich die Frage, wie die Aufgabenanalysen der Autoren mit G8 und mit dem Niveau der Hamburger Abituraufgaben zusammenhängen, und es drängt sich der Verdacht auf, dass diese Diskussion zum angeblichen Niveauverfall des Hamburger Abiturs in eine größere Diskussion eingebettet werden soll. Unabhängig davon stimmen diese Aussagen nicht, da bis 2013 das Abitur in Hamburg jeweils im Februar stattgefunden hat. Die Autoren stellen aber weitere Mutmaßungen und Behauptungen auf, die in keiner Weise wissenschaftlich gedeckt sind. So schreiben sie weiter:

Zudem können die Lehrer zwei aus sechs (2005: drei aus sieben) Aufgaben für ihre Prüflinge auswählen. Vermutlich ist von einer intensiven Vorbereitung und ggf. Spezialisierung auf ganz bestimmte Aufgabentypen auszugehen. Wie man hört, sind Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht beliebt. Es soll routinemäßig vorkommen, dass Lehrer die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur kurz streifen und durchblicken lassen, dass sie dieses Thema im Abitur nicht auswählen werden. (S. 116)

Wir fragen uns, auf welcher empirischen Basis Jahnke et al. diese Behauptungen aufstellen. Sicherlich gibt es überall auf der Welt Lehrerinnen und Lehrer, die für die Prüfung und nur für die Prüfung üben, nur: Ist dies typisch für Hamburg und hat sich dieses in den letzten Jahren geändert und woher weiß man dieses aus Aufgabenanalysen? Die Behauptung, dass das Sachgebiet Stochastik nur gestreift würde, ist übrigens aus ganz anderen Gründen zum Teil zutreffend: In den betrachteten Jahren 2005, 2011 und 2013 war entweder das Sachgebiet Stochastik oder das Sachgebiet Lineare Algebra/Analytische Geometrie je nach Unterrichtsgang nicht Gegenstand der schriftlichen Prüfung. Das jeweils fehlende Sachgebiet hatte seinen Platz in der mündlichen Prüfung und war damit durchaus in den Prüfungen vertreten.

Als weiteren zentralen Indikator dafür, dass die Aufgaben leichter geworden seien, verweisen Jahnke et al. beim Vergleich der Kurse auf grundlegendem Anforderungsniveau mit denen auf erhöhtem Anforderungsniveau auf die Tatsache, dass zum Teil identische Aufgabenteile verwendet werden. Diese Kritik ist verwunderlich: Selbstverständlich beinhalten erhöhte Anforderungen auch grundlegende Anforderungen. Gewisse Routinetätigkeiten werden von Abiturientinnen und Abiturienten beider Anforderungsniveaus erwartet. In der Regel ist es aber im Hamburger Abitur so, dass bei identischen Aufgabenteilen in einfacheren Fällen die Prüflinge des erhöhten Anforderungsniveaus weniger Punkte als die des grundlegenden Anforderungsniveaus erzielen können; Erste müssen ihre Punkte schwerpunktmäßig bei den komplexeren Aufgabenteilen erzielen. Außerdem gibt es eine Reihe weiterer Merkmale, mit denen sich die Aufgaben des erhöhten Anforderungsniveaus von denen des grundlegenden abheben: zusätzliche mathematische Inhalte, mehr Teilaufgaben oder Variation in zentralen Details (die ja bekanntlich einen sehr großen Effekt auf den Schwierigkeitsgrad haben können). Grundsätzlich ist die Verwendung einer identischen Ausgangssituation mit zum Teil gleichen, zum Teil verschiedenen Teilaufgaben ein wirksames und anerkanntes Instrument, um die Unterschiede in den Anforderungen im Sinne einer Transparenz für alle Beteiligten besonders deutlich hervortreten zu lassen. In der didaktischen Diskussion wird seit Jahrzehnten gefordert, dass Grundkurse nicht „ausgedünnte“ Leistungskurse sein sollen, sondern dass Leistungskurse durch Anreicherungen aus Grundkursen entstehen sollen (W. Blum und G. Törner (1983). Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 221).

Die oben aufgelisteten Schwerpunktsetzungen und Praktiken beim Hamburger Abitur, die die

Fehler der Autoren deutlich machen, sind durch Rückgriff auf öffentlich verfügbare Informationen leicht erhältlich, u. a. in der bereits erwähnten öffentlich zugänglichen Antwort auf eine Große Anfrage an den Hamburgischen Senat „Wie steht es um das Niveau des Hamburger Abiturs“ vom 27. 11. 2013 (Bürgerschaftsdrucksache 20/10116).

Unsere zentrale Kritik an den Ausführungen der Autoren des Beitrags bezieht sich jedoch auf grundlegendere Fragen zum Bild von Mathematik und vom Mathematikunterricht. Man muss sich die Frage stellen, mit welcher Legitimation das Fach Mathematik flächendeckend für alle Abiturienten und Abiturientinnen unterrichtet werden soll. Diese Legitimation liegt auch – nicht nur – in dem Beitrag, den die Inhalte des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung liefern. Die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts ist bereits 1975 von Heinrich Winter in seinem Beitrag „Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht?“ (in Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7(3), 106-116) vertreten worden. Die von ihm formulierten drei Grunderfahrungen, die der Mathematikunterricht allen Schülerinnen und Schülern ermöglichen soll, wurden in die Bildungsstandards Mathematik für alle Schulabschlüsse aufgenommen. Das Verstehen der Art und Weise, wie die Anwendung der Mathematik in zunehmendem Maße die gesellschaftliche Realität formt, ist dabei ein zentraler Bestandteil. Dabei geht es weniger darum, eine Virtuosität im Umgang mit Algorithmen zu erlangen, sondern vielmehr um ein vertieftes Verständnis mathematischer gestützter Argumentationen. Die Einsicht, dass bei Anwendung mathematischer Theorie auf reale Probleme notwendigerweise Vereinfachungen vorzunehmen sind und mathematisch gewonnene Resultate daher immer einen Interpretations- und Beurteilungsschritt nach sich ziehen müssen, um die Tragweite eines Ergebnisses abschätzen zu können, ist eine zentrale Komponente einer Erziehung zur Mündigkeit, wie dies in allen allgemeinbildenden Schulen angestrebt wird. Diese Kompetenzen erlangt man sicherlich nicht mit einem auf mathematische Theorie reduzierten Unterricht. Ein Realitätsbezüge und Modellierungen einbeziehender Unterricht, wie er in Hamburg seit vielen Jahren praktiziert wird, ist in diesem Sinne angemessen und zielführend.

Dabei hat in den letzten zehn Jahren – nicht nur – in Hamburg eine Akzentverschiebung in diesem Sinne sowohl im Unterricht als auch in den Prüfungsaufgaben (auch in den Prüfungen der Sekundarstufe I) stattgefunden. Sind die Anforderungen deshalb gesunken? Jahnke et al. behaupten das und versuchen dies, anhand der erwähnten Aufgabenanalysen zu belegen. Dabei bezieht sich ei-

ne mehrfach in den Ausführungen genannte Kritik auf die kontextualisierte Darstellung der Situation. Jahnke et al. schreiben:

Statt mit mathematischen Problemen müssen die Abiturienten mit Formulierungsproblemen kämpfen. Sie müssen umfangreiche, relativ schwer verständliche und nicht immer eindeutige Texte in Mathematik umsetzen, die dann selbst gar nicht mehr schwierig ist und die von Jahr zu Jahr weiter vereinfacht wird. (S. 120)

Diese Argumentation verkennt vollständig die Komplexität der kognitiven Prozesse, die zum Verstehen der Situation und zum Heranziehen der passenden mathematischen Theorie notwendig sind. Bei den aktuellen Hamburger Abituraufgaben muss man nicht nur wissen, wie man ein mathematisches Verfahren durchführt, sondern es wird vom Prüfling auch verlangt, aus dem zur Verfügung stehenden mathematischen „Werkzeugkasten“ ein zur realen Situation passendes Konzept auszuwählen. Das setzt eine Analyse der textlich und bildlich geschilderten Situation sowie tragfähige Grundvorstellungen verschiedener mathematischer Konzepte voraus. Nur so kann ein zur Situation passender Begriff oder ein adäquates Verfahren ausgewählt werden. Die Interpretation und Beurteilung des mathematisch gewonnenen Ergebnisses erfordert weitere vernetzte kognitive Aktivitäten. Diese Übersetzungsprozesse sind alles andere als trivial. Es ist sicherlich richtig, dass weniger mathematische Theorie zur Bewältigung der Aufgaben notwendig ist. Jedoch haben sich die Anforderungen in Richtung der Übersetzungs- und Interpretationsprozesse verlagert, die ein vernetztes Wissen erfordern.

Diese Aussage soll an zwei Beispielen illustriert werden, zunächst an einem paradigmatischen Beispiel aus der Hamburger Studienstufe: Mithilfe einer Modellgleichung zum Fischwachstum in einem Gewässer soll die Frage beantwortet werden, zu welchem Zeitpunkt man im Sinne einer Nachhaltigkeit fischen sollte. Hier sind verschiedene kognitive Schritte vonnöten. Zunächst muss der Aspekt der Nachhaltigkeit operationalisiert werden. Dies könnte etwa dadurch geschehen, dass man der Zeitpunkt der stärksten Reproduktion ermittelt. Diese umformulierte Frage führt zu der Überlegung, dass eine maximale Reproduktionsrate dem maximalen Wert der Ableitungsfunktion entspricht. Die Maximalstelle der Ableitung ermittelt man üblicherweise über die Nullstelle der zweiten Ableitung. Die Interpretation und Beurteilung des Ergebnisses führt auf der Ebene des realen Problems zu einer Antwort auf die ursprüngliche Frage nach dem günstigen Zeitpunkt des Fischens, die unter Berücksichtigung expliziter und

impliziter Annahmen entsprechend vorsichtig formuliert werden sollte.

Das zweite Beispiel ist dem Hamburger Abitur 2012 (grundlegendes Niveau) entnommen. Es geht um die Produktion eines teuren und nur bedingt lagerfähigen Impfstoffes, bei dem sichergestellt werden soll, dass er stets in ausreichender Menge vorhanden ist. Ein funktionaler Zusammenhang zwischen Zeit und Absatzmenge wird als Modell vorgegeben. Eine der sechs Teilaufgaben bezieht sich im Kontext der Kostenreduktion auf die Frage des Zeitpunkts der stärksten Nachfrageabnahme. Hier müssen die Schülerinnen und Schüler Übersetzungsprozesse anstellen, die den Aspekt der stärksten Abnahme mit dem Konzept von erster und zweiter Ableitung in Verbindung setzen. Eine weitere Fragestellung bezieht sich auf die Erlösprognose bei einem Verkauf der Produktionsrechte an einen anderen Hersteller. Hier sind mehrere verschiedene kognitive Schritte vonnöten. Zunächst muss eine Analyse der Fragestellung stattfinden, um die verschiedenen zentralen Aspekte zu identifizieren wie produzierte Menge, Verkaufszeitpunkt, Erlös. Dann müssen angemessene mathematische Konzepte ausgewählt werden (in diesem Beispiel Stammfunktion und proportionaler Zusammenhang), die dann situationsadäquat anzuwenden sind. Das erzielte mathemati-

sche Ergebnis ist in der Sprache des Sachkontextes zu interpretieren.

Jahnke et al. bezeichnen diese Art von Aufgaben als „Minimax-Aufgaben“, die sich in der Bildung der ersten und zweiten Ableitung sowie in Flächenberechnungen durch Integrationen erschöpfen. Damit wird das kognitive Anspruchsniveau solcher Aufgaben völlig unterschätzt.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass die in den letzten Jahren im Hamburger Abitur gestellten Aufgaben eine deutlich breitere Palette von Anforderungen stellen, die über das hinausgeht, was in den frühen Jahren üblich war. Die Aufgaben sind dadurch nicht nur komplexer, sondern in der Regel auch länger geworden. Damit wird das Argument, die reduzierte Anzahl von Aufgaben hätte zu einer Verkürzung und Verflachung geführt, ad absurdum geführt. Wir halten es für unabdingbar, dass Abiturientinnen und Abiturienten die Schule mit einer Sichtweise von Mathematik und mit mathematischen Kompetenzen verlassen, die sie in einer immer komplexeren Welt bestehen lassen.

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Dr. Andreas Busse, Universität Hamburg, Fakultät für Erziehungswissenschaft, Von-Melle-Park 8, 20146 Hamburg, Email: [gabriele.kaiser@uni-hamburg.de](mailto:gabriele.kaiser@uni-hamburg.de)  
[andreas.busse@uni-hamburg.de](mailto:andreas.busse@uni-hamburg.de)